

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет  
«Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

Кафедра автоматики, електроніки та телекомунікацій

**Лєві Л.І., доктор технічних наук, професор**  
**Кислиця С.Г., кандидат технічних наук, доцент**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**  
ДО ЛАБОРАТОРНИХ ТА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ  
З ДИСЦИПЛІНИ  
**«ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ»**

Для студентів другого (магістерського) рівня вищої освіти  
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»  
денної, заочної та дистанційної форм навчання

Полтава 2025

УДК 681.513:62-58

*Рецензенти:*

**Любчик Л.М.**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних Національного технічного університету України «Харківський політехнічний інститут»;

**Шефер О.В.**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматики, електроніки та телекомунікацій Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка».

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»  
Протокол № 3 від 20 лютого 2025 р.*

**Леві Л.І., Кислиця С.Г.**

Навчальний посібник до лабораторних та практичних занять з дисципліни «Експериментальні методи досліджень» для студентів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної, заочної та дистанційної форм навчання / Л.І. Леві, С.Г. Кислиця; за заг. ред. Л.І. Леві. – Полтава: Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», 2025. – 100 с.

Навчальний посібник підготовлено відповідно до затвердженої програми навчальної дисципліни «Експериментальні методи досліджень» для студентів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної, заочної та дистанційної форм навчання. Цей посібник призначений для проведення лабораторних та практичних занять за темами «Вимірювання індуктивності, взаємодукції, ємності, потужності та частоти», «Магнітні вимірювання», «Випадкові величини. Закони розподілу випадкових величин», «Класифікація похибок вимірювання», «Будова та основні характеристики асинхронних виконавчих двигунів автоматики», «Виконавчі двигуни з амплітудним керуванням», «Асинхронні виконавчі двигуни з фазовим та амплітудно-фазовим керуванням», «Обробка результатів вимірювання випадкових величин, «Виявлення «промахів» при прямих вимірюваннях», «Визначення абсолютних та відносних похибок при непрямих вимірюваннях» та отримання теоретичних та практичних знань із зазначених розділів.

© Л.І. Леві, С.Г. Кислиця

**ЗМІСТ**

ВСТУП .....	4
ТЕМА 1. ВИМІРЮВАННЯ ІНДУКТИВНОСТІ, ВЗАЄМОІНДУКЦІЇ, ЄМНОСТІ, ПОТУЖНОСТІ ТА ЧАСТОТИ .....	5
ТЕМА 2. МАГНІТНІ ВИМІРЮВАННЯ .....	24
ТЕМА 3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН .....	44
ТЕМА 4. КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ .....	54
ТЕМА 5. БУДОВА ТА ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИКОНАВЧИХ АСИНХРОННИХ ДВИГУНІВ АВТОМАТИКИ .....	68
ТЕМА 6. ВИКОНАВЧІ ДВИГУНИ З АМПЛІТУДНИМ КЕРУВАННЯМ ....	73
ТЕМА 7. ВИКОНАВЧІ АСИНХРОННІ ДВИГУНИ З ФАЗОВИМ ТА АМПЛІТУДНО-ФАЗОВИМ КЕРУВАННЯМ .....	80
ТЕМА 8. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ВИЯВЛЕННЯ «ПРОМАХІВ» ПРИ ПРЯМИХ ВИМІРЮВАННЯХ .....	88
ТЕМА 9. ВИЗНАЧЕННЯ АБСОЛЮТНИХ ТА ВІДНОСНИХ ПОХИБОК ПРИ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАННЯХ .....	94
ЛІТЕРАТУРА .....	98

## ВСТУП

Навчальний посібник підготовлено відповідно до затвердженої програми навчальної дисципліни «Експериментальні методи досліджень» для студентів другого (магістерського) рівня вищої освіти галузі знань 14 «Електрична інженерія» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної, заочної та дистанційної форм навчання. Цей посібник призначений для проведення лабораторних та практичних занять за темами «Вимірювання індуктивності, взаємоіндукції, ємності, потужності та частоти», «Магнітні вимірювання», «Випадкові величини. Закони розподілу випадкових величин», «Класифікація похибок вимірювання», «Будова та основні характеристики асинхронних виконавчих двигунів автоматики», «Виконавчі двигуни з амплітудним керуванням», «Асинхронні виконавчі двигуни з фазовим та амплітудно-фазовим керуванням», «Обробка результатів вимірювання випадкових величин. Виявлення «промахів» при прямих вимірюваннях», «Визначення абсолютних та відносних похибок при непрямих вимірюваннях» та отримання теоретичних та практичних знань із зазначених розділів.

Специфіка навчальної дисципліни «Експериментальні методи досліджень» обумовлює доцільність тематичної структури даного навчального посібника.

## ТЕМА 1

## ВИМІРЮВАННЯ ІНДУКТИВНОСТІ, ВЗАЄМОІНДУКЦІЇ, ЄМНОСТІ, ПОТУЖНОСТІ ТА ЧАСТОТИ

### I. Вимірювання індуктивності.

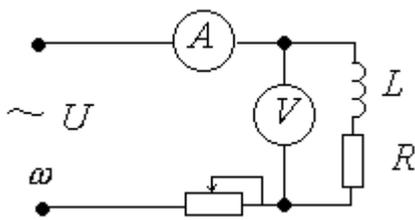
При виборі методу вимірювань і виконанні вимірів необхідно мати на увазі, що індуктивність  $L$  і взаємна індукція  $M$  можуть залежати від сили струму, напруги та від зовнішніх електромагнітних полів, а ємність  $C$  – від частоти змінного струму, напруги та температури.

Якщо той або інший фактор впливає на вимірювану величину і ним не можливо знехтувати, то при вимірюванні потрібно створити ті ж умови, в котрих вимірюваний об'єкт буде знаходитись при його експлуатації.

Якщо залежність між фактором впливу і вимірюваною величиною відома, то вимірювання можна проводити в будь-яких умовах, але після вимірів зробити відповідний перерахунок. (Наприклад температурна залежність опору провідника, крива намагнічування феромагнетиків).

#### 1. Вимірювання індуктивності методом амперметра та вольтметра.

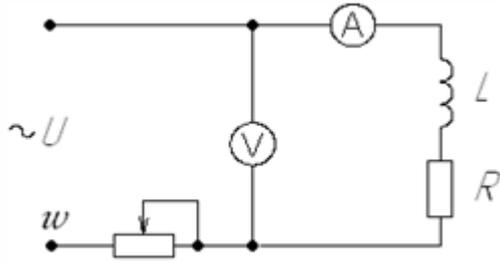
Знаючи частоту джерела змінної напруги  $\omega$  і вимірюючи напругу  $U$  та струм  $I$ , визначають повний опір  $Z$ , а потім індуктивність розраховується за



формулою:

$$z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2};$$



$$Z = \frac{U_V - U_A}{I_A} = \frac{U_V - I_A \cdot R_A}{I_A} = \frac{U_V}{I_A} - R_A$$

Треба відмітити, що форма кривої напруги повинна бути практично синусоїдальною.

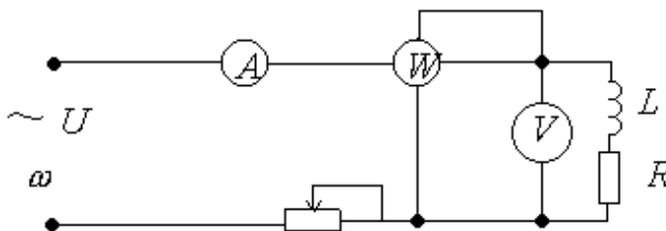
Точність вимірювання цим методом низька, оскільки похибки всіх приладів підсумовуються.

## 2. Вимірювання індуктивності методом ватметра.

Визначаються активний та повний опори навантаження. Потім за формулою визначають індуктивність L:

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2}$$

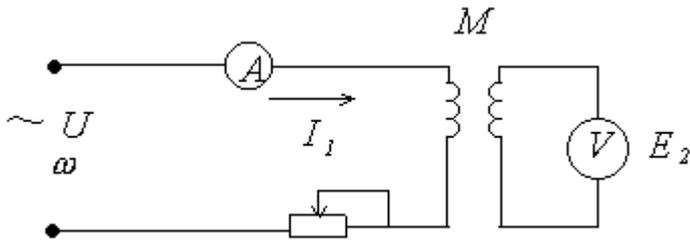
$$R = \frac{P}{I^2} \quad Z = \frac{U}{I}$$



Точність вимірів в даному випадку є низькою.

### 3. Вимірювання взаємодукції М.

#### а) Метод амперметра і вольтметра.



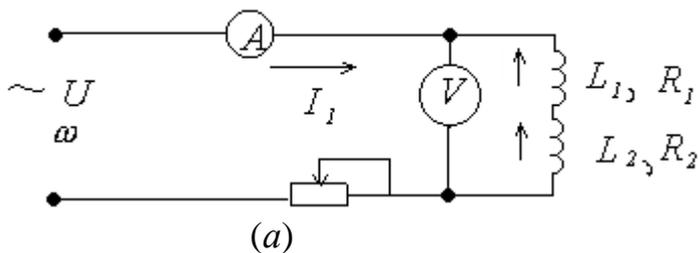
Вимірювання ЕДС  $E_2$  треба проводити електростатичним вольтметром (для зменшення похибки вимірів).

#### б) Метод послідовного з'єднання котушок.

При узгодженому ввімкненні котушок їх загальна індуктивність дорівнює:

$$L_a = L_1 + L_2 + 2 \cdot M, \quad (1.1)$$

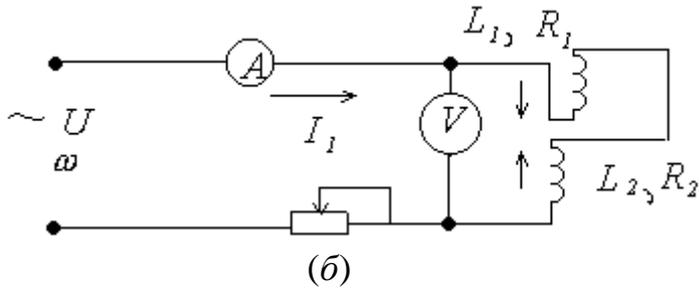
і її можна визначити методом амперметра і вольтметра.



При зустрічному ввімкненні котушок (б) їх загальна індуктивність дорівнює:

$$L_6 = L_1 + L_2 - 2 \cdot M. \quad (1.2)$$

Її також можна визначити методом амперметра і вольтметра:



Віднімаючи почленно рівняння (1.1) та (1.2), отримаємо:

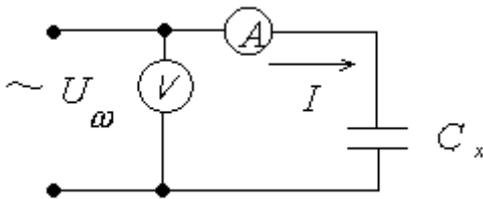
$$L_a - L_{\sigma} = 4 \cdot M, \text{ або}$$

$$M = \frac{L_a - L_{\sigma}}{4}$$

## II. Вимірювання ємності змінним струмом.

### а) Метод амперметра і вольтметра.

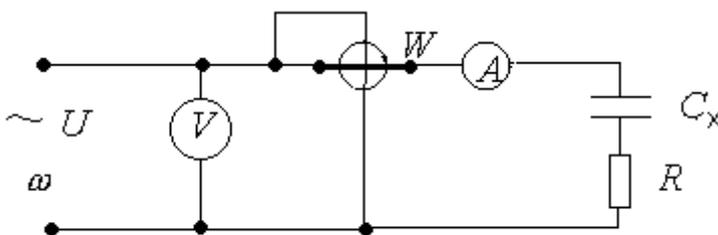
Вимірюючи  $U$ ,  $I$  та  $\omega$ , визначаємо  $C_x$ :



$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega \cdot C_x} \Rightarrow C_x = \frac{I}{U \cdot \omega}$$

При цих вимірах втратами в діелектрику нехтують. Напряга повинна бути синусоїдальною.

### б) Метод ватметра.



$$R = \frac{P}{I^2}$$

$$z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C_x}\right)^2}$$

$$C_x = \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{z^2 - R^2}} = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - \left(\frac{P}{I^2}\right)^2}} = \frac{I^2}{\omega \sqrt{U^2 \cdot I^2 - P^2}}$$

Потужність втрат в конденсаторі дорівнює:

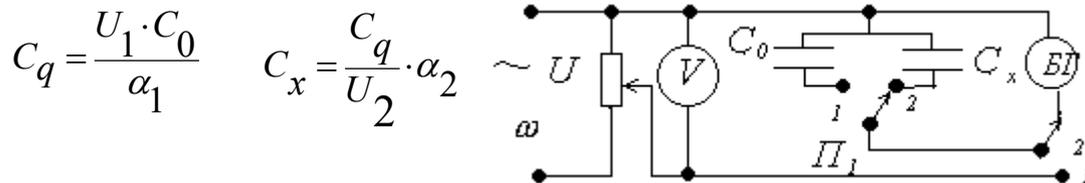
$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = I^2 \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_x} \cdot \operatorname{tg} \delta$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{P}{I^2 \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_x}} = \frac{P \cdot \omega \cdot C_x}{I^2}$$

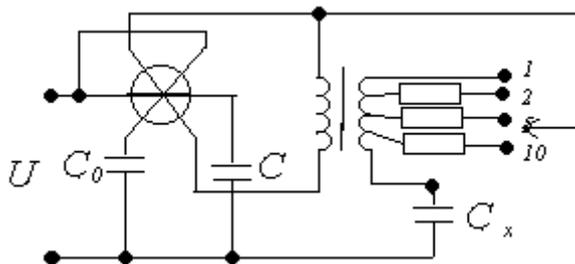
Вимірювання потужності втрат в конденсаторі не завжди можливо, оскільки вона мала. Тоді використовують мостові методи.

**Вимірювання ємності можна провести методом порівняння з еталонною ємністю  $C_0$ .**

**а) Балістичним гальванометром.**



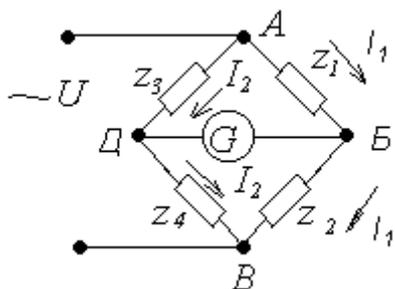
**б) Електродинамічним логометром.**



### III. Вимірювання індуктивності, взаємодукції та ємності методами і приладами порівняння.

Мостові методи вимірювання забезпечують більшу точність вимірів. Умови рівноваги моста змінного струму: якщо гальванометр  $G$  на нулі, то потенціали точок  $B$  і  $D$  рівні, і тоді можна записати:

$$\begin{cases} I_1 \cdot z_1 = I_2 \cdot z_3 \\ I_1 \cdot z_2 = I_2 \cdot z_4 \end{cases}$$



Поділивши почленно ці рівняння, отримаємо:

$$z_1 \cdot z_4 = z_2 \cdot z_3 \quad (1.3)$$

або рівняння (1.3) в показниковій формі;

$$z_1 \cdot z_4 \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_4)} = z_2 \cdot z_3 \cdot e^{j \cdot (\varphi_2 + \varphi_3)}$$

або

$$\begin{cases} |z_1| \cdot |z_4| = |z_2| \cdot |z_3| \\ \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \end{cases} \quad (1.4)$$

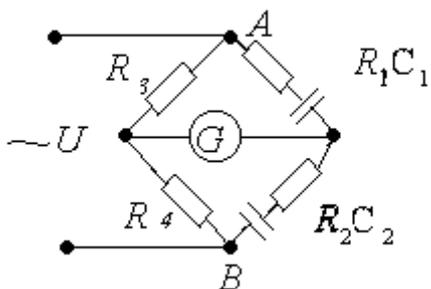
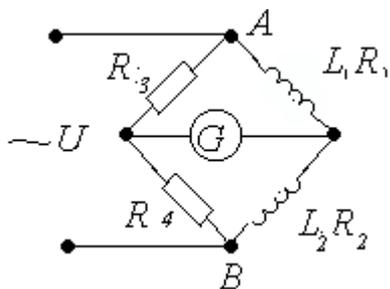
**Висновок:** рівновага моста змінного струму визначається двома рівняннями (1.4), тому для досягнення рівноваги необхідно регулювати не менше двох параметрів моста.

Знайшли використання такі схеми мостів:

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \implies$$

$$\varphi_3 = \varphi_4 = 0$$

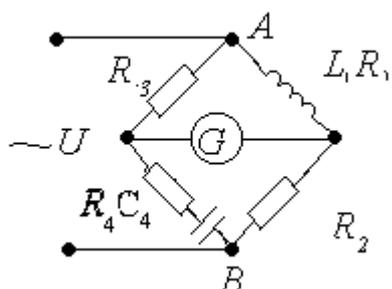
Тут і далі у вимірюваннях опори  $R$  у мостах безреактивні, тобто  $\varphi = 0$



$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$$

$$\varphi_3 = \varphi_4 = 0$$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$



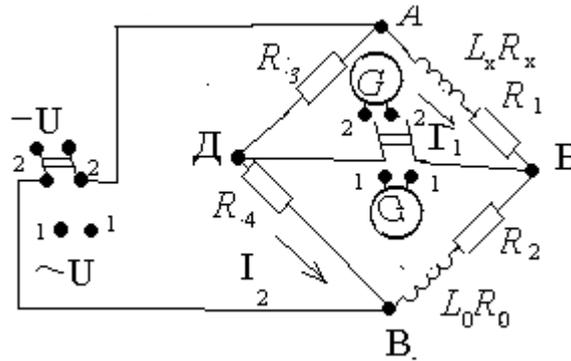
$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 = 0$$

$$\varphi_1 = -\varphi_4$$

### Вимірювання індуктивності мостом.

1) Вимірювання індуктивності мостом шляхом порівняння її із зразковою індуктивністю ( $L_0$ ).



Загальна умова рівноваги моста має такий вигляд:

$$[(R_1 + R_x) + j \cdot \omega \cdot L_x] \cdot R_4 = [(R_2 + R_0) + j \cdot \omega \cdot L_0] \cdot R_3.$$

Звідки виходять дві умови рівноваги моста:

$$(R_1 + R_x) \cdot R_4 = (R_2 + R_0) \cdot R_3 \Rightarrow \frac{R_1 + R_x}{R_2 + R_0} = \frac{R_3}{R_4} \quad (1.5)$$

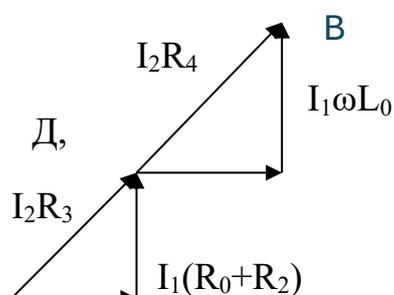
$$R_4 \cdot j \cdot \omega \cdot L_x = R_3 \cdot j \cdot \omega \cdot L_0 \Rightarrow \frac{L_x}{L_0} = \frac{R_3}{R_4} \quad (1.6)$$

Регулювання моста проводять на постійному та змінному струмах. Спочатку ставлять перемикачі в положення 2 - 2 і регулюють опори  $R_3$  та  $R_4$  на постійному струмові до отримання мінімальних показів гальванометра. Потім ставлять перемикачі в положення 1 - 1 і регулюють опори  $R_1$  та  $R_2$ , також намагаючись отримати найменше відхилення гальванометра. Після декількох регулювань  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  та  $R_4$  міст урівноважують на постійному та змінному струмах,  $L_x$  визначають із співвідношення (1.6):

$$L_x = L_0 \frac{R_3}{R_4}.$$

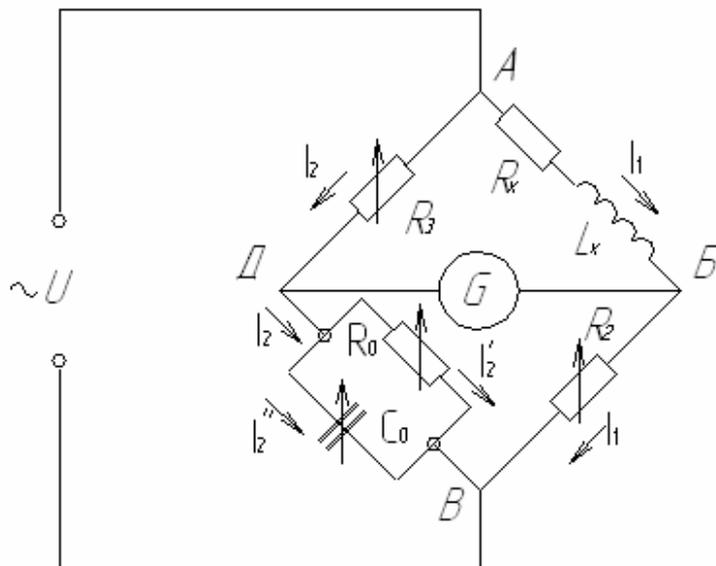
При низькій частоті  $\omega$  добротності плечей моста  $\frac{\omega \cdot L_x}{R_x + R_1}$  і  $\frac{\omega \cdot L_0}{R_0 + R_2}$  малі і міст має низьку збіжність.

Векторна діаграма урівноваженого моста має вигляд:



## 2) Вимірювання індуктивності мостом шляхом порівняння її з зразковою ємністю ( $C_0$ ).

Опір плечей моста визначається співвідношеннями:



Опір плечей моста визначається співвідношеннями:

$$z_1 = R_x + j \cdot \omega \cdot L_x; \quad z_2 = R_2;$$

$$z_3 = R_3.$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2$$

$$z_4 = \frac{R_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_0}}{R_0 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_0}} = \frac{R_0}{1 + j \cdot \omega \cdot C_0 \cdot R_0};$$

Загальний вираз балансу моста має вигляд:

$$R_2 \cdot R_3 = \frac{R_0 \cdot (R_x + j \cdot \omega \cdot L_x)}{1 + j \cdot \omega \cdot C_0 \cdot R_0} \Rightarrow \frac{R_x + j \cdot \omega \cdot L_x}{R_2} = \frac{R_3 \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot C_0 \cdot R_0)}{R_0}$$

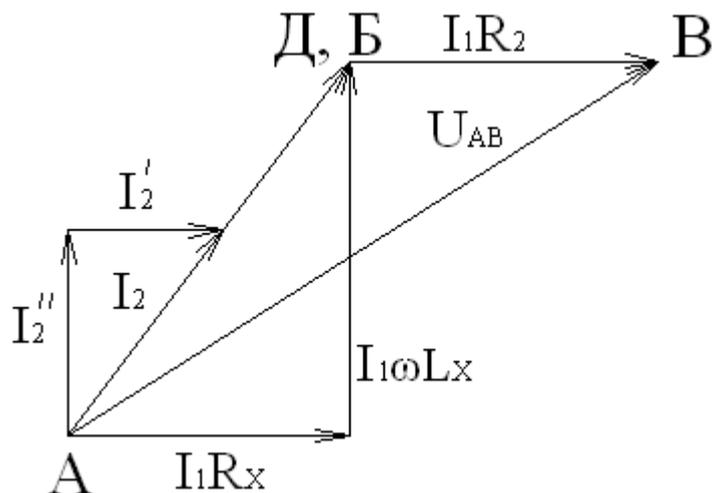
Звідки витікають умови рівноваги моста:

$$\frac{R_x}{R_2} = \frac{R_3}{R_0}; \quad \frac{L_x}{R_2} = C_0 \cdot R_3;$$

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_0}; \quad L_x = C_0 \cdot R_2 \cdot R_3.$$

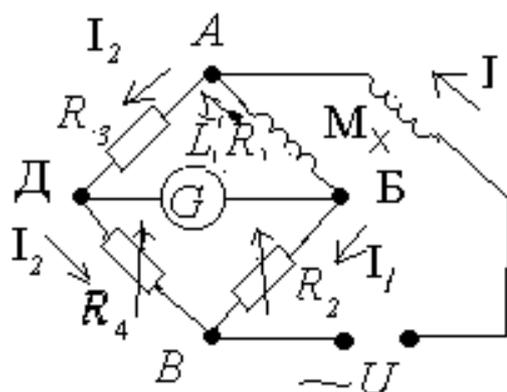
Рівновагу моста отримують регулюванням  $C_0$  та  $R_0$  або  $R_3$  та  $R_0$ . При низьких частотах і малих добротностях котушки міст має низьку збіжність.

Векторна діаграма урівноваженого моста має вигляд:



### 3. Вимірювання взаємної індукції мостом.

При урівноваженому мості струм через гальванометр дорівнює 0.



Умова рівноваги моста має вигляд:

$$I_1 \cdot R_2 = I_2 \cdot R_4 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_2}{R_4} \quad (1.7)$$

$$I_1(R_1 + j\omega L_1) + j\omega I M_x = I_2 R_3 \quad (1.8)$$

$$I_1 R_1 = I_2 R_3$$

Таким чином, рівновага моста можлива при рівновазі ЕРС самоіндукції ( $j \cdot I_1 \cdot \omega \cdot L_1$ ) і ЕРС взаємоіндукції ( $j \cdot \omega \cdot I M_x$ ), тобто коли вони компенсують одне одного і  $\varphi_1 = 0$ .

