

**Б.О. Коробко, Ю.Ю. Коротич, С.М. Жигилій***Національний університет «Полтавська політехніка ім. Юрія Кондратюка», Україна***КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ СПРОЩЕНОЇ КІНЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВІБРОСТОЛУ З ВАЖІЛЬНИМ ЗАКРІПЛЕННЯМ ДЕБАЛАНСНОГО ЗБУДЖУВАЧА КОЛИВАНЬ**

У статті розглянуто спрощену кінематичну модель вібраційного столу й для відповідної механічної системи знайдено її кінетичну енергію, без якої, за умови використання рівнянь Лагранжа другого роду, неможливо отримати математичну модель руху цієї механічної системи. Зазначена модель з певними прийнятими припущеннями моделює реальний оригінальний вібростіл для виготовлення малогабаритних бетонних виробів, у якого відцентровий дебалансний збуджувач коливань закріплено на важелі певної довжини вертикально по центру під плитою вібростолу, яка є його робочим органом. При дослідженні були використані методи математичної фізики та фізико-математичне моделювання методами прикладної механіки. Спрощена кінематична модель розглянута як механічна система, що складається з трьох матеріальних тіл, які здійснюють відповідні рухи в одній площині, через що задача про дослідження руху цієї системи перетворилась на двовимірну задачу. В результаті отримано кінетичну енергію вібростолу як суму кінетичних енергій трьох матеріальних тіл у вигляді функціональної залежності від інерціальних і кінематичних характеристик розглянутої механічної системи. В подальшому, визначивши діючі на систему узагальнені сили та склавши математичну модель розглянутого вібропристрою, буде проведено відповідне аналітичне дослідження цієї математичної моделі з метою встановлення оптимальних значень конструктивних параметрів вібраційного столу у напрямку покращення його технологічних можливостей.

**Ключові слова:** вібростіл, важіль, віброзбуджувач, кінетична енергія, амплітуда віброколивань, віброформування, пружний елемент.

**Постановка проблеми**

Сучасний розвиток будівництва потребує впровадження новітніх технологій та встановлення інженерного обладнання за різним призначенням за критеріями мінімізації енергії та високої ефективності виконання технологічного процесу. Існує величезна безліч вібраційних машин, що застосовуються в будівництві, які розрізняються по конструктивному виконанню та за призначенням. Огляд різноманітних конструкцій вібраційного обладнання показує, що при виробництві широкої номенклатури бетонних виробів використовують обладнання з необхідними робочими параметрами, за допомогою яких досягається якісне віброуцільнення бетонної суміші. І, насамперед, слід призначати велику увагу розробленню та впровадженню енергозаощаджувальним технологіям та обладнанню.

Для з'ясування впливу окремих параметрів розробленого малогабаритного обладнання для віброформування бетонних виробів [1] на рух його робочого органу була складена математична модель цієї механічної системи, чисельний аналіз якої виявився надзвичайно складною та громіздкою задачею. Для вирішення цієї проблеми розглянемо

рух спрощеної механічної системи та складемо її математичну модель. Першою дією цього завдання буде визначення кінетичної енергії даної спрощеної механічної системи.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Вібрування є найпоширенішим методом ущільнення бетонних композитів [2,3]. Це пояснюється тим, що в процесі вібраційного впливу на бетонні суміші створюються сприятливі умови тискотропного розрідження та найбільш компактного розміщення частинок заповнювачів [4,5].

У сучасному виробництві для формування бетонних виробів використовують вібраційні машини з гармонійними (круговими коливаннями у вертикальній площині, вертикально й горизонтально направленими коливаннями, просторовими коливаннями) та з ударно-вібраційними (на пружних прокладках, двохмасові з горизонтальними чи вертикальними направленими коливаннями) рухами робочого органу.

Багато досліджень та розробок приділяється питанню виявлення особливостей роботи вібраційних машин, поясненню і застосуванню на практиці своєрідних ефектів, які виникають під час

дії вібрації на механічні системи [6,7,8], розкриваючи при цьому такі переваги вібраційного обладнання, як висока ефективність ущільнення, простота конструкції, висока надійність та відносно невелика металоемність і енергоємність.

До зазначеного вібраційного обладнання відноситься й оригінальна конструкція вібраційного столу для виготовлення малогабаритних бетонних виробів, у якого відцентровий дебалансний збуджувач коливань закріплено на важелі певної довжини  $l_{важ.}$  вертикально по центру під плитою вібростолу, яка є його робочим органом. У роботі [9] ретельно розглянуто й описано складний просторовий рух відповідної механічної системи й визначено її кінетичну енергію.

### Формулювання мети статті

Для підтвердження технологічних можливостей конструкції спроектованого обладнання (вібростіл) з важільним закріпленням віброзбуджувача нами запропоновано розробити його математичну модель, яка б об'єднувала між собою конструктивні і технологічні параметри вібростолу з важільним закріпленням віброзбуджувача, вказуючи їх вплив на амплітуду коливань робочої поверхні віброобладнання. Одержана залежність дозволить проводити математичне моделювання з метою оптимізації перелічених параметрів у напрямку покращення енергозбереження та технологічних можливостей даного вібростолу.

