Oleg Vorontsov, PhD, Associate Professor,
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University,
Faculty of Architecture,
E - mail: uaag.poltava2012@gmail.com

Larisa Tulupova, PhD, Associate Professor,
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University,
Educational-scientific Institute of
Informational Technologies and Mechanotronics,
E - mail: uaag.poltava2012@gmail.com

Irina Vorontsova , PhD
Poltava Petroleum Geological College of
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University
uaag.poltava2012@gmail.com

PARABOLIC DISCRETE INTERPOLATION BY SUPERPOSITIONS OF ONE-DIMENSIONAL POINT SETS

Abstract: In this paper, we study an influence of superposition coefficients to a discrete formation of one-dimensional geometric images, chances of solving discrete interpolation problems, using numerical sequences of parabolic curves without compiling and solving complicated systems of linear equations. Thus, we expand opportunities of using static-geometric discrete geometric modeling.

Keywords: discrete geometric modeling, finite difference method, static-geometric method, recursive formulas of numerical sequences, geometric apparatus of superpositions.

***Олег Воронцов**, Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, кандидат технічних наук, архітектурний факультет*

E - mail: uaag.poltava2012@gmail.com

Лариса Тулупова, Полтавський національний технічний університет імені
Юрія Кондратюка, канд. фіз.-мат. наук,
навчально-науковий інститут
інформаційних технологій і механотроніки
E - mail: uaag.poltava2012@gmail.com

Ірина Воронцова, Полтавський коледж нафти і газу Полтавського
національного технічного університету імені
Юрія Кондратюка, канд. пед. наук
E - mail: uaag.poltava2012@gmail.com

ПАРАБОЛІЧНА ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ОДНОВИМІРНИХ ТОЧКОВИХ МНОЖИН

Анотація: У даній роботі проведено дослідження впливу коефіцієнтів суперпозиції на дискретне формування одновимірних геометричних образів, можливостей розв'язувати задачі дискретної інтерполяції числовими послідовностями параболічних кривих без складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь і, тим самим, розширення можливостей статико-геометричного методу дискретного геометричного моделювання.

Ключові слова: дискретне геометричне моделювання, метод скінчених різниць, статико-геометричний метод, рекурентні формули числових послідовностей, геометричний апарат суперпозицій.

Вступ. В сучасних умовах при проектуванні споруд, мереж, виробів значне місце займає етап побудови та аналізу геометричних моделей об'єктів, процесів та певних явищ. Важливою проблемою є створення нових способів конструювання ліній і поверхонь, що у повній мірі відповідають меті автоматизованого проектування і відтворення. Розвиток і удосконалення математичних моделей у процесі конструювання значно сприятиме підвищенню продуктивності та ефективності праці на етапі проектування і наукових досліджень.

Деякі властивості, які має дискретна модель лінії, можуть бути адаптовані до моделі поверхні, що формується за тими ж законами, якщо цю лінію розглядати як складову каркаса поверхні. Властивості дискретної моделі поверхні можуть бути одержані узагальненням відповідних властивостей моделі лінії.

Провисаюча нитка, що рівномірно навантажена по довжині, набуває форми ланцюгової лінії, та сама нитка при рівномірному навантаженні вздовж горизонтальної вісі набуває вже форми параболи. При зміні типу розподілу навантаження нитки з’являється можливість управління її формою, що відповідає одному з принципів статико-геометричного способу конструювання кривих ліній і обводів [1].

Аналіз останніх джерел досліджень і публікацій. В основу математичного апарату статико-геометричного методу [1] покладено розв’язок громіздких систем лінійних рівнянь, що ускладнює процес комп’ютерної реалізації розрахунків. Питанням розширення формоутворюючих можливостей статико-геометричного методу за допомогою математичного апарату числових послідовностей, що дозволяє, зокрема, уникнути складання систем лінійних рівнянь при формуванні дискретних образів, присвячена робота [2].

У роботах [3-8] авторів даної статті показано підходи до визначення дискретних аналогів певних функціональних залежностей на основі геометричного апарату суперпозицій одновимірних точкових множин, що дозволяє формувати дискретні образи без складання і розв’язання громіздких систем рівнянь. Управління формою дискретно представлених кривих здійснюється варіюванням величинами коефіцієнтів суперпозиції.

Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми. Чисельний метод скінченних різниць, статико-геометричний метод, математичний апарат числових послідовностей мають свої переваги і недоліки відносно розв'язання конкретних практичних завдань. Тому їх дослідження, збагачення новими ефективними алгоритмами, вивчення можливості їх компіляції, а на цій основі розширення множини вихідних даних є актуальними. Застосування геометричного апарату суперпозицій у поєднанні з вище переліченими методами дозволяє істотно підвищити ефективність і розширити можливості процесу дискретного моделювання геометричних образів.

Постановка завдання. Метою даної статті є вивчення впливу коефіцієнтів суперпозиції на дискретне формування одновимірних геометричних образів суперпозиціями, можливостей розв'язувати задачі дискретної інтерполяції числовими послідовностями параболічних кривих без складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь і, тим самим, розширення можливостей статико-геометричного методу дискретного геометричного моделювання.

Основний матеріал і результати. Метод скінчених різниць дозволяє аналітично описувати дискретні геометричні образи. Для дискретно представленої кривої лінії (рис.1) точками з певним кроком h уздовж осі *Ох*: $x_{i+1} = x_i + h$, права скінчена різниця першого порядку має вигляд: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Права скінчена різниця другого порядку утворюється як різниця між двома скінченими різницями першого порядку: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$. Відповідно центральна різниця другого поряду має вигляд: $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}$.