Із рівняння (1.8) випливає співвідношення:

$$M_x = -L_1 \frac{I_1}{I} \quad (1.9)$$

Прийнявши початкову фазу струму  $I_1$  рівною нулю та враховуючи, що  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , можна записати:

$$I = I_1 + I_2. \quad (1.10)$$

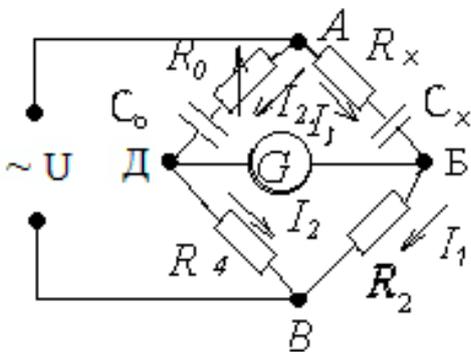
Тоді співвідношення (1.9) з урахуванням (1.10) та (1.7) можна записати:

$$M_x = L_1 \frac{I_1}{I_1 + I_2} = L_1 \frac{1}{1 + \frac{I_2}{I_1}} = L_1 \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_4}}$$

$$M_x = L_1 \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_4}}$$

Вимірювати взаємну індуктивність можна також методом змінного струму з послідовним зустрічним ввімкненням котушок в кожних плечах моста.

### У Вимірювання ємності мостом.



Загальне рівняння збалансованого моста має вигляд:

$$\left(R_x + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_x}\right) R_4 = \left(R_0 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_0}\right) R_2$$

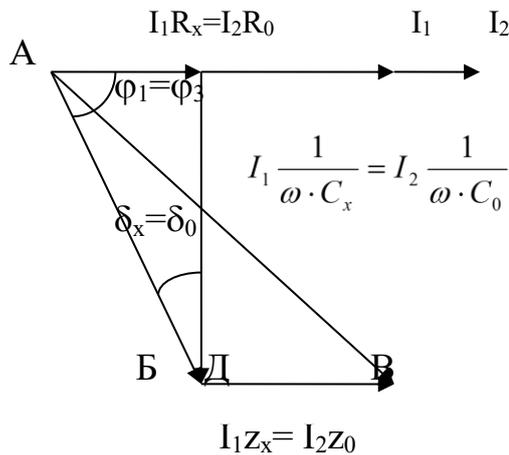
Звідки:

$$R_x \cdot R_4 = R_0 \cdot R_2$$

$$\frac{R_4}{j \cdot \omega \cdot C_x} = \frac{R_2}{j \cdot \omega \cdot C_0} \Rightarrow \frac{R_4}{C_x} = \frac{R_2}{C_0} \Rightarrow C_x = C_0 \frac{R_4}{R_2}$$

Процес врівноваження моста полягає в наступному. Встановлюють  $R_0=0$  і, змінюючи  $R_4$  і  $R_2$ , отримують найменший струм гальванометра. Потім, не змінюючи  $R_4$  і  $R_2$ , змінюють  $R_0$ , зменшуючи струм гальванометра. Далі, не змінюючи  $R_0$ , регулюють  $R_4$  і  $R_2$  до отримання рівноваги моста.

Векторна діаграма врівноваженого моста має вигляд:



Тангенс кута втрат дорівнює:

$$\operatorname{tg} \delta_x = \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{I_2 R_0}{I_2 \frac{1}{\omega \cdot C_0}} = R_0 \omega \cdot C_0$$

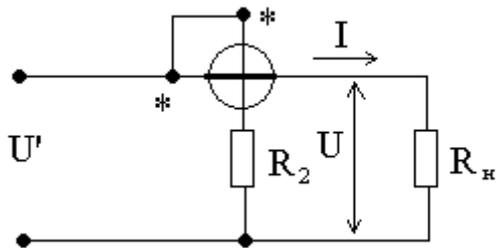
## VI. Вимірювання активної потужності в трифазних колах.

Ватметр електродинамічної системи складається з таких елементів:

- нерухомої котушки, ввімкненої послідовно з приймачем енергії, котра називається послідовною котушкою або котушкою струму (на умовному зображенні ватметра показується товстою лінією);

- рухомої котушки з додатковим опором, котра вмикається паралельно приймачу енергії.

Затискач послідовної котушки, з'єднаний з джерелом живлення, називається генераторним і відмічається зірочкою. Затискач паралельної обмотки, з'єднаний з послідовною котушкою, також називається генераторним і також помічається зірочкою.



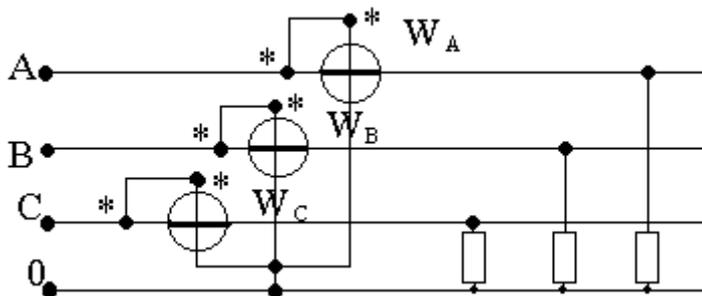
Напруга на навантаженні  $U$  менше від напруги джерела  $U'$  на величину падіння напруги  $\Delta U$  на послідовній котушці ватметра.

$$P_w = I \cdot U' = I \cdot (U + \Delta U) = I \cdot U + I \cdot \Delta U.$$

Таким чином потужність, вимірювана ватметром, дорівнює потужності приймача, котру треба виміряти і потужності послідовної котушки ватметра. Тому при точних вимірюваннях вводять поправки.

**a) Вимірювання потужності при несиметричному навантаженні і доступній нульовій точці (чотирипровідне коло).**

Проводиться трьома однофазними ватметрами або одним трьохелементним ватметром за схемою:



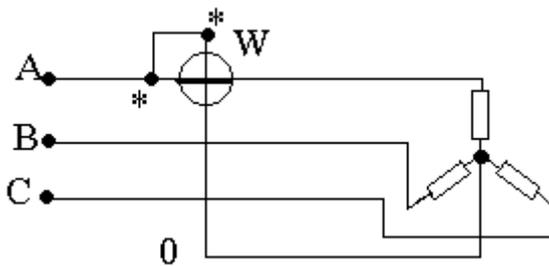
$$P = P_A + P_B + P_C = I_A U_{AC} \cos \varphi_A + I_B U_{BC} \cos \varphi_B + I_C U_{CC} \cos \varphi_C$$

Цим методом можна вимірювати несиметричне навантаження.

**б) Вимірювання потужності в трипровідних колах при рівномірному навантаженні.**

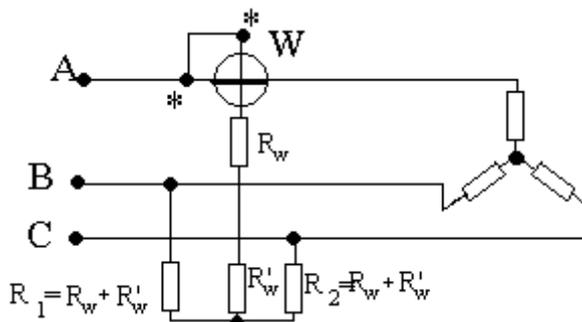
- при доступній нульовій точці вимірювання можна провести одним однофазним ватметром.

$$P=3 \cdot P_n=3 \cdot P_\phi=3 \cdot I_\phi U_\phi \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot I_L U_L \cos\varphi$$



- вимірювання із штучною нульовою точкою і однофазним ватметром

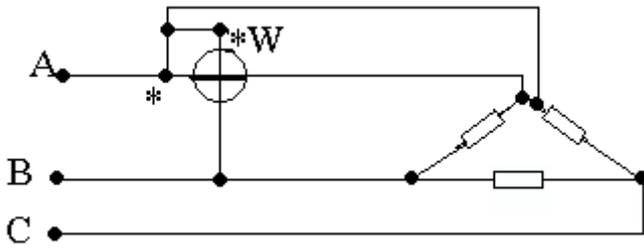
$R_w$  – опір паралельного кола ватметра.



Постійна ватметра з штучною нульовою точкою в 3 рази більше ніж при вимірюванні однієї фази.

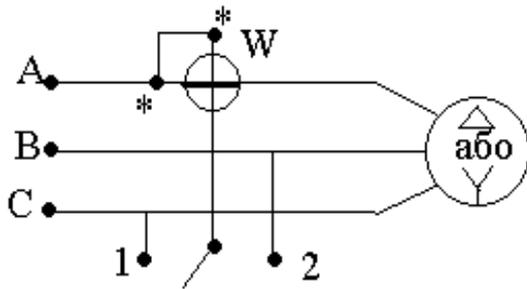
- вимірювання однофазним ватметром при з'єднанні трикутником.

$$P=3 \cdot P_w=3 \cdot I_\phi \cdot U_\phi \cos\varphi$$



Струмова ланка ватметра вмикається в розрив фази навантаження.

- вимірювання одним однофазним ватметром при трикутнику і зірці без розриву фази навантаження і нульової точки.



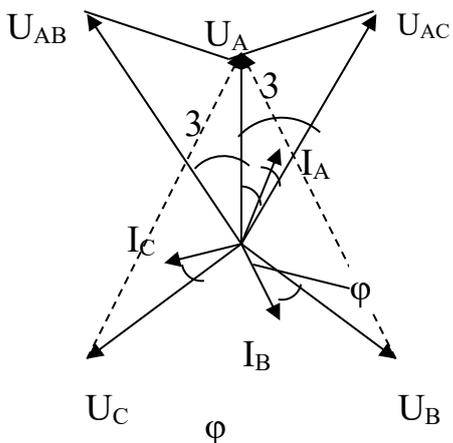
В послідовному колі ватметра проходить струм  $I_A = I_L$ . Паралельне коло ватметра при першому (1) положенні перемикача знаходиться під лінійним навантаженням  $U_{AC} = U_L$ , а при другому – під лінійною напругою  $U_{AB} = U_L$ .

Потужність, яка вимірюється в положенні 1, дорівнює:

$$P_w^1 = I_A \cdot U_{AC} \cdot \cos(30 - \varphi) = I_L \cdot U_L \cdot \cos(30 - \varphi).$$

Потужність, вимірювана в положенні перемикача 2, дорівнює:

$$P_w^2 = I_A \cdot U_{AB} \cdot \cos(30 + \varphi) = I_L \cdot U_L \cdot \cos(30 + \varphi).$$

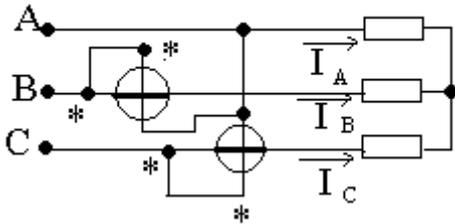


Сума показів ватметра дорівнює активній потужності трифазного кола:

$$P = P_w^1 + P_w^2 = I_L \cdot U_L \cdot \cos(30 - \varphi) + I_L \cdot U_L \cdot \cos(30 + \varphi) = I_L \cdot U_L [\cos(30 - \varphi) + \cos(30 + \varphi)] =$$

$$= I_L \cdot U_L \cos \frac{(30-\varphi)+(30+\varphi)}{2} \cdot \cos \frac{(30-\varphi)+(30+\varphi)}{2} = I_L \cdot U_L \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} I_L \cdot U_L \cdot \cos \varphi.$$

**в) Вимірювання потужності в трипровідному колі при нерівномірному навантаженні.**



Вимірювання потужності в колі трипровідного струму при нерівномірному навантаженні виконується двома одноелементними (однофазними) ваттметрами або одним двоелементним. Миттєва потужність кола трипровідного струму дорівнює:

$$P = P_H + P_B + P_C = i_a \cdot u_a + i_b \cdot u_b + i_c \cdot u_c.$$

Для нульової точки по першому закону Кірхгофа  $i_a + i_b + i_c = 0 \implies i_a = -i_b - i_c$ ; тоді:  $P = U_a(-i_b - i_c) + i_b U_b + i_c U_c = i_b(U_b - U_a) + i_c(U_c - U_a) = i_b U_{ba} + i_c U_{ca} = P^1 + P^2$ .

Переходячи від миттєвої потужності до діючої і вважаючи синусоїдальність струмів і напруг, отримаємо:

$$P = I_B U_{BA} \cos \psi_1 + I_C U_{CA} \cos \psi_2 = P^1 + P^2;$$

де  $\psi_1$  – кут зсуву фаз між  $I_A$  і  $U_{BA}$ ;

$\psi_2$  – кут зсуву фаз між  $I_C$  і  $U_{CA}$ .

$$\text{При кутах } \psi_{1,2} \leq 60^\circ \quad P = P^1 + P^2.$$

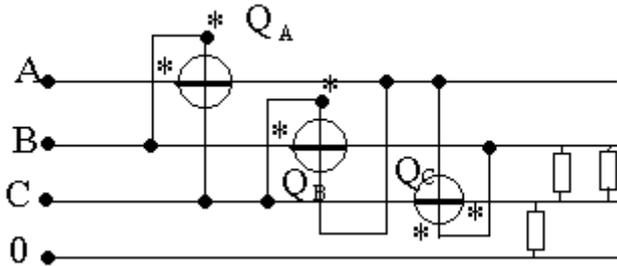
$$\text{При кутах } \psi_{1,2} > 60^\circ \quad P = P^1 - P^2.$$

При значних величинах напруг і струмів використовуються вимірювальні трансформатори напруг і струмів, і використовуються відповідні коефіцієнти перерахунку.

Реактивна потужність вимірюється звичайним активним ватметром, тільки кут між вимірюваними  $U'$  і  $I$  зсувається на  $90^\circ$ , тобто кут стає рівним  $(90^\circ - \varphi)$ .

$$\text{Тоді } U' \cdot I \cos(90^\circ - \varphi) = U' \cdot I \sin \varphi = Q$$

В трифазних колах при симетричному навантаженні  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$ ,  $U_{AB}$



відстають від  $U_A$ ,  $U_B$ ,  $U_C$  на  $90^\circ$ .

Тому, ввімкнувши послідовне коло ватметра на струм  $I_A$  і під'єднавши до паралельного кола  $U_{BC}$ , ватметр вимірює реактивну потужність  $I_A U_{BC} \cos(90^\circ - \varphi) = I_A \sqrt{3} U_A \cos(90^\circ - \varphi) = \sqrt{3} Q_A$ .

Тоді загальна реактивна потужність дорівнює:

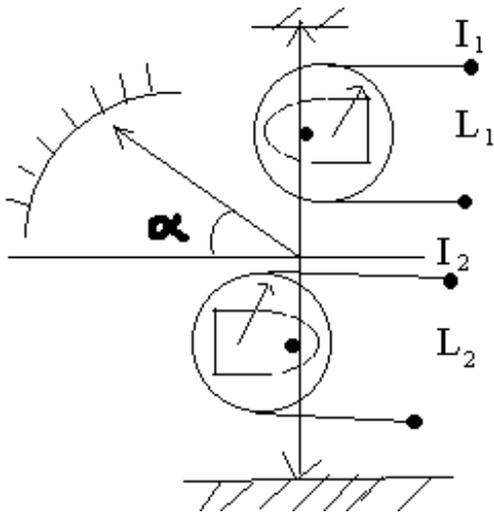
$$Q = \frac{Q_A + Q_B + Q_C}{\sqrt{3}}$$

## VII Методи вимірювання частоти.

### a) Електромагнітний частотомір.

Він являє собою логометр, котрий складається з двох нерухомих котушок і двох сердечників, укріплених на вимірювальній осі. Сердечники логометра закріплені так на осі, щоб  $\frac{dL_1}{d\alpha} > 0$ ;  $\frac{dL_2}{d\alpha} < 0$ .

Рухома частина (вісь) логометра встановлюється в тому положенні, при якому моменти  $M_1$  і  $M_2$  урівноважуються:



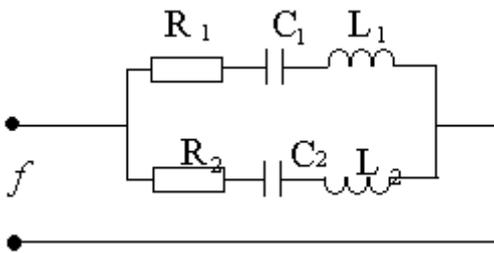
$$M_1 = M_2 \Rightarrow I_1^2 \cdot f_1(\alpha) = I_2^2 \cdot f_2(\alpha) \Rightarrow \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 = \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)} = f_3(\alpha)$$

Або

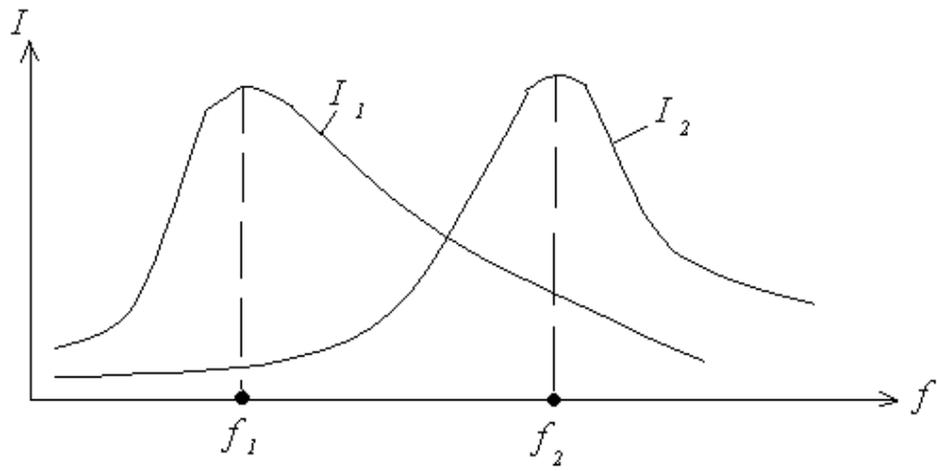
$$\alpha = F\left(\frac{I_1^2}{I_2^2}\right)$$

Кут повороту вимірювальної стрілки логометра пропорційний відношенню квадратів струмів котушок.

Частотомір має дві котушки, що мають резонанс на різних частотах  $f_1$  і  $f_2$ .



Таким чином, кут повороту частотоміра залежить від відношення квадратів струмів  $\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 = F(\alpha) = F(f)$ .



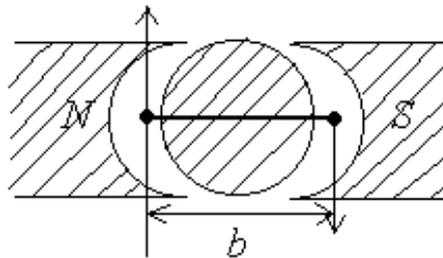
Частотоміри мають область некоректних показів за межами частот  $f_1$  та  $f_2$ .

## ТЕМА 2

## МАГНІТНІ ВИМІРЮВАННЯ

### 1. Вимірювання постійного магнітного потоку методом балістичного гальванометра

Балістичний гальванометр – це гальванометр магнітоелектричної системи із збільшеним моментом інерції вимірювальної рамки.



Рамка вимірювальної котушки поміщується в однорідне поле  $B$ . Тоді  $M_{пр} = D\alpha$  – протидіючий момент вимірювальної котушки, створеної пружинами, розтяжкою або підвіскою, де:

$\alpha$  – кут повороту котушки;

$D = \frac{M_{пр}}{\alpha}$  – питомий протидіючий момент;

$F = 2 \cdot I \cdot B \cdot l \cdot w$  – електромагнітна сила, діюча на сторони котушки;

$I$  – вимірювальний струм;  $B$  – магнітна індукція;

$l$  – активна сторона вимірювальної котушки;

$w$  – кількість витків котушки гальванометра;

$M = F \frac{b}{2} = I \cdot B \cdot l \cdot w \cdot b = I \cdot B \cdot S \cdot w$  – електромагнітний момент,  $b$  – діаметр

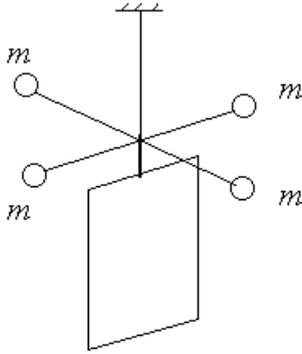
котушки;  $S = l \cdot b$  – активна площа котушки.

$$M = M_{пр} \iff I \cdot B \cdot S \cdot w = D \cdot \alpha;$$

$\alpha = \frac{B \cdot S \cdot w}{D} I = S_1 \cdot I$ ;  $S_1 = \frac{\alpha}{I}$  – чутливість гальванометра за струмом.

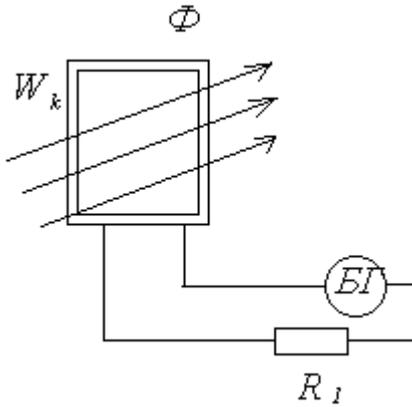
Кут відхилення гальванометра пропорційний вимірюваному струму.

В балістичному гальванометрі (БГ) момент інерції  $J$  вимірювальної котушки (рамки) різко збільшений збільшенням маси рухомої котушки за рахунок декількох важків  $m$ . Це різко збільшує період коливань рамки декількох важків  $mT_q = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$ , ( $T \approx 20$  сек).



БГ призначений для вимірювання кількості заряду  $Q$ , що пройшов в імпульсі струму:  $Q = \int_0^t i(t) dt$ . Доведено, що якщо час протікання струму  $t$  менший, ніж  $0,1T_q$ , тобто  $t < 0,1T_q$ , то кут відхилення стрілки БГ пропорційний  $Q$ :  $Q = C_q \alpha$ , де  $C_q = \frac{Q}{\alpha}$  – балістична постійна гальванометра. Обернена величина  $S_q = \frac{1}{C_q} = \frac{\alpha}{Q}$  називається балістичною чутливістю гальванометра.

Якщо в вимірюваний потік  $\Phi$  помістити вимірювальну котушку і швидко ( $t < 0,1T_q$ ) її винести, то в ній індукується ЕРС  $E = -W_k \frac{d\Phi}{dt}$ . Під дією ЕРС в замкненому контурі гальванометра тектиме струм  $i = \frac{E}{R}$ , де  $R = R_1 + R_k + R_q$ ,  $W_k$  – число витків вимірювальної котушки.



$R_1$  – зовнішній опір в колі БГ;

$R_k$  – опір вимірювальної котушки;

$R_q$  – опір рамки БГ.

Тоді кількість електрики  $dQ$ , що створюється за час  $dt$  дорівнює:

$$dQ = i dt \implies dQ = -(W_k/R)d\Phi.$$

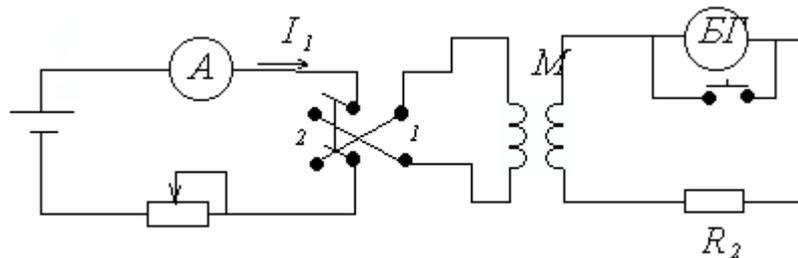
Проінтегрувавши, отримуємо загальну кількість електрики, що пройшла через БГ:

$$Q = -\int_0^{\phi} \frac{W_k}{R} d\Phi = -\frac{W_k}{R} \Phi.$$

Тоді вимірюваний потік  $\Phi$  дорівнює:  $\Phi = \frac{R}{W_k} \cdot Q$ , або враховуючи  $Q = C_q \cdot \alpha$ ,

$\Phi = (R/W_k)C_q \alpha = (C_\Phi/W_k) \alpha$ , де  $C_\Phi = RC_q$  – балістична стала БГ по потоку  $\Phi$ .

Балістичну сталу  $C_\Phi$  визначають за наступною схемою.



Встановивши струм  $I_1$  при положенні перемикача 2, перемикають перемикач в положення 1. При цьому струм в первинній котушці змінюється від  $+I_1$  до  $-I_1$  і можна записати  $2M \cdot I_1 = 2W_2 \cdot \Phi$ , де  $W_2$  – число витків вторинної котушки;

$$Q = \frac{2 \cdot W_2 \cdot \Phi}{R_2} = \frac{2 \cdot M \cdot I_1}{R_2}.$$

Тоді  $C_\phi = R_2 \frac{Q}{\alpha} = \frac{2 \cdot M \cdot I}{\alpha}$ , визначення  $C_\phi$  проводять при різних  $R_2$  і будують криву  $C_\phi(R_2)$ .