Першим кроком для одержання математичної моделі є визначення кінетичної енергії вібростолу.

Для досягнення цієї мети необхідно виконати наступні завдання.

1. Скласти кінематичну схему спрощеної механічної системи вібростолу з віброзбуджувачем, розміщеним на вертикальному важелі під віброплитою.

2. Визначити кінетичну енергію окремих матеріальних тіл, з яких складається вібростіл.

3. Скласти функціональну залежність загальної кінетичної енергії вібростолу від діючих на нього факторів.

### Виклад основного матеріалу

Вивчаючи роботу та технологічні можливості спроектованого й сконструйованого дослідного зразка вібраційного столу для виготовлення малогабаритних бетонних виробів, візуально й за допомогою відповідних приладів були встановлені всі наявні рухи складових елементів вібростолу. Виявилось, що його однозначне положення в просторі та реальний дійсний рух визначають сім незалежних між собою параметрів [1], через що

механічна система, яка моделює зазначений вібраційний стіл має  $s=7$  ступенів вільності, а математична модель цього столу є системою з семи нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Чисельний аналіз математичної моделі виявляється надзвичайно складною та громіздкою задачею, в якій важко дослідити вплив усіх (або навіть декількох) параметрів на рух й ефективність досліджуваного зразка.

Для з'ясування загальної тенденції руху плити 1, яка за суттю є робочим органом вібростолу, та впливу на цей рух довжини  $l_{важ.}$  важеля 2 розглянемо рух спрощеної механічної системи.

Для цього врахуємо (див. рис. 1 та в [9] рис. 3), що дебаланс 5 механічного збуджувача коливань обертається навколо поздовжньої осі дебалансного вала 4, що проходить через точку  $C_3$  і співпадає (збігається) з центральною поздовжньою віссю корпусу 3 віброзбуджувача.

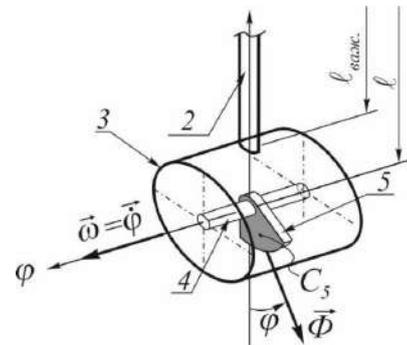


Рис. 1. Дебалансний віброзбуджувач з важелем

У робочому (усталеному) режимі динамічної дії вібростолу дебалансний вал 4, «вийшовши» на паспортну частоту обертання, у загальному випадку згідно з [10] обертається зі змінною кутовою швидкістю

$$\omega_{роб} \approx \omega + \omega_1 \cdot \sin 2\omega t$$

але амплітудне значення змінної частини  $\omega_1$  складає менше 0,5% від середнього значення  $\omega$ . Приймемо, що вал 4 обертається рівномірно з кутовою швидкістю

$$\omega_{роб} = \omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = const$$

вектор якої

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{\varphi}$$

де  $\vec{\varphi}$  – одиничний вектор (орт) осі  $\varphi$  обертання вала 4,  $\varphi = \varphi(t)$  – кут повороту дебалансу 5 навколо осі  $\varphi$ , який в роботі [11] прийнято за одну з узагальнених координат  $q_7 = \varphi$ .

При обертанні дебалансу 5 у фронтальній площині  $Oyz$  генерується відповідна збурююча сила  $\vec{\Phi}_5$ , яка за своєю суттю є головним вектором сил інерції точок цього дебалансу, через що

$$\vec{\Phi}_5 = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\Phi}_{5i},$$

де  $\vec{\Phi}_{5i}$  – сила інерції  $i$ -тої точки.

Згідно з [10] вектор цієї сили,

$$\vec{\Phi}_5 = -m \cdot \vec{a}_{C_5}^{доц},$$

а модуль її за прийнятих припущень у робочому режимі має сталі значення

$$\Phi_5 = m \cdot e \cdot \omega^2,$$

де  $\vec{a}_{C_5}^{доц} = \vec{\omega} \times \vec{V}_{C_5}$  і  $\vec{V}_{C_5}$  – відповідно вектори доцентрового прискорення й обертальної швидкості центра мас  $C_5$  дебалансу 5;  $m$  і  $e$  – його маса й ексцентриситет.

Як відомо з [12] першоджерелом функціонування вібраційного столу, як і будь якого іншого механічного віброобладнання, є дія збурюючої сили  $\vec{\Phi}_5$ , параметри якої повністю визначають структуру, величину й ефективність динамічної дії. Через те що у розглядуваному випадку (див. в [9] рис. 3) ця сила безпосереднього впливу на рух вібростолу у профільній і горизонтальній площинах та на повороти на вібраційні кути  $\alpha$  і  $\psi$  у відповідних площинах не має, то для спрощення подальших міркувань знехтуємо зазначеними переміщеннями, що дозволяє в [11] виключити узагальнені координати  $q_1 = x_C$ ,  $q_4 = \alpha$  і  $q_6 = \psi$ .

