УДК. 514.18

О.В. Воронцов, к.т.н., доцент

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ У ПРОЦЕСАХ ДИСКРЕТНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ БУДІВНИЦТВА ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

У роботі розглянуто задачі, виконано узагальнення й обґрунтовано доцільність системних досліджень геометричних властивостей апарату суперпозицій і визначення на їх основі головних аспектів нового напряму дискретного формування геометричних образів об'єктів архітектури, будівництва та машинобудування.

Ключові слова: *прикладна геометрія, дискретне геометричне моделювання, метод скінченних різниць, статико-геометричний метод, математичний апарат числових послідовностей, геометричний апарат суперпозицій.*

Постановка проблеми. Розвиток виробництва й удосконалення технологічних процесів ставлять перед наукою нові задачі зі створення адекватних моделей об'єктів і явищ для їх ефективного аналізу, розрахунку, оптимізації та прогнозування. У процесі проектування сучасних об'єктів будівництва, архітектури, машинобудування важливе місце займає етап геометричного моделювання, коли на стадії ескізу визначаються основні параметри їх геометричної форми. При цьому якість моделей залежить від можливостей ефективного управління їх геометрією, корегування як моделей у цілому, так і їх окремих частин, швидкого аналізу та порівняльної оцінки отриманих результатів.

Сучасний стан проектування криволінійних об'єктів машинобудування та будівництва потребує врахування якомога більшої кількості вихідних даних і вимог для забезпечення відповідної точності моделі. При геометричному моделюванні вихідними даними, як правило, виступають геометричні характеристики й умови, найчастіше представлені у числовій формі (координати або значення параметрів), масиви яких можуть бути досить великими. У цих умовах методи глобального неперервного моделювання, коли відшукується єдине рішення, виявляються неефективними, тому що зазвичай вимагають використання достатньо складних математичних алгоритмів та не можуть забезпечити необхідну адекватність моделей. Зазначених недоліків позбавлені методи дискретного геометричного моделювання [1].

Аналіз останніх досліджень. Дискретне геометричне моделювання є найбільш перспективним напрямом розвитку прикладної геометрії в сучасний період, який умовно можна поділити на дослідження з дискретизації неперервних геометричних образів та формоутворення за дискретними вихідними даними.

Серед найпоширеніших напрямів у галузі дискретного моделювання поверхонь існує метод скінченних елементів, що базується на дискретному представленні поверхонь у вигляді сукупності окремих елементів, які взаємодіють між собою у скінченній кількості вузлових точок.

Метод скінченних різниць вигідно відрізняється від методу скінченних елементів простотою, але програє в універсальності та точності результатів, які одержують при розв'язанні інженерних задач.

На основі статичної інтерпретації методу скінченних різниць професором С.М. Ковальовим [2] створено статико-геометричний метод формоутворення дискретних геометричних образів з певними властивостями, що є найбільш наочним і зрозумілим методом дискретного моделювання неперервних образів і у цілому ряді випадків ураховує статичні особливості різних об'єктів.

Професор В.М. Найдиш [3] розробив теоретичні положення напряму дискретного геометричного моделювання (ДГМ), в основу якого покладено алгоритми згущення на базі геометричних співвідношень, тотожностей, базисних функцій інтерполяції вихідного точкового масиву з метою утворення нової множини дискретних елементів із заданими властивостями.

Останні два методи активно розвиваються, мають практичне застосування, а їх ефективність підтверджують одержані за допомогою них результати.

Подальшому розвиткові статико-геометричного методу, розширенню його формоутворюючих властивостей присвячена робота [4] професора С.І. Пустюльги, у якій для формоутворення геометричних образів запропоновано у поєднанні із класичним методом скінченних різниць і статико-геометричним методом використання математичного апарату та геометричної інтерпретації числових послідовностей, що дозволяє просто й ефективно переходити до неперервних аналогів сформованих дискретних моделей і навпаки; розв'язувати ряд задач дискретного геометричного моделювання зрівноважених образів довільної кількості вимірів без розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь, що у свою чергу дозволяє забезпечити економію обчислювальних ресурсів.