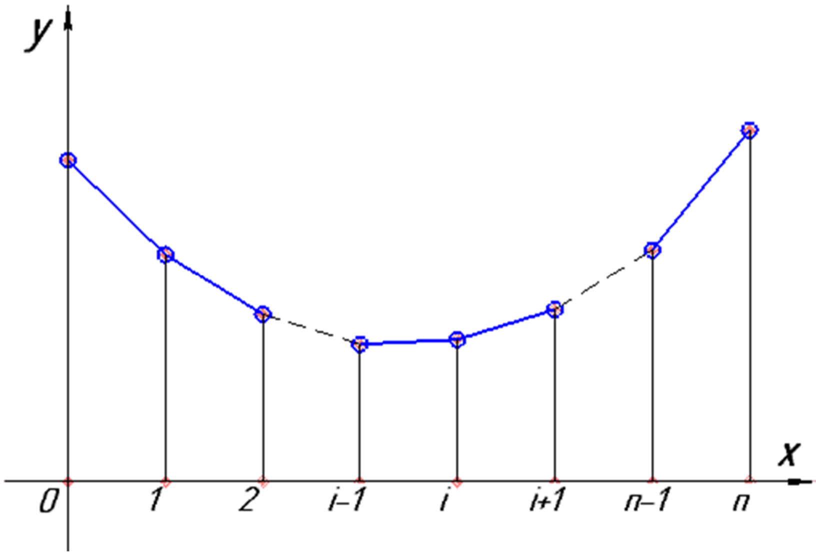
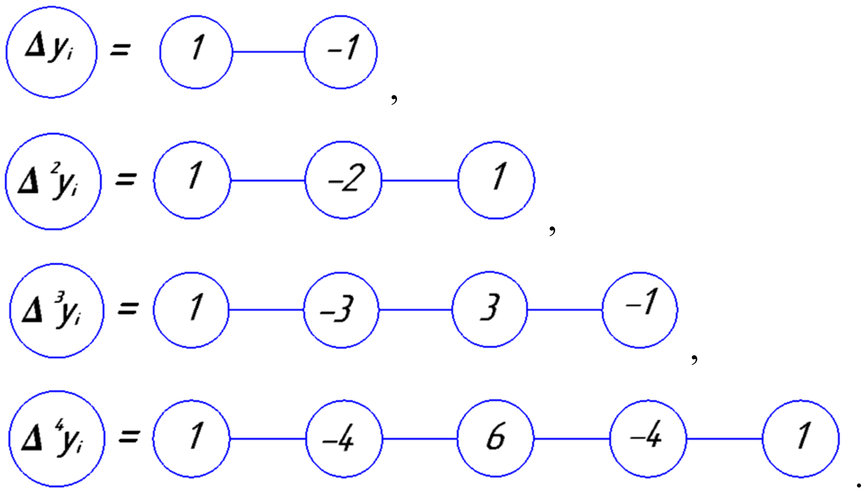


Рисунок 1. Дискретно представлена крива лінія.

Для наочності скінчені різниці часто представляють у вигляді «обчислювальних шаблонів» або «різницевих операторів». Такі обчислювальні шаблони для центральних різниць мають вигляд:



При дискретному формуванні кривої лінії методом статичної рівноваги [1], розглядають фізичну модель розтягнутої нитки (рис. 2), на вузли якої діє множина зосереджених зусиль P_i з рівномірним кроком уздовж осі Ox .

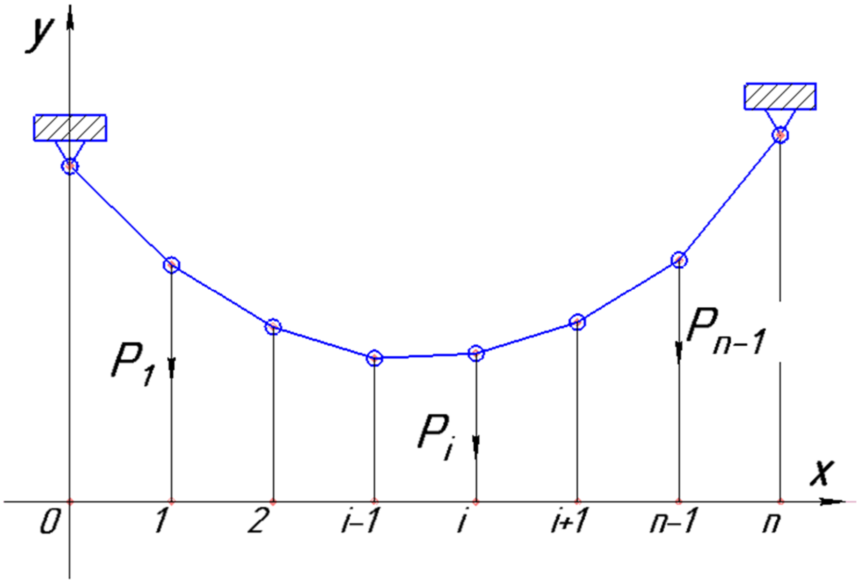


Рисунок 2. Фізична модель розтягнутої нитки.

Відомо, що арка окреслена по параболі другого порядку найбільш стійка при рівномірно розподіленому вертикальному навантаженні вздовж горизонтальної осі. Квадратна парабола з достатньої для практики точністю повторює форму закріпленої двома кінцями нитки, що провисає під дією власної ваги. Ці властивості параболи другого порядку можна наочно прослідити, задаючи її дискретним рядом точок із рівномірним кроком вздовж осі Ox.

Система рівнянь (1, 2) рівноваги вузлів із заданими крайовими умовами (координатами закріплених вузлів) статико-геометричного методу визначає форму ламаної, яка є дискретною моделлю кривої при заданому зовнішньому навантаженні.

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} = 0\ ; \tag{1}$$

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP = 0\ , \tag{2}$$

i - номер вузла; x_i, y_i – координати i-го вузла; P – зовнішнє зусилля; K – коефіцієнт пропорційності.