Таким чином, спрощена механічна система, що моделює вібраційний стіл для виготовлення малогабаритних бетонних виробів, складається з шести фізичних тіл (рис. 2), кожне з яких рухається в площині  $Oyz$ , й задача про дослідження руху цієї системи перетворюється на двовимірну ( $2D$ ) задачу.

Дослідимо робочий (усталений) режим роботи вібростолу, коли вал 4 обертається з кутовою швидкістю  $\omega = \dot{\varphi} = const$ .

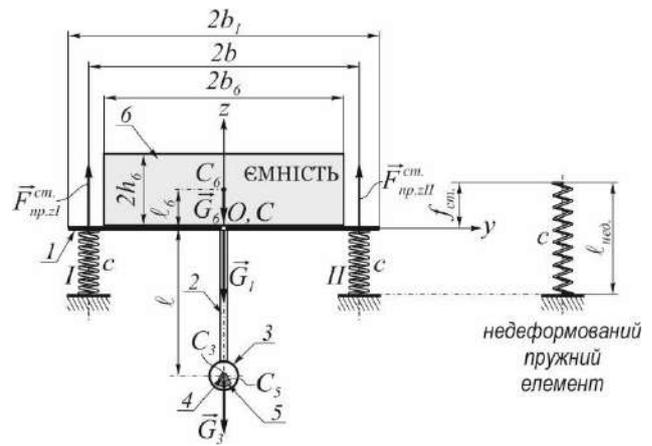


Рис. 2. Механічна система в положенні статичної рівноваги

Плиту 1 будемо моделювати однорідним лінійним абсолютно твердим тілом (стержнем) довжиною  $\ell_1 = 2b_1$  і масою  $m_1$ . Зовнішніми в'язями, що обмежують рух плити, є пружні елементи (пружини I і II), віддалі між вертикальними повздовжніми осями яких  $2b$ . Закріплену на плиті емність разом з бетонною сумішшю, що підлягає формуванню, будемо розглядати як однорідне тверде тіло 6 масою  $m_6$  у формі прямокутника розмірами  $2b_6 \times 2h_6$ , яке жорстко приєднане до плити 1. Збуджувач коливань складається з його корпусу 3, який прийемо за абсолютно тверде однорідне кільце радіуса  $R_3$  і масою  $m_3$ , всередині якого розташований дебалансний вал 4 з закріпленим на ньому дебалансом 5, а вісь  $\varphi$  обертання вала 4 проходить перпендикулярно до площини розташування механічної системи.

При цьому обертання дебалансного вала 4 з закріпленим на ньому дебалансом 5 будемо сприймати як джерело зовнішнього збурення розглядуваної механічної системи визначеною вище силою  $\vec{\Phi}_5$ . З'ясуємо як саме вона діє на цю систему. Згідно з теорією зведення системи сил точкою

прикладання головного вектора  $\sum_{i=1}^{\infty} \vec{\Phi}_{5i}$  сил інерції

точок дебалансу 5 є точка  $C_5$ , але дія цієї сили, як збурюючої сили вимушених коливань механічної системи, передається на корпус 3 через підшипники, якими дебалансний вал 4 закріплений в корпусі. Тому зовнішня по відношенню до досліджуваної механічної системи збурююча сила  $\vec{\Phi}_5$  прикладена безпосередньо до корпусу 3 (як одного з матеріальних тіл цієї системи) у точці  $C_3$ .

Для розв'язання задачі скористаємось рівняннями Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (1)$$

де  $q_1 = q_1(t)$ ,  $q_2 = q_2(t)$ , ...,  $q_s = q_s(t)$  – узагальнені координати, які є сукупністю незалежних між собою параметрів, що однозначно задають положення механічної системи в просторі;

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1(t), \quad \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} = \dot{q}_2(t), \quad ,$$

$$\dot{q}_s = \frac{dq_s}{dt} = \dot{q}_s(t) \quad - \text{ похідні за часом від}$$

узагальнених координат, які є узагальненими швидкостями;  $s$  і  $T$  – відповідно кількість ступенів вільності та кінетична енергія механічної системи;  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  – узагальнені сили;  $Q_i$  – узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті  $q_i$ .

Для визначення положення й опису рухів тіл розглядуваної механічної системи застосуємо три системи координат: нерухому  $Oyz$  і рухомі  $Cy'z'$  та  $Cy_1z_1$ . Початок відліку  $O$  нерухомої системи  $Oyz$  пов'яжемо з центром інерції  $C$  плити  $I$  у положенні статичної рівноваги механічної системи, яке подано на рисунку 2. Початок відліку обох рухомих систем координат рухається разом із точкою  $C$ ; при цьому система  $Cy'z'$  рухається поступально, через що її осі лишаються паралельними осям нерухомої системи координат, а система  $Cy_1z_1$  жорстко пов'язана з плитою  $I$ . У положенні статичної рівноваги всі три системи координат співпадають, а при русі механічної системи точка  $C$  характеризує рух центра інерції плити у нерухомій системі  $Oyz$ .

