



**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ПОЛТАВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА  
ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА**

**ЗБІРНИК МАТЕРІАЛІВ**

**76-ї НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ПРОФЕСОРІВ,  
ВИКЛАДАЧІВ, НАУКОВИХ ПРАЦІВНИКІВ,  
АСПІРАНТІВ ТА СТУДЕНТІВ УНІВЕРСИТЕТУ**

**ТОМ 1**

**14 травня – 23 травня 2024 р.**

## ВИЗНАЧЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ СИЛ ВІБРАЦІЙНОГО ПРИСТРОЮ З КЕРОВАНИМ ЗБУДЖУВАЧЕМ КОЛИВАНЬ

Математична модель спрощеної схеми вібраційного пристрою, обладнаного керованим механічним відцентровим дебалансним збуджувачем колових поступальних коливань [1], у вигляді рівнянь Лагранжа II-го роду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, i, \dots, s)$$

містить узагальнені сили  $Q_1, \dots, Q_i, \dots, Q_s$ , де  $Q_i$  – узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті  $q_i$ .

З аналізу кінематичної схеми вібропристрою видно (див. [1], рис. 1), що положення в просторі усіх матеріальних тіл механічної системи, яка моделює зазначений пристрій, однозначно задають незалежні параметри:

- декартові координати  $x_C = x_C(t)$  і  $y_C = y_C(t)$ , які визначають положення центра  $C$  мас корпусу  $1$  в нерухомій системі координат  $Oxy$ ;

- кут  $\varphi = \varphi(t)$  повороту нерухомого дебалансу  $3$  навколо осі  $\varphi$  обертання дебалансного вала  $2$ , яка проходить через точку  $C$  перпендикулярно до площини  $Oxy$ , від початкового вертикального нижнього положення цього дебалансу;

- кут  $\theta = \theta(t)$  повороту кожного рухомого дебалансу  $4$  і  $5$  навколо осі  $\varphi$  від свого початкового положення.

Отже, розглядувана механічна система, що складається з п'яти матеріальних тіл, має  $s = 4$  ступенів вільності, узагальненими координатами якої є  $q_1 = x_C$ ,  $q_2 = y_C$ ,  $q_3 = \varphi$  і  $q_4 = \theta$ , яким відповідають чотири узагальнені сили. Значення ж цих узагальнених сил напряму залежить від діючих на систему зовнішніх сил.

Одним зі способів знаходження узагальненої сили  $Q_i$ , що відповідає узагальненій координаті  $q_i$ , є визначення її через залежність

$$Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}, \quad (1)$$

де  $\delta A_i = \sum_{j=1}^n [P_j \cdot \delta s_j \cdot \cos(\vec{P}_j, \delta \vec{s}_j)]$  – сума елементарних робіт усіх зовнішніх сил, діючих на розглядувану систему, на можливих

переміщеннях точок прикладання зазначених сил, які отримали ці точки у результаті заданого узагальненої координаті  $q_i$  нескінченно малого приросту  $\delta q_i$ .

Будь-якими опорами рухам матеріальних тіл розглядуваної механічної системи знехтуємо.

У такому разі на неї діють зовнішні сили: а) сили тяжіння матеріальних тіл системи, що прикладені у відповідних точках; б) сили пружності пружин, на які спирається корпус  $I$ ; в) механічний крутний (або обертальний) момент  $M_{\text{об}}$  приводного двигуна.

За законом Гука лінійна пружна сила  $F_{np}$ , що виникає при лінійній деформації  $\Delta l$ , пропорційна зазначеній деформації  $F_{np} = c \cdot \Delta l$ , де  $c$  для пружини – коефіцієнт жорсткості.

Через те, що в робочому режимі корпус  $I$  здійснює у площині  $Oxy$  поступальний рух по коловій траєкторії, то вертикальні пружини, на які спирається корпус, зазнають не тільки лінійних деформацій уздовж вертикальної осі  $Oy$ . Для урахування жорсткості кожної пружини в напрямку горизонтальної осі  $Ox$  уведемо дві горизонтально розташовані віртуальні пружини з жорсткостями  $c_x$ . У такому разі з боку кожної пружини на корпус  $I$  будуть діяти дві ортогональні пружні сили

$$F_{np.x} = c_x \cdot \Delta l_x \quad \text{і} \quad F_{np.y} = c \cdot \Delta l,$$

де  $\Delta l_x$  і  $\Delta l$  – деформації відповідних пружин.