Рівняння (1) системи відбиває рівність інтервалів між вузловими точками уздовж осі Ox. Рівняння (2) дозволяє за відомою величиною KP визначити ординату шуканого вузла, або, навпаки, за заданою ординатою визначити, яким повинно бути навантаження KP, щоб вузол зайняв задане положення.

При рівномірному кроці вузлів уздовж осі Ox досить скласти для кожного невідомого вузла тільки друге рівняння системи.

Систему рівнянь (2) складають для всіх проміжних вузлів нитки. При відомих величинах KP число рівнянь відповідає числу невідомих ординат.

Дискретно представлені на рисунках 1, 2, 3 лінії можна розглядати як моделі нерозтяжної натягнутої нитки, на яку з рівномірним кроком $h = 1$ діють зосереджені зусилля P. Варіювання функції $P = f(i)$ розподілу зовнішнього навантаження між вузлами дозволяє дискретно моделювати криві різної форми і вирішувати завдання дискретної інтерполяції на площині.

Терміни «величина або функція розподілу зовнішнього формоутворюючого навантаження» використовують, якщо геометричний образ формується статико-геометричним методом, оскільки зосереджені зусилля у вузлових точках передбачають наявність урівноважуючих зусиль у ланках ламаної. Із [1] відомо, що кожні три суміжні вузли розтягнутої нитки належать прямій лінії, якщо до середнього з них не прикладене зовнішнє навантаження (рис. 3).

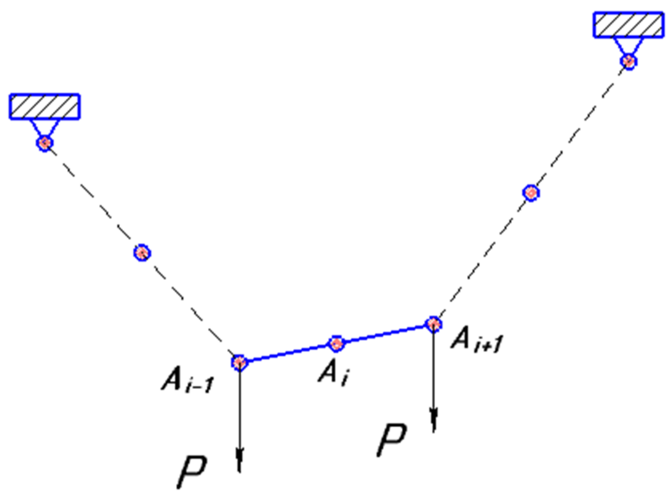


Рисунок 3. Дискретна модель розтягнутої нитки
у формі прямої лінії.

Чотири суміжних вузли дискретної моделі розтягнутої нитки, з яких до двох середніх прикладені однакові вертикальні зусилля тобто рівномірно розподілене вертикальне навантаження, належать параболі другого порядку (рис. 4).

Ординати чотирьох суміжних вузлів нитки при такому навантаженні зв'язані залежністю:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP = 0\ ;$$

$$y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2} + KP = 0\ ,$$

що зводяться до одного рівняння виключенням KP :

$$y_{i-1} - 3y_i + 3y_{i+1} - y_{i+2} = 0\ .$$

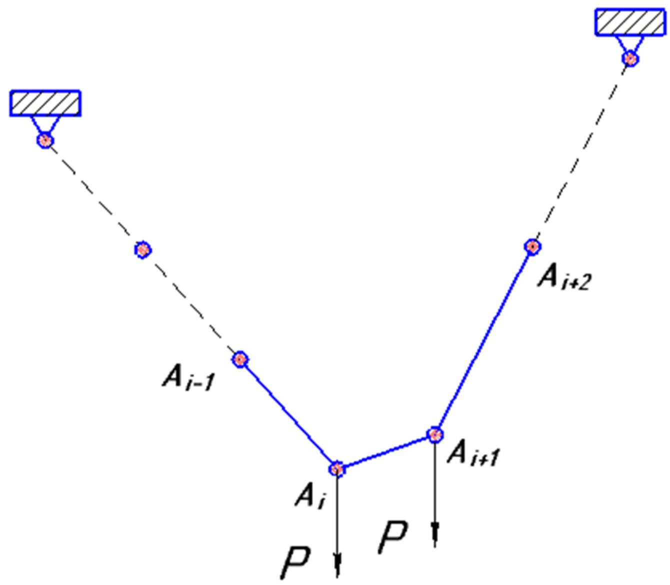


Рисунок 4. Дискретна модель розтягнутої нитки у формі параболи другого порядку.

П'ять суміжних вузлів дискретної моделі розтягнутої нитки, з яких до трьох середніх прикладене лінійно розподілене навантаження, зв'язані скінчено-різницевою залежністю

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = 0\ .$$

та належать параболі третього порядку (рис. 5).

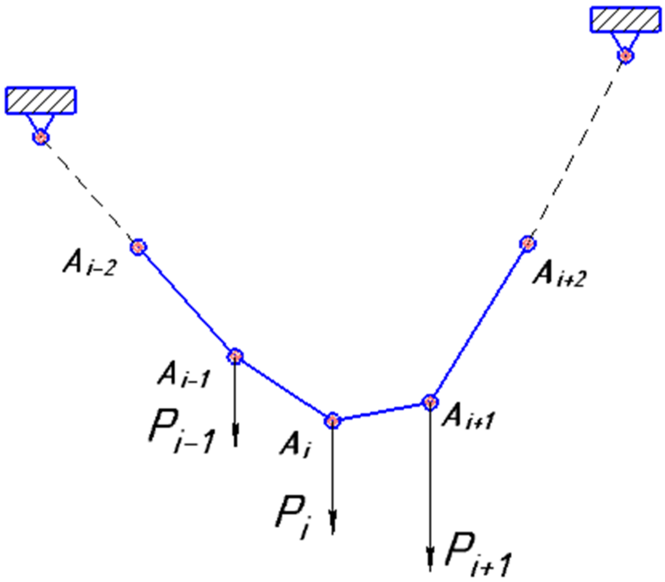


Рисунок 5. Дискретна модель розтягнутої нитки

у формі параболи третього порядку.