З нескладного аналізу й прийнятого припущення про збурюючу силу  $\bar{F}_5$  видно, що положення в просторі усіх матеріальних тіл механічної системи, яка моделює вібростіл, однозначно визначають такі незалежні параметри:

- декартові координати  $y_C = y_C(t)$  і  $z_C = z_C(t)$ , які визначають положення центра  $C$  інерції плити  $I$  в нерухомій системі координат  $Oyz$ ;
- кут  $\beta = \beta(t)$ , який визначає положення плити  $I$  в рухомій системі координат  $Cy'z'$ .

Таким чином, механічна система має  $s = 3$  ступені вільності, узагальненими координатами є

$q_2 = y_C$ ,  $q_3 = z_C$  і  $q_5 = \beta$ , а узагальненими швидкостями –  $\dot{q}_2 = \dot{y}_C$ ,  $\dot{q}_3 = \dot{z}_C$  і  $\dot{q}_5 = \dot{\beta}$ .

Для наочності й для подальших міркувань уявімо та зобразимо на рисунку 3 кінематичну схему механічної системи у довільний момент часу  $t$  так, щоб усі узагальнені координати та кут  $\varphi$ , який у цю мить визначає положення точки  $C_5$ , були б додатними, й вважаючи, що у цю мить кожна узагальнена координата збільшується (за такого припущення усі похідні за часом від узагальнених координат також будуть тільки додатними).

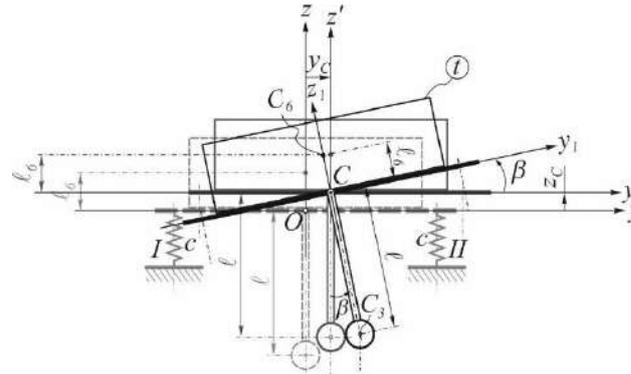


Рис. 3. Кінематична схема механічної системи

Оскільки масами важеля 2 і дебалансного вала 4 нехтуємо (див. [9]), то розглядуване віброобладнання моделюється механічною системою, що складається з трьох матеріальних тіл, кінетична енергія якої

$$T = T_1 + T_3 + T_6, \quad (2)$$

де  $T_1, T_3$  і  $T_6$  – відповідно кінетичні енергії плити  $I$ , корпусу 3 віброзбуджувача і тіла б, яким моделюється ємність (форма) разом з завантаженою в неї бетонною сумішшю.

Для знаходження  $T_1$  оберемо за полюс центр інерції  $C$  плити  $I$ ; тоді, враховуючи, що плита  $I$  здійснює плоскопаралельний рух, за теоремою Кеніга [13]

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot \mathbf{V}_C^2}{2} + \frac{\mathbf{I}_1 \cdot \omega_1^2}{2},$$

де  $\mathbf{V}_C$  – модуль швидкості точки  $C$ ;  $\omega_1 = \dot{\beta}$  – модуль миттєвої кутової швидкості плити  $I$  навколо осі миттєвого обертання, яка в розглядуваному положенні механічної системи проходить через точку  $C$  перпендикулярно до площини розташування механічної системи;  $\mathbf{I}_1$  – осьовий момент інерції плити  $I$  (як однорідного

тонкого абсолютно твердого стержня довжиною  $l_1$ ) відносно зазначеної осі миттєвого обертання, який згідно з [14] дорівнює:

$$I_1 = \frac{m_1 \cdot l_1^2}{12} = \frac{m_1 \cdot (2b_1)^2}{12} = \frac{m_1 \cdot b_1^2}{3}.$$

При координатному способі визначення руху точки [15] при русі точки в площині  $Ouz$  модуль

$$V_C = \sqrt{V_{Cy}^2 + V_{Cz}^2},$$

де  $V_{Cy} = \dot{y}_C$  і  $V_{Cz} = \dot{z}_C$  – проєкції вектора  $\vec{V}_C$  швидкості точки  $C$  на осі нерухомої системи відліку  $Ouz$ ; тоді

$$V_C^2 = \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2.$$

Підставляючи наведені значення, дістаємо, що

$$T_1 = \frac{m_1}{2} \cdot (\dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{m_1 \cdot b_1^2}{6} \cdot \dot{\beta}^2. \quad (3)$$