Вимірювання постійного потоку  $\Phi$  можна виконувати також флюксометром, котрий являє собою гальванометр магнітоелектричної системи з дуже малим протидіючим моментом.

## 2. Вимірювання магнітної індукції $B$ , напруженості магнітного поля $H$ та магнітної напруги балістичним гальванометром.

а) Вимірювання магнітної індукції  $B$  проводять так само як і вимірювання магнітного потоку  $\Phi$  і використовують співвідношення:

$$B = \Phi / S = \frac{C_\phi}{S \cdot W_k} \alpha.$$

По балістичному значенню  $\alpha$  БГ знаходять значення  $B$ .

б) Вимірювання напруженості постійного магнітного поля  $H$  проводять балістичним гальванометром (або флюксометром) з вимірювальною котушкою.

$$\text{Із } \Phi = \frac{C_\phi}{W_k} \alpha \Rightarrow \psi = W_k \cdot \Phi = C_\phi \cdot \alpha \text{ - потокозчеплення.}$$

При умові, що поле  $H$  однакове по перерізу вимірювальної котушки, можна записати:

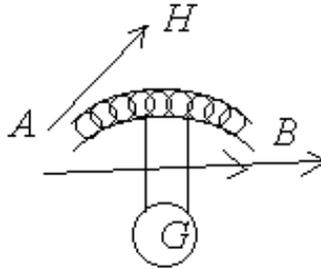
$$\psi = W_k \cdot \Phi = W_k \cdot B \cdot S = W_k \cdot \mu_0 \cdot S \cdot H = C_\phi \cdot \alpha \quad \Rightarrow$$

$$H = \frac{C_\phi}{\mu_0 \cdot S \cdot W_k} \alpha = \frac{C_\phi}{k} \alpha$$

Постійну  $k$  визначають, помістивши котушку в відоме поле  $H$  (наприклад поле соленоїда). Вмикаючи та вимикаючи  $H$ , помічають балістичний відкид  $\alpha$  та визначають  $k = (C_\phi / H) \alpha$ .

**в) Вимірювання магнітної напруги**  $F_{AB} = \int_B^A H(l)dl$

проводять за допомогою магнітного поясу або, що теж саме, потенціалометром.



Магнітний пояс складається з довгої ( $\approx 1$  м), гнучкої, плоскої котушки з обмоткою із парного числа шарів (2...4), намотаних в один бік з однаковою густиною на серцевину з неферомагнітного матеріалу. Кінці обмотки виводяться з середини поясу і з'єднуються з балістичним гальванометром. Для вимірювання магнітної напруги між точками А і В у ці точки поміщують кінці поясу. Вмикаючи і вимикаючи джерело поля, спостерігають балістичний відкид гальванометра  $\alpha$ .

Тоді:

$$\psi = C_\phi \alpha = \Phi W \text{ – потокозчеплення;}$$

$W$  – кількість витків поясу.

Потокозчеплення елемента  $dl$  поясу з перерізом  $S$  дорівнює:

$$d\psi = \mu_0 H_l S w_0 dl ,$$

де  $H_l$  – тангенціальна складова (вздовж дотичної до поясу) поля;

$$w_0 = \frac{W}{L} \text{ – питоме (на одиницю довжини) число витків поясу; } L \text{ – довжина}$$

поясу.

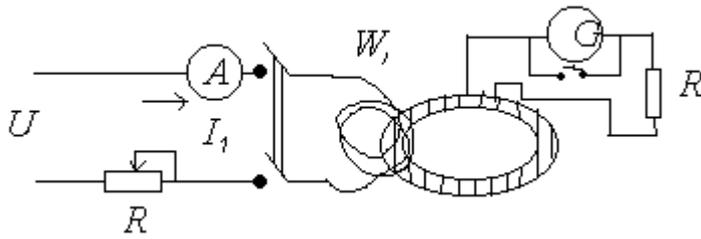
Потокозчеплення всього поясу дорівнює:

$$\psi = \int_B^A d\psi = \mu_0 S W_0 \int_B^A H dl = \mu_0 S W_0 F_{AB} :$$

$$F_{AB} = \frac{\psi}{\mu_0 S W_0} = \frac{C_\phi \alpha}{\mu_0 S W_0} = \frac{C_\phi}{\mu_0 S W_0} \alpha = C_n \alpha$$

де  $C_n = \frac{C_\phi}{\mu_0 S W_0}$  – постійна кола пояс-гальванометр.

Для дослідного визначення сталої  $C_n$  збирають схему,



де  $W_1$  – число витків допоміжної котушки. Пояс охоплює допоміжну котушку і кінці поясу пригинаються один до одного. При ввімкненні струму  $I_1$  спостерігають балістичний відкид  $\alpha$ .

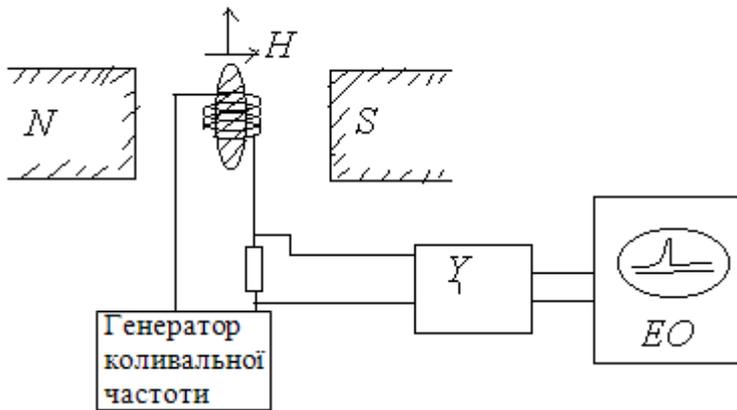
Тоді  $F = C_n \alpha$ ;

за законом повного струму  $F = \oint M_l dl = I_1 W_1 \Rightarrow C_n \alpha = I_1 W_1 \Rightarrow C_n = \frac{I_1 W_1}{\alpha}$ .

### 3. Вимірювання $H$ з використанням ядерного магнітного резонансу.

При поміщенні ядра атома у зовнішнє магнітне поле  $H$ , рівні енергії протонів розщеплюються на два: орієнтація магнітного моменту протона по полю і проти нього. Різниця енергії рівнів протона складає:  $E_1 = m_p H$ ,  $E_2 = -m_p H$ :  $\Delta E = E_1 - E_2 = 2m_p H$ , де  $m_p$  – магнітний момент протона. Різниця рівнів  $\Delta E$  еквівалентна частоті квантів  $f$ , тобто  $\Delta E = h f$ , де  $h = 6,62491 \cdot 10^{-34}$  Дж/сек – стала Планка. Тоді  $\Delta E = h f = 2m_p H$ , звідки  $H = \frac{2\pi f}{\gamma_p}$ , де  $\gamma_p = (4\pi m_p)/h$  – гіромагнітне відношення ядра, тобто відношення магнітного моменту ядра до його механічного моменту. Це відношення для багатьох речовин відоме з точністю до тисячних відсотка.

Вимірювання напруженості поля  $H$  зводиться до вимірювання частоти резонансу ядер речовин з відомими гіромагнітними відношеннями  $\gamma_p$ , поміщеного в вимірюване поле  $H$ . Блок схема установки має такий вигляд.

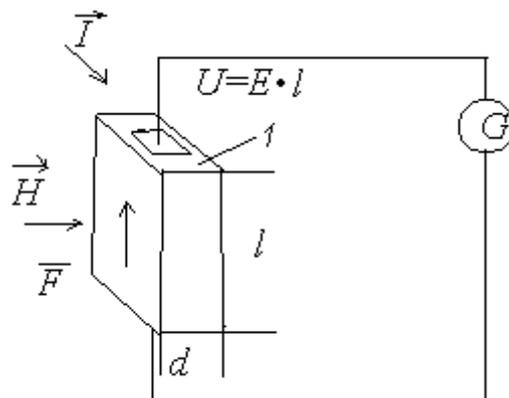


Магнітний пояс складається з довгої ( $\approx 1$  м), гнучкої, плоскої котушки з обмоткою із парного числа шарів (2...4), намотаних в один бік з однаковою густиною на серцевину з неферомагнітного матеріалу.

Момент резонансу ядер речовини і зовнішнього поля генератора фіксується по сплеску на екрані осцилографа. Резонансна частота  $f$  визначається частотоміром або хвилеміром. Цей метод використовується для вимірювання великих магнітних полів в діапазоні  $H=800\dots 16\cdot 10^5$  А/м, з точністю  $\pm 0,01$  %.

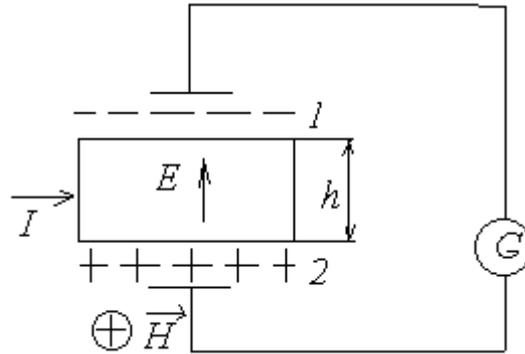
#### 4. Вимірювання напруженості поля $H$ з використанням ефекту Холла.

Ефект Холла полягає у тому, що коли пластину із струмом помістити перпендикулярно в вимірюване поле  $H$ , то на боках пластини, перпендикулярних  $H$  та  $I$ , з'являється різниця потенціалів.



Сила Лоренца, яка діє на рухомий електрон в пластині, дорівнює  $F_M = e \cdot v \cdot H$ , напрямком сили визначає правило лівої руки.

Під дією цієї сили в пластині на границях 1 і 2 з'являються надлишкові заряди, котрі утворюють поперечне електричне поле  $E$ . Під дією електричного поля  $E$  на рухомі електрони буде діяти сила  $F_1 = E \cdot e$ .



У сталому режимі ці сили урівноважуються:

$$F_M = F_1 \implies e \cdot v \cdot H = e \cdot E = e \cdot \frac{U}{l}, \text{ де } E = \frac{U}{l} - \text{напруженість електричного поля.}$$

Звідки  $H = \frac{U}{v \cdot l}$ , або з врахуванням співвідношень

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{l \cdot d} = n \cdot v \cdot e \implies v = \frac{I}{l \cdot d \cdot n \cdot e},$$

де  $n$  – концентрація струму в пластині;

$l, d$  – поперечні розміри пластини;

$e$  – заряд електрона,  $v$  – швидкість руху електрона.

$$\text{Тоді } H = \frac{U}{l \cdot v} = \frac{U \cdot n \cdot d \cdot e}{I} = \frac{n \cdot d \cdot e}{I} U = \frac{k}{I} U.$$

$H = \frac{k}{I} U$ , де  $k = n \cdot d \cdot e$  – стала датчика (пластини) Холла, котру можна виміряти

при калібровці в відомих полях  $H, U$  та постійному струмі  $I$ .

Таким чином, вимірювання  $H$  зводиться до вимірювання напруги  $U$  на датчику Холла при постійному каліброваному струмі  $I$ .

## 5. Отримання кривої намагнічування та петлі гістерезисного циклу балістичним методом.

Основна крива намагнічування і симетрична петля гістерезисного циклу – криві, що характеризують основні властивості феромагнітного матеріалу. Отримання цих кривих потребує визначення для різних зовнішніх полів  $H$  відповідних значень магнітної індукції  $B$ .

Для таких вимірювань виготовляють пермеаметр, це магнітопровід з закріпленими намагнічувальною  $W_1$  і вимірювальною  $W_2$  обмотками. Магнітний опір кола пермеаметра повинен бути набагато (на декілька порядків) менше магнітного опору досліджуваного зразка.

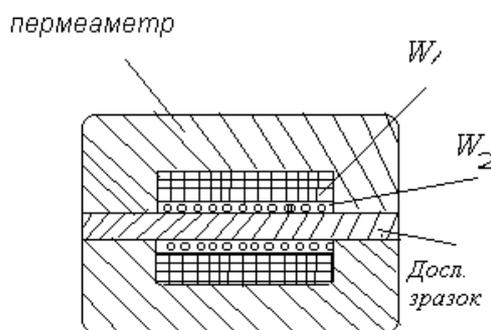
$$R_M = \frac{l}{\mu \cdot S} \text{ – магнітний опір.}$$

Основною кривою намагнічування називають криву, що представляє собою геометричне місце точок вершин симетричних гістерезисних петель.

Позначимо  $l$  – довжина зразка,  $S$  – поперечний переріз,  $\mu$  - магнітна проникність.

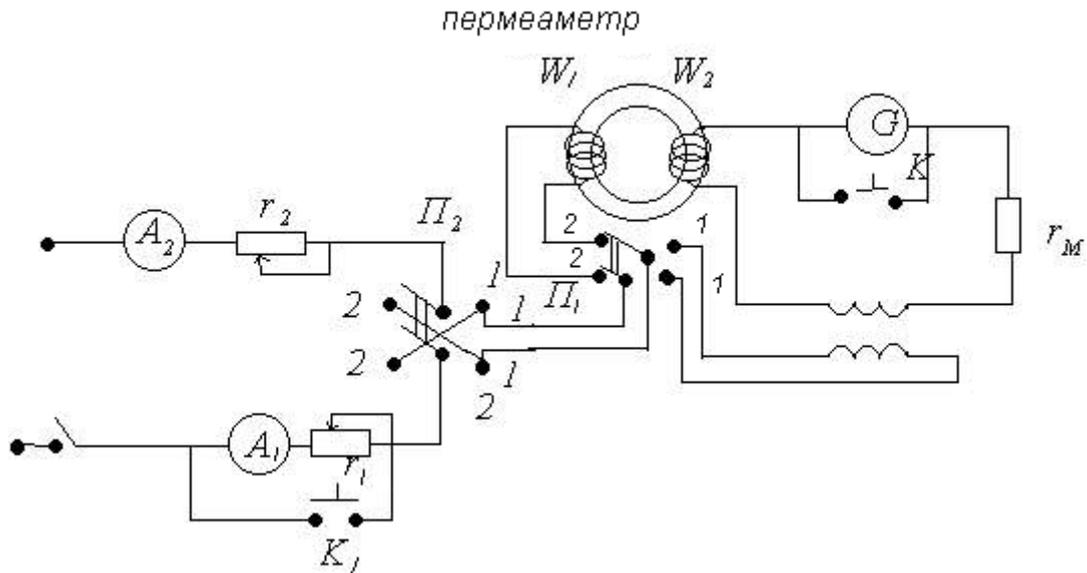
Форма магнітопроводу пермеаметра може бути циліндричною або плоскою, а форма досліджуваного зразка може бути кільцевою або стрижневою форми з круглим або квадратним поперечним перерізом.

Досліджуваний зразок встановлюється в пермеаметр з мінімальним повітряним зазором, оскільки цей зазор вносить похибку у визначення магнітного опору. Для зменшення цих похибок користуються похибковими кривими.



Використовуваний зразок і пермеаметр утворюють замкнуте магнітне коло з магнітним опором, котре практично рівне магнітному опору зразка, оскільки магнітний опір зразка на 2...3 порядки більший магнітного опору пермеаметру.

Електрична схема вимірювань показана на наступному рисунку.



Перед вимірюванням визначають балістичну сталу гальванометра. Для цього ставлять перемикач  $\Pi_1$  в положення 1, кнопку  $K_1$  замикають і отримують схему для визначення сталої  $C_\Phi$ , таку ж, як в розділі 1. Перед дослідженням зразок розмагнічується під дією на нього змінного за напрямком, і такого, що зменшується за величиною, магнітного поля. Для цього кнопки  $K$  і  $K_1$  замикаються, перемикач  $\Pi_1$  ставлять в положення 2, а перемикач  $\Pi_2$  в довільне положення 1 або 2. Реостатом  $r_2$  встановлюють значення напруженості поля  $H \approx 40$  А/см і перемикачем  $\Pi_2$  виконують 6 – 10 перемикань напрямків струму; потім зменшують струм і знову роблять перемикачем  $\Pi_2$  6 – 10 перемикань напрямків струму; потім знову знижують струм реостату  $r_2$  і знову роблять ряд перемикань  $\Pi_2$ , доводячи струм до 0.

Для вимірювання основної кривої намагнічування кнопки  $K$  і  $K_1$  замикають, перемикач  $\Pi_1$  ставлять в положення 2, а  $\Pi_2$  – в 1. Реостатом  $r_2$  і амперметром  $A_2$  виставляють струм, що відповідає напруженості поля  $H_1$  вершини  $A_1$  першого гістерезисного циклу.

$$H_1 = \frac{I_1 w_1}{l}, \text{ де } l - \text{ довжина вимірюваного зразка.}$$

Потім роблять магнітну підготовку зразка шляхом 6 – 10 перемикань струму перемикачем  $\Pi_2$ . Така магнітна підготовка приводить зразок в стан, визначений симетричною гістерезисною петлею. Потім перемикач  $\Pi_2$  ставлять в положення 1. Розмикають кнопку К і впевнюються в тому, що показник гальванометра G дорівнює 0. Перекидають перемикач  $\Pi_2$  в положення 2, відмічають відкид гальванометра  $\alpha_1$  і замикають кнопку К. При такому перемиканні напруженість поля змінилася з  $+H_1$  до  $-H_1$ , індукція с  $+B_{1m}$  до  $-B_{1m}$ , тобто індукція змінилася на  $2B_{1m}$ . Тоді величина магнітної індукції, яка відповідає вершині  $A_1$  першої петлі гістерезису, визначається по формулі:

$$B_{1m} = \frac{C_2}{2SW_2} \alpha_1,$$

де:  $C_f$  – балістична стала гальванометра;

$S$  – площа поперечного перерізу вимірюваного зразка;

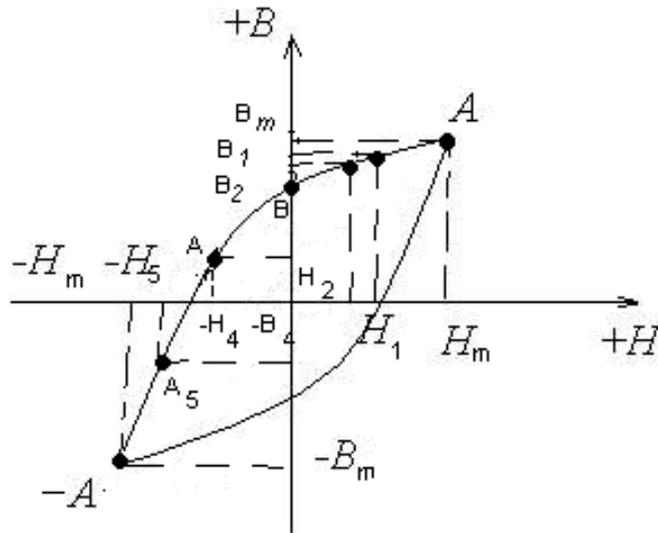
$w_2$  – кількість витків вимірювальної обмотки пермеаметра;

$\alpha_1$  – гальванічний відкид стрілки.

Далі цю процедуру вимірювань повторюють для всіх вершин гістерезисних петель і отримують основну криву намагнічування.

### **Отримання петлі гістерезисного циклу.**

Для отримання кожної із точок петлі експериментально визначається різниця між максимальною індукцією  $B_m$  і магнітною індукцією, що відповідає вибраній напруженості поля  $H$  (див. малюнок).



Визначення точок спадної частини петлі в 1-му квадранті виконується так:

- $\Pi_1$  ставлять в положення 2; перемикач  $\Pi_2$  в положення 1; кнопки  $K$  і  $K_1$  закорочені;
- розмикають кнопку  $K_1$  і встановлюють реостатом  $r_1$  струм  $I_1$ , який відповідає полю

$$H_1 = (I_1 w_1) / l;$$

- замикають  $K_1$  перемикачем  $\Pi_2$ , виконують магнітну підготовку зразка, після чого  $\Pi_2$  ставлять в положення 1;

- розмикають кнопку  $K$  і впевнюються, що вказівник гальванометра дорівнює 0;

- розмикають кнопку  $K_1$ , перемикають  $\Pi_2$  у положення 2 і відмічають балістичний відкид  $\alpha_1$ ;

- замикають  $K$  і  $K_1$ .

При розмиканні кнопки  $K_1$  струм зменшується з  $I_m$  до  $I_1$ , напруженість поля - з  $+H_m$  до  $+H_1$ , магнітна індукція - з  $+B_m$  до  $+B_1$ .

Тоді:  $\Delta B_1 = B_m + B_1 = C_\phi \alpha_1 / (S \cdot w_2)$ .

Шукане значення індукції  $B_1$  знаходять за формулою:

$$B_1 = B_m - \frac{C_\phi}{S \cdot w_2} \alpha_1.$$

Аналогічно визначають значення  $H_2$  і  $B_2$  для точки  $A_2$ . Залишкову індукцію  $B_2$  для точки  $A_2$  визначають таким чином:

- проводять магнітну підготовку зразка;
- встановлюють  $\Pi_2$  в положення 1;
- розмикають  $K$ ;
- розмикають коло намагнічуючого струму перемикачем  $\Pi_2$  і відмічають балістичний відкид  $\alpha_2$ .

Залишкову індукцію визначають за формулою:

$$B_2 = B_m - \frac{C_\delta}{S \cdot w_2} \alpha_2.$$

Значення координат точок  $A_4$ ,  $A_5$  у II і III квадрантах визначаються так само, як і для точок в I квадранті, з тією різницею, що після магнітної підготовки зразка і розмикання кнопок  $K$  і  $K_1$  одночасно виконують перемикання  $\Pi_2$  з положення 1 в положення 2. При цьому намагнічуючий струм змінюється від  $+I_m$  до  $+I_4$  і від  $+I_4$  до  $-I_4$ , напруженість поля зміниться від  $+H_m$  до  $+H_4$  і від  $+H_4$  до  $-H_4$ , магнітна індукція - від  $+B_m$  до  $+B'_4$  і від  $+B'_4$  до  $-B_4$ . Тоді  $\Delta B_4 = B_m - B_4 = C_\phi \alpha_4 / (S \cdot w_2)$ ;

$$B_4 = B_m - \frac{C_\phi}{S \cdot w_2} \alpha_4.$$

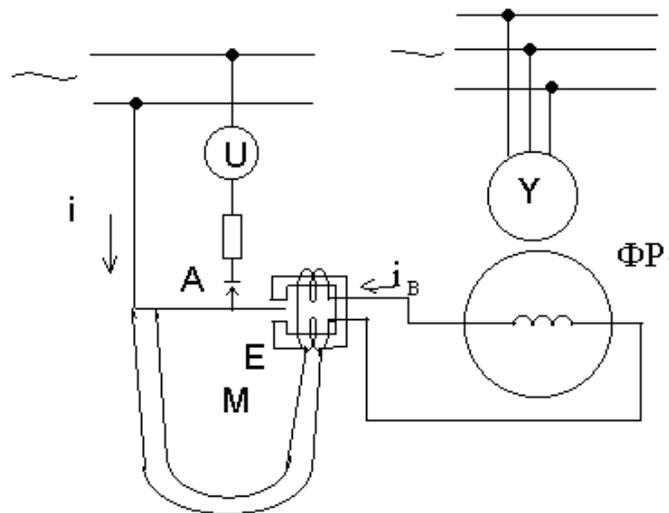
Остання точка -A знаходиться по відкиду гальванометра при перемиканні  $\Pi_2$  із положення 1 в положення 2 після магнітної підготовки, а шукане значення індукції знаходиться таким чином:

$$\Delta B = B_m - (-B_m) = 2B_m = C_\phi \alpha / (S \cdot w_2) \quad \Leftrightarrow \quad B_m = \frac{C_\phi}{2S w_2} \alpha.$$

Друга половина гістерезисної петлі будується по першій половині, виходячи з умов симетрії відносно початку координат.

## 6. Вимірювання основної кривої намагнічування, магнітної проникності та втрат фероментом на змінному струмі.

Характеристики феромагнітних матеріалів при змінному струмі внаслідок наявності вихрових струмів відмінні від характеристик, отриманих на постійному струмі. Більш того, ці характеристики залежать від частоти струму  $f$ .