Кожний із названих методів має свої переваги та недоліки стосовно розв'язання конкретних практичних задач. Тому їх дослідження, збагачення новими ефективними алгоритмами, вивчення можливості їх компіляції, а на цій основі розширення множини вихідних даних є актуальними. Також актуальним є подальший розвиток та вдосконалення вищеназваних методів у цілому. При цьому, з одного, боку можна збагатити відомі методи дискретного геометричного моделювання новими алгоритмами, вдосконалити їх моделюючі можливості, а з іншого — розширити коло практичних задач та оптимізувати створювані для їх реалізації моделі.

У роботі [5] професор С.М. Ковальов визначив поняття «суперпозиції» у прикладній геометрії на основі функціонального додавання як суперпозиції множин, між точками яких установлено певну відповідність.

Спосіб побудови дискретної сітки на основі суперпозицій заздалегідь розрахованих двох або більше сіток з однаковою топологією дозволяє досить просто визначити координати довільного вузла нової сітки по координатах відповідних вузлів відомих сіток. Властивості таких суперпозицій вивчені недостатньо з погляду їх інваріантів щодо параметрів початкових сіток.

Геометричний об'єкт довільної форми завжди може бути представлений упорядкованою множиною точок за певним законом так, щоб можна було визначити координати будь-якої точки всередині контуру (області). Питанням є лише необхідна щільність вихідної інформації та затрати на її одержання, обробку і зберігання.

Великою проблемою є розв'язання задачі мінімізації (стискування, компресії) понад великі об'єми графічної інформації, тому що швидкодія обчислювальних систем значною мірою залежить саме від цього фактора [6].

Тому очевидною є необхідність проведення досліджень дискретного формування геометричних об'єктів, що у своїй основі забезпечували б необхідну точність побудови моделі геометричного образу при раціональному зменшенні обсягу вихідної інформації та мінімальних затратах на одержання кінцевого результату.

Постановка завдання роботи полягає в створенні нової теорії дискретного моделювання геометричних об'єктів за допомогою геометричного апарату суперпозицій дозволить формувати моделі, що відображають усі характерні риси об'єкта за мінімально можливим обсягом вихідної інформації й одночасно будуть максимально доступними при дослідженнях. Тому необхідні глибокі всебічні дослідження апарату суперпозицій.

Виклад основного матеріалу дослідження. У математиці поряд із поняттям функції існує поняття суперпозиції функцій (або накладення функцій), яка полягає у тому, що замість аргументу даної функції підставляється певна функція від іншого аргументу. Одержана функція від функції $z = \varphi(f(x))$ є результатом суперпозиції функцій $f(x)$ і $\varphi(y)$.

У роботі [5] відзначено, що у прикладній геометрії поняття суперпозиції, як правило, асоціюється з операцією додавання функцій, помножених на вагові коефіцієнти, та що найбільш суттєві результати з вивчення апарату додавання функцій одержані у роботах [9; 10; 11].

У роботі Р.Й. Воробкевич [9] запропоновано способи формоутворення ліній на основі спеціальних операцій (умовно названих додаваннями) над базисними функціями, представленими рівняннями у неявній, явній, параметричній і полярній формах; встановлено як відмінності, так і взаємозв'язки між окремими видами додавань, дано їх графічне трактування; розроблено алгоритми конструювання ліній і поверхонь на основі узагальнених додавань функцій.

При створенні геометричної моделі просторового покриття на стадії ескізного проектування очевидна необхідність чіткого уявлення про зміст процесу формування, параметри керування формою дискретних моделей, можливості оперативного змінення ходу розрахунків.

У роботі П.В. Самчука [10] розглянуто теоретичні аспекти процесу керування формою дискретних сіток і розроблення алгоритмів, що реалізують процес формування моделей поверхонь покриттів та їх коректування згідно із заданими; наведено спосіб одержання нової рівновагової сітки на основі операції функціонального додавання над декількома заданими рівноваговими сітками. Функціональне додавання у цій роботі визначається як арифметична сума аплікат відповідних аплікат сіток, що додаються. Така операція певним чином дозволяє керувати формою сітки взагалі, а також локально коректувати форму і положення сітки. Спосіб функціонального додавання наводиться поряд з іншими способами керування формою рівновагової сітки; можливості способу показані лише частково.