У загальному випадку, на основі властивості рекурентності формули *n*-ої розділеної різниці Δ_i^n , одержується скінчено-різницева залежність між ординатами (*n+1*)-го суміжного вузла, через які проходить парабола (*n-1*)-го порядку.

Геометричний апарат суперпозицій дозволяє одержувати формули, що зв'язують значення скінченої множини довільних членів послідовностей, що є дискретними аналогами неперервних функціональних залежностей, за довільними вихідними даними (координатами несуміжних членів даних послідовностей), і тим самим здійснювати прості переходи від неперервно заданого геометричного образу до дискретного й навпаки, а також формувати дискретні геометричні образи без складання і розв'язання громіздких систем рівнянь число яких дорівнює числу невідомих ординат.

У роботі [2] зазначено, що управління формою дискретно представленої кривої у статико-геометричному методі можна здійснювати не тільки за рахунок варіювання функціонального зовнішнього навантаження, а й за рахунок коефіцієнтів в обчислювальних шаблонах, які є основою для складання систем скінчено-різницевих рівнянь формування дискретно представлених кривих і показують дольову участь суміжних вузлів у формуванні шуканого.

Розглянемо вплив коефіцієнтів суперпозиції на дискретне формування одновимірних геометричних образів суперпозиціями та утворення їх обчислювальних шаблонів.

Для послідовності n-го порядку (3)

$$y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \cdots + a_s i^s + \cdots + a_n i^n \qquad (3)$$

рекурентна формула, що зв'язує значення кінцевого ряду довільних членів послідовності, матиме вигляд:

$$y_{i+p} = k_1 y_{i+p_1} + k_2 y_{i+p_2} + k_3 y_{i+p_3} + \cdots + k_s y_{i+p_s} + \cdots +$$
$$+ k_n y_{i+p_n} + k_{n+1} y_{i+p_{n+1}}\ , \qquad (4)$$

де вирази для обчислення коефіцієнтів $k_1,\ k_2,\ k_3, \ldots,\ k_s, \ldots,\ k_n, \ldots\ ,\ k_{n+1}$, при умові:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_s + \cdots + k_n + \cdots + k_{n+1} = 1\ ,$$

можемо одержати розв'язавши систему рівнянь (5):

1) $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$;

2) $\sum_{i=1}^{n} (k_i \sum_{t=0}^{n-1} a_t p_i^t) = \sum_{t=0}^{n-1} a_t p^t$;

3) $\sum_{i=1}^{n} \left(k_i \sum_{t=0}^{n-1} t a_t p_i^{t-1}\right) = \sum_{t=0}^{n-1} t a_t p^{t-1}$;

4) $\sum_{i=1}^{n} \left(k_i \sum_{t=0}^{n-1} t(t-1) a_t p_i^{t-2}\right) = \sum_{t=0}^{n-1} t(t-1) a_t p^{t-2}$;

5) $\sum_{i=1}^{n} \left(k_i \sum_{t=0}^{n-1} t(t-1)(t-2) a_t p_i^{t-3}\right) = \sum_{t=0}^{n-1} t(t-1)(t-2) a_t p^{t-3}$;

………………………………………………………………………………… (5)

n-1) $\sum_{i=1}^{n} \left(k_i \sum_{t=0}^{n-1} t(t-1)(t-2) \ldots (t-n) a_t p_i^{t-(n-1)}\right) =$

$\sum_{t=0}^{n-1} t(t-1)(t-2) \ldots (t-n) a_t p^{t-(n-1)}$;

n) $\sum_{i=1}^{n} \left(k_i \sum_{t=0}^{n-1} t(t-1)(t-2) \ldots (t-n-1) a_t p_i^{t-(n-2)}\right) =$

$\sum_{t=0}^{n-1} t(t-1)(t-2) \ldots (t-n-1) a_t p^{t-(n-1)}$.

Дані вирази матимуть вигляд:

$$k_1 = (-1)^n \frac{(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)\ldots(p-p_k)\ldots(p-p_n)(p-p_{n+1})}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_4-p_1)\ldots(p_k-p_1)\ldots(p_n-p_1)(p_{n+1}-p_1)}\ ;$$

$$k_2 = (-1)^n \frac{(p-p_1)(p-p_3)(p-p_4)\ldots(p-p_k)\ldots(p-p_n)(p-p_{n+1})}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)(p_4-p_2)\ldots(p_k-p_2)\ldots(p_n-p_2)(p_{n+1}-p_2)}\ ;$$

$$k_3 = (-1)^n \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_4)\ldots(p-p_k)\ldots(p-p_n)(p-p_{n+1})}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)(p_4-p_3)\ldots(p_k-p_3)\ldots(p_n-p_3)(p_{n+1}-p_3)}\ ;$$

………………………………………………………….. ;

$$k_s = (-1)^n \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)...(p-p_{s-1})(p-p_{s+1})...(p-p_n)(p-p_{n+1})}{(p_{1-}p_s)(p_2-p_s)(p_3-p_s)(p_4-p_s)...(p_{s-1}-p_s)(p_{s+1}-p_s)...(p_n-p_s)(p_{n+1}-p_s)};$$

…………………………………………………………….……… ;

$$k_n = (-1)^n \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)...(p-p_k)...(p-p_{n-1})(p-p_{n+1})}{(p_{1-}p_n)(p_2-p_n)(p_3-p_n)(p_4-p_n)...(p_k-p_n)...(p_{n-1}-p_n)(p_{n+1}-p_n)};$$

$$k_{n+1} = (-1)^n \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)...(p-p_k)...(p-p_{n-1})(p-p_n)}{(p_{1-}p_{n+1})(p_2-p_{n+1})(p_3-p_{n+1})(p_4-p_{n+1})...(p_k-p_{n+1})...(p_{n-1}-p_{n+1})(p_n-p_{n+1})}$$