Міркуючи аналогічно до викладеного, встановлюємо, що

$$T_3 = \frac{m_3 \cdot V_{C_3}^2}{2} + \frac{I_3 \cdot \omega_3^2}{2},$$

де  $V_{C_3}$  – модуль швидкості точки  $C_3$ ;  $\omega_3$  – модуль миттєвої кутової швидкості корпусу  $3$  навколо осі його миттєвого обертання, яка в розглядуваному положенні механічної системи проходить через точку  $C_3$  перпендикулярно до площини розташування механічної системи;  $I_3$  – осьовий момент інерції корпусу  $3$  (як однорідного абсолютно твердого кільця радіуса  $R_3$ ) відносно зазначеної осі миттєвого обертання, який згідно з [14] дорівнює:

$$I_3 = m_3 \cdot R_3^2.$$

Оскільки плита  $1$ , важіль  $2$  і корпус  $3$  вібробудувача з'єднані жорстко, то за поняттями теоретичної механіки ці три різні фізичні тіла є одним матеріальним тілом, через що

$$\omega_3 = \omega_1 = \dot{\beta}.$$

Враховуючи плоскопаралельний рух корпусу  $3$ , за теоремою про швидкості точок при плоскопаралельному русі [16] вектор

$$\vec{V}_{C_3} = \vec{V}_C + \vec{V}_{CC_3},$$

де  $\vec{V}_C$  – вектор швидкості точки  $C$ , яку, розглядаючи плоскопаралельний рух корпусу  $3$ , обираємо за полюс;  $\vec{V}_{CC_3}$  – вектор лінійної швидкості точки  $C_3$  в обертальному русі корпусу  $3$  навколо обраного полюса  $C$ .

Для спрощення доволі складних і громіздких подальших обчислень застосуємо координатний спосіб визначення руху і його кінематичних характеристик і скористаємося рисунком 4, з якого очевидно, що модуль

$$V_{CC_3} = l \cdot \omega_3 = l \cdot \dot{\beta},$$

де  $l = CC_3 = l_{важ.} + R_3$  – радіус обертання точки  $C_3$  навколо полюса  $C$ , а вектори

$$\vec{V}_C = \vec{j} \cdot \dot{y}_C + \vec{k} \cdot \dot{z}_C,$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{CC_3} &= \vec{j} \cdot V_{CC_3} \cdot \cos \beta + \vec{k} \cdot V_{CC_3} \cdot \sin \beta = \\ &= \vec{j} \cdot l \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta + \vec{k} \cdot l \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta, \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{C_3} = \vec{j} \cdot (\dot{y}_C + l \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta) + \vec{k} \cdot (\dot{z}_C + l \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta).$$

Підносячи до квадрату отриманий вираз, дістанемо, що

$$\begin{aligned} V_{C_3}^2 &= \dot{y}_C^2 + 2 \cdot l \cdot \dot{y}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta + l^2 \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \cos^2 \beta + \\ &+ \dot{z}_C^2 + 2 \cdot l \cdot \dot{z}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta + l^2 \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \sin^2 \beta, \end{aligned}$$

а після відповідних перетворень

$$\begin{aligned} V_{C_3}^2 &= \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2 + 2 \cdot l \cdot \dot{y}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta + \\ &+ 2 \cdot l \cdot \dot{z}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta + l^2 \cdot \dot{\beta}^2. \end{aligned}$$

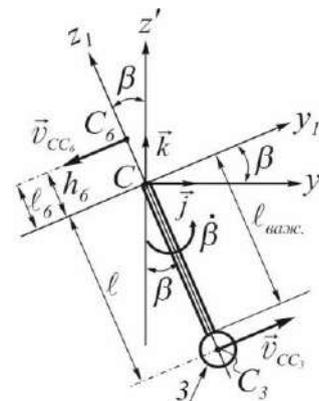


Рис. 4. Швидкості точок  $C$ ,  $C_3$  і  $C_6$

Підставляючи знайдені значення у формулу кінетичної енергії  $T_3$  корпусу  $3$  вібробудувача та перетворюючи, дістанемо

$$T_3 = \frac{m_3}{2} \cdot (\dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + m_3 \cdot \ell \cdot \dot{y}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta +$$

$$+ m_3 \cdot \ell \cdot \dot{z}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta + \frac{m_3 \cdot (\ell^2 + R_3^2)}{2} \cdot \dot{\beta}^2. \quad (4)$$

Аналогічно до визначення  $T_3$  послідовно встановлюємо, що

$$T_6 = \frac{m_6 \cdot \mathbf{V}_{C_6}^2}{2} + \frac{\mathbf{I}_6 \cdot \omega_6^2}{2},$$

