УДК 517.912

Ю.В. Приставка, асистент
Полтавський національний технічний
університет імені Ю. Кондратюка

ЛІЇВСЬКІ АНЗАЦИ, РЕДУКЦІЯ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО (1+2)-ВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Розглянемо нелінійне (1+2)-вимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + 4\frac{k+1}{k}u^k u_1 + 4\frac{k+1}{k^2}u^{k+1}, \qquad (1)$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$, x_0 – часова змінна, x_1, x_2 – просторові змінні, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, за індексами, які повторюються, розуміється сумування, $a \in \{1, 2\}$.

У даній роботі поставимо задачу побудувати точні розв'язки рівняння (1).

Теорема. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1) є наступна алгебра

$$A = <\partial_0, \partial_1, \partial_2, \mathrm{D} = kx_0\partial_0 + u\partial_u, Q_1, Q_2>,$$

де $Q_1 = e^{x_1}(\cos x_2\partial_1 - \sin x_2\partial_1 + \frac{2}{k}\cos x_2 u\partial_u)$,

$Q_2 = e^{x_1}(\sin x_2\partial_1 + \cos x_2\partial_1 + \frac{2}{k}\sin x_2 u\partial_u)$.

Теорема доводиться стандартним методом Лі (див. [1], [2]).

Проведемо редукцію рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння, використовуючи найзагальніший вигляд оператора інваріантності

$$X = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + c_0 D + c_1 Q_1 + c_2 Q_2. \qquad (2)$$

Один з анзаців (див., наприклад [3]), отриманий за допомогою оператора (2) має вигляд

$$u = \dot{z}^{\frac{2}{k}}(x_2)\varphi(x_0, \omega), \omega = \frac{e^{x_1} + mz}{\dot{z}(x_2)}, \ddot{z} + z = 0,$$

де $z = z(x_2)$ – розв'язок рівняння $\ddot{z} + z = 0$.
Він редукує рівняння (1) до диференціального рівняння

$$(m^2 + \omega^2)\partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega) + 2\frac{k+2}{k^2}[-k\omega\varphi^k\varphi_\omega + \varphi^{k+1}] = \frac{1}{\overset{-2}{c}}\varphi_0.$$

Припустивши, що $k = -2$ прийдемо до рівняння

$$(m^2 + \omega^2)\varphi_{\omega\omega} = \frac{1}{\overset{-2}{c}}\varphi^{-2}\varphi_0. \qquad (3)$$

Знайшовши розв'язок рівняння (3) та врахувавши відповідний анзац, знаходимо наступний розв'язок рівняння (1):

$$
I[u^{-1}(\frac{-2c_5 \overleftarrow{c}^{2} \frac{4}{\overleftarrow{\lambda}^{2}} x_0 + c_3}{e^{\frac{1}{2}\overleftarrow{\lambda}\overleftarrow{x}} + mz(\frac{1}{2}\overleftarrow{\lambda}^{\perp}\overleftarrow{x}) + m^2\dot{z}^2(\frac{1}{2}\overleftarrow{\lambda}^{\perp}\overleftarrow{x})})^{\frac{1}{2}}) =
$$

$$
= \frac{1}{m}\arctan\frac{e^{\frac{1}{2}\overleftarrow{\lambda}\overleftarrow{x}} + mz(\frac{1}{2}\overleftarrow{\lambda}^{\perp}\overleftarrow{x})}{m\dot{z}(\frac{1}{2}\overleftarrow{\lambda}^{\perp}\overleftarrow{x})} + c_4,
$$

де $I(z) = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{2\lambda\ln\tau - m^2\tau^2 + c_5}}$, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 – довільні сталі.

Література

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

2. Олвер П. приложения груп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 581с.1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийний анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – К.: Наук. думка, 1989. – 339 с.