Дані вирази для визначення величин коефіцієнтів суперпозиції можна записати у найбільш компактному вигляді:

$$k_1 = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^{n+1}(p-p_i)}{(p-p_1)\prod_{i=2}^{n+1}(p_i-p_1)};$$

$$k_2 = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^{n+1}(p-p_i)}{(p-p_2)(p_1-p_2)\prod_{i=3}^{n+1}(p_i-p_2)};$$

$$k_3 = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^{n+1}(p-p_i)}{(p-p_3)\prod_{i=1}^{2}(p_i-p_3)\prod_{i=4}^{n+1}(p_i-p_3)};$$

$$k_4 = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^{n+1}(p-p_i)}{(p-p_4)\prod_{i=1}^{3}(p_i-p_4)\prod_{i=5}^{n+1}(p_i-p_4)};$$

;

$$k_s = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^{n+1}(p-p_i)}{(p-p_s)\prod_{i=1}^{s-1}(p_i-p_s)\cdot\prod_{i=s+1}^{n+1}(p_i-p_s)}, \text{ де } s = \overline{2, n+1}. \quad (6)$$

;

$$k_n = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^{n+1}(p-p_i)}{(p-p_n)(p_{n+1}-p_n)\prod_{i=1}^{n-1}(p_i-p_n)};$$

$$k_{n+1} = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^{n}(p-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(p_i-p_{n+1})}.$$

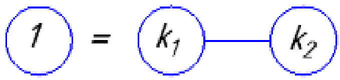
У роботі [8] були визначені формули для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1, k_2, і рекурентна формула, що зв’язує значення кінцевого ряду довільних членів послідовності першого порядку у вигляді:

$$y_{i+p} = k_1 y_{i+p_1} + k_2 y_{i+p_2} \quad (7)$$

Формула (7) для суміжних членів такої послідовності запишеться у вигляді

$$y_i = k_1 y_{i-1} + k_2 y_{i+1}, \quad (8)$$

або у вигляді обчислювального шаблону:



.

Враховуючи одиничний крок по осі абсцис, у формулах обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції:

$$k_1 = \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} \;; \quad k_2 = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \;;$$

зможемо записати $p_1 = p - 1$; $p_2 = p + 1$ для будь-якого p .

Тоді:

$$k_1 = \frac{p+1-p}{p+1-(p-1)} = \frac{1}{2}\,; \quad k_2 = \frac{p-(p-1)}{p+1-(p-1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Формула (8) матиме вигляд:

$$y_i = 0{,}5y_{i-1} + 0{,}5y_{i+1}\,, \tag{9}$$

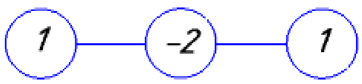
або у вигляді обчислювального шаблону:

,

і буде тотожною скінчено-різницевій триточковій залежності:

$$2y_i = 1y_{i-1} + 1y_{i+1}\,,$$

обчислювальний шаблон для центральної різниці якої має вигляд:

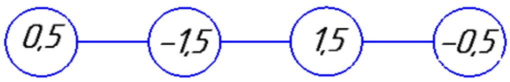


Оскільки скінчена різниця третього порядку утворюється як різниця між двома скінченими різницями другого порядку, то із (9) одержимо:

$$y_i - y_{i+1} + 0{,}5y_i - 0{,}5y_{i-1} + 0{,}5y_{i+2} - 0{,}5y_{i+1} = 0 \Longrightarrow;$$

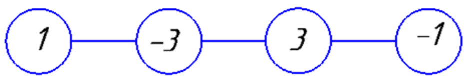
$$\Longrightarrow 0{,}5y_{i-1} - 1{,}5y_i + 1{,}5y_{i+1} - 0{,}5y_{i+2} = 0\,,$$

або у вигляді обчислювального шаблону:



,

що тотожний шаблону центральної різниці третього порядку:



.

Аналогічно, із формули (8), одержимо скінчену різницю третього порядку для y_i :

$$y_i - y_{i+1} + k_1(y_i - y_{i-1}) + k_2(y_{i+2} - y_{i+1}) = 0\,,$$

або у вигляді обчислювального шаблону:

.

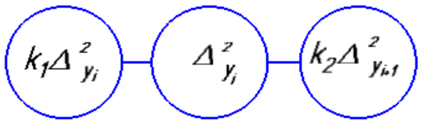
Скінчена різниця третього порядку для y_{i+1} матиме вигляд:

$$y_{i+1} - y_{i+2} + k_1(y_{i+1} - y_i) + k_2(y_{i+3} - y_{i+2}) = 0\ .$$

Скінчена різниця четвертого порядку утворюється як різниця між двома скінченими різницями третього порядку:

$$y_i - y_{i+1} - y_{i+1} + y_{i+2} + k_1(y_i - y_{i-1} - y_{i+1} + y_i) +$$
$$+k_2(y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+3} + y_{i+2}) = y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2} +$$
$$k_1(2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}) + k_2(2y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+3}) = 0\ .$$

Обчислювальний шаблон матиме вигляд:

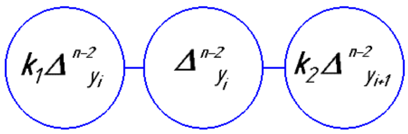


.

Для скінченої різниці ***n***-го порядку:

$$\Delta^{n-2}y_i - k_1\Delta^{n-2}y_i - k_2\Delta^{n-2} = 0$$

обчислювальний шаблон матиме вигляд:



.