У вищезгаданій роботі Р.Й. Воробкевич відсутні теоретичні дослідження, пов'язані з керуванням формою геометричних фігур.

Дослідженням методу функціонального додавання як операції над геометричними фігурами та можливості використання такого методу для керування формою розтягнутих сіток присвячена робота Ч. Х. Хая [11]. У цій роботі обґрунтовано принципи апарату функціонального додавання та його використання для керування формою розтягнутих систем при ескізному проектуванні тентових конструкцій. Зокрема, виведено формули додавання на площині й у просторі для неперервних та дискретних множин; виявлено відповідності між елементами простору, які утворюються в результаті функціонального додавання; виявлено форми представлення ряду відомих перетворень як функціонального додавання; досліджено можливості використання комбінації вагових коефіцієнтів як сукупності параметрів керування формою результуючої фігури у функціональному додаванні.

Проте перевірка сіток, отриманих у результаті суперпозиції вихідних сіток з різними коефіцієнтами розтягування зв'язків показала, що результуюча сітка не є врівноваженою при заданому зовнішньому навантаженні на вузли, тобто результати таких суперпозицій виявилися не точними, а наближеними.

У статті професора С.М. Ковальова [5] наведено можливі напрями наукових досліджень геометричного апарату суперпозицій; зроблено висновки про актуальність усебічного вивчення його властивостей.

Розглянемо спочатку використання обчислення скінченних різниць, побудови числових послідовностей і статико-геометричного методу для аналітичного опису дискретних геометричних образів.

На рис. 1 дискретно представлено криву лінію точками з рівномірним кроком $h=1$ уздовж осі Ox: $x_{i+1} = x_i + h$.

Ця крива може бути визначена скінченними різницями: правими – $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, лівими – $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$ або центральними; наприклад, центральна різниця четвертого порядку буде симетричною відносно вузла B_i: $\delta^4 = y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}$, а права скінченна різниця n-го порядку має вигляд $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$, або $\Delta^n y_i = y_{i+1} - C_n^1 y_{i+n-1} + C_n^2 y_{i+n-2} + ... + (-1)^n y_i$, де C_n^k – число сполучень з n по k [7].

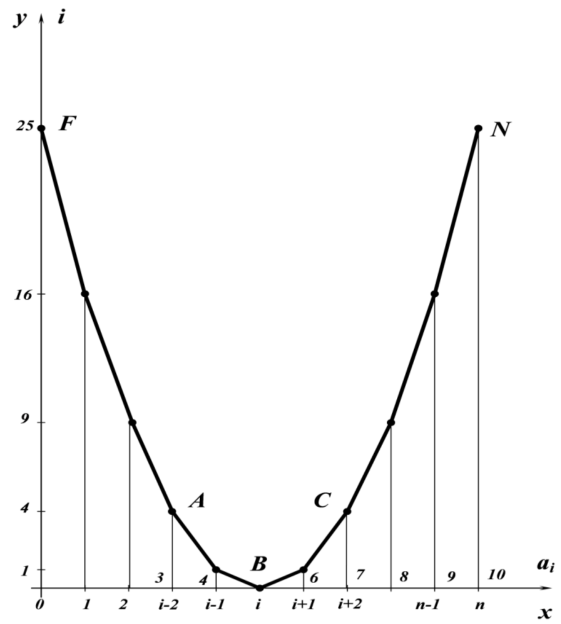

Рисунок 1 – Дискретна модель параболи другого порядку

Числова послідовність, довільний член якої визначається формулою у замкненій формі $y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + ... + a_n i^n$, описує параболу n-го порядку $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$. Наприклад рекурентна формула числової послідовності: $y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$ має вигляд $a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} = 2a_2$ і є дискретним аналогом параболи другого порядку (рис. 1).