де  $\mathbf{I}_6$  – осьовий момент інерції тіла  $b$  (як однорідного абсолютно твердого прямокутника розмірами  $2b_6 \times 2h_6$ ), який згідно з [14] дорівнює:

$$\mathbf{I}_6 = \frac{m_6 \cdot [(2b_6)^2 + (2h_6)^2]}{12} = \frac{m_6 \cdot (b_6^2 + h_6^2)}{3},$$

$$\omega_6 = \omega_l = \dot{\beta},$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{C_6} = \bar{\mathbf{V}}_C + \bar{\mathbf{V}}_{CC_6},$$

$$\mathbf{V}_{CC_6} = \ell_6 \cdot \omega_6 = h_6 \cdot \dot{\beta},$$

де  $\ell_6 = CC_6 = h_6$  – радіус обертання точки  $C_6$  навколо полюса  $C$  (див. рис. 4),

$$\bar{\mathbf{V}}_{CC_6} = -\bar{j} \cdot \mathbf{V}_{CC_6} \cdot \cos \beta - \bar{k} \cdot \mathbf{V}_{CC_6} \cdot \sin \beta =$$

$$= -\bar{j} \cdot h_6 \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta - \bar{k} \cdot h_6 \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta,$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{C_6} = \bar{j} \cdot (\dot{y}_C - h_6 \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta) + \bar{k} \cdot (\dot{z}_C - h_6 \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta),$$

$$\mathbf{V}_{C_6}^2 = \dot{y}_C^2 - 2 \cdot h_6 \cdot \dot{y}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta + h_6^2 \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \cos^2 \beta +$$

$$+ \dot{z}_C^2 - 2 \cdot h_6 \cdot \dot{z}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta + h_6^2 \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \sin^2 \beta,$$

$$\mathbf{V}_{C_6}^2 = \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2 - 2 \cdot h_6 \cdot \dot{y}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta -$$

$$- 2 \cdot h_6 \cdot \dot{z}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta + h_6^2 \cdot \dot{\beta}^2,$$

$$T_6 = \frac{m_6}{2} \cdot (\dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) - m_6 \cdot h_6 \cdot \dot{y}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta -$$

$$- m_6 \cdot h_6 \cdot \dot{z}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta + \frac{m_6 \cdot (b_6^2 + 4h_6^2)}{6} \cdot \dot{\beta}^2. \quad (5)$$

Підставляючи значення (3), (4) і (5) у формулу (2) та здійснюючи легітимні перетворення, дістанемо кінетичну енергію досліджуваного вібраційного столу у вигляді суми п'яти доданків:

$$T = \frac{M}{2} \cdot \dot{y}_C^2 + \frac{M}{2} \cdot \dot{z}_C^2 + (m_3 \cdot \ell - m_6 \cdot h_6) \cdot \dot{y}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta +$$

$$+ (m_3 \cdot \ell - m_6 \cdot h_6) \cdot \dot{z}_C \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta + \frac{1}{2} \cdot \dot{\beta}^2 \quad (\text{Дж}), \quad (6)$$

де  $M = m_1 + m_3 + m_6$  – загальна маса вібростолу, рух якого генерує обертання дебалансу

$$5 \quad \text{масою} \quad m;$$

$$\mathbf{I} = \frac{m_1 \cdot b_1^2 + 3m_3 \cdot (R_3^2 + \ell^2) + m_6 \cdot (b_6^2 + 4h_6^2)}{3} \quad -$$

зведений момент інерції рухомої частини вібростолу відносно осі, що в розглядуваному положенні механічної системи проходить через точку  $C$  перпендикулярно до площини розташування системи.

## Висновки

Обравши спрощену конструктивну схему моделі вібростолу з важільним закріпленням вібробуджувача та використавши рівняння Лагранжа другого роду, визначена його кінетична енергія. В подальшому, визначивши діючі узагальнені сили, в результаті матимемо можливість скласти математичну модель, яка об'єднає між собою конструктивні та технологічні параметри з важільним закріпленням вібробуджувача, вказуючи їх вплив на амплітуду коливань робочої поверхні вібростолу.

Розв'язавши математичну модель, матимемо змогу визначити ефективність вібраційної дії досліджуваного вібростолу та остаточно встановити вплив довжини важеля на цю ефективність.

Викладене у останньому абзаці є предметом подальшої науково-дослідної роботи, результати якої будуть висвітлені у наступних різноманітних роботах авторів.

## Література

1. Коротич Ю. Ю. Обґрунтування параметрів малогабаритного обладнання для віброформування бетонних виробів : дис... д-ра філос. : 133; 13. Полтава, 2023. 177 с. <http://reposit.nupp.edu.ua/handle/PoltNTU/14134>.
2. Назаренко І. І. Вібраційні машини і процеси будівельної індустрії : навч. посіб. Київ : КНУБА, 2007. 230 с.
3. Дудар І. Н. Теоретичні основи технології виробів із пресованих бетонів : монографія. Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. 89 с.
4. Ручинський М. М., Свідерський А. Г., Д'яченко О. С. Огляд і аналіз існуючих режимів уцілювання бетонних сумішей. Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта : матеріали XX міжнар. наук.-практ. конф. (10 – 13 верес., м. Херсон). Київ : НТУ «КП», 2019. DOI: [10.20535/2409-7160.2019.XX.175190](https://doi.org/10.20535/2409-7160.2019.XX.175190).
5. Назаренко І. І., Ручинський М. М. Фізичні основи механіки будівельних матеріалів. Львів : Афіша, 2002. 128 с.
6. Дворкін Л. Й., Дворкін О. Л., Гарніцький Ю. В. Проектування складів бетону із заданими властивостями. Рівне : Вид-во РДТУ, 2000. 215 с.