Рекурентна формула (4), що зв'язує значення кінцевого ряду довільних членів послідовності ***n***-го порядку (3), для послідовності другого порядку (10):

$$y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 \tag{10}$$

має вигляд (11):

$$y_{i+p} = k_1 y_{i+p_1} + k_2 y_{i+p_2} + k_3 y_{i+p_3}\ , \tag{11}$$

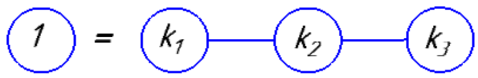
або:

$$y_{i+p} - k_1 y_{i+p_1} - k_2 y_{i+p_2} - k_3 y_{i+p_3} = 0\ . \tag{12}$$

Формула (12) для суміжних членів послідовності (10) запишеться у вигляді

$$y_i - k_1 y_{i-1} - k_2 y_{i+1} - k_3 y_{i+2} = 0\,. \qquad (13)$$

або у вигляді обчислювального шаблону:



.

Покладаючи одиничний крок по осі абсцис, тобто $p_1 = p-1$; $p_2 = p+1$; $p_3 = p+2$ для будь-якого p , з формул обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції (6)

$$k_1 = \frac{(p-p_2)(p-p_3)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)}\ ;\ k_2 = \frac{(p-p_1)(p-p_3)}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)}\ ;\ k_3 = \frac{(p-p_1)(p-p_2)}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)}$$

одержуємо:

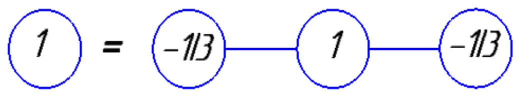
$$k_1 = \frac{((p-(p+1))((p-(p+2))}{((p+1)-(p-1))((p+2)-(p-1))} = \frac{1}{3}\,;\ k_2 = \frac{((p-(p-1))((p-(p+2))}{((p-1)-(p+1))((p+2)-(p+1))} = 1\,;$$

$$k_3 = \frac{((p-(p-1))((p-(p+1))}{((p-1)-(p+2))((p+1)-(p+2))} = -\frac{1}{3}\,.$$

Формула (13) матиме вигляд:

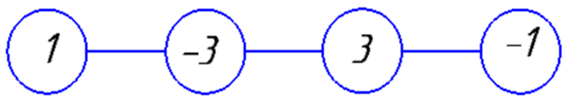
$$y_i - \frac{1}{3} y_{i-1} - 1 y_{i+1} + \frac{1}{3} y_{i+2} = 0\,,$$

або у вигляді обчислювального шаблону:



,

що тотожний шаблону центральної різниці третього порядку:



.

Рекурентна формула (4), що зв'язує значення кінцевого ряду довільних членів послідовності n-го порядку (3), для послідовності третього ($n=3$) порядку:

$$y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3\ , \qquad (14)$$

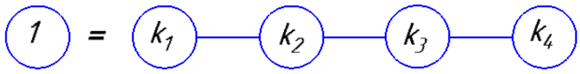
має вигляд :

$$y_{i+p} = k_1 y_{i+p_1} + k_2 y_{i+p_2} + k_3 y_{i+p_3} + k_4 y_{i+p_4}\,, \qquad (15)$$

Формула (15) для суміжних членів послідовності (14) запишеться у вигляді

$$y_i = k_1 y_{i-2} + k_2 y_{i-1} + k_3 y_{i+1} + k_4 y_{i+2}\,. \qquad (16)$$

або у вигляді обчислювального шаблону:



.

Тоді, при умові одиничного кроку по осі абсцис, у формулах обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції (6):

$$k_1 = \frac{1}{4}\,;\ k_2 = \frac{3}{2}\,;\ k_3 = 1\,;\ k_4 = \frac{1}{4}\,,$$

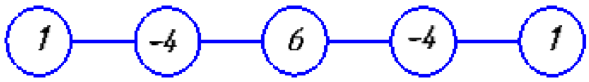
формула (16) матиме вигляд:

$$y_i = \frac{1}{4} y_{i-2} + \frac{3}{2} y_{i-1} - 1 y_{i+1} + \frac{1}{4} y_{i+2}\,,$$

або у вигляді обчислювального шаблону:

,

що тотожний шаблону центральної різниці четвертого порядку:



.

При умові одиничного кроку по осі абсцис, у формулах обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції (6) для послідовності четвертого порядку (*n=4*) :

$$k_1 = \frac{1}{5}\,;\ k_2 = 2\,;\ k_3 = -2\,;\ k_4 = 1\,,\ k_5 = -\frac{1}{5}\,.$$

Значення величин коефіцієнтів суперпозиції при умові одиничного кроку по осі абсцис, у формулах (6) для послідовностей порядків $1 \leq s \leq 8$ наведені у таблиці 1.

Таблиця 1.

Значення величин коефіцієнтів суперпозиції

для послідовностей порядків $1 \leq s \leq 8$

n	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1	*1/2*	*1/2*							
2	*1/3*	*1=2/2*	*-1/3*						
3	*1/4*	*3/2*	*-1*	*1/4*					
4	*1/5*	*2=4/2*	*-2*	*1*	*-1/5*				
5	*1/6*	*5/2*	*-10/3*	*5/2*	*-1*	*1/6*			

6	*1/7*	*3*	*-5*	*5*	*-3*	*1*	*-1/7*		
7	*1/8*	*7/2*	*-7*	*35/4*	*-7*	*7/2*	*-1*	*1/8*	
8	*1/9*	*4*	*-28/3*	*14*	*-14*	*28/3*	*-4*	*1*	*-1/9*

Аналізуючи зміст таблиці 1, можна визначити наступні вирази для обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції:

1. для послідовності порядку ($n=1$)

$$k_1 = \frac{1}{n+1}\,; \quad k_2 = \frac{n}{2}\,;$$

2. для послідовності порядку ($n=2$)

$$k_1 = \frac{1}{n+1}\,; \quad k_2 = \frac{n}{2}\,; \quad k_3 = -\frac{1}{3}C_n^2\,;$$

