

## ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ МІЦНОСТІ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ОСНОВІ НЕЛІНІЙНОЇ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ

*На основі оптимізаційного підходу розроблено практичні методи розрахунку міцності нормальних перерізів зігнутих залізобетонних елементів з урахуванням нелінійного деформування стиснутого бетону.*

**Ключові слова:** оптимізація, деформаційна модель, розрахунок міцності.

**Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.** В Україні набули чинності нові нормативні документи з проектування залізобетонних конструкцій [1, 2], які базуються на підходах, закріплених у нормах Євросоюзу. Здійснено перехід до розрахунків міцності залізобетонних конструкцій, які ґрунтуються на нелінійній деформаційній моделі стиснутого бетону. При такому підході враховуються не тільки зусилля в бетоні та арматурі, а також їх деформації. Згідно з новими нормами критерієм вичерпання несучої здатності може бути досягнення максимального, що може сприйматися перерізом, згинального моменту  $M_{MAX}$  (поздовжньої сили  $N_{MAX}$ ) або руйнування стиснутого бетону внаслідок досягнення фібровими деформаціями граничних значень  $\varepsilon_{cu1}$  або розрив арматурних стержнів унаслідок досягнення граничних деформацій  $\varepsilon_{ud}$ . Розрахункові залежності, котрі використовуються в діючих нормах, більш складні, ніж ті, що застосовувалися раніше, зокрема алгоритм, наведений у нормах [2, додаток А], передбачає ітераційну процедуру тільки перевірки несучої здатності.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідники активно розробляють методи щодо розв'язання проблем розрахунків на основі нелінійної деформаційної моделі бетону. При цьому можна визначити два основні напрями: перший – це аналітичні методи, а інший – числові. Результати аналітичних розробок викладено в роботах [3, 4], зокрема у роботі [3] запропоновано інженерний підхід, який дещо схожий на розрахунки попередніх норм. Автори статті [4] пропонують розрахунки перевірки міцності та підбору арматури з використанням ітераційного процесу. Реалізація числових методів передбачає застосування спеціальних програм розрахунку, зокрема авторами статті [5] запропоновано програму розрахунку «БЕТА», котра дозволяє виконувати розрахунки параметрів нормального перерізу на основі нелінійної деформаційної моделі стиснутого бетону в інтерактивному режимі. Для розрахунків за діючими нормами [1, 2] в Україні працює Інтернет-ресурс <http://mqn.com.ua>. У режимі он-лайн на цьому сайті можна виконати розрахунок міцності прямокутного перерізу, отримати діаграму «момент – кривизна» або «стиска сила – деформація бетону».

**Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття.** Наведені методи розрахунку міцності нормальних перерізів, які ґрунтуються на нелінійній деформаційній моделі стиснутого бетону, мають свої переваги, але загальним недоліком можна вважати відсутність прямих, не ітераційних методів розрахунку площі арматури й точного визначення величин  $M_{MAX}$  або  $N_{MAX}$ . У статті наведено оптимізаційні методи розв'язання задач визначення міцності та підбору

арматури в нормальних перерізах зігнутих і позакентровано стиснутих залізобетонних елементах.

**Метою роботи** є розроблення методів розрахунку міцності та кількості поздовжньої арматури, котрі ґрунтуються на основі оптимізаційного критерію з урахуванням нелінійної деформаційної моделі стиснутого бетону.