Ферометр складається з магнітоелектричного вимірювача  $U$ , фазового регулятора  $\Phi P$ , і вібраційного випрямляча, який складається з магніту  $M$ , електромагніту  $E$  та якоря-вібратора  $A$ . Очевидно, що струм в колі вимірювача  $U$  буде залежати від різниці фаз  $\psi$  між струмами  $i$  та  $i_B$ , котру можна виміряти фазорегулятором  $\Phi P$ :

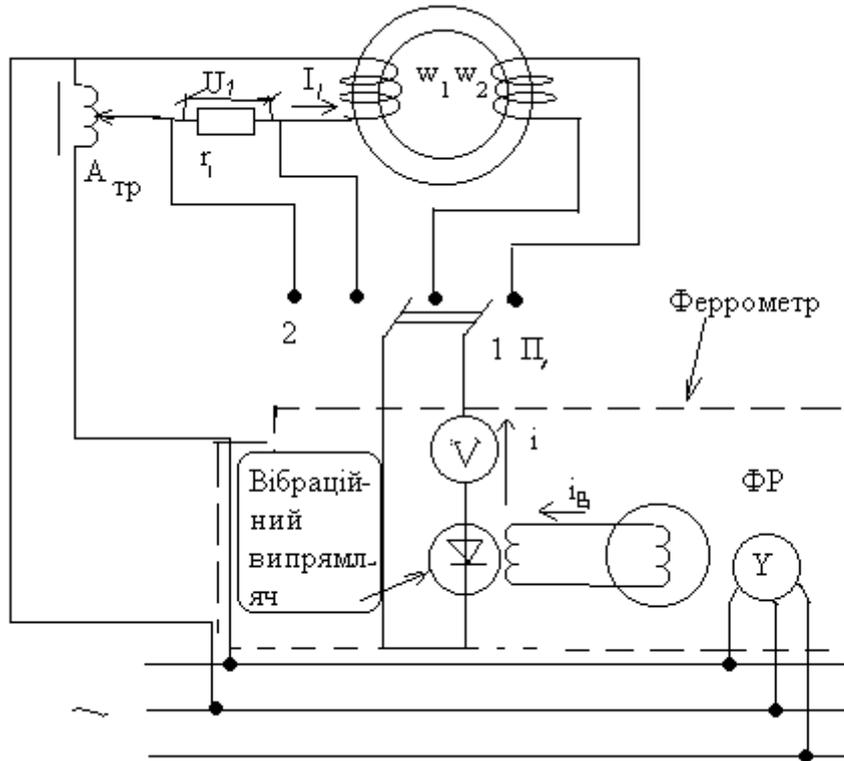
$$I = k \cdot I_{cp} \cdot \cos \psi.$$

Вимірювач  $U$  градується в діючих значеннях напруги при синусоїдальному струмі.

Зразок досліджуваної сталі має форму кільця з перерізом  $S$  і масою 50 гр. На нього намотуються намагнічуюча  $w_1$  і вимірювальна  $w_2$  обмотки.

Принципову схему вимірів показано на наступному рисунку.

Принципова схема вимірювань феррометром.



Процес вимірювань полягає в наступному.

- а) При вимірюваннях вимірювач підключають до обмотки  $w_2$  (положення 1 перемикача  $\Pi_1$ ).
- б) Ротор ФР повертають до тих пір, доки вимірювач  $V$  не покаже максимальне значення, що відповідає збігом за фазами струмів  $i_B$  та струму  $i$  в колі обмотки  $w_2$ . Тоді вимірювач  $V$  покаже напругу  $U_2$ :

$$U_2 = 4,44 f w_2 B_m S;$$

де:  $f$  – частота мережі;

$w_2$  – кількість витків вимірювальної обмотки;

$B_m$  – амплітудне значення індукції в зразку;  $S$  – площа поперечного перелізу зразка.

Тоді  $B_m = U_2 / (4,44 \cdot f \cdot w_2 \cdot S)$ .

- в) Не змінюючи положення реостата ФР, перемикач  $\Pi_1$  ставлять в положення 2 та вимірюють активну складову напруги

$$U_{1a} = r_1 I_1 \cos \varphi$$

на безреактивному опорі  $r_1$ , де  $\varphi$  – кут зсуву фаз між струмами  $i_B$  та  $i_1$ .

Тоді активна складова струму  $I_1$  дорівнює

$$I_{1a} = I_1 \cos \varphi = U_{1a} / r_1.$$

г) Перемикають  $\Pi_1$  в положення 1 і повертають ротор ФР до тих пір, доки не отримають нульове значення вимірювача  $I$ , що відповідає зсуву фаз між  $i$  та  $i_B$  на  $90^\circ$ .

д). Не змінюючи положення ротора ФР, перемикач  $\Pi_1$  ставлять в положення 2 та вимірюють реактивну складову напруги  $U_{1r} = r_1 I_1 \sin \varphi$  і струму

$$I_{1r} = I_1 \sin \varphi = U_{1r} / r_1.$$

Повний намагнічуючий струм визначається як  $I_1 = \sqrt{I_{1a}^2 + I_{1r}^2}$ .

Тоді напруженість магнітного поля  $H_m$ , котра створюється намагнічуючою обмоткою  $w_1$ , дорівнює

$$H_m = \frac{\sqrt{2} I_1 \sin \varphi \cdot w_1}{l};$$

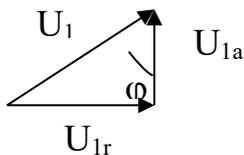
де  $l$  - довжина осьової лінії зразка;

$w_1$  - кількість витків намагнічуючої обмотки.

В цьому випадку магнітна проникність зразка дорівнює:

$$\mu = \frac{B_m}{H_m} = \frac{U_2}{4.44 f w_2 S} \cdot \frac{l}{\sqrt{2} I_1 \sin \varphi w_1};$$

де  $\varphi$  визначається за формулою:



$$\varphi = \arctg(U_{1r} / U_{1a}), \text{ а } I_1 = \frac{\sqrt{U_{1a}^2 + U_{1r}^2}}{r}.$$

Питома потужність втрат в зразку на гістерезис і вихрові струми визначається за формулою:

$$P_{ст} = (1/G) U_2 I_1 \cos \varphi (w_1 / w_2) \text{ [Вт/кг];}$$

де  $G$  - вага зразка в кілограмах.

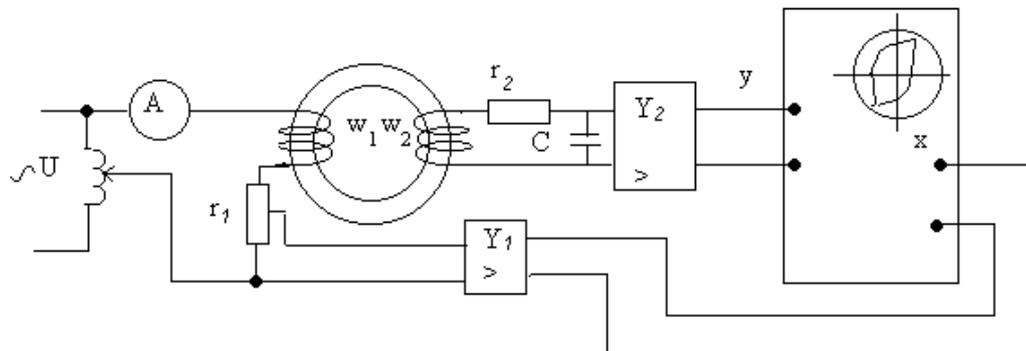
Змінюючи намагнічуючий струм  $I_1$ , знімають залежність  $B = B(H)$ ,  
 $\mu = \mu(H)$ ,  $P_{ст} = P_{ст}(B_m)$ .

### Залежність втрат в сталі від частоти:

$$P_{ст} = P_r + P_B; P_r = \varepsilon \frac{f}{50} \left( \frac{B}{B_{1,0}} \right)^2 - \text{втрати на гістерезис, [Вт/кг].}$$

$$P_B = \sigma \left( \frac{f}{50} \right)^2 \left( \frac{B}{B_{1,0}} \right)^2 - \text{втрати на вихрові струми [Вт/кг].}$$

### 7. Отримання петлі гістерезису за допомогою осцилографа.



На горизонтальні пластини  $X$  осцилографа подають напругу, пропорційну намагнічуючому струму  $H$ . На вертикальні пластини  $Y$  осцилографа подають, напругу, пропорційну магнітній індукції  $B$  у зразку. На екрані осцилографа спостерігають петлю гістерезису.

### 8. Розподіл втрат в сталі.

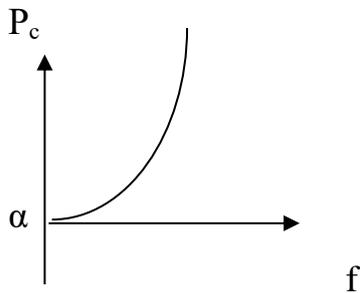
Методом ватметра (режим холостого ходу трансформатора) знімають залежність втрат в сталі  $P_c$  від частоти  $f$  в діапазоні  $f=40...60$  Гц і будують криву  $P_c(f)$ :

$$P_c = P_r + P_B = \alpha f + \beta f^2;$$

де  $P_r$  – питомі втрати на гістерезис;

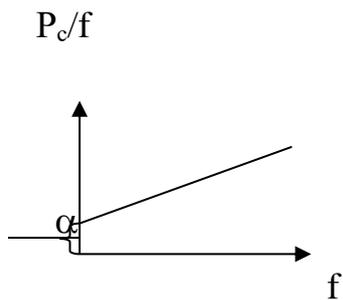
$P_B$  - питомі втрати на вихрові струми;

$\alpha$  - питомі втрати на гістерезис за 1 період.



Потім будують пряму  $P_c/f = \alpha + \beta f$ ;

На графіку  $P_c(f)$  із початку координат проводимо пряму втрат на гістерезис (паралельно прямій  $P_c/f$ ).



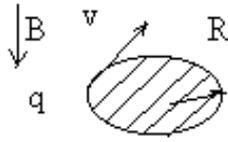
Точка  $\alpha$  на графіку розділяє втрати на гістерезис  $P_r$  та на вихрові струми  $P_c$ .

### 8. Вимірювання малих величин індукції.

Б.С. Дивер і В.М. Файрбенк в 1961 г. провели вимірювання магнітного потоку в мікророзрзку надпровідника і показали, що магнітний потік через надпровідний циліндр пропорційний елементарному кванту потоку:

$$\Phi_0 = h/2e = 6.62 \cdot 10^{-34} / (2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}) \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}; \Phi = n\Phi_0.$$

Те, що магнітний потік повинен квантуватися, впливає з квантової механіки:



Якщо заряд  $q$  рухається по колу радіуса  $R$  в полі  $B$  із швидкістю  $v$ , то  $mv^2/R = qvB \Rightarrow R = mv/(qB)$ .

Частота обертання дорівнює

$$\omega = qB/m; f = v / (2\pi R) \Rightarrow \omega = 2\pi f = v/R = qB/m.$$

Згідно квантовій механіці, рівень енергії квантується; тобто повинен бути кратним енергії кванта  $\hbar\omega$ :

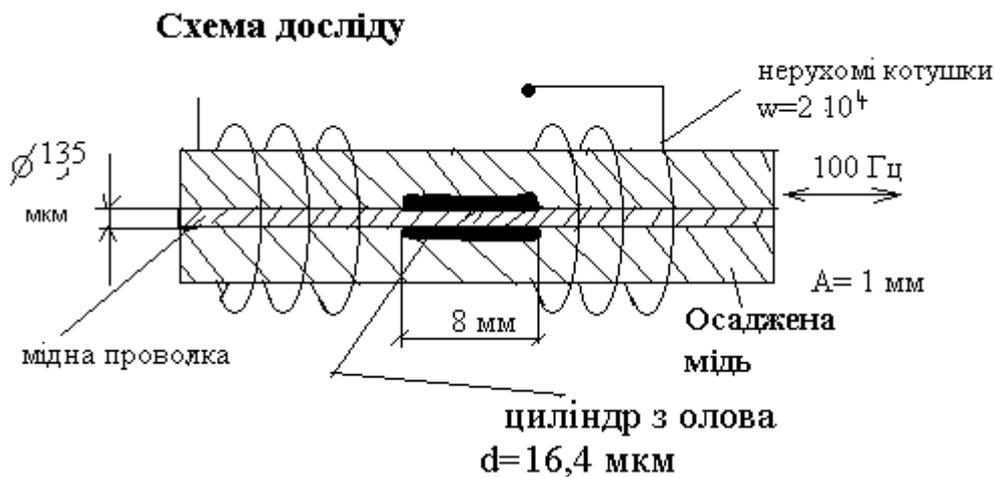
$$E = mv^2/2 = n \hbar\omega \Rightarrow v^2 = 2n \hbar\omega/m = (2n\hbar/m) \cdot (qB/m).$$

$$R^2 = \left(\frac{mv}{qB}\right)^2 = \left(\frac{m}{qB}\right)^2 v^2 = \left(\frac{m}{qB}\right)^2 \frac{2n\hbar}{m} \cdot \frac{qB}{m} = \frac{n2\hbar}{qB}$$

$$R^2 = \frac{n2\hbar}{qB} = \frac{nh}{\pi Bq} \Rightarrow \pi R^2 B = n \frac{h}{q} \text{ де } \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ - постійна Планка.}$$

Величина  $\Phi$  визначається наступним чином:

$$\Phi = nh/q, \text{ для надпровідних пар } q=2e; \Phi = nh/2e; \Phi = n\Phi_0; \Phi_0 = \frac{h}{2e}.$$



Котушки в даному досліді з'єднані зустрічно, тому індукована ЕРС від поля циліндра олова в них складається.

Спочатку зразок було калібровано, тобто було знято залежність  $U=U(\Phi)$ , де  $\Phi$  – потік через олов'яний циліндр при  $T < T_c$ .

Дослід було проведено таким чином.

- Ввімкнуто відоме поле  $B$  при  $T > T_c$  і доведено  $T < T_c$ .
- Зовнішнє поле  $B$  було вимкнено і вимірено потік  $B$  струмів надпровідності, що текли по олов'яному циліндру. Цим дослідом підтверджено квантування  $\Phi$  і те, що носії надпровідності мають значення  $q=2e$ ,  $\Phi/\Phi_0=h/2e$ .

## ТЕМА 3

### ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ.

### ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Необхідність залучення апарата теорії ймовірностей до дослідження випадкових похибок достатньо очевидна. Оскільки результат вимірювань величини  $v$  буде залежати від багатьох факторів і при кожному вимірюванні буде приймати різне випадкове значення  $x$ , то й абсолютна похибка вимірювань  $\Delta v = x - v$  також буде випадковою величиною.

Випадковою величиною називають величину, котра в результаті досліду може прийняти одне можливе значення, заздалегідь невідоме і залежне від випадкових причин.

Випадкова величина може бути дискретною або неперервною.

Дискретною випадковою величиною називається така, котра може приймати скінченне значення або нескінченну зліченну кількість значень. (Наприклад, «орел» або «решка» при киданні монети, числа 1...6 грального кубика, число відмов при дослідженнях).

Неперервною випадковою величиною називається така, котра може приймати всі значення із деякого скінченного або нескінченного проміжку числової осі. (Наприклад, значення напруги, струму).

Поведінка випадкових величин описується законами їх розподілу. Законом розподілу дискретної випадкової величини називають будь-яку відповідність між можливими її значеннями і їх імовірностями. Закон може бути заданий таблично, графічно або аналітично.

Оскільки неперервна випадкова величина приймає нескінченну множину значень (навіть на обмеженому проміжку), то імовірність прийняття певного значення дорівнює нулю. Тому для неперервної випадкової величини оперують не ймовірністю, а густиною ймовірності (котра не дорівнює нулю для конкретного значення). При цьому вводять поняття функції розподілу  $F(x)$ , котра є спільною для дискретних і конкретних випадкових величин.

Функцією розподілу (інтегральною функцією або законом розподілу) називається функція  $F(x)$ , яка визначає для кожного значення  $x$  імовірність того, що випадкова  $X$  прийме значення, яке менше, ніж  $x$ , тобто  $F(x)=P(X<x)$ , де  $X$  – діапазон усіх значень величини  $x$ .

Властивості функції розподілу:

- 1)  $F(x)$  – це неспадна функція від  $x$ , тобто якщо  $x_1 > x_2$ , то  $F(x_1) \geq F(x_2)$ .
- 2) На кінцях інтервалу всіх можливих значень  $x$  функція  $F(x)$  приймає значення 0 або 1, тобто  $F(a)=0$  ( $a < b$ ),  $F(b)=1$ .
- 3). Функція  $F(x)$  неперервна і диференційовна, тільки якщо  $x$  є неперервна випадкова величина.

Густиною розподілу (або диференційною функцією розподілу) називають першу похідну функції розподілу  $F(x)$ :

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Враховуючи визначення  $F(x)$  як ймовірність  $P(X < x)$ , густину розподілу  $f(x)$  можна записати так:

$$f(x) = \frac{P(X < x + dx) - P(X < x)}{dx}.$$

Звичайно  $f(x)$  називають законом розподілу неперервної випадкової величини  $X$ .

Властивості густини  $f(x)$ :

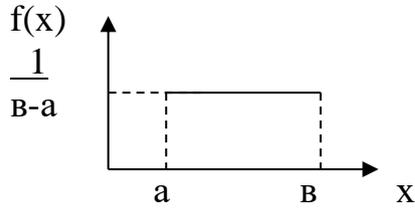
- 1)  $f(x)$  невід'ємна, тобто  $f(x) \geq 0$ ;
- 2) площа під кривою  $f(x)$  рівна одиниці, тобто  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$  (Імовірність того, що випадкова величина  $x$  прийме будь-яке значення з інтервалу  $X$ , дорівнює 1);
- 3)  $F(x)$  визначається через  $f(x)$  як

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

## Основні закони розподілу випадкових величин.

### 1. Рівномірний закон розподілу.

Графічне завдання

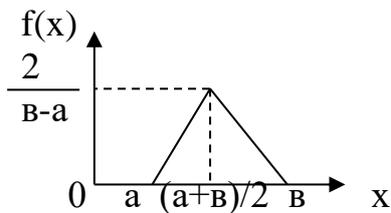


Аналітична форма

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq a \\ 1/(b-a) & \text{при } a < X \leq b \\ 0 & \text{при } X > b \end{cases}$$

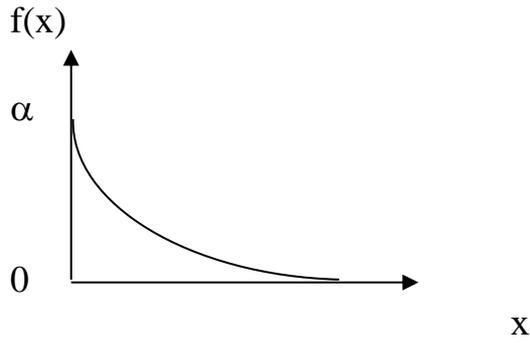
$$M[X] = \frac{a+b}{2} \text{ – математичне очікування випадкової величини}$$

### 2. Закон Сімпсона (трикутний закон).



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} & \text{при } a < x \leq (a+b)/2 \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} & \text{при } (a+b)/2 < x \leq b \\ 0 & \text{при } x > b; \end{cases}$$

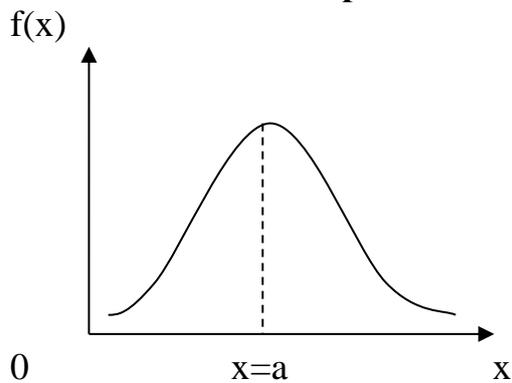
### 3. Експоненціальний закон розподілу.



$\alpha$  – середньоквадратичне відхилення результатів вимірювання (дисперсія).

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{при } 0 \leq X \leq \infty \\ M[X] = 1/\alpha & D[X] = 1/\alpha^2 \end{cases}$$

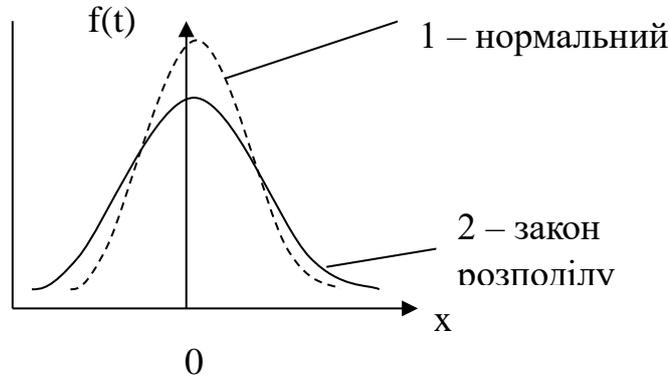
### 4. Нормальний закон розподілу (закон Гауса).



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} ; M[X] = a;$$

$$D[X] = \sigma^2$$

5. **Розподіл Стюдента (t-розподіл)** – це модифікація нормального закону розподілу, або нормальний закон розподілу при обмеженій кількості вимірювань.



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \cdot \frac{\Gamma(\nu+1)/2}{\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

де  $\Gamma(\nu+1)$ ,  $\Gamma(\nu/2)$  – гама-функції;  $\nu$  – число ступенів вільності (кількість вимірювань) розподілу  $X_2$ ;

$t = \frac{x}{\sqrt{x_2/\nu}}$  – квантиль розподілу Стюдента.

$M(x) = 0$  при  $\nu \geq 2$

$D(x) = 1/(\nu-2)$  при  $\nu \geq 3$ .

У загальному випадку гама-функція може бути визначена кількома способами:

$$\frac{1}{\Gamma(Z)} = Z \cdot e^{\gamma Z} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{Z}{m}\right) e^{-\frac{Z}{m}} \right\} \text{ – через нескінченний добуток;}$$

$$\Gamma(Z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^Z}{Z(Z+1)\dots(Z+m)} \text{ – через межу (границю);}$$

$$\Gamma(Z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{Z-1} dt \text{ [для } R(Z) > 0] \text{ – через визначений інтеграл;}$$

Де:  $Z$  – комплексне число;

$\gamma = 0,5772156\dots$  – число Ейлера;

$$\gamma \approx \frac{1}{2} (\sqrt[3]{10} - 1) = 0.5772173\dots$$

$$\frac{1}{\Gamma(Z)} = \frac{1}{2\pi j} \int_c \frac{e^z dz}{Z^{v+1}} - \text{через інтеграл Коші.}$$

Властивості гама-функції (також її називають факторіальною функцією) мають наступний вигляд:

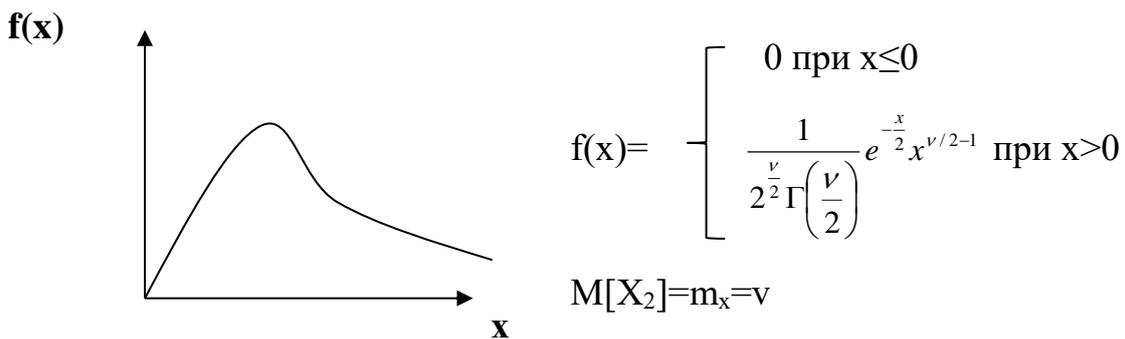
$$\Gamma(n+1) = n!;$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

$$\Gamma(Z+1) = Z\Gamma(Z);$$

$$\Gamma(1-Z) = -Z\Gamma(-Z).$$

**6. Розподіл  $X_2$ .** Якщо  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) - нормально розподілені незалежні випадкові величини з математичним очікуванням, рівним нулю, і одиничними дисперсіями, то сума квадратів цих величин  $X_2 = \sum X_i^2$  розподілена по закону  $X_2$  з  $v = n$  ступенів вільності.



Існують і інші розподілення, наприклад, біноміальне розподілення, розподілення Пуассона.

### Характеристики положення випадкової величини.

1. Математичне очікування – це середнє значення випадкової величини ( $m_x$  або  $M[X]$ ):

- для дискретної випадкової величини  $m_x = M[X] = \sum_{i=1}^n P_i x_i$ ;

- для неперервної випадкової величини  $m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ .

2. Мода – це найбільш імовірне значення випадкової величини  $M_0[X]$

- для дискретної величини  $M_0[X] = X_i P_{i \max}$ .

- для неперервної величини значення  $M_0[X]$  визначається рівнянням:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0.$$

3. Медіана  $M_e[X]$  (має зміст лише для неперервної величини) – це значення випадкової величини, інтегральна функція розподілу якої дорівнює 0,5, тобто  $F\{M_e[X]\} = 0,5$ .