3. для послідовності порядку ($n=3$)

$$k_1 = \frac{1}{n+1}\,; \quad k_2 = \frac{n}{2}\,; \quad k_3 = -\frac{1}{3}C_n^2\,; \quad k_4 = \frac{1}{4}C_n^3\,;$$

4. для послідовності порядку ($n=4$)

$$k_1 = \frac{1}{n+1}\,; \quad k_2 = \frac{n}{2}\,; \quad k_3 = -\frac{1}{3}C_n^2\,; \quad k_4 = \frac{1}{4}C_n^3\,; \quad k_5 = -\frac{1}{5}C_n^4\,.$$

Для будь-якого n ($n \in N$)

$$k_1 = \frac{1}{n+1}\,;\ \ldots\,;\ k_s = (-1)^s \cdot \frac{1}{s} \cdot C_n^{s-1}\,,\ s \in N, s > 1\,. \qquad (17)$$

Таким чином, враховуючи вищевикладене можна визначати за формулою (4) довільну ординату числової послідовності (3) за довільними заданими ординатами вузлових точок без складання і розв’язання систем із великою кількістю рівнянь.

При формуванні дискретних образів на основі геометричного апарату суперпозицій доцільно використовувати терміни «величина, або функція розподілу величини рекурентної залежності», що буде в окремому випадку (рис. 2) тотожною величині зовнішнього навантаження [9].

Вище показано, що формула

$$y_i = k_1 y_{i-1} + k_2 y_{i+1}\,,$$

де $k_1 = k_2$, тотожна скінчено-різницевій триточковій залежності

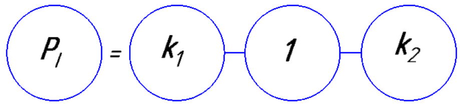
$$2y_i = 1y_{i-1} + 1y_{i+1}\,,$$

тому величину рекурентної залежності, що буде прообразом функції розподілу зовнішнього формоутворюючого навантаження, для формування дискретного аналогу поліному 2-го ступеня на основі суперпозицій заданих вузлових точок зможемо записати у вигляді:

$$P_i = y_i - k_1 y_{i-1} - k_2 y_{i+1} \ ,$$

де P_i – дискретна величина рекурентної залежності.

Або, у вигляді обчислювального шаблону :



При умові, $k_1 + k_2 = 1$:

$$P_i = y_i - k_1 y_{i-1} - (1 - k_1) y_{i+1} \ ;$$

$$k_1 (y_{i-1} - y_{i+1}) = y_i - y_{i+1} - P_i \ .$$

Звідси, при відомій дискретній величині рекурентної залежності, можуть бути визначені величини коефіцієнтів суперпозиції за формулами:

$$k_1 = \frac{y_i - y_{i+1} - P_i}{y_{i-1} - y_{i+1}} \ ; \quad k_2 = 1 - k_1 \ .$$

Або:

$$P_i = y_i - y_{i+1} - k_1 (y_{i-1} - y_{i+1}) \ .$$

Так, як:

$$(y_{i-1} - y_{i+1}) = (y_{i-1} - y_i) + (y_i - y_{i+1}) \ ,$$

то дискретна величина рекурентної залежності визначиться за формулою:

$$P_i = \Delta_i - k_1 (\Delta_{i-1} + \Delta_i) \ ,$$

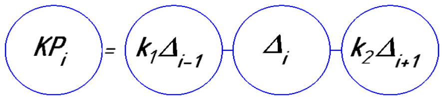
а залежність величини коефіцієнта суперпозиції k_1 від величини рекурентної залежності матиме вигляд:

$$k_1 = \frac{P_i - \Delta_i}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \ .$$

Оскільки скінчена різниця третього порядку утворюється як різниця між двома скінченими різницями другого порядку, то рівномірно розподілена величина рекурентної залежності для формування дискретного аналогу поліному 3-го ступеня на основі суперпозицій заданих вузлових точок матиме вигляд:

$$P_i = y_i - y_{i+1} + k_1(y_i - y_{i-1}) + k_2(y_{i+2} - y_{i+1}) \ .$$

Або, у вигляді обчислювального шаблону :



.

При умові, $k_1 + k_2 = 1$:

$$P_i = y_i - y_{i+1} + k_1(y_i - y_{i-1}) + (1 - k_1)(y_{i+2} - y_{i+1}) \ ;$$

$$P_i = y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2} + k_1(y_i - y_{i-1} + y_{i+1} - y_{i+2}) \ .$$

Звідси:

$$k_1 = \frac{P_i - y_i + 2y_{i+1} - y_{i+2}}{y_i - y_{i-1} + y_{i+1} - y_{i+2}} \ .$$

Також можна записати:

$$P_i = \Delta_{i+1}^2 - k_1(\Delta_i + \Delta_{i+1}) \ ,$$

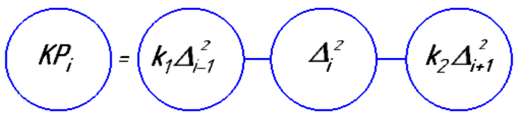
і, також:

$$k_1 = \frac{P_i - \Delta_{i+1}^2}{\Delta_i + \Delta_{i+1}} \ .$$

Рівномірно розподілена величина рекурентної залежності для формування дискретного аналогу поліному 4-го ступеня на основі суперпозицій заданих вузлових точок матиме вигляд:

$$P_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + k_1(2y_{i-1} - y_{i-2} - y_i) + k_2(2y_{i+1} - y_i - y_{i+2}) \ .$$

Або, у вигляді обчислювального шаблону :



.