**Виклад основного матеріалу.** В основу розрахунків покладено передумови, викладені в нормах [1, 2]. Розглядається прямокутний переріз, армований стиснутою  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  і менш стиснутою або розтягнутою  $A_{s3}$ ,  $A_{s4}$  арматурами. Для розрахункового перерізу приймається гіпотеза плоских перерізів. Напружено-деформований стан поперечного перерізу зображено на рис. 1, робота бетону в розтягнутій зоні не враховується. Розглядаються дві форми рівноваги прямокутного перерізу: перша – весь переріз стиснутий (рис. 1, б, в); друга – частина перерізу розтягнута (рис. 1, г, д). Напруження та деформації в арматурі обмежуються залежностями:

$$\sigma_{si} = \varepsilon_{si} E_{si}; \quad (1)$$

$$\sigma_{si} \leq f_{yd}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{si} \leq \varepsilon_{ud}. \quad (3)$$

Напруження в бетоні стиснутої зони перерізу описуються рівнянням 3.5 [1]

$$\sigma_c = f_{cd} \sum_{k=1}^5 a_k \gamma^k, \quad (4)$$

де  $\gamma = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1,cd}$ ,  $a_k$  – коефіцієнти полінома, визначаються нормами [1, дод.Д].

Максимальні фіброві деформації в стиснутому бетоні обмежені величиною  $\varepsilon_{cu1}$ .

$$\varepsilon_{c(1)} \leq \varepsilon_{cu1}. \quad (5)$$

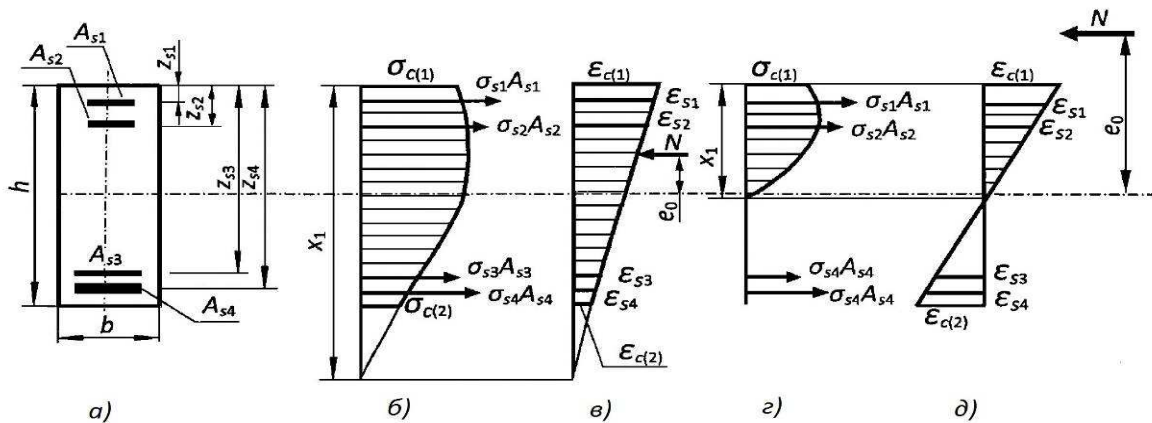


Рисунок 1 – Напружено-деформований стан прямокутного перерізу:  
 а – поперечний переріз елемента; б – епюра напружень для першої форми рівноваги; в – епюра деформацій для першої форми рівноваги; г – епюра напружень для другої форми рівноваги; д – епюра деформацій для другої форми рівноваги

Урахувавши викладені вище передумови та розрахункову схему (рис.1), можна записати по дві умови для кожної форми рівноваги, котрі є окремими випадками рівнянь (4.1) – (4.4) [2].

Для першої форми рівноваги (рис. 1, а, б, в)

$$\sum X = 0; \quad \frac{b \cdot f_{cd}}{\bar{\kappa}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left( \frac{\varepsilon_{c(1)}^{k+1} - \varepsilon_{c(2)}^{k+1}}{\varepsilon_{c(1)}^{k+1}} \right) + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} - N = 0, \quad (6)$$

$$\frac{b \cdot f_{cd}}{\bar{\kappa}^2} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left( \frac{\varepsilon_{c(1)}^{k+2} - \varepsilon_{c(2)}^{k+2}}{\varepsilon_{c(1)}^{k+2}} \right) + \sum_{i=1}^n \sigma_{Si} A_{Si} (X_1 - Z_{Si}) \cdot N \cdot e_o = 0. \quad (7)$$