7. Nesterenko M. P., Molchanov P. O. Study of vibrations of plate of oscillation cassette setting as active working organ. *Problems of energy and nature use 2013 : conf. reports materials. Budapest, 2014. P. 146–151.*
8. Конструкційні матеріали нового покоління та технології їх впровадження у будівництво : монографія / П. Ф. Рунова та ін. Київ : ЕксОб, 2008. 360 с.
9. Korobko B., Zhyhylii S., Korotych Y. Determination of the vibrating table kinetic energy. *Academic journal Industrial Machine Building, Civil Engineering. 2022. No. 2 (59). P. 17–26. DOI: [10.26906/znp.2022.59.3095](https://doi.org/10.26906/znp.2022.59.3095).*
10. Zhyhylii S., Reznichenko A. Creation and research of mathematical model of controlled mechanical centrifugal unbalance vibration exciter UVV-04. *Academic journal Industrial Machine Building, Civil Engineering. 2016. No. 2 (47). P. 39–46.*
11. Korotych Y. Determination of generalized vibration table forces. *Academic journal Industrial Machine Building, Civil Engineering. 2023. No. 1 (60). P. 5–11. DOI: [10.26906/znp.2023.60.3108](https://doi.org/10.26906/znp.2023.60.3108).*
12. Zhyhylii S. M., Kharchenko M. O., Katella J. O. Mathematical model of the dynamic action of the controlled vibration exciter on the processed medium of mixer with toroidal working container. *International Journal of Engineering & Technology. Vol. 7, No. 3.2, 2018. P. 478–485. DOI: [10.14419/ijet.v7i3.2.14576](https://doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.14576).*
13. Seely F. B., Ensign N. E. *Analytical mechanics for engineers. 3d ed., rewritten. New York : John Wiley & Sons, 1921. 488 p.*
14. Павловський М.А. Теоретична механіка : підручник. Київ : Техніка, 2002. 512 с.
15. Жигилій С. М. Кінематика точки : курс лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» для студ. техн. спец. усіх форм навчання. Полтава : ПолтНТУ, 2017. 194 с.
16. Beer F. P., Johnston E. R., Jr., Mazurek D. F. *Vector mechanics for engineers: statics and dynamics. 10th ed. New York : McGraw-Hill Comp., 2013. 1360 p.*

### References

1. Korotych, Y. Y. (2023). *Justification of Parameters of Small-Sized Equipment for Vibroforming Concrete Products*. [Ph.D. dissertation. Poltava National Yuri Kondratyuk National University]. Repository of the Yuri Kondratyuk National University. <http://reposit.nupp.edu.ua/handle/PolNTU/14134>.
2. Nazarenko, I. I. (2007). *Vibration machines and processes of the construction industry*. KNUBA Publ.
3. Dudar, I. N. (2006). *Theoretical foundations of the technology of products from pressed concrete*. UNIVERSUM-Vunnytsia.
4. Ruchinsky, M.M., Svidersky, A.G., & D'yachenko O.S. (2019). Review and analysis of existing modes of compaction of concrete mixtures. In *Progressive technique, technology and engineering education (XX)*. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. DOI: [10.20535/2409-7160.2019.XX.175190](https://doi.org/10.20535/2409-7160.2019.XX.175190).
5. Nazarenko, I. I., & Ruchinsky, M. M. (2002). *Physical Foundations of Building Materials Mechanics*. Afisha.
6. Dvorkin, L. Y., Dvorkin, O. L., & Harnitsky, Y. V *Design of concrete compositions with specified properties*. RDTU Publ.
7. Nesterenko, M. P., & Molchanov, P.O. (2014). Study of vibrations of plate of oscillation cassette setting as active working organ. In *Problems of energy and nature use 2013 : conference reports materials* (pp. 146–151). Budapest.
8. Runova, R. F., Gots, V. I., Nazarenko, I. I., Sivko, V. Y., & Shylyuk, P. S. (2008). *Structural materials of the new generation and technologies of their implementation in construction*. EksOb.