При умові, $k_1 + k_2 = 1$:

$$P_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + k_1(2y_{i-1} - y_{i-2} - y_i) + (1 - k_1)(2y_{i+1} - y_i - y_{i+2}) \ ;$$

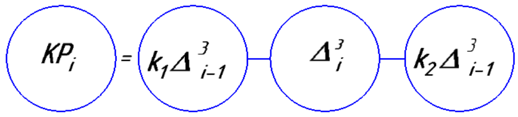
$$P_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + 2y_{i+1} - y_i - y_{i+2} +$$
$$+ k_1(2y_{i-1} - y_{i-2} - y_i - 2y_{i+1} + y_i + y_{i+2}) \ ;$$

$$P_i = y_{i-1} - 3y_i + 3y_{i+1} - y_{i+2} + k_1(2y_{i-1} - y_{i-2} - 2y_{i+1} + y_{i+2}) \ .$$

Звідки:

$$k_1 = \frac{P_i - y_{i-1} + 3y_i - 3y_{i+1} + y_{i+2}}{2y_{i-1} - y_{i-2} - 2y_{i+1} + y_{i+2}} \ .$$

Рівномірно розподілена величина рекурентної залежності для формування дискретного аналогу поліному 5-го ступеня на основі суперпозицій заданих вузлових точок у вигляді обчислювального шаблону матиме вигляд:



,

а величина ***k₁*** визначиться за формулою:

$$k_1 = \frac{P_i - y_{i-1} + 4y_i - 6y_{i+1} + 4y_{i+2} - y_{i+3}}{3y_{i-1} - y_{i-2} - 2y_i - 2y_{i+1} + 3y_{i+2} - y_{i+3}}.$$

Рівномірно розподілена величина рекурентної залежності для формування дискретного аналогу поліному *n*-го ступеня на основі суперпозицій заданих вузлових точок матиме вигляд:

$$P_i = \Delta_i^{n-2} + k_1\Delta_{i-1}^{n-2} + k_2\Delta_{i+1}^{n-2},$$

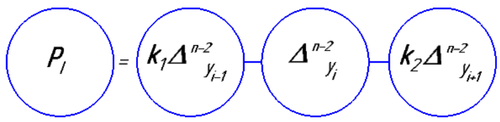
або:

$$P_i = \Delta_i^{n-2} - \Delta_{i+1}^{n-2} + k_1\left(\Delta_{i+1}^{n-2} - \Delta_{i-1}^{n-2}\right),$$

або:

$$P_i = k_1\left(\Delta_{i+1}^{n-1} - \Delta_i^{n-1}\right) - \Delta_{i+1}^{n-1}.$$

Або, у вигляді обчислювального шаблону:



а величина k_1 визначиться за формулою:

$$k_1 = \frac{P_i - \Delta_i^{n-2} + \Delta_{i+1}^{n-2}}{\Delta_{i+1}^{n-2} - \Delta_{i-1}^{n-2}} = \frac{P_i + \left(\Delta_{i+1}^{n-2} - \Delta_i^{n-2}\right)}{\left(\Delta_{i+1}^{n-2} - \Delta_i^{n-2}\right) + \left(\Delta_i^{n-2} - \Delta_{i-1}^{n-2}\right)} = \frac{P_i + \Delta_{i+1}^{n-1}}{\Delta_{i+1}^{n-1} + \Delta_i^{n-1}}.$$

Висновок. Представлені у даній статті формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції дозволяють дискретно формувати одновимірні геометричні образи, а також розв'язувати задачі дискретної інтерполяції числовими послідовностями параболічних кривих без складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь.

Застосування геометричного апарату суперпозицій при формуванні дискретних образів, де формоутворюючою є величина рекурентної залежності, дозволяє розширити можливості статико-геометричного методу.

Результати даних досліджень можуть бути основою для дискретного формування геометричних образів одновимірними числовими послідовностями не тільки параболічних, а й інших елементарних функціональних залежностей, а також для формування двовимірних геометричних образів.

Список літератури

1. Ковалев, С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01 / С.Н. Ковалев. – М., 1986 – 348 с.

2. Пустюльга, С.І. Дискретне визначення геометричних об’єктів числовими послідовностями: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01 / С.І. Пустюльга. – К., 2006. – 322 с.

3. Воронцов О.В. Визначення дискретного аналогу полінома *n*-го степеня суперпозиціями точок числової послідовності *n*-го порядку / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка: зб. наук. праць – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 63 – 67.

4. Воронцов О.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями точок числових послідовностей дробово-лінійних функцій / О.В. Воронцов, Н.О. Махінько // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці ТДАТА. – Мелітополь: ТДАТА, 2013. – Т. 57. Вип. 4. – С. 62 – 67.

5. Воронцов О.В. Властивості суперпозицій точкових множин / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка: зб. наук. праць – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 86. − С. 345 − 349.

6. Воронцов О.В. Определение дискретных аналогов классов элементарных функций суперпозициями одномерных точечных множеств [Электронный ресурс] / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Universsum. Сер.:

Технические науки: электрон. научн. журн. − 2014. − № 3(4). − Режим доступа: URL: http: // 7universsum. Com /ru/ tech/ archive/ item/1135.

7. Воронцов О.В. Дискретне моделювання геометричних образів об’єктів проектування суперпозиціями одновимірних числових послідовностей з урахуванням функціонального навантаження / О.В. Воронцов // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) / Полтав. нац. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка. – Полтава: ПолтНТУ, 2015. – Вип. 3(45). – С. 28 – 39.

8. Воронцов О.В. Моделювання об’єктів будівництва та машинобудування довільними дискретними значеннями числових послідовностей / О.В. Воронцов // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) / Полтав. нац. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка. – Полтава: ПолтНТУ, 2013. – Вип. 4(39). – С. 25 – 35.

9. Воронцов О.В. Дискретне моделювання геометричних образів об’єктів проектування суперпозиціями одновимірних числових послідовностей з урахуванням функціонального навантаження / О.В. Воронцов // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) / Полтав. нац. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка. – Полтава: ПолтНТУ, 2015. – Вип. 3(45). – С. 28 – 39.