### Характеристики розкиду.

1. Дисперсія (Д) - математичне очікування квадрату відхилення випадкової величини від її середнього значення:

- для дискретної випадкової величини:

$$D[X] = \sum_{i=1}^n (X_i - m_x)^2 P_i;$$

- для неперервної випадкової величини:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (X_i - m_x)^2 f(x) dx.$$

Дисперсія характеризує «розпливчастість» розподілу.

2. Середньоквадратичне відхилення  $\sigma = \sqrt{D}$

Дисперсія має розмірність квадрата вимірюваної величини, тоді як розкид зручніше характеризувати величиною, тієї ж розмірності, тобто  $\sigma = \sqrt{D}$ .

### Характеристики форми розподілу.

1. Коефіцієнт асиметрії  $S_k$  – характеризує ступінь несиметричності (скошеності) розподілу. Він визначається через третій центральний момент  $\mu_3$  за формулою:

$$S_k = \mu_3 / \sigma^3;$$

де  $\mu_3$  визначається наступним чином:

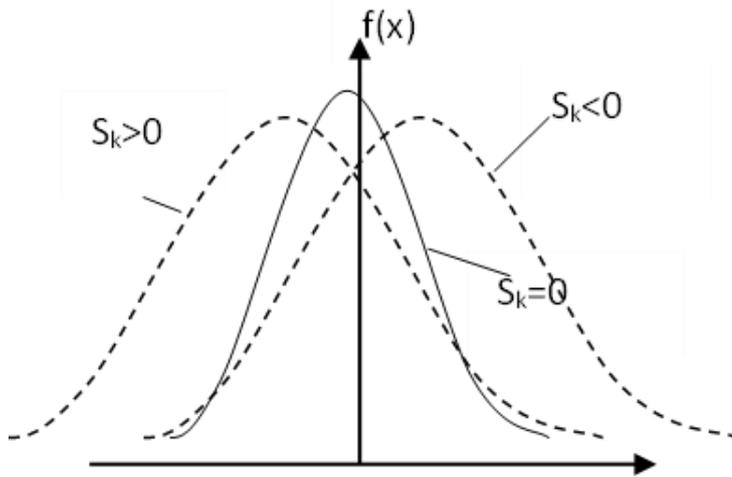
- для дискретної випадкової величини

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^n (X_i - m_x)^3 P_i;$$

- для неперервної випадкової величини

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)^3 f(x) dx.$$

Для усіх асиметричних розподілів (наприклад, нормальне)  $S_k=0$ . При  $S_k>0$  мода розподілу знаходиться зліва від математичного очікування, а при  $S_k<0$  - справа.



Ексцес  $E_x$  слугує характеристикою крутизни, тобто гостровершинності або плосковерхшинності розподілу. Його визначають через четвертий центральний момент  $\mu_4$  за формулою:  $E_x = (\mu_4/\sigma^4) - 3$ .

Для нормального розподілу  $E_x=0$ .

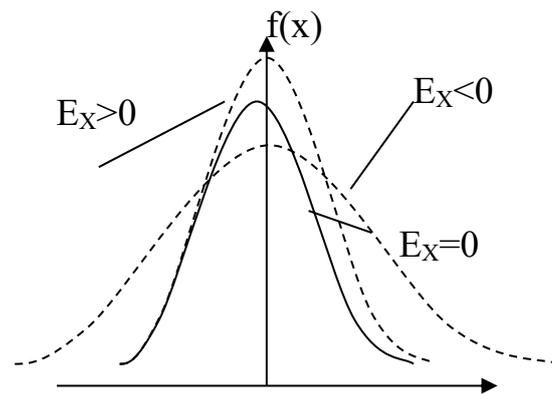
При всіх  $E_x>0$  розподіл більш «гострий», ніж нормальний, при  $E_x<0$  розподіл менш «гострий», ніж нормальний.

- Для дискретних величин  $\mu_4$  визначають за формулою:

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^n (X_i - m_x)^4 P_i;$$

- для неперервного розподілу:

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)^4 f(x) dx.$$



Таблиця 3.1

**Квантилі розподілу Стюдента  $t_{\alpha, f}$  для різних  $\alpha$  і  $f$**

Число ступенів вільності $f$ , (кількість дослідів)	Рівень значущості $\alpha=1-\gamma$ – двостороннє обмеження і одностороннє обмеження (цифри у дужках)					
	0,10 (0,05)	0,05 (0,025)	0,02 (0,01)	0,01 (0,005)	0,002 (0,001)	0,001 (0,0005)
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,73
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,39
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,56	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82

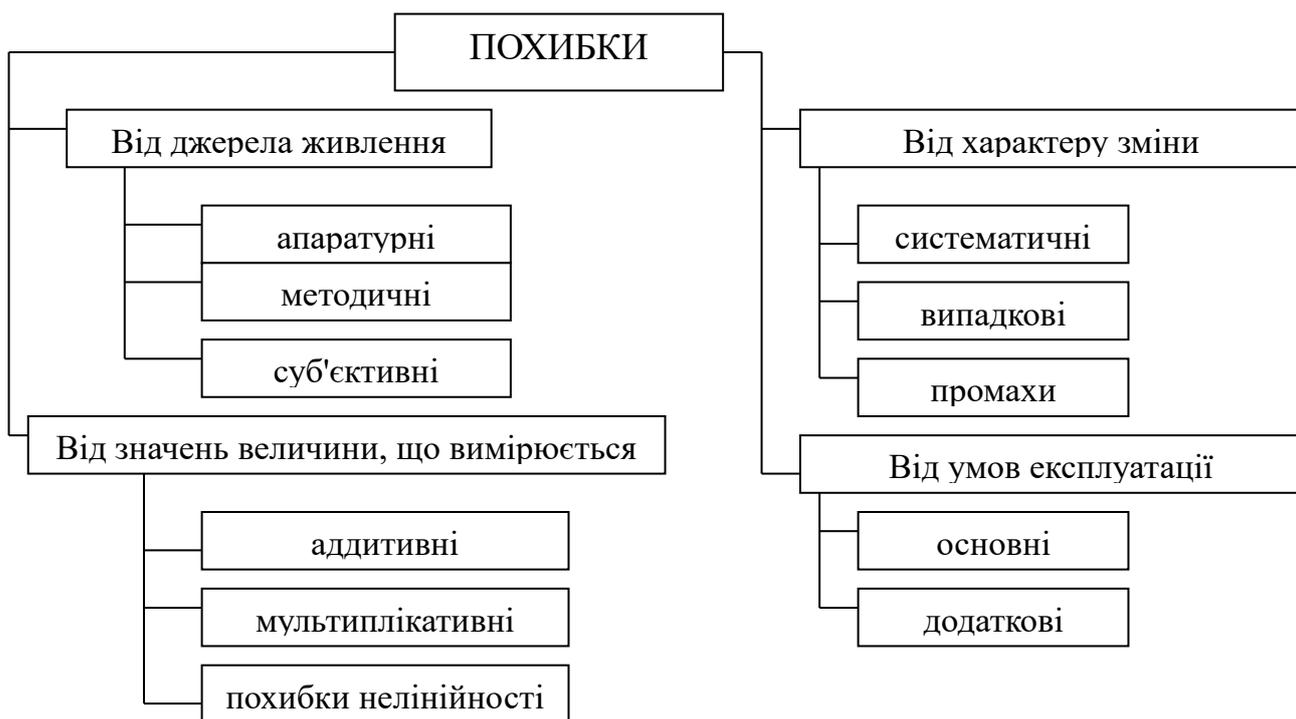
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
23	1,72	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
$\infty$	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

## ТЕМА 4

## КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ

Поява похибок може викликатися різноманітними причинами: зношеністю приладу, його неправильним встановленням, зміною параметрів оточуючого середовища та недосвідченістю оператора.

Усі ці причини прийнято називати джерелами похибок.



1. В залежності від джерела виникнення похибки вимірювань бувають:

- апаратурні – виникають внаслідок похибок вимірювальних пристроїв, що використовуються;
- методичні – виникають внаслідок недосконалості методів вимірювання, що використовуються, використання наближених співвідношень.

Наприклад, при вимірюванні струму амперметром та напруги вольтметром виникає методична помилка внаслідок власного споживання потужності цими приладами.

При вмиканні амперметра у електричний ланцюг опір ланцюга збільшується, а струм зменшується. Ця зміна струму і є абсолютною методичною похибкою.

Відносна методична похибка вимірювання струму амперметром:

$$\delta_{\mu I} = -\frac{1}{1 + R/R_A} 100\% ;$$

де  $R_A$  – опір амперметра;  $R$  – еквівалентний опір усього ланцюга відносно зажимів амперметра.

Із формули видно, що для зниження похибки необхідно вибрати амперметр з мінімальним опором.

При ввімкненні у ланцюг вольтметра напруга між його зажимами зменшується внаслідок зменшення опору між точками ввімкнення приладу.

Відносна методична похибка вимірювання напруги вольтметром:

$$\delta_{\mu U} = -\frac{1}{1 + R_V/R} 100\% ;$$

де  $R_V$  – опір вольтметра;  $R$  – еквівалентний опір усього ланцюга відносно зажимів вольтметра.

Тому необхідно вибрати вольтметри з максимальним власним опором.

- суб'єктивні – відбивають недосконалість органів почуттів оператора, його недостатню увагу. У недосвідчених операторів існує власна похибка.

2. В залежності від значення величини, яка вимірюється, похибки поділяють на:

- адитивні – похибки нуля, виникають внаслідок зсуву покажчика із нульової позначки, тертя у опорах;
- мультиплікативні – похибки крутизни характеристики, виникають внаслідок старіння елементів та вузлів, тертя, впливу зовнішніх факторів;
- похибки нелінійності – похибки кривизни характеристики, виникають внаслідок впливу зовнішніх факторів.



## **Систематичні похибки**

Систематичні похибки підрозділяються на такі.

- Похибки установки (розташування). Виникають при неправильному просторовому розташуванні приладу або невідповідності зовнішніх факторів (температура, тиск, вологість).
- Інструментальні. Обумовлені конструктивними або технологічними недоліками приладів.
- Теоретичні. Обумовлені недостатньою розробкою метода, покладеного в основу вимірювання й наближеністю формул, що використовуються.

Окрім цього, похибки поділяються на постійні та змінні. Постійними називаються похибки, які не змінюють свого знака або величини на протязі усього процесу вимірювання, наприклад, неточність налаштування дільника напруги, неправильність градування шкали. Змінними називаються похибки, які змінюються по визначеному закону. Приклад змінної похибки – вплив розрядки джерела живлення на показання приладу.

### **Методи боротьби із систематичними похибками.**

#### **1. Постійні похибки:**

а) метод поправок – базується на результатах попереднього досліду, у якому досліджується вплив зовнішніх факторів. За його результатами складаються таблиці поправок, графіки поправок або наводяться поправочні формули;

б) метод заміщення – коли вимірювана величина періодично заміщується зразковою мірою;

в) метод дворазового вимірювання полягає у такій постановці експерименту, при якому похибка, викликана будь-якою причиною, входить в результати експерименту то із знаком «плюс», то із знаком «мінус».

## 2. Змінні похибки:

а) метод симетричних спостережень - полягає у тому, що беруть напіврізницю першого та останнього спостереження, ділять на кількість вимірів без одиниці, та додають цю величину  $\Delta S$  до результату другого вимірювання, подвоєну величину  $2\Delta S$  – до результату третього:

$$\Delta S = \frac{A_n - A_1}{2(n-1)};$$

б) для змінних похибок також будують поправкові графіки й таблиці.

### **Випадкові похибки.**

Навіть при ідеальному виключенні систематичних похибок не можна визначити справжнє значення величини, яка вимірюється, через неминучу появу малих відхилень окремих результатів вимірювання, які змінюються за знаком та абсолютним значенням випадково. Ці малі відхилення, які викликані дією багатьох факторів, у метрології називають **випадковими похибками**.

Абсолютні значення та знак випадкових похибок підпорядковуються імовірнісним законам.

### **Точкова та інтервальна оцінки результатів вимірювань.**

Оцінку вимірювання виконують за методом точкових та інтервальних оцінок.

Нехай маємо ряд результатів вимірювань:  $X_1, X_2, \dots, X_i$ . Параметрами, що оцінюються, є математичне очікування результатів та дисперсія.

Оцінка результату <точкова  $a^*$ > називається **точковою**, якщо вона виражається певним числом. Така оцінка є випадковою величиною із своїм розподілом і підпорядкуванням імовірнісним законам.

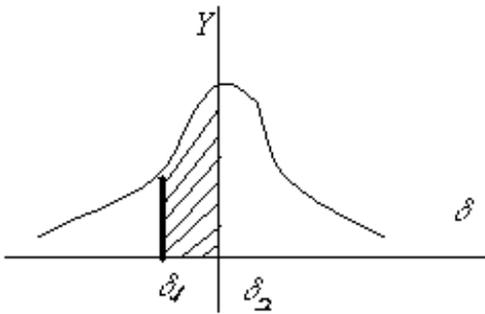
Точкові оцінки математичного очікування та дисперсії знаходяться за формулою:

$$m_x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$D_x^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n [X_i - m_x^*]^2$$

де  $N$  – кількість вимірів (знак \* позначає точкову оцінку).

Існує також **інтервальна** оцінка результатів вимірювання. Сутність методу інтервальної оцінки полягає в знаходженні інтервалу (який зветься довірчим), у межах якого з визначеною імовірністю (яка зветься довірчою) полягає справжнє значення оцінюваного параметра.



Імовірність  $P$  появи похибки із значеннями від  $\delta_1$  до  $\delta_2$  визначається площею ділянки, яка залежить від висоти інтервалу, тобто імовірності появи похибок  $Y$  та ширини інтервалу  $\delta_1$  до  $\delta_2$ .

Для нормального закону розподілу імовірність появи похибки обчислюється як визначений інтервал від функції  $Y$  (нормальний закон розподілу):

$$P(\delta_1 < \delta < \delta_2) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} Y(\delta) d\delta.$$

Значення цього інтеграла для усіх величин  $\delta$  є стандартним і зведено в спеціальній таблиці.

На практиці ширину довірчого інтервалу  $\Delta A$  прийнято нормувати в значеннях  $\sigma$ :

$$\Delta A = \pm K \bar{\sigma},$$

де  $K = 1, 2, 3, \dots$

Оскільки на практиці похибки величиною  $> 3\bar{\sigma}$  малоімовірні, звичайно приймають ширину довірчого інтервалу  $\Delta A = \pm 3\bar{\sigma}$ .

При цьому  $P=0,997$ , тобто тільки у трьох випадках із 1000 вимірювань значення похибки вийдуть за межі довірчого інтервалу.

Ця формула справедлива, якщо кількість вимірювань  $n$  більше тридцяти. Якщо  $n < 30$ , то користуються розподілом Стьюдента:

$$\Delta A = \pm t_{np} \bar{\sigma};$$

де  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}}$  – величина відхилення двостороннього інтервалу;

$n$  – кількість вимірювань;

$\sigma_{\Delta}$  – середньоквадратична похибка вимірів (СКП).

Значення квантиля Стьюдента  $t_{np}$  розраховані та зведені в спеціальні таблиці.

### **Методи одержання графічних та аналітичних залежностей за результатами вимірювань. Побудова графічних залежностей.**

Будемо розглядати результати однофакторних експериментів. **Однофакторним** називається експеримент, коли керована величина  $Y$  пов'язана із однією незалежною змінною  $X$  функціональною залежністю вигляду  $Y=f(X)$ .

Нехай маємо результати експерименту вигляду:

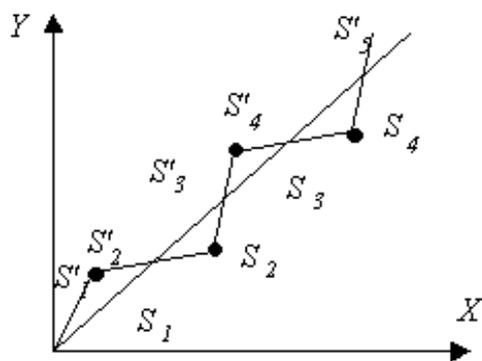
X	x1	x2	x3	...	xn
Y	y1	y2	y3	...	yn

Недоліками даних результатів є те, що як  $X_i$ , так і  $Y_i$  підпадають під вплив випадкових похибок, до того ж  $X$  та  $Y$  визначені через проміжки. Тому для забезпечення можливості визначення значень  $Y$  у всьому діапазоні вимірювань аргументу  $X$  будуються експериментальні графіки, які визначають неперервну функцію  $Y=f(X)$  з заданою точністю. При цьому потрібно одним з розглядуваних нижче методів побудувати графічну залежність, яка найбільш точно відповідає результатам експерименту.

## I. Метод рівних відрізків.

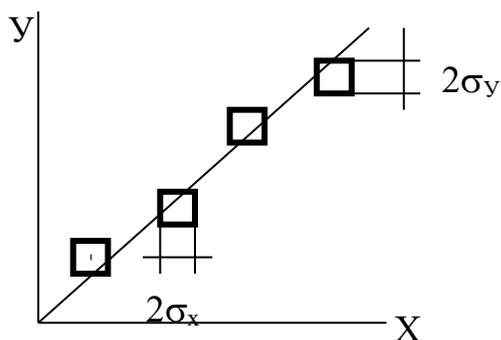
При застосуванні цього методу на координатну площину наносяться точки  $X_i$ ,  $Y_i$  у відповідності із результатами експерименту. Потім одержані точки з'єднують прямими лініями; виходить ламана лінія. Крива проводиться таким чином, щоб сума відрізків ламаної лінії, розташованої вище кривої, дорівнювала сумі відрізків, які розташовані нижче кривої:

$$\sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n S'_i .$$



## II. Метод прямокутників.

Спочатку наносяться точки  $X_i$ ,  $Y_i$ , як і у першому випадку, але біля кожної точки будується прямокутник із сторонами  $2\sigma_x$  та  $2\sigma_y$ , де  $\sigma_x$  та  $\sigma_y$  – середньоквадратичні похибки результату вимірювань значень  $X_i$  та  $Y_i$ . Крива повинна торкнутись, або пройти через усі прямокутники. Таким чином, відстань від кривої до точки не перевищить величину середньоквадратичного відхилення.

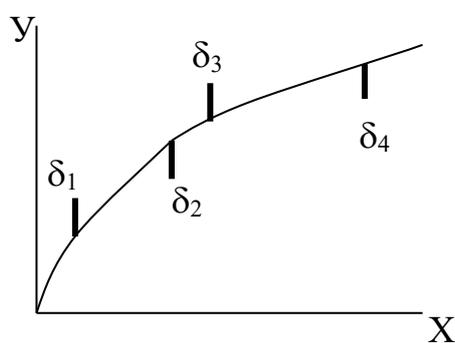


### III. Метод найменших квадратів.

Цей метод найбільш точний, він легко програмується. При використанні цього методу операції, які пов'язані із нанесенням експериментальних точок  $X_i$ ,  $Y_i$  на поле графіка, залишаються тими ж самими, але результуюча крива проводиться на кресленні так, щоб дотримуватись рівності:

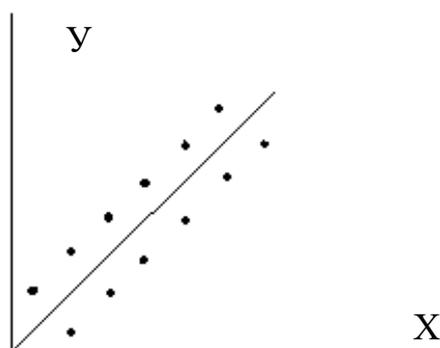
$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \min ,$$

де  $\delta_i$  - ординати відхилень від точки до кривої  $y=f(x)$ .



#### Одержання аналітичних залежностей за побудованими графіками.

Побудований графік тільки припускає вид зв'язку між  $X$  та  $Y$ ; це може бути пряма, парабола, гіпербола. Потрібно визначити вид залежності та оптимальні коефіцієнти, які зв'язують  $X$  та  $Y$ .



Розглянемо техніку одержання аналітичних залежностей за експериментальними даними.

Припустимо, що залежність має вигляд прямої  $y=A+Bx$ .

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} Y_1 = A + B x_1 \\ Y_2 = A + B x_2 \\ \dots\dots\dots \\ Y_n = A + B x_n \end{cases}$$

Якби не було похибки, то залишкові різниці  $\delta_n$  дорівнювали б нулю:

$$\begin{cases} \delta_1 = Y_1 - (A + B x_1) \\ \delta_2 = Y_2 - (A + B x_2) \\ \dots\dots\dots \\ \delta_n = Y_n - (A + B x_n) \end{cases}$$

Тоді для запису аналітичного виразу було б достатньо двох точок, наприклад  $(X_1, Y_1)$  та  $(X_2, Y_2)$ . Але  $\delta_n \neq 0$ , тому необхідно використовувати усі дані.

Застосовуючи принцип Лежандра, можна стверджувати, що найбільш повним буде рівняння  $Y=f(x)$  із тими значеннями  $A_i$  та  $B_i$ , для якого справедлива рівність:

$$S = \sum_{i=1}^n [Y_i - (A_i + B_i x_i)]^2 = \psi(A, B) = \min .$$

Тут  $A_i, B_i$  – змінні, оскільки із нескінченної кількості  $A_n$  і  $B_n$  треба визначити оптимальні.

Для обчислення  $A_0$  і  $B_0$  вирішуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial B} = 0 \end{cases}$$

Беремо часткові похідні за  $A$  та  $B$ . Обчисливши систему, одержимо оптимальні  $A_0$  і  $B_0$ .

Після цього розраховуються залишкові різниці:

$$\begin{cases} \delta_{01} = Y_1 - (A_0 + B_0 x_1) \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{0n} = Y_n - (A_0 + B_0 x_n) \end{cases}$$

По значенням та знакам  $\delta_{0i}$  міркують про прийнятність припущеного спочатку виду функції  $Y=f(X)$ , користуючись наступними правилами.

1) Якщо всі залишкові різниці  $\delta_{0i}$  менше, ніж задана похибка  $\Delta$ , то одержаний вираз вважається припустимим.

2). Якщо окремі  $\delta_{0i}$  більше ніж  $\Delta$ , але при цьому знаки чергуються, то одержана залежність вважається припустимою.

3). Якщо окремі  $\delta_{0i}$  більше ніж  $\Delta$ , а знаки чергуються групами, то необхідно збільшити порядок даної функціональної залежності.

4). Якщо окремі  $\delta_{0i}$  більше ніж  $\Delta$ , то необхідно розглянути питання про нову функціональну залежність.

### **Порядок обробки результатів при прямих вимірюваннях.**

Нехай маємо ряд результатів вимірювання  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Існує стандартна методика обробки багатократних спостережень. Для отримання результату необхідно виконати ряд операцій.

1. Записати результати вимірювань з урахуванням поправок на систематичні похибки, визначеним по формулам або таблицям поправок.
2. Визначити середнє арифметичне результатів вимірів:

$$X_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i .$$

3. Визначити відхилення кожного вимірювання від середнього, тобто величину випадкової похибки:

$$\delta_i = X_i - X_{cp} .$$

4. Визначити квадрати похибок  $\delta_i^2$ .
5. Визначити суму квадратів похибок  $\sum_{i=1}^n \delta_i^2$ .

6. Визначити середньоквадратичне відхилення  $S_n = \sigma_{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n \delta_i^2}$ .

7. Визначити величину відхилення двостороннього інтервалу  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}}$ .
8. Здійснити за одним із стандартних методів (наприклад, методу Пірсона) перевірку гіпотези про нормальність закону розподілу.
9. За заданою імовірністю та кількістю вимірювань визначити коефіцієнт Стьюдента  $t_{np}$ , а також значення довірчого інтервалу  $\Delta A = t_q \bar{\sigma}$ .
10. Записати кінцевий результат у вигляді:  $X = X_{cp} \pm \Delta A$ .

Значення  $X_{cp}$  та  $\Delta A$  заокруглюють до двох знаків після коми. Результат записується у круглих дужках, після них проставляються одиниці вимірювання. Потім вказується величина довірчої імовірності. Наприклад:

$$U = (3.96 \pm 0.14) \text{ В, } (p=0,98).$$

### Обробка даних при побічних вимірюваннях.

При побічних вимірюваннях результат знаходять шляхом обчислення відомої аналітичної залежності між невідомою величиною та величинами, які одержані при прямих вимірюваннях.

Припустимо, що результат побічного вимірювання представлений формулою:

$$A = A_1^{K_1} \cdot A_2^{K_2} \cdot A_3^{K_3} \cdot \dots \cdot A_n^{K_n},$$

де  $A_1, \dots, A_n$  – результати прямих вимірювань;

$K_1, \dots, K_n$  – показники степеня, в яких вони входять у формулу. Показники можуть бути додатними, від'ємними, цілими та дробовими.