9. Korobko, B., Zhyhylii, S., & Korotych Y. (2022). Determination of the Vibrating Table Kinetic Energy. *Academic Journal Industrial Machine Building, Civil Engineering*, 2(59), 17–26. DOI: [10.26906/znp.2022.59.3095](https://doi.org/10.26906/znp.2022.59.3095).
10. Zhyhylii S., & Reznichenko, A. (2016). Creation and Research of Mathematical Model of Controlled Mechanical Centrifugal Unbalance Vibration Exciter UVV-04. *Academic Journal Industrial Machine Building, Civil Engineering*, 2(47). 39–46.
11. Korotych Y. (2023). Determination of Generalized Vibration Table Forces. *Academic Journal Industrial Machine Building, Civil Engineering*, 1(60), 5–11. DOI: [10.26906/znp.2023.60.3108](https://doi.org/10.26906/znp.2023.60.3108).
12. Zhyhylii S. M., Kharchenko, M. O., & Katella J. O. (2018). Mathematical model of the dynamic action of the controlled vibration exciter on the processed medium of mixer with toroidal working container. *International Journal of Engineering & Technology*, 7(3.2), 478–485. DOI: [10.14419/ijet.v7i3.2.14576](https://doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.14576).
13. Seely, F. B., & Ensign, N. E. (1921). *Analytical mechanics for engineers*. 3d ed., rewritten. John Wiley & Sons.
14. Pavlovskiy, M. A. (2002). *Theoretical Mechanics*. Tekhnika.
15. Zhyhylii, S. M. (2017). *Kinematics of a Point: Lecture Course on the Subject 'Theoretical Mechanics' for Students of Technical Specialties of All Forms of Education*. PoltNTU.
16. Beer F. P., Johnston, E. R., Jr., Mazurek, D. F., & Cornwell, Ph. J. (2013). *Vector mechanics for engineers: statics and dynamics*. 10th ed. McGraw-Hill.

**Автор:** КОРОБКО Богдан Олегович,  
доктор технічних наук, професор, доцент кафедри  
галузевого машинобудування та мехатроніки,  
Національний університет «Полтавська  
політехніка імені Юрія Кондратюка»  
Bogdan KOROBKO,  
D.t.s., Professor, Associate Professor of the Department  
of branch machinery and mechatronics  
National University «Yuri Kondratyuk Poltava  
Polytechnic»  
E-mail – [korobko@pntu.edu.ua](mailto:korobko@pntu.edu.ua),  
ID ORCID: 0000-0002-9086-3904

**Автор:** КОРОТИЧ Юрій Юрійович,  
доктор філософії, доцент кафедри галузевого  
машинобудування та мехатроніки,  
Національний університет «Полтавська  
політехніка імені Юрія Кондратюка»  
Yurii KOROTYCH,  
PhD, Associate Professor of the Department of branch  
machinery and mechatronics  
National University «Yuri Kondratyuk Poltava  
Polytechnic»  
E-mail – [korotitch.iury@ukr.net](mailto:korotitch.iury@ukr.net),  
ID ORCID: 0000-0002-1961-5318

**Автор:** ЖИГИЛІЙ Сергій Михайлович,  
кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри  
будівельних конструкцій,  
Національний університет «Полтавська  
політехніка імені Юрія Кондратюка»  
Serhii ZHYHYLIY,  
PhD, Associate Professor, Associate Professor of the  
Department of Building Structures

National University «Yuri Kondratyuk Poltava  
Polytechnic»  
E-mail – [theormech.zhs@gmail.com](mailto:theormech.zhs@gmail.com)  
ID ORCID [0000-0001-5829-9226](https://orcid.org/0000-0001-5829-9226)

## KINETIC ENERGY OF A SIMPLIFIED KINEMATIC MODEL OF A VIBRATING TABLE WITH A LEVER-MOUNTED UNBALANCED VIBRATION EXCITER

B. Korobko<sup>1</sup>, Y. Korotych<sup>1</sup>, S. Zhyhylii<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> National University «Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic»

*Modern construction production for forming concrete products is equipped with various vibrating machines. Much research and development devoted to identifying the features of these machines' operation, explaining, and applying in practice certain effects that vibration causes on the treated medium. The mentioned forming machines also include a uniquely designed vibrating table for producing small-sized concrete products, where a mechanical centrifugal unbalance vibration exciter is fixed on a lever of a certain length  $\ell_{\text{в.а.ж.}}$  vertically in the center under the vibrating table plate, which is its working body. The mathematical model of such a vibrating table is quite cumbersome and difficult for its optimization analysis. This article discusses a simplified kinematic model of said vibrating table. In this case, according to the accepted legitimate assumptions, the mechanical system modeling a real vibrating table consists of three material bodies, has three degrees of freedom, and its motion is determined by three generalized coordinates. All characteristics of the disturbing force generated by the vibration exciter's imbalance during its rotation in the operating mode have been established.*

*Since the study's planned goal is to obtain a mathematical model describing this mechanical system's motion using Lagrange equations of the second kind, the initial stage requires finding the system's kinetic energy, which is done in this work. The motion type of each mechanical system body is established, and according to Koenig's theorem, using the coordinate method for determining kinematic characteristics and elements of vector calculus, the kinetic energy of each body is found. The total kinetic energy of the mechanical system is defined as the sum of these bodies' kinetic energies, expressed as a functional dependence on the system's inertial and kinematic characteristics.*

*In further research, it is planned to find the generalized forces of the mechanical system corresponding to the generalized coordinates using the Lagrange equations of the second kind, to make a mathematical model of the vibrating table and to conduct an appropriate analytical study of this model in order to establish the optimal value of the length  $\ell_{\text{в.а.ж.}}$  lever and the effect of this length on other technological characteristics of the vibrating table.*

**Keywords:** vibrating table, lever, vibration exciter, kinetic energy, amplitude of vibration, vibration forming, elastic element.