Розглянувши механічну систему у її положенні статичної рівноваги, із умови рівноваги  $\sum Y = 0$  дістанемо відповідне рівняння рівноваги

$$-M \cdot g + c_e \cdot f_{cm} = 0, \quad (2)$$

де  $M = m_1 + m_2 + 2 \cdot m$ ,  $c_e = c + c = 2 \cdot c$  – еквівалентна жорсткість пружин (або жорсткість еквівалентної пружини),  $f_{cm}$  – статична вертикальна деформація еквівалентної пружини (звісно, у положенні статичної рівноваги механічної системи кожна з пружин, на які спирається корпус  $I$ , має таку ж вертикальну статичну деформацію, а обидві введені віртуальні пружини є недеформованими).

Для знаходження узагальненої сили  $Q_2 = Q_{y_C}$  надамо узагальненій координаті  $q_2 = y_C$  нескінченно малий приріст  $\delta q_2 = \delta y_C$ , лишаючи інші узагальнені координати незмінними, й обчислимо можливу роботу  $\delta A_2$  усіх зовнішніх сил на можливих переміщеннях точок їх прикладання:

$$\delta A_2 = \delta A_2(\vec{G}) + \delta A_2(\vec{F}_{np}) + \delta A_2(M_{\text{об}}), \quad (3)$$

де  $\delta A_2(\vec{G})$ ,  $\delta A_2(\vec{F}_{np})$  і  $\delta A_2(M_{\text{об}})$  – відповідно можливі роботи сил тяжіння, сил пружності пружин і крутного моменту  $M_{\text{об}}$  двигуна.

Оскільки розглядуваний приріст  $\delta q_2 = \delta y_C$  є лінійним і напрямлений по вертикалі, то можлива робота крутного моменту  $M_{oe}$  двигуна

$$\delta A_2(M_{oe}) = 0 \quad (4)$$

й можливі роботи сил пружності горизонтально розташованих віртуальних пружин на такому можливому переміщенні дорівнюють нулю, через що

$$\delta A_2(\vec{F}_{np}) = \delta A_2(\vec{F}_{np.y}),$$

де  $\delta A_2(\vec{F}_{np.y})$  – можливі роботи сил пружності дійсних пружин.

Далі врахуємо, що робота і сили тяжіння, і сили пружності не залежить від траєкторії та закону руху точки прикладання відповідної сили. При цьому: а) робота сили тяжіння залежить лише від різниці по вертикалі між початковим і кінцевим положеннями точки її прикладання й при переміщенні цієї точки вниз здійснена силою тяжіння робота є додатною, а при переміщенні вгору – від'ємною; б) робота сили пружності залежить лише від значень деформацій пружини у початковому і кінцевому положеннях точки її прикладання та виконується силою пружності робота додатна, коли сила пружності сприяє зменшенню деформації пружини, й від'ємна, якщо сила пружності збільшує деформацію пружини, й немає ніякого значення чи є вказана деформація пружини деформацією розтягу чи стиснення.

З урахуванням викладеного неважко бачити, що

$$\delta A_2(\vec{G}) = -M \cdot g \cdot \delta y_C \quad (5)$$

та

$$\delta A_2(\vec{F}_{np}) = c_e \cdot f_{cm} \cdot \delta y_C - c_e \cdot y_C \cdot \delta y_C. \quad (6)$$

Підставляючи значення (4), (5) і (6) у формулу (3), матимемо

$$\begin{aligned} \delta A_2 &= -M \cdot g \cdot \delta y_C + c_e \cdot f_{cm} \cdot \delta y_C - c_e \cdot y_C \cdot \delta y_C = \\ &= (-M \cdot g + c_e \cdot f_{cm} - c_e \cdot y_C) \cdot \delta y_C, \end{aligned}$$

звідки, урахувавши рівність (2), дістанемо

$$\delta A_2 = -c_e \cdot y_C \cdot \delta y_C.$$

Тоді за формулою (1)

$$Q_2 = \frac{\delta A_2}{\delta q_2} = \frac{\delta A_2}{\delta y_C} = \frac{-c_e \cdot y_C \cdot \delta y_C}{\delta y_C} = -c_e \cdot y_C.$$

Аналогічно визначаються й інші узагальнені сили.

#### Література

1. Жигилій С.М. До визначення кінетичної енергії вібраційного пристрою з керованим збуджувачем коливань / С.М. Жигилій // Тези 75-ї наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка». Том 1. (Полтава, 02 – 25.V.23 р.) – Полтава: Національний університет імені Юрія Кондратюка, 2023. – С. 127-128.