Прологарифмуємо рівняння:

$$\ln A = \ln(A = A_1^{K_1} \cdot A_2^{K_2} \cdot A_3^{K_3} \cdot \dots \cdot A_n^{K_n}) = K_1 \ln A_1 + K_2 \ln A_2 + \dots + K_n \ln A_n.$$

Продиференціюємо цей вираз:

$$\frac{dA}{A} = K_1 \frac{dA_1}{A_1} + K_2 \frac{dA_2}{A_2} + \dots + K_n \frac{dA_n}{A_n}.$$

Замінімо диференціал  $dA$  малим приростом  $\Delta A$ :

$$\frac{\Delta A}{A} = K_1 \frac{\Delta A_1}{A_1} + K_2 \frac{\Delta A_2}{A_2} + \dots + K_n \frac{\Delta A_n}{A_n}$$

Величина  $\frac{\Delta A}{A} = \delta$ , тобто дорівнює величині відносної похибки:

$$\delta_A = K_1 \delta_{A_1} + K_2 \delta_{A_2} + \dots + K_n \delta_{A_n}$$

Відносні похибки можуть бути більшими та меншими від нуля, тому для знаходження відносної максимальної похибки  $\delta_A$  складові беремо за модулем:

$$\delta_A = |K_1 \delta_{A_1}| + |K_2 \delta_{A_2}| + \dots + |K_n \delta_{A_n}|$$

Якщо результати побічних вимірювань знаходяться в залежності, яка має вигляд

$$A = A_1^{K_1} + A_2^{K_2} + A_3^{K_3} + \dots + A_n^{K_n},$$

то можна дістати вираз для випадкових похибок:

$$\delta_A = \left| \delta_{A_1} \frac{A_1^{K_1}}{A} \right| + \left| \delta_{A_2} \frac{A_2^{K_2}}{A} \right| + \dots + \left| \delta_{A_n} \frac{A_n^{K_n}}{A} \right|$$

### Приклад.

Вимірюється потужність розсіювання на резисторі  $R$ . Відносна похибка вимірювання опору резистору  $\delta_R = 1.5\%$ , похибка вимірювання падіння напруги на ньому  $\delta_U = 1\%$ . Визначити можливу похибку вимірювання потужності  $\delta_P$ .

$$P = \frac{U^2}{R} = U^2 R^{-1}$$

$$\delta_P = |2\delta_U| + |-1\delta_R|;$$

$$\delta_P = |2 * 1| + |-1 * 1.5| = 3.5\%$$

### **Загальний порядок додавання похибок**

В цей час у відповідності до Держстандарту «Нормовані метрологічні характеристики засобів вимірювань» усі похибки додаються наступним чином: окремо додаються систематичні та випадкові похибки і окремо мультиплікативні та адитивні похибки.

Таким чином, порядок додавання похибок є наступним.

а) Відбувається підготовка до додавання, при цьому похибки поділяються на систематичні та випадкові складові, адитивні та мультиплікативні; для випадкової складової похибки знаходять математичне очікування, СКВ та закон розподілення; визначають кореляційні зв'язки між складовими похибок.

б) Відбувається додавання систематичних похибок усього приладу в цілому.

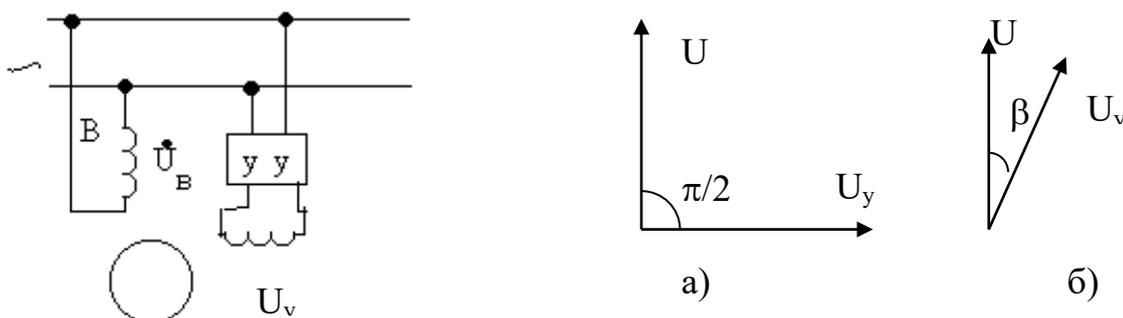
в) Відбувається додавання випадкових складових похибки усього приладу в цілому, при цьому усі математичні очікування додають до систематичної похибки (розглядаючи останню як випадкову похибку) і таким чином отримують систематичну складову сумарної похибки засобу вимірювання; знаходять значення СКВ випадкової складової похибки та закон розподілення сумарної випадкової похибки.

г) Визначають межі, в яких з довірчою імовірністю  $P(-\Delta X_r < X < \Delta X_r)$  знаходять значення помилки  $\Delta X$  даного конкретного засобу вимірювання на базі наступної нерівності:  $M[\Delta X] - k * \bar{\sigma}(\Delta X) < \Delta X < M[\Delta X] + k * \bar{\sigma}(\Delta X)$  при заданих  $M[\Delta X]$ ,  $\bar{\sigma}(\Delta X)$ , де  $k$  - коефіцієнт, який визначається довірчою імовірністю та виглядом додаткового закону розподілу.

## ТЕМА 5

## БУДОВА ТА ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИКОНАВЧИХ АСИНХРОННИХ ДВИГУНІВ АВТОМАТИКИ

Виконавчими АД служать двофазні АД з КЗ ротором.



Одна з обмоток статора В, яка називається обмоткою збудження, підключається до мережі з постійною діючою напругою  $U_B$ . До другої обмотки статора У, що називається обмоткою керування, підводиться напруга керування  $U_Y$  від керуючого пристрою УУ.

Розрізняють три основних способи керування швидкістю обертання виконавчого двигуна (ВД):

- амплітудне, при котрому змінюється лише напруга керуючої напруги  $U_Y$ , але кут між векторами напруги  $U_B$  та  $U_Y$  реостата залишається рівним  $\pi/2$  (а).
- фазове керування, при котрому напруга керування  $U_B$  залишається постійною по амплітуді, а змінюється лише кут  $\beta$  між векторами  $U_B$  та  $U_Y$  (б).
- амплітудно-фазове керування, при котрому змінюється і амплітуда  $U_Y$ , і кут  $\beta$ .

Напругу керування  $U_Y$  звичайно виражають у відносних одиницях, як  $U_Y/U_B = \alpha$  – коефіцієнт сигналу, або  $\alpha_E = U_Y/U'_B = k \cdot U_Y/U_B$  – ефективний коефіцієнт сигналу, де:

$$U'_B = \frac{U_B}{k} = \frac{U_B}{\frac{w_B}{w_Y}}, \quad k = \frac{w_B}{w_Y} - \text{коефіцієнт трансформації};$$

$w_B$  – кількість витків обмотки збудження;

$w_Y$  – кількість витків обмотки керування;

$$\alpha_E = U_Y / U'_B = k \alpha = \alpha w_B / w_Y.$$

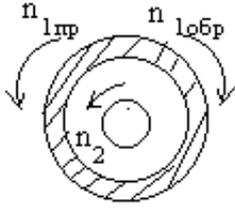
При фазному керуванні за коефіцієнт сигналу приймають  $\alpha = \sin \beta$ .

**Вимоги, які висуваються до виконавчих двигунів.** Крім загальних вимог (вага, габарити, мінімальна вартість, високий ККД, надійність), до ВД пред'являють ще і специфічні вимоги:

- керованість двигуна при всіх режимах роботи (тобто відсутність «самоходу», коли  $U_Y=0$ );
- лінійність механічних та регульовальних характеристик;
- висока швидкодія;
- мала потужність сигналу керування;
- безшумність в роботі;
- відсутність радіоперешкод в роботі.

При всіх методах керування швидкість обертання АД змінюється за рахунок утворення несиметричного еліптичного обертового магнітного поля (ОМП), котре можна представляти у вигляді двох кругових ОМП прямої і зворотної послідовності з різними амплітудами. Зменшення частоти обертання АД досягають шляхом збільшення еліптичності ОМП, тобто шляхом збільшення амплітуди поля зворотної послідовності, котре створює гальмівний момент. При цьому зростають втрати потужності в двигуні і падає ККД.

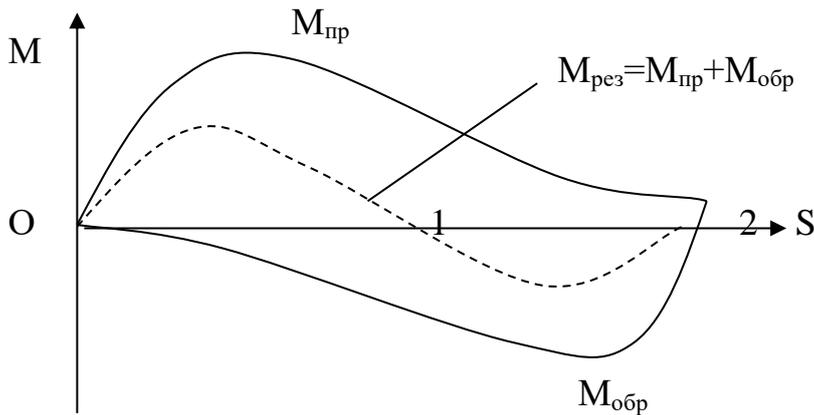
Для однофазного АД; тобто ВД з  $U_Y=0$  пульсуюче магнітне поле можна розкласти на 2 ОМП з половинними амплітудами, які обертаються в різні сторони (пряме та обернене).



$$S_{np} = \frac{n_{1np} - n_2}{n_{1np}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = 1 - \frac{n_2}{n_1}$$

$$S_{обр} = \frac{n_{1обр} + n_2}{n_{1обр}} = \frac{n_1 + n_2}{n_1} = 1 + \frac{n_2}{n_1}$$

Якщо з першого рівняння величину  $n_2/n_1 = 1 - S_{np}$  підставити у друге рівняння, то отримаємо:  $S_{обр} = 2 - S_{np}$ .



Таким чином, однофазний двигун з  $U_Y = 0$  може працювати з деякою швидкістю обертання, якщо його якось розігнати (тому що  $M_{пуск} = 0$ ).

Однак використовувати такий однофазний АД в якості виконавчого неможна, оскільки при  $U_Y = 0$  він не зупиниться, тобто втратить керування («самохід»).

Умова відсутності «самоходу» для двигуна:  $M_{рез} = M_{np} - M_{обр} \leq 0$  при  $0 < S \leq 1$ .

Ця умова виконується, якщо  $S \geq 1$ .

Як відомо, для АД:

$$S_{\text{кр}} = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2')^2}};$$

$$M_{\text{max}} = \frac{m_1 p_1 U_1^2}{4\pi f_1 [R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2')^2}]} .$$

Таким чином, для збільшення  $S_{\text{кр}}$  необхідно збільшувати опір обмотки клітки ротора  $R_2$ .

В залежності від причин, що викликають «самохід» ВД, його підрозділяють на параметричний та технологічний.

Параметричний самохід виникає в результаті неправильного проектування. Щоб його виключити напевно, ВД проектують з  $S_{\text{кр}}=2\div 4$ , що також покращує лінійність механічної характеристики. Однак таку умову отримують при більших значеннях  $R_2$ , отже, це призводить до знижень ККД.

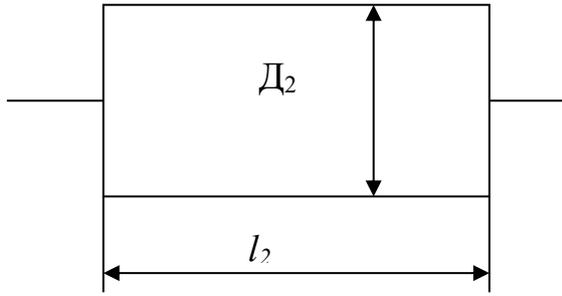
Технологічний самохід ВД може виникати через технічні допуски і неякісне виготовлення двигуна, наприклад:

- наявність міжвиткового замикання обмотки, що викликає появу еліптичного ОМП;
- погана ізоляція пакетів сталі (через заусенці);
- різна магнітна провідність по поперечній і повздовжній осях (наприклад, через ексцентриситет статора і ротора).

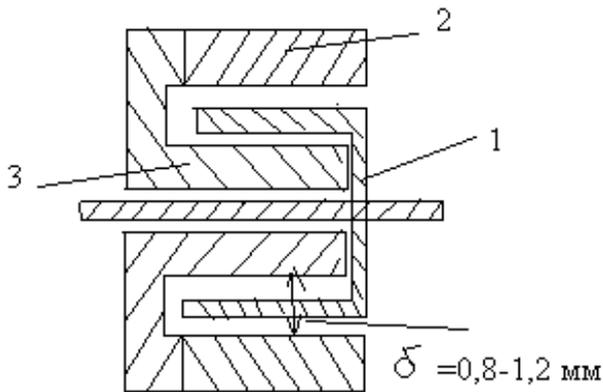
Для виключення цього виду самоходу потрібен жорсткий технологічний контроль виготовлення АД, використання всерної збірки листів пакету.

Керованість ВД забезпечується шляхом використання ротора з великим активним опором. Для збільшення опору стрижні клітки ротора виконують з матеріалу з підвищеним питомим опором (латунь, фосфориста бронза) і малим поперечним перерізом (оскільки  $R = \rho l/S$ ).

Для зменшення моменту інерції і збільшення швидкодії двигуна ( $T_M = J\omega_0/M_H$ ) ротори ВД виконують відносно малого діаметра з відношенням  $l_2/D_2 = 1.6\div 3.0$ , оскільки момент інерції ротора  $J \approx \sum m_i D_i^2$ .



Для ще більшого зниження моменту інерції ротора використовують порожній немагнітний ротор (1), з зовнішнім (2) та внутрішнім (3) статором.



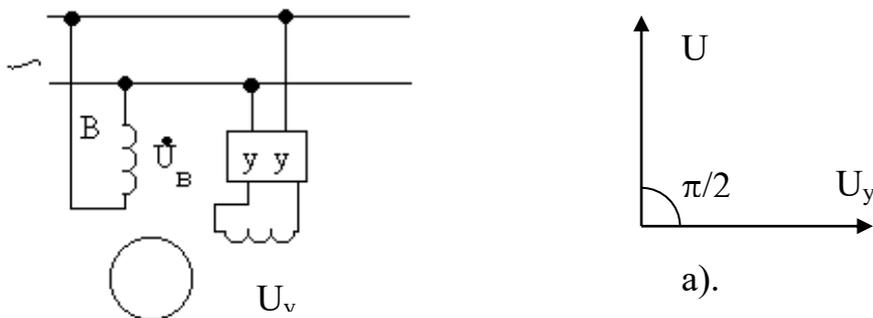
Внутрішній статор 3 використовують для зменшення повітряного зазору  $\delta$  магнітного кола. Однак, у таких ВД зазор  $\delta$  достатньо великий (0,6 – 1,2мм), і тому струм холостого ходу ВД складає 85 – 95% від  $I_{\text{номін}}$ .

Для збільшення пускового моменту  $M_{\text{пуск}}$  ВД використовують двигуни наскрізної конструкції у котрих зазор  $\delta=0,03 – 0,05 \text{ мм}$  за рахунок одночасної (за одну установку) розточки внутрішньої поверхні статора і отворів під підшипникові щити.

## ТЕМА 6

## ВИКОНАВЧІ ДВИГУНИ З АМПЛІТУДНИМ КЕРУВАННЯМ

При амплітудному керуванні напруга керування  $U_Y$  змінюється лише за величиною в відповідності з сигналом керування  $\alpha_E$ , залишаючись зсунутою за фазою на  $90^\circ$  відносно напруги збудження.



Аналіз властивостей виконавчих двигунів (ВД) будемо проводити шляхом розкладення його магнітного поля на два колових поля – прямої і зворотної послідовності.

Кожен з векторів напруг  $U_B$  і  $U_Y$  представимо як суму векторів прямої і зворотної послідовності:

$$U_Y = U_{Yпр} + U_{Yобр}; \quad (6.1)$$

$$U_B = U_{Bпр} + U_{Bобр}; \quad (6.2)$$

При цьому  $U_{Yпр} = -jU_{Bпр}$

$$U_{Yобр} = jU_{Bобр}$$

Систему рівнянь (6.1) з допомогою рівнянь (6.2) представимо так:

$$U_Y = -jU_{Bпр} + jU_{Bобр} \quad (6.3)$$

$$U_B = U_{Bпр} + U_{Bобр}$$

Помножимо рівняння (6.3) на  $j$  та отримаємо:

$$jU_Y = U_{Bпр} - U_{Bобр} \quad (6.5)$$

Склавши (6.4) та (6.5), отримаємо:

$$U_{Bпр} = 0.5(U_B + jU_Y) \quad (6.6)$$

Віднімаючи (6.4) від (6.5), отримаємо:

$$U_{Bобр} = 0.5(U_B - jU_Y) \quad (6.7)$$

Враховуючи, що кут між векторами  $U_B$  і  $U_Y$  дорівнює  $\pi/2=90$ , рівняння (6.6) та (6.7) можна записати:

$$U_{Впр}=0,5U_B(1+\alpha)=U_{Yпр} \quad (6.8)$$

$$U_{Вобр}=0,5U_B(1-\alpha)=U_{Yобр} \quad (6.9);$$

де  $\alpha=U_Y/U_B$ .

Якщо  $w_B \neq w_Y$ , то потрібно використовувати  $U'_B=U_B/(w_B/w_Y)=U_B/k$  - приведена напруга збудження;

$$\text{в рівняння (6.8) та (6.9) підставити значення } \alpha_E = k\alpha = \frac{w_B}{w_Y}\alpha \quad (6.10)$$

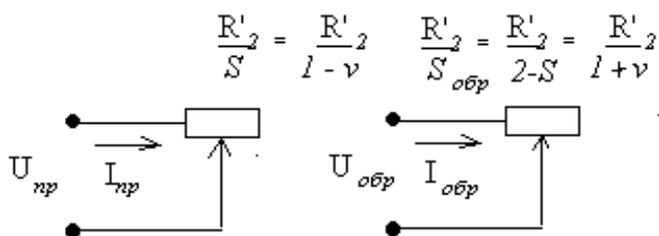
а опір обмотки керування привести до обмотки збудження, тобто:

$$R'_Y = \frac{R_B}{k^2}; \quad X'_Y = \frac{X_B}{k^2}, \quad \text{де } k = \frac{w_B}{w_Y} \quad (6.11)$$

При  $\alpha=0$  зворотне поле  $U_{Вобр}$  дорівнює прямому  $U_{Впр}$  і результуюче поле у двигуна пульсуюче (тобто однофазний режим).

При  $\alpha=1$  зворотне поле  $U_{Вобр}=0$  і в двигуні існує лише пряме колове поле (двофазний режим). При всіх поміжних випадках  $0<\alpha<1$  обертаюче поле двигуна еліптичне, тобто існують і пряме і зворотне поля.

Для спрощення аналізу властивостей ВД дослідження проводять для так званого ідеалізованого двигуна, у котрого зневажають всіма опорами, окрім активного опору ротора, котре вибирається великим. Тоді еквівалентні схеми



ідеалізованого двигуна для струмів прямої і зворотної послідовності приймають простий вигляд:

а) Пряма послідовність    б). Зворотна послідовність.

Тут враховано, що  $S_{обр}=2-S$ ,  $S=(n_1-n_2)/n_1=1-n_2/n_1=1-v$ , де  $v=n_2/n_1$  - відносна швидкість обертання ротора.

$$\text{Для струму прямої послідовності } I_{в.пр} = U_{Впр} / (R'_2 / 1 - v) \quad (6.12)$$

При пуску  $v = n_2 / n_1 = 0$

$I_{Впр} = U_{Впр} / R'_2$  або з врахуванням (6.8) при  $\alpha = \alpha_E$

$$I_{в.пр} = \frac{0,5U_B(1 + \alpha_E)}{R'_2} \quad (6.13)$$

Тоді пусковий момент ВД для прямої послідовності дорівнює:

$$M_{н.пр} = \frac{P_{Ем.п}}{\omega_1} = \frac{0,5U_B^2(1 + \alpha_E)^2}{\omega_1 R'_2} \quad (6.14)$$

Де  $P_{Ем.п.} = 2 I_{в.пр}^2 R'_2 = \frac{0,5U_B^2(1 + \alpha_E)^2}{R'_2}$  – електромагнітна потужність струмів

прямої послідовності обох обмоток. Звичайно оперують значенням моменту у відносних одиницях, прийнявши за базову величину значення моменту при коловому полі, тобто при  $U_{B0\sigma} = 0$ ,  $\alpha_E = 1$ .

$$M_K = 2U_B^2 / \omega_1 R'_2 \quad (6.15)$$

Тоді у відносних одиницях пусковий момент (6.14) ВД прямої послідовності дорівнює

$$m_{п.пр.} = M_{п.пр.} / M_K$$

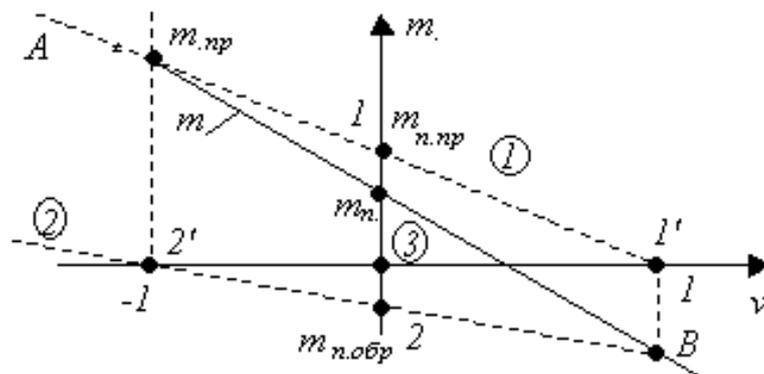
або з урахуванням (6.14) та (6.15),

$$m_{п.пр.} = \frac{0,5(U_B^2(1 + \alpha_E)^2)}{\frac{\omega_1 R'_2}{2U_B^2}} = 0,25(1 + \alpha_E)^2 \quad (6.16)$$

Розмірковуючи аналогічно, для пускового моменту струмів оберненої послідовності  $m_{п.обр.}$  обох обмоток отримаємо вираз:

$$m_{п.обр.} = -0,25(1 - \alpha_E)^2 \quad (6.17)$$

Таким чином, результуючий момент ВД являє собою суму моментів струмів прямої і зворотної послідовності обмоток В і У, кожен з котрих залежить лінійно від  $v$ , а результуючий момент буде лінійно залежати від  $v$ . Побудуємо безрозмірні механічні характеристики для суми прямих та зворотних послідовностей.



Для суми моментів прямих послідовностей обмоток В та У при пуску (тобто  $v=0$ ) момент розраховується по формулі (6.16).

$$1 \rightarrow v=0 \quad m_{н.пр} = 0,25(1+\alpha_E)^2$$

$1' \rightarrow$  при  $v=1$  (ідеальний холостий хід)  $m=0$ , оскільки

$S=(n_1-n_2)/n_1=0$ . По цим двом точкам 1 і 1' проводимо пряму ①. Для моментів зворотної послідовності результуючий момент для пуску  $v=0$  виражається формулою (6.17):

$$(2) \quad v=0 \quad m_{н.обр} = -0,25(1-\alpha_E)^2$$

(2') При  $v=-1$   $m_{н.обр}=0$  оскільки  $S_{обр}=1+v=0$ .

По цим двом точкам будемо пряму ② залежить  $m_{обр}(v)$ .

Очевидно, що результуючий момент ВД  $m(v)=m_{пр}(v)+m_{обр}(v)$  буде також пряма лінія, яка проходить через точки А і В (суцільна лінія ③).

Знайдемо аналітичну залежність  $m(v)$ . Очевидно, що ця залежність має вигляд:

$$m=a-bv \quad (6.18)$$

Коефіцієнти а і b знаходимо з умов:

1). При  $v=0$   $a=m=m_{н.пр}+m_{н.обр}$ ;

з врахуванням формул (6.16) та (6.17), маємо:

$$a=m=0,25(1+\alpha_E)^2-0,25(1-\alpha_E)^2=\alpha_E. \quad a=\alpha_E.$$

2). При  $v=1$ ;  $m=a-b$

З графіка ② для  $m_{н.обр}$  знаходимо при  $v=1$ .

$$m = 2m_{п.обр.} = -0,5(1 - \alpha_E)^2.$$

$$\text{Тоді } m = a - b = \alpha_E - b = -0,5(1 - \alpha_E)^2. \quad b = \alpha_E + 0,5(1 - \alpha_E)^2 = 0,5(1 + \alpha_E^2). \quad b = 0,5(1 + \alpha_E^2).$$

Підставляючи в (6.18) знайдені значення  $a$  і  $b$ , отримаємо:

$$m = \alpha_E - 0,5(1 + \alpha_E^2)v \quad (6.19)$$

Розглядаючи механічні і регулювальні характеристики ВД з амплітудним рівнянням.