Для побудови поданої на рис. 1 дискретної моделі кривої з рівномірним кроком $h=1$ уздовж осі Ox, яка проходить через точки $A(x_A=3;y_A=4)$, $B(x_B=5;y_B=0)$, $C(x_C=7;y_C=4)$, статико-геометричним методом необхідно скласти і розв'язати систему рівнянь рівноваги внутрішніх вузлів

$$\begin{cases} y_A - 2y_4 + y_B + kP_4 = 0 \\ y_4 - 2y_B + y_6 + kP_5 = 0 \\ y_B - 2y_6 + y_C + kP_6 = 0 \end{cases}.$$

При $kP_4 = kP_5 = kP_6 = kP$ одержимо $y_4 = 1$, $y_6 = 1$, $kP = -2$.

Вище було розглянуто приклади дискретного визначення полінома другого степеня трьома відомими методами.

Для визначення аналітичного рівняння полінома другого степеня $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, наведеного на рис. 1, що проходить через точки $F(x_F=0;y_F=25)$, $B(x_B=5;y_B=0)$, $N(x_N=10;y_N=25)$, необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y_F = a_0 + a_1 x_F + a_2 x_F^2 \\ y_B = a_0 + a_1 x_B + a_2 x_B^2 \\ y_N = a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 \end{cases}.$$

Значення показників a_0, a_1, a_2 будуть знайдені за формулами:

$$a_0=\frac{\Delta_{a_0}}{\Delta}=\frac{y_F x_B x_N(x_N-x_B)-y_B x_F x_N(x_N-x_F)+y_N x_F x_B(x_B-x_F);}{(x_B-x_F)(x_N-x_F)(x_N-x_B)};$$

$$a_1=\frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}=\frac{x_N^2(y_B-y_F)+x_B^2(y_F-y_N)+x_F^2(y_N-y_B)}{(x_B-x_F)(x_N-x_F)(x_N-x_B)};$$

$$a_2=\frac{\Delta_{a_2}}{\Delta}=\frac{y_F(x_N-x_B)+y_B(x_F-x_N)+y_N(x_B-x_F)}{(x_B-x_F)(x_N-x_F)(x_N-x_B)}.$$

Відповідно – $a_0=25$, $a_1=-10$, $a_2=1$, і рівняння кривої має вигляд

$$y=25-10x+x^2.$$

Дискретно визначити показану на рис. 1 криву можна, використовуючи таку властивість [8]:

Координати будь-якої точки параболи n-го порядку є суперпозицією (1) координат інших точок цієї параболи.

$$\begin{cases} x=k_1x_1+k_2x_2+...+k_{n-1}x_{n-1}+(1-k_1-k_2-...-k_{n-1}x_{n-1})x_n \\ y=k_1y_1+k_2y_2+...+k_{n-1}y_{n-1}+(1-k_1-k_2-...-k_{n-1}y_{n-1})y_n \end{cases} \quad (1)$$

Запишемо систему рівнянь для точок заданої кривої

$$\begin{cases} y_0=k_1y_F+k_2y_B+(1-k_1-k_2)y_N \\ x_0=k_1x_F+k_2x_B+(1-k_1-k_2)x_N \end{cases} \quad (2)$$

Знайдемо показники суперпозиції k_1, k_2, розв'язавши дану систему,

$$k_1=\frac{(y_0-y_N)(x_B-x_N)-(y_B-y_N)(x_0-x_N)}{(y_F-y_N)(x_B-x_N)-(x_F-x_N)(y_B-y_N)};$$

$$k_2=\frac{(y_F-y_N)(x_0-x_N)-(y_0-y_N)(x_F-x_N)}{(y_F-y_N)(x_B-x_N)-(x_F-x_N)(y_B-y_N)}.$$

Результати обчислень показників суперпозиції точок *F*, *B*, *N* для визначення точок кривої з рівномірним кроком $h=1$ уздовж осі *Ox*, поданої на рис. 1 наведено у таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення показників суперпозиції

x_0	1	2	3	4	6	7	8	9
y_0	16	9	4	1	1	4	9	16
k_1	0,72	0,48	0,28	0,12	-0,08	-0,12	-0,12	-0,08
k_2	0,36	0,64	0,84	0,96	0,96	0,96	0,64	0,36
$k_3=1-k_1-k_2$	-0,08	-0,12	-0,12	-0,08	0,12	0,08	0,48	0,72

Висновки. У статті наведено результати проведених досліджень визначення дискретних образів кривих ліній із використанням геометричного апарату суперпозицій одновимірних точкових множин. Подальші ґрунтовні дослідження геометричних властивостей апарату суперпозицій та визначення на їх основі головних аспектів нового напряму дискретного формування геометричних образів є перспективними.