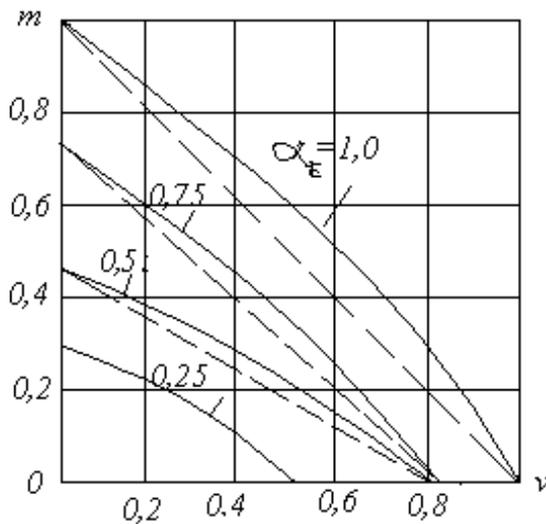
Механічна характеристика ВД – це залежність  $m(v)$  при  $\alpha_E = \text{const}$ .

Регулювальна характеристика ВД – це залежність  $v(\alpha_E)$  при  $m = \text{const}$ .

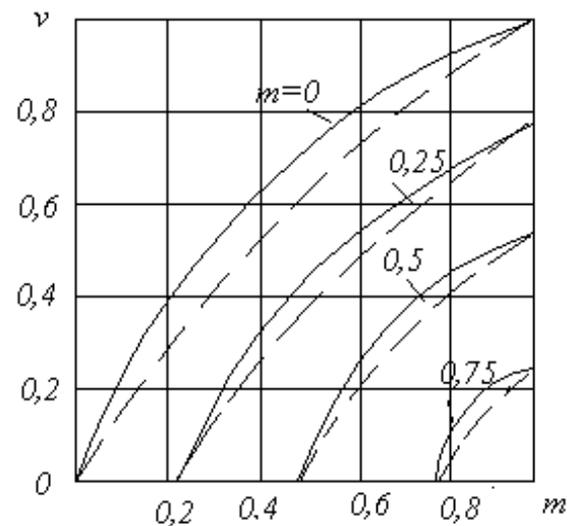
Регулювальна характеристика показує, як змінюється швидкість обертання ВД  $v$  при зміні коефіцієнта сигналу  $\alpha_E$ , якщо момент навантаження на валу ВД залишається постійним ( $m = \text{const}$ ). Рівняння регулювальної характеристики отримаємо, розв'язуючи (19) відносно  $v$ :

$$v = \frac{2(\alpha_E - m)}{1 + \alpha_E^2} \quad (6.20)$$

На графіках нижче показані механічні (а) і регулювальні (б) характеристики ВД для ідеалізованого (пунктирна лінія) і реального (суцільна лінія) ВД з амплітудним керуванням.



а) Механічні характеристики  $m(v)$



б) Регулювальні характеристики  $v(\alpha_E)$

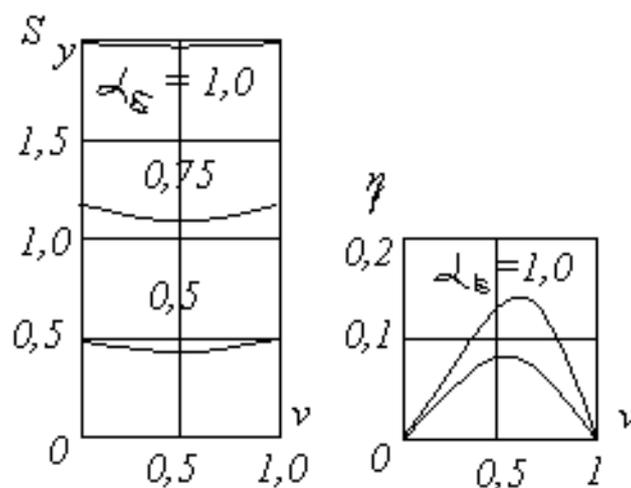
З аналізу графіків можна зробити наступні висновки.

1) В ідеалізованому ВД залежність  $m(v)$  при  $\alpha_E = \text{const}$  є лінійною. Відносний момент при пуску ( $v=0$ )  $m=\alpha_E$ . Зі зміною  $\alpha_E$  змінюється нахил механічної характеристики, що є недоліком;

2) В реальному ВД механічні характеристики  $m(v)$  нелінійні, що пояснюється впливом індуктивного опору ротора  $X_2$ ;

3) В реальному двигуні відносна швидкість  $v$  більше, ніж в ідеалізованому при  $m=\text{const}$ . Це пояснюється тим, що з підвищенням  $v$  вплив індуктивного опору реостату  $X_2$  на струм прямої послідовності зменшується ( $R_2/(1-v)$ ), а струм зворотної послідовності збільшується ( $R_2/(1+v)$ ). Тому в реальному двигуні із збільшенням  $v$  гальмівний момент, викликаний струмами оберненої послідовності, зменшується, що призводить до збільшення швидкості обертання  $v$ .

4) Регулювальні характеристики ВД навіть у ідеалізованого двигуна нелінійні, що є недоліком та ускладнює проектування автоматичних пристроїв. При заданому моменті потрібна частота обертання  $v$  в реальному двигуні досягається при меншому  $\alpha_E$ .



Потужність керування  $S_y(a)$  ВД з порожнім немагнітним ротором практично не залежить від  $\nu$  при всіх  $\alpha_E$ . Це пояснюється тим, що  $S_y \approx U_y^2/R_y$ . ККД ВД з порожнім немагнітним ротором невеликий (б)  $\eta \approx 10-20\%$ .

Максимум ККД знаходиться приблизно при  $\nu=0,5$ . Низьке значення ККД пояснюється великими втратами в роторі і великими струмами  $x_x$  статора ( $=85-95\%I_H$ ). При зменшенні коефіцієнта сигналу  $\alpha_E$  ККД знижується, оскільки різко падає корисна потужність, а втрати в статорі і роторі зменшуються мало.

Коефіцієнт потужності ВД має максимум при пуску  $\cos\varphi_{\max}=0,5-0,6$ , і зі збільшенням  $\nu$  він падає.

Таким чином, в ВД прагнення до покращення лінійності механічних характеристик, збільшенню швидкодії та точності керування призводить до суттєвого зниження ККД,  $\cos\varphi$  і збільшенню габаритних розмірів.

## ТЕМА 7

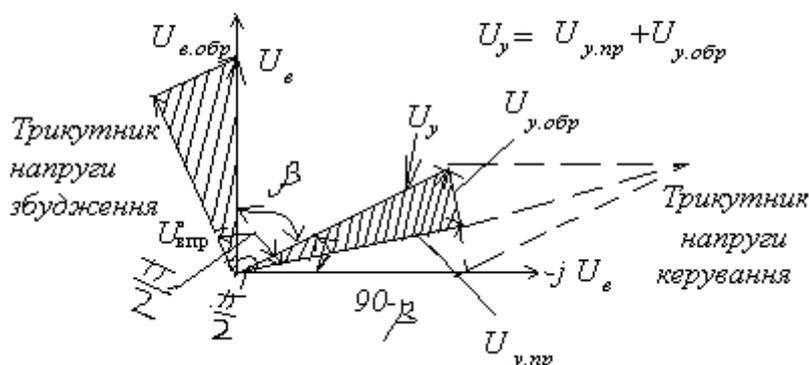
## ВИКОНАВЧІ АСИНХРОННІ ДВИГУНИ З ФАЗОВИМ ТА АМПЛІТУДНО-ФАЗОВИМ КЕРУВАННЯМ

### I. Фазове керування (ФК).

При фазовому керуванні вектори  $U_Y$  та  $U_B$  залишаються за модулем однаковими та утворюють між собою кут  $\beta$ , при цьому  $\alpha_E = \sin\beta$  – ефективний коефіцієнт керування. Прийmemo спрощене припущення:

$$K = w_B/w_Y = 1; \alpha = \alpha_E = \sin\beta, U_B = U_Y = U.$$

$$U = U_{e,np} + U_{e,обр}$$



$$\text{З векторної діаграми маємо: } U_{y,np} = 0,5(U_y - jU_B) \quad (7.1)$$

З трикутника напруги керування отримаємо:

$$U_{y,np} = U_{B,np} = U_{np} = U \cos((90-\beta)/2) = U \sqrt{0,5(1 + \sin\beta)} \quad (7.2)$$

$$U_{y,обр} = U_{B,обр} = U_{обр} = U \sin((90-\beta)/2) = U \sqrt{0,5(1 - \sin\beta)} \quad (7.3)$$

Тут використані загальні співвідношення:

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}; \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}; \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha.$$

Для спрощеної схеми ВД, в котрій зневажаємо всіма опорами, крім активного опору ротору, можна записати:

$$I_{np} = \frac{U_{np}}{R'_2} (1 - \nu) \quad (7.4)$$

$$I_{обр} = \frac{U_{обр}}{R'_2} (1 + \nu) \quad (7.5)$$

або з врахуванням формул (7.2) та (7.3):

$$I_{np} = \frac{U \sqrt{0.5(1 + \sin \beta)}}{R'_2} (1 - \nu) \quad (7.6)$$

$$I_{обп} = \frac{U \sqrt{0.5(1 - \sin \beta)}}{R'_2} (1 + \nu) \quad (7.7)$$

електромагнітна потужність двигуна дорівнює:

$$P_{EM} = P_{E,np} - P_{E,обп} = 2I_{np}^2 \frac{R'_2}{1 - \nu} - 2I_{обп}^2 \frac{R'_2}{1 + \nu} \quad (7.8)$$

З врахуванням формул (7.6) та (7.7) рівняння (7.8) буде мати вигляд

$$P_{EM} = \frac{2U^2}{R'_2} (\sin \beta - \nu) \quad (7.9)$$

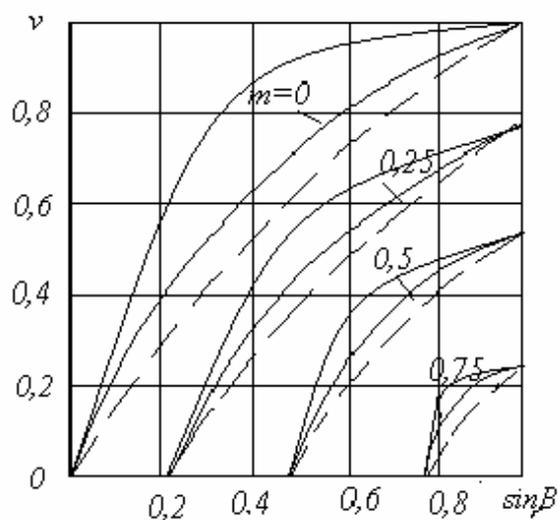
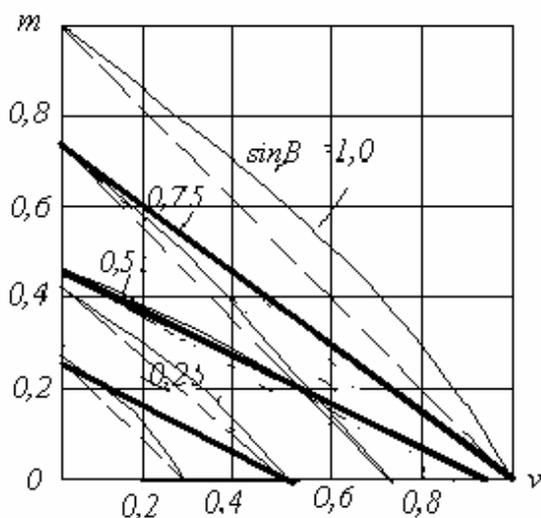
Тоді електромагнітний момент ВД можна записати так:

$$M = \frac{P_{em}}{\omega_1} = \frac{2U^2}{\omega_1 R'_2} (\sin \beta - \nu) \quad (7.10)$$

Приймаючи за базовий момент при коловому полі ( $\sin \beta = 1$ ) і нерухомому роторі ( $\nu = 0$ )  $M_k = 2U^2 / (\omega_1 R'_2)$ , знаходимо відносне значення моменту і частоти обертання.

$$m = M / M_k = \sin \beta - \nu \quad (7.11)$$

$$\nu = \sin \beta - m \quad (7.12)$$



а). Механічні характеристики;

б). Регульовальні характеристики.

Механічні характеристики (а) ідеального ВД (пунктирна лінія) лінійні і паралельні. Нахил їх більше, ніж при амплітудному керуванні (суцільні товсті

лінії). Це пояснюється тим, що при однаковому коефіцієнті сигналу  $\alpha_E$  струм зворотної послідовності в ВД з фазовим керуванням більше, чим в ВД з амплітудним керуванням, внаслідок чого при фазовому керуванні менше і відносна швидкість  $v$ . У реального двигуна механічні характеристики нелінійні і йдуть дещо вище (суцільні тонкі лінії), ніж у ідеального двигуна (пунктирні), що пояснюється впливом індуктивних опорів статора і ротора.

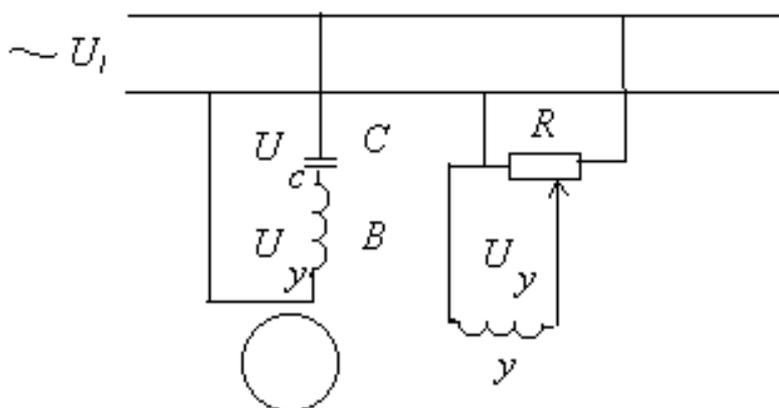
Регулювальні характеристики ідеального ВД також лінійні (б) (пунктирні). Регулювальні характеристики реального двигуна ідуть вище характеристик ідеального і нелінійні (суцільні тонкі). Однак при амплітудному керуванні регулювальних характеристик нелінійність більше (товсті лінії).

Менша нелінійність характеристик при фазовому керуванні це перевага ФУ.

Не дивлячись на вказану перевагу ФК ВД використовують рідко, оскільки воно має недоліки:

- більшу повну потужність обмотки керування, при малих  $\alpha_E$ , оскільки:  
 $S_Y = U_Y I_Y = U_Y^2 / z_Y = \text{const}$  і не залежить від  $\alpha_E$ .
- складність зміни фази керуючого сигналу.

## II. Амплітудно-фазове керування (АФК) ВД (конденсаторна схема).

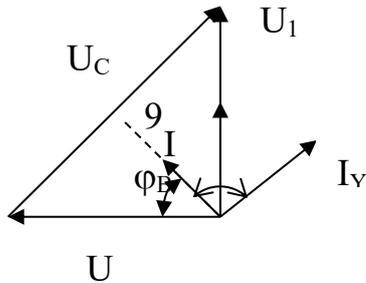


В цій схемі напруга збудження  $U_B$  зсунута по фазі на деякий кут, котрий визначається  $U_c = -jI_B X_c$ , а напруга керування  $U_y = \alpha_E U_1$  знаходиться в фазі з напругою мережі  $U_1$ .

При цьому  $\dot{U}_B = \dot{U}_1 - \dot{U}_C$ .

Якщо підібрати  $\alpha = \alpha_E$  і ємність  $C$  так, щоб поле було коловим, то векторна діаграма буде така.

Звичайно величини  $C$  і  $\alpha$  вибирають так, щоб поле було коловим при нерухомому роторі.

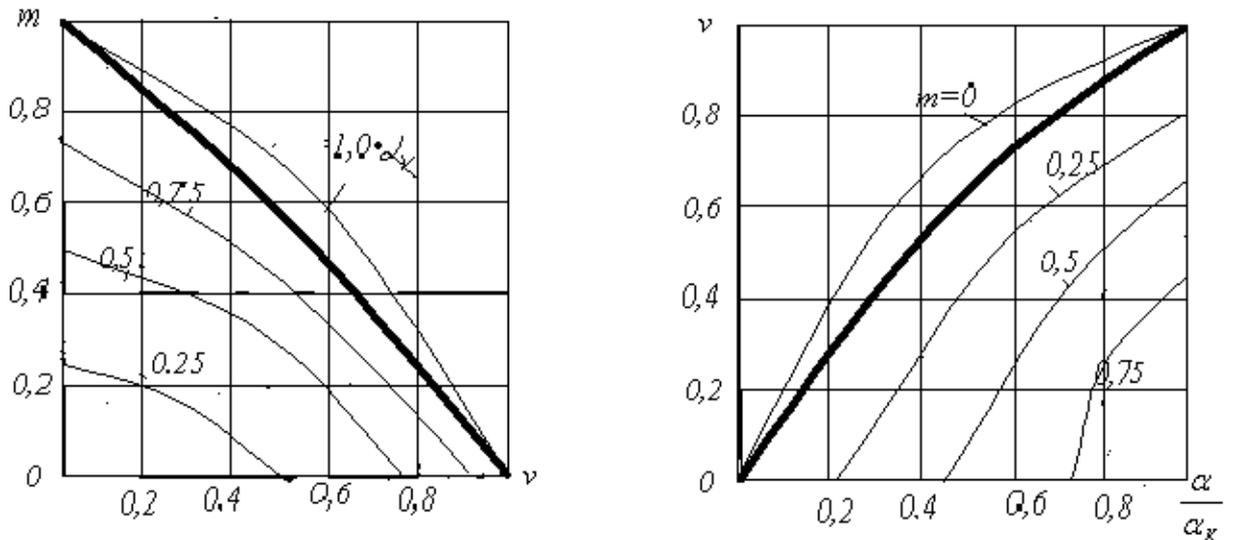


Механічні характеристики ВД аналогічні ВД з амплітудним керуванням, однак їх нелінійність більше (а) (тонкі лінії), ніж при амплітудному керуванні (товсті лінії). Оскільки колове поле при ФК існує при  $v=0$ , то при  $v>0$  з'являється зворотна послідовність. В наслідок збільшення амплітуди зворотного поля з підвищенням  $v$  нелінійність механічних характеристик при АФК більше, ніж у других методах, а  $v_0 < 1$ , навіть при  $\alpha = \alpha_k$ .

Регульовальні характеристики такі ж, як при АК (товста лінія(б)), але лінійність їх гірша (тонкі лінії (б)).

Потужність керування при АФК і АК приблизно однакова.

Перевагою АФК є порівняно проста схема і можливість отримання більших пускових моментів; недолік - пониження лінійності характеристик.



### III. Швидкодія ВД і їх порівняння при різних способах керування.

Звичайно швидкодія двигуна характеризується електромеханічною сталою  $T_m$ , котра приблизно на порядок вище електромагнітної постійної  $T_{EM}=L/R$ , обумовленої індуктивністю і активним опором обмоток двигуна. Значення  $T_m$  визначається з рівняння динаміки двигуна, коли зовнішній момент  $M_{ст}=0$ .

$$M=M_{ст}+Jd\omega/dt \quad (7.13)$$

При  $M_{ст}=0$  рівняння (7.13) руху має вигляд:

$$M=Jd\omega/dt \quad (7.14)$$

Де  $J$  - момент інерції ротора.

Для ідеалізованого ВД механічна характеристика лінійна:

$$M=M/M_n=\alpha_E-0,5(1+\alpha_E)v$$

Або при  $\alpha_E=1$  і  $v=\omega/\omega_0$  можна записати:

$$M=M_n(1-\omega/\omega_0) \quad (7.15)$$

Де  $M_n$  - пусковий момент;

$\omega_0$  - кутова швидкість холостого ходу.

Підставляючи (7.15) у (7.14), отримаємо рівняння руху :

$$M_n \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) = J \frac{d\omega}{dt} \quad (7.16)$$

Рівняння (7.16) розв'язуємо методом розділення змінних, вважаючи  $M_n=\text{const}$ ,  $J=\text{const}$ :

$$\frac{d\omega}{\omega_0 - \omega} = \frac{M_n}{J\omega_0} dt = \frac{dt}{T_M} \quad (7.17)$$

Де  $T_M = J\omega_0/M_n$  – електромеханічна стала.

Загальний розв'язок рівняння (7.17) має вигляд :

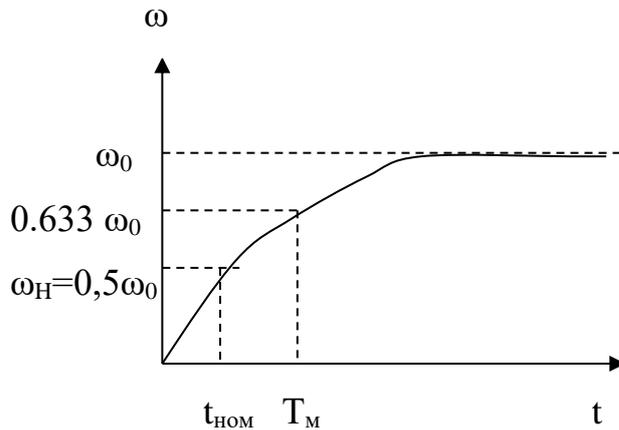
$$\begin{aligned} \text{Ln}(\omega_0 - \omega) &= -t/T_M + A \\ \text{Або } \omega_0 - \omega &= B e^{-t/T_M} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Де  $A$  і  $B$  - деякі сталі.

Сталу  $B$  із (7.18) визначаємо із загальної умови при  $t=0$   $\omega=0$ :

Тоді  $B=\omega_0$ . Підставляючи  $B=\omega_0$  в (7.18), отримуємо розв'язок рівняння руху:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_M}}\right) \quad (7.19)$$



$$\omega = \omega_0 (1 - e^{-1}) = 0.633\omega_0 .$$

Крива розгону ВД показана на графіку. Сталу  $T_M$  можна тлумачити, як час, за який двигун набирає швидкість  $\omega=0,633\omega_0$ :

Із (7.19), вважаючи  $t=T_M$ , отримуємо:

$$\omega = \omega_0 (1 - e^{-1}) = 0.633\omega_0 .$$

Для ВД з амплітудним керуванням:

$$m = \frac{M_n}{M_k} = \alpha_E - 0.5(1 + \alpha_E^2)v \quad \text{при } v=0 \quad M_n = \alpha_E M_k \quad (7.20)$$

$$v = \frac{2(\alpha_E - m)}{1 + \alpha_E^2} \quad \text{при } m = 0 \quad v = \frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{2\alpha_E}{1 + \alpha_E^2}$$

$$\text{або } \omega_0 = \frac{2\alpha_E \omega_1}{1 + \alpha_E^2} \quad (7.21)$$

де  $\omega_1$  - синхронна швидкість обертання колового поля  $\omega_1 = 2\pi f_1 / p$ .

Підставляючи (7.20) і (7.21) в (7.18), отримуємо:

$$T_M = \frac{2\omega_1 J}{M_k (1 + \alpha_E^2)} \quad (7.22)$$

Із (7.22) виходить, що при АК стала  $T_M$  збільшується із зменшенням коефіцієнта керування  $\alpha_E$ , оскільки знижується пусковий момент.

### При фазовому керуванні ВД:

$$M = M/M_k = \sin\beta \quad \text{при } v=0 \quad M_n = M_k \sin\beta = \alpha_E M_n$$

$$V = \sin\beta - m \quad \text{при } m=0 \quad v_0 = \omega_0/\omega_1 = \sin\beta - \alpha_E \quad \omega_0 = \alpha_E \omega_1$$

$$T_M = J\omega_1/M_k \quad (7.23)$$

Значить при ФК ВД стала часу  $T_M$  не залежить від коефіцієнта сигналу  $\alpha_E$ .

В таблиці 1 приведені значення  $T_M$  для різних типів ВД.

Таблиця 7.1

Тип ВД	$T_M$ (сек) при $f_1$	
	$f_1=50$ Гц	$f_1=400$ Гц
З порожнім немагнітним ротором	0,005-0,1	0,02-0,15
З ротором типу "біляча клітка"		
Звичайної конструкції	0,2-1,0	0,3-1,5
Наскрізної конструкції	—	0,007-0,06
З порожнім сталевим ротором	1,0-2,0	1,5-3,0

Іноді швидкодію ВД характеризують часом розгону  $t_{\text{НОМ}}$  до номінальної кутової швидкості  $\omega_{\text{НОМ}}$ .

При цьому номінальним режимом ВД звичайно вважають режим, відповідний до максимальної механічної потужності, котра для ідеалізованого двигуна спостерігається при  $\omega_{\text{ном}}=0.5 \omega_0$ .