Теорія формоутворення дискретних геометричних образів на цій основі дозволить значно зекономити обчислювальні ресурси, скоротити етап побудови та аналізу геометричних моделей об'єктів, процесів і певних явищ; спростити процес розв'язання конструктивних задач.

Фундаментальні системні дослідження геометричних властивостей апарату суперпозицій для формування дискретних образів у поєднанні із класичними чисельними методами, відомими методами дискретного моделювання та перетворень дозволять відкрити нові можливості при розв'язанні конкретних прикладних задач у різних галузях науки, техніки і виробництва.

Література

1. Самостян В.Р. Вплив геометричних вимог на процеси дискретного моделювання криволінійних об'єктів будівництва: дис. ...канд. техн. наук: 05.01.01 / В.Р. Самостян. – К., 2011. – 182 с.

2. Ковалев, С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01 / С.Н. Ковалев. – М., 1986 – 348 с.

3. Найдыш, В.М. Теоретические основы дискретного геометрического моделирования. / В.М. Найдыш // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 1995. – Вип. 58. – С. 26 – 29.

4. Пустюльга, С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями: дис. доктора техн. наук: 05.01.01 /

С.І. Пустюльга. – К., 2006. – 322 с.

5. Ковалев, С.Н. О суперпозициях / С.Н. Ковалев // Прикладна геометрія та інженерна графіка. –К.: КНУБА, 2010. – Вип. 84. – С. 38 – 42.

6. Лі, В.Г. Геометричний інструментарій синтезу середовища віртуальної реальності стосовно до тренажерів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук: спец. 05.01.01. „Прикладна геометрія та інженерна графіка" / В.Г. Лі.–К., 2000.–37 с.

7. Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є.,

Бурчак І.Н. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. – Луцьк.: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – С. 118 – 176.

8. Воронцов, О.В., Радченко, Г.О. Дискретне визначення кривих на основі різних методів геометричного моделювання / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 116-120.

9. Воробкевич Р.И. Конструирование линий и поверхностей на основе специальных операций над функциями и тригонометрическими сплайнами: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / Р.І. Воробкевич. – К.: 1989. – 198 с.

10. Самчук П.В. Управление формой дискретно заданных поверхностей в задачах проектирования оболочек: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / П.В. Самчук. – К., 1991. – 135 с.

11. Чан Хонг Хай. Управление формой растянутых систем на основе функционального сложения: дис. канд. техн. наук: 05.01.01. / Ч.Х. Хай. – К., 1994. – 124 с.

Надійшла до редакції 06.12. 2011

О.В. Воронцов, к.т.н., доцент

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОЦЕССАХ ДИСКРЕТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ СТРОИТЕЛЬСТВА И МАШИНОСТРОЕНИЯ

В работе рассмотрены задачи, выполнены обобщения и обоснована целесообразность системных исследований геометрических свойств аппарата суперпозиций и определения на их основе главных аспектов нового направления дискретного формирования геометрических образов объектов архитектуры, строительства и машиностроения.

Ключевые слова: *прикладная геометрия, дискретное геометрическое моделирование, метод конечных разностей, статико-геометрический метод, математический аппарат числовых последовательностей, геометрический аппарат суперпозиций.*

O.V. Vorontsov., Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

Poltava National Technical University of the name of Yuriy Kondratyk

GEOMETRICAL TASKS ARISING IN THE PROCESS OF DISCRETE DESIGN OF CONSTRUCTION AND MACHINE BUILDING OBJECTS.

In this article the tasks of discrete geometric modeling have been considered, generalizations have been done and the expediency of system studies has been substantiated of geometric properties of the supervisions set and on the basis of the latter the main aspects of the new direction of discrete formation of geometric forms of architecture, construction and machine building objects.

Key words: *applied geometry, discrete geometric modeling, method of finite differences, statistic-and- geometric method, the body of mathematics for numerical sequences, geometrical superposition set.*