Тому, поклавши в (7.20)  $\omega=0.5\omega_0$  і  $t=t_{\text{ном}}$ , отримаємо:

$$T_{\text{ном}}=T_m \ln 2=0,693 T_m \quad (7.24)$$

Із аналізу характеристик асинхронних ВД при різних способах керування можна зробити наступні висновки:

- 1). Лінійність механічних і регулювальних характеристик вище при ФК. АФК дає найбільше відхилення від прямої лінії;
- 2). Потужність керування при АК і АФК практично однакова і пропорційна  $\alpha_E^2$ . При ФК потужність керування не залежить від  $\alpha_E$ , тобто при малих  $\alpha_E$   $S_y$  більше чим у АК і АФК.
- 3). Електромеханічна потужність при коловому полі і нерухомому роторі (ступінь використання) для всіх способів однакова, якщо однакова  $U_B$ .
- 4). АФК виконується найбільш просто при конденсаторній схемі. Тому воно використовується найбільш широко.

## ТЕМА 8

**ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ  
ВЕЛИЧИН. ВИЯВЛЕННЯ «ПРОМАХІВ» ПРИ ПРЯМИХ  
ВИМІРЮВАННЯХ**

**Задача 1.** Виконано 10 вимірювань індукції в повітряному зазорі синхронного гідрогенератора і отримано такі результати:  $B_1=0,83$  Тл,  $B_2=0,81$  Тл,  $B_3=0,82$  Тл,  $B_4=0,70$  Тл,  $B_5=0,83$  Тл,  $B_6=0,82$  Тл,  $B_7=0,83$  Тл,  $B_8=0,84$  Тл,  $B_9=0,83$  Тл,  $B_{10}=0,82$  Тл.

Необхідно визначити наступне.

- 1) Середнє значення індукції в повітряному зазорі гідрогенератора  $B$ .
- 2) Середньоквадратичне відхилення індукції  $S$ .
- 3) Визначити з імовірністю  $p = 0,99$ , чи є в результатах вимірювань «промахи», тобто результати, що різко виділяються, котрі необхідно відкинути. При наявності «промахів» обчислити  $B$  і  $S$  без їх врахування і записати інтервальну оцінку вимірювань значень  $B$ .

## Рішення

**Спосіб 1. Рішення за допомогою критерію типу  $r$ .**

- 1) Розташовуємо результати вимірювань (вибірку) в порядку зростання: 0,70; 0,81; 0,82; 0,82; 0,82; 0,83; 0,83; 0,83; 0,83; 0,84.

Перевіряємо гіпотезу про те, чи належить цій вибірці значення  $B=0,70$  Тл.

- 2) Середнє значення та середньоквадратичну похибку вимірювання індукції визначаємо за формулами:

$$B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i = \frac{1}{10} (0,70 + 0,81 + 3 * 0,82 + 4 * 0,83 + 0,84) = \frac{1}{10} * 8,13 = 0,813 \text{ (Тл)}.$$

$$\sigma_{\Delta} = S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (B_i - B)^2} = \sqrt{\frac{1}{10-1} \cdot [(-0,113)^2 + (-0,003)^2 + 3 * (0,007)^2 + 4 * (0,017)^2 + (0,027)^2]}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{1}{9} \cdot (0.012769 + 0.000009 + 0.000147 + 0.001156 + 0.000729)} = \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{0.01481} = \frac{1}{3} \cdot 0.12169 = 0.041
 \end{aligned}$$

3) Обчислимо параметр  $r_{\min}$  для  $B_1=0,70$  за формулою:

$$r = \frac{B - B_1}{S_n \sqrt{\frac{n-1}{n}}} \frac{0.813 - 0.70}{0.041 * \sqrt{\frac{10-1}{10}}} \frac{0.113}{0.041 * 0.949}$$

4) Обчислимо рівень значущості:

$$\alpha = q = 1 - p = 1 - 0.99 = 0.01$$

5) Визначаємо параметр  $r_{\alpha} = r_{0.01}$  для  $f = n - 1 = 10 - 1 = 9$  ступенів вільності:  
 $r_{0.01} = 2,606$ .

Оскільки  $r_{\min} > r_{0.01}$  ( $2.905 > 2.606$ ), то результат  $B = 0,70$  є «промахом».

6) Розглянемо вибірку з  $n = 9$  вимірювань:

$$0,81; 3 * 0,82; 4 * 0,83; 0,84$$

Перевіряємо гіпотезу про те, що  $B_1 = 0,81$  не є «промах» і належить вибірці.

Знаходимо  $B$  і  $S_n$  для  $n = 9$ :

$$B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i = \frac{1}{9} (0.81 + 3 * 0.82 + 4 * 0.83 + 0.84) = \frac{1}{9} * 7.43 = 0.826$$

(Тл).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\Delta} = S_n &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (B_i - B)^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{9-1} (0.016^2 + 3 * 0.006^2 + 4 * 0.004^2 + 0.014^2)} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{8} (0.000256 + 0.000108 + 0.000064 + 0.000196)} = \\
 &= \sqrt{0.000078} = 0.0088 \quad (\text{Тл}).
 \end{aligned}$$

$$\text{Визначаємо параметр } r_{\min} = \frac{B - B_1}{S_n \sqrt{\frac{n-1}{n}}} = \frac{0.826 - 0.81}{0.0088 * \sqrt{\frac{9-1}{9}}} = \frac{0.016}{0.0088 * 0.942} = 1.93.$$

Для  $\alpha=q=1-p=1-0.99=0.01$  знаходимо  $r_{0.01}$  для числа ступенів вільності  $f=n-1=9-1=8$ :  $r_{0.01}=2.54$ .

Оскільки  $r_{0.01} > r_{\min}$  ( $2.54 > 1.93$ ), то гіпотеза, що вимірювання  $V=0,81$  Тл належить вибірці, приймається.

7) Тепер перевіряємо вибірку із  $n=9$ :

0,81; 3\*0,82; 4\*0,83; 0,84 (Тл)

та гіпотезу, чи належить  $V_9=0,84$  Тл вибірці.

Визначаємо  $V$  і  $S_n$ :

$$V=0.826; S_n=0.0088 \text{ Тл} = \sigma_{\Delta}$$

Знаходимо параметр  $r_{\max}$  за формулою:

$$r_{\max} = \frac{B_9 - B}{S_n \sqrt{\frac{n-1}{n}}} = \frac{0.84 - 0.826}{0.0088 * \sqrt{\frac{9-1}{9}}} = \frac{0.014}{0.0088 * 0.942} = 1.68.$$

Для  $\alpha=q=1-p=1-0.99=0.01$  знаходимо  $r_{0.01}$  для числа ступенів вільності  $f=n-1=9-1=8$ :  $r_{0.01}=2.54$ .

Оскільки  $r_{0.01} > r_{\max}$ , то значення  $V_9=0,84$  належить вибірці і не є «промахом».

8) Ми визначили, що вибірка з  $n=9$  вимірювань індукції: 0,81; 3\*0,82; 4\*0,83; 0,84 (Тл) не має «промахів» і середнє значення індукції  $V=0,826$  Тл, а середньоквадратичне відхилення вимірювань дорівнює  $S_n=0.0088$  Тл.

Тепер запишемо точкову оцінку індукції  $V$  та визначимо нижню і верхню двосторонні границі, в котрих з довірчою ймовірністю  $p=0,99$  знаходиться істинне значення індукції. Для цього знаходимо величину відхилення двостороннього інтервалу вимірювань величини при  $n$  вимірах:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (B - B_i)^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (B - B_i)^2}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}} = \frac{0,0088}{\sqrt{9}} = 0,0029$$

Тоді для заданої ймовірності  $p=0,99$ .

$$B'' = B \pm \frac{U_{1+p} \sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}} = 0,826 \pm 2,5758 \cdot 0,0029 = 0,826 \pm 0,007 \quad (p=0,99) \text{ (Тл);}$$

де  $U_{(1+p)/2}$  – квантиль нормалізованого нормального закону розподілу при  $(1+p)/2 = (1+0,99)/2 = 0,995$ .

$U_{0,995}$  знаходимо для  $\frac{1+\gamma}{2} = 0,995$ :  $U_{0,995} = 2,5758$ . Тоді результат вимірювань з вірогідністю  $\gamma=0,99$  знаходиться в інтервалі значень:  $B_{\min} = 0,826 - 0,007 = 0,819$  ( $p=0,99$ ) Тл,  $B_{\max} = B + 0,007 = 0,826 + 0,007 = 0,833$  ( $p=0,99$ ) Тл

### Спосіб 2 (Спосіб квантилів Стюдента)

$n=10$  – число вимірів:

0,70; 0,81; 3\*0,82; 4\*0,83; 0,84.

1) Перевіряємо гіпотезу про те, що  $B=0,70$  є «промах».

Для цього відкинемо вимір  $B=0,70$  Тл і розглянемо точкові оцінки  $B$  і  $S$  для  $n=9$  вимірів (без  $B=0,70$  Тл):

$$B = (1/n) \sum B_i = (1/9)(0,81 + 3 \cdot 0,82 + 4 \cdot 0,83 + 0,84) = (1/9) \cdot 7,43 = 0,826.$$

Знаходимо середньоквадратичну похибку вимірів:

$$\begin{aligned} S = \sigma_{\Delta} &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (B_i - B)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{8} (0,015^2 + 3 \cdot 0,005^2 + 4 \cdot 0,085^2 + 0,015^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 0,000625} = 0,0088 \quad (\text{Тл}). \end{aligned}$$

Знаходимо квантиль Стюдента для  $f=n-1=10-1=9$  і  $\alpha=q=0,01$  (довірча ймовірність  $P=1-q=1-0,01=0,99$ ):

де  $n$  – число вимірів;

$f$  – число інтервалів (ступенів вільності).

Для одностороннього обмеження  $t_{0.01}=2.82$  знаходимо максимальне відхилення  $\Delta_{\max}$ :

$$\Delta_{\max}=t_q S=2.82*0.0088=0.024 \text{ (Тл)}.$$

Одностороннє мінімальне значення, котре не є «промахом», дорівнює:

$$B_{\min}=B-\Delta_{\max}=0.826-0.024=0.802 \text{ Тл}$$

Оскільки  $B_1=0,70 < B_{\min}$ , то  $B_1=0,70$  є «промахом» і його слід відкинути.

Тепер розглянемо вибірку з  $n=9$  вимірів:

$$0,81; 3*0,82; 4*0,83; 0,84 \text{ (Тл)}.$$

Перевіряємо, чи належить вибірці значення  $B_1=0,81$  Тл.

Визначаємо точкові оцінки  $B$  і  $S$  для  $n=8$  вимірів (без  $B_1=0,81$  Тл):

$$B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i = \frac{1}{8} (3 * 0.82 + 4 * 0.83 + 0.84) = \frac{1}{8} 6.62 = 0.828 \text{ (Тл)}.$$

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (B_i - B)^2} = \sqrt{\frac{1}{7} (0.000192 + 0.000016 + 0.000144)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{7} 0.000352} = 0.007 \text{ (Тл)}.$$

Квантиль Стьюдента для довірчої вірогідності  $p=0,99$ , тобто  $q=1-p=1-0,99=0,01$  (рівень значущості) для числа ступенів вільності  $f=n-1=9-1=8$ . Для одностороннього обмеження  $t_q=t_{0.01}=2,9$  знаходимо максимальне відхилення:

$$\Delta_{\max}=t_q S=2,9*0.007=0.020 \text{ Тл}.$$

$$B_{\min}=B-\Delta_{\max}=0,828-0,020=0,808 \text{ Тл}.$$

Оскільки  $B=0,81 > B_{\min}=0,808$ , то вимір  $B_1=0,81$  Тл належить вибірці і не є «промахом».

Практичне значення має зворотна задача в такому формулюванні.

Задані абсолютна точність вимірів  $E^0$  при прямих вимірюваннях величини  $a$  та потрібна вірогідність висновку  $\gamma$ . Необхідно знайти мінімальний об'єм дослідів (кількість вимірів)  $n$ , що забезпечує абсолютну точність вимірювань  $E^0$  з достовірністю  $\gamma$ .

Оскільки двостороння точкова оцінка вимірів величини має значення  $a$ , звідси маємо:

$$a'' = \hat{a} \pm \frac{U_{\frac{1+\gamma}{2}} \sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}} = \hat{a} \pm E^0$$

$$E^0 = \frac{U_{\frac{1+\gamma}{2}} \sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left( \frac{U_{\frac{1+\gamma}{2}} \sigma_{\Delta}}{E^0} \right)^2$$

де:  $U_{(1+\gamma)/2}$  - квантиль нормованого нормального розподілу;

$\sigma_{\Delta}$  - середньоквадратична похибка вимірювань;

$E^0$  - абсолютна точність вимірів;

$\gamma$  - потрібна достовірність висновку;

$n$  - число (об'єм) вимірів.

**Задача:** Нехай середньоквадратична похибка вимірів  $\sigma_{\Delta}=0,01$ . Потрібна абсолютна точність вимірів  $E^0=0,005$ . Визначимо об'єм вимірів  $n$ , щоб забезпечити достовірність  $\gamma=0,9973$ .

**Рішення.**

1) Визначаємо вірогідність двосторонньої оцінки:

$$p=(1+\gamma)/2=(1+0,9973)/2=0,9986.$$

Для  $p=0,9986$  визначаємо квантиль  $U_{0,9986}=2,878$ .

2) Визначаємо  $n=(U_{0,9986} \sigma_{\Delta}/E^0)^2=(2,878*0,01/0,005)^2=33,13=34$ .

Округлюємо значення об'єму вимірів  $n$  в більшу сторону.

## ТЕМА 9

## ВИЗНАЧЕННЯ АБСОЛЮТНИХ ТА ВІДНОСНИХ ПОХИБОК ПРИ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАННЯХ

Непряме (побічне) вимірювання величини  $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - це знаходження величини  $y$  по безпосереднім (прямим) вимірюванням аргументів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . При цьому припускаємо, що вигляд залежності  $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  завжди відомий. Оскільки безпосередньо вимірювані величини вимірюються з якоюсь абсолютною та відносною похибками, то і шукана величина  $y$  також буде мати похибки.

Абсолютна похибка при непрямо вимірюваннях  $y$  обчислюється за формулою:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta x_2)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 (\Delta x_n)^2};$$

де  $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$  - перші часткові похідні  $y$  по непрямо вимірюваним

параметрам  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  - абсолютні похибки вимірюваних непрямо параметрів.

Істинне значення вимірюваної величини  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при непрямо вимірюваннях лежить в інтервалі  $y - \Delta y \dots y + \Delta y$ .

Середньоквадратична відносна похибка при непрямо вимірах  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  вираховується за формулою:

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta x_2)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_n}\right)^2 (\Delta x_n)^2};$$

де  $\frac{\partial \ln y}{\partial x_1}, \frac{\partial \ln y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \ln y}{\partial x_n}$  - перші часткові похідні від  $\ln y$  по непрямо

вимірюваним параметром  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  - абсолютні похибки вимірів непрямо параметрів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Розглянемо конкретні приклади.

**Приклад 1.** Вимірюється величина енергії, запасена конденсатором, за вимірними величинами ємності  $C$  і напруги на конденсаторі  $U$ :  $E = CU^2/2$ .

Вимірні величини:

$U=120$  В, клас точності 1.0, шкала 150 В;

$C=0.07$  мкФ, клас точності 1.5, шкала 0,1 мкФ.

Необхідно визначити величину енергії, накопиченої в конденсаторі, та абсолютну похибку вимірювань  $\delta E$ .

Рішення:

1. Визначаємо абсолютну похибку і відносні похибки вимірювань напруги

$U$ :

$$\delta U=1\% \quad \Delta U=150*0.01=1.5 \text{ (В)};$$

$$U=120\pm 1,5 \text{ В.}$$

2. Визначаємо абсолютну і відносну похибки вимірювань ємності  $C$ :

$$\delta C=1,5\%, \quad \Delta C=0,1*10^{-6}*0,015=1,5*10^{-9} \text{ (Фарад)}.$$

$$C=0,07*10^{-6}\pm 1,5*10^{-9} \text{ Фарад.}$$

3. Визначаємо абсолютну похибку вимірювань енергії конденсатора:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial U}\right)^2 (\Delta U)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial C}\right)^2 (\Delta C)^2} \\ \left(\frac{\partial E}{\partial U}\right) &= \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{CU^2}{2}\right) = CU = 0.07 * 10^{-6} * 120 = 8.4 * 10^{-6} \\ \left(\frac{\partial E}{\partial C}\right) &= \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{CU^2}{2}\right) = \frac{U^2}{2} = \frac{120^2}{2} = 7.2 * 10^3 \\ \Delta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial U}\right)^2 (\Delta U)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial C}\right)^2 (\Delta C)^2} = \\ &= \sqrt{(8.4 * 10^{-6})^2 * 1.5^2 + (7.2 * 10^3)^2 * (1.5 * 10^{-9})^2} = \\ &= 16.6 * 10^{-6} \text{ (Дж)}. \end{aligned}$$

4. Вимірня енергія конденсатора дорівнює:

$$E=CU^2/2=0,5*0,07*10^{-6}*120^2=504*10^{-6} \text{ (Дж)}.$$

Справжнє значення енергії знаходиться в межах:

$$E=(504\pm 16,6)*10^{-6} \text{ Дж.}$$

5. Визначаємо середньоквадратичну відносну похибку вимірювань:

$$E = CU^2/2; \ln E = \ln C + 2\ln U - \ln 2;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln E}{\partial C} &= \frac{1}{C}; & \frac{\partial \ln E}{\partial U} &= \frac{2}{U}; \\ \delta E = \frac{\Delta E}{E} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \ln E}{\partial C}\right)^2 (\Delta C)^2 + \left(\frac{\partial \ln E}{\partial U}\right)^2 (\Delta U)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{C}\right)^2 (\Delta C)^2 + \left(\frac{2}{U}\right)^2 (\Delta U)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{0.07 * 10^{-6}}\right)^2 * (1.5 * 10^{-9})^2 + \left(\frac{2}{120}\right)^2 * (1.5)^2} = 2.9 * 10^{-2} = 3.3\%; \quad \delta E = 3.3\% \end{aligned}$$

Якщо відомі значення  $E$  та  $\Delta E$ , таке обчислення можна зробити простіше:

$$\delta = \frac{\Delta E}{E} * 100 = \frac{16.6}{504} * 100 = 3.3\%.$$

6. Порівняємо середньоквадратичну відносну похибку вимірювань з відносною похибкою, котру визначають простіше:

$$\delta E = |2\delta U| + |\delta C| = 2 * 1 + 1.5 = 3.5\%.$$

Видно, що відносна похибка виходить дещо завищеною по відношенню до середньоквадратичної.

**Приклад 2:** Момент асинхронного двигуна визначимо шляхом непрямих вимірювань за формулою:

$$M = \frac{m_1 p U_1^2 R'_2}{2\pi f_1 S [(R_1 + \frac{R'_2}{S})^2 + (X_1 + X'_2)^2]}$$

- 1)  $U_1 = 220$  В,  $\Delta U_1 = 2,5$  В (фазна напруга);
- 2)  $S = 0.03$ ,  $\Delta S = 1 * 10^{-3}$  (ковзання);
- 3)  $R_1 = 0.46$ ,  $\Delta R_1 = 5 * 10^{-2}$  Ом (активний опір обмотки статора);
- 4)  $R'_2 = 0.5$ ,  $\Delta R'_2 = 5 * 10^{-2}$  Ом (приведений активний опір обмотки статора);
- 5)  $X_1 = 2.24$ ,  $\Delta X_1 = 1 * 10^{-1}$  Ом (реактивний опір обмотки статора);
- 6)  $X'_2 = 2.0$ ,  $\Delta X'_2 = 1 * 10^{-1}$  Ом (приведений реактивний опір обмотки статора).

Інші параметри відомі точно:

$$M_1 = 3; p = 3; \pi = 3.141; f_1 = 50 \text{ Гц.}$$

Необхідно оцінити абсолютну і відносну похибки непрямого вимірювання обертаючого моменту  $M$ .

**Рішення.**

1) Абсолютну похибку вимірювань моменту обчислюємо за формулою:

$$\Delta M = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial U_1}\right)^2 (\Delta U_1)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)^2 (\Delta S)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial R_1}\right)^2 (\Delta R_1)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial R'_2}\right)^2 (\Delta R'_2)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial X_1}\right)^2 (\Delta X_1)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial X'_2}\right)^2 (\Delta X'_2)^2}$$

2) Визначаємо часткові похідні моменту по непрямим параметрам  $U_1$ ,  $S$ ,  $R_1$ ,  $R'_2$ ,  $X_1$ ,  $X'_2$ :

$$\partial M / (\partial U_1) = 0.67;$$

$$\partial M / \partial S = -8.2;$$

$$\partial M / (\partial R'_2) = -123;$$

$$\partial M / (\partial X'_2) = -2.0.$$

3). Розрахункова величина моменту  $M$  АД дорівнює:

$$M = \frac{m_1 p U_1^2 R'_2}{2\pi f_1 S [(R_1 + R'_2/S)^2 + (X_1 + X'_2)^2]} =$$

$$= \frac{3 * 3 * 220^2 * 0.5}{2 * 3.14 * 50 * 0.03 [(0.46 + 0.5/0.03)^2 + (2.24 + 2)^2]} =$$

$$= 74.3 \text{ (Нм)}$$

4) Справжнє значення моменту  $M$  знаходиться в межах:

$$M = 74,3 \pm 6,7 \text{ Нм.}$$

5) Відносна похибка непрямого вимірювання дорівнює:

$$\delta M = \Delta M / M = (6,7 / 74,3) * 100 = 2,8 \text{ \%}.$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. Белікова Л.Я. Електричні машини: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів / Л.Я. Белікова, В.П. Шевченко. – О.: Наука і техніка, 2012. – 480 с.
2. Білецький В.С. Методологія наукових досліджень технічних об'єктів та їх оптимізація (Навчальний посібник), Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Київ: ФОП Халіков Руслан Халікович, 2023. – 118 с.
3. Горват А.А., Молнар О.О., Мінькович В.В. Методи обробки експериментальних даних з використанням MS Excel: Навчальний посібник. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2019. – 182 с.
4. Гуржій А.М. Електротехніка та основи електроніки: підручник для здобувачів професійної (професійно-технічної) освіти / А.М. Гуржій, С.К. Мещанінов, А.Т. Нельга, В.М. Співак. – Київ: Літера ЛТД, 2020. – 288 с.
5. Електротехнічні пристрої систем автоматичного управління технологічними процесами: навч. посіб. – посібник для студентів галузі знань 15 – «Автоматизація та приладобудування» спеціальності 151 – «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / В.П. Грудська, В.І. Чибеліс / КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 5 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 107 с.
6. Елементи і пристрої автоматики та систем управління: конспект лекцій. Навчальний посібник / Укладачі: О.М. Безвесільна, Т.О. Толочко / Електронне мережне навчальне видання, Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 328 с.
7. Кевшин А.Г., Федосов С.А, Галян В.В. Електричні машини: конспект лекцій. Луцьк, 2020. – 62 с.
8. Конспект лекцій з курсу «Планування і обробка результатів експерименту» (для студентів денної і заочної форм навчання спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка) / Харків: нац. унт міськ. госп-ва ім. О.М. Бекетова; уклад.: Л.А. Назаренко. – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2018. – 163 с.

9. Лавренова Д.Л., Хлистов В.М. Основи метрології та електричних вимірювань [Електронне видання]: навч. посіб. Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – 123 с.
10. Методи та засоби експериментальних досліджень: навч. посіб. / Г.Б. Параска, Д.В. Прибега, П.С. Майдан. – Київ: Кондор-Видавництво, 2017. – 138 с.
11. Метрологія та вимірювальна техніка [Текст]: підручник / [Є.С. Поліщук, М.М. Дорожовець, В.О. Яцук та ін.]; за ред. Є.С. Поліщук; Нац. ун-т «Львів. Політехніка». – 2-е вид., допов. та перероб. – Львів: Львівська політехніка, 2012. – 541 с.
12. Основи метрології та електричних вимірювань: підручник / В.В. Кухарчук, В.Ю. Кучерук, Є.Т. Володарський, В.В. Грабко. – Вінниця: ВНТУ, 2012. – 522 с.
13. Осташевський М.О. Електричні машини і трансформатори: навч. посібник / М.О. Осташевський, О.Ю. Юр'єва; за ред. В.І. Мілих. – Харків: ФОП Панов А.М., 2017. – 452 с.
14. Текст лекцій з дисципліни «Електричні машини». Частина 1 Трансформатори. Асинхронні Машини (для студентів усіх форм навчання напряму підготовки 6.050701 – Електротехніка та електротехнології) / М.Л. Глебова, О.В. Дорохов, В.Б. Фінкельштейн, Я.Б. Форкун; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М. Бекетова – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2015. – 96 с.

*Навчальне видання*

ЛЄВІ ЛЕОНІД ІСААКОВИЧ  
КИСЛИЦЯ СВІТЛАНА ГРИГОРІВНА

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**  
ДО ЛАБОРАТОРНИХ ТА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

З ДИСЦИПЛІНИ

**«ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ»**

для студентів другого (магістерського) рівня вищої освіти  
спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка  
денної, заочної та дистанційної форм навчання

Комп'ютерна верстка Л.І. Леві