Для другої форми рівноваги (рис. 1, а, з, д)

$$\Sigma X = 0; \quad \frac{b \cdot f_{cd}}{\bar{\kappa}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \gamma^{k+1} + \sum_{i=1}^n \sigma_{Si} A_{Si} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{b \cdot f_{cd}}{\bar{\kappa}^2} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \gamma^{k+2} + \sum_{i=1}^n \sigma_{Si} A_{Si} (X_1 - Z_{Si}) \cdot N \cdot e_o = 0. \quad (9)$$

Додатковими залежностями умовної оптимізації будуть:

– умова кривизни отримана з гіпотези плоских перерізів

$$\kappa = 1/r = \frac{(\varepsilon_{c(1)} - \varepsilon_{c(2)})}{h}; \quad (10)$$

– відносна кривизна

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\varepsilon_{c1,cd}}; \quad (11)$$

– висота стиснутої зони бетону

$$X_1 = \varepsilon_{c(1)} / \bar{\kappa}; \quad (12)$$

– деформації стиснутої  $\varepsilon_{S1}$ ,  $\varepsilon_{S2}$  та розтягнутої  $\varepsilon_{S3}$ ,  $\varepsilon_{S4}$  арматур

$$\varepsilon_{S1} = \bar{\kappa} (X_1 - Z_{S1}); \quad \varepsilon_{S2} = \bar{\kappa} (X_1 - Z_{S2}); \quad \varepsilon_{S3} = \bar{\kappa} (X_1 - Z_{S3}); \quad \varepsilon_{S4} = \bar{\kappa} (X_1 - Z_{S4}); \quad (13)$$

– напруження в стиснутій  $\sigma_{S1}$ ,  $\sigma_{S2}$  та розтягнутій  $\sigma_{S3}$ ,  $\sigma_{S4}$  арматурах

$$\sigma_{S1} = E_{S1} \cdot \varepsilon_{S1}; \quad \sigma_{S2} = E_{S2} \cdot \varepsilon_{S2}; \quad \sigma_{S3} = E_{S3} \cdot \varepsilon_{S3}; \quad \sigma_{S4} = E_{S4} \cdot \varepsilon_{S4}. \quad (14)$$

Застосування оптимізаційних критеріїв міцності розглядається в роботах [6, 7], де несуча здатність елемента визначається величиною  $M_{MAX}$ . Розв'язування задач із визначення несучої здатності поперечного перерізу або підбору площі арматури буде здійснюватися з використанням критерію оптимальності  $K_O$ , котрий за змістом є цільовою функцією оптимізаційної задачі. Залежно від виду задачі критерій оптимальності  $K_O$  може досягати максимального  $K_{MAX}$ , мінімального  $K_{MIN}$  чи заданого значень  $K_{DET}$ . Знаходження  $K_O$  може здійснюватися методами безумовної або умовної оптимізації [8]. Безумовна оптимізація передбачає знаходження  $K_O$  без якихось обмежень; при умовній оптимізації необхідно дотримуватись обмежень, які можуть бути у вигляді рівнянь чи нерівностей.

**Визначення несучої здатності поперечного перерізу.** Для визначення несучої здатності поперечного перерізу будуть використані методи умовної оптимізації. Необхідно знайти максимальне значення критерію оптимальності  $K_{MAX}$  при обмеженнях у вигляді нерівностей (1), (2), (3), (5) та рівняння (6). Вираз для критерію оптимальності для першої форми рівноваги отримаємо з формули (7)

$$K_{MAX} = N_{MAX} = \left[ \frac{b \cdot f_{cd}}{\bar{\kappa}^2} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left( \frac{\varepsilon_{c(1)}^{k+2} - \varepsilon_{c(2)}^{k+2}}{\varepsilon_{c(1)}^{k+2}} \right) + \sum_{i=1}^n \sigma_{Si} A_{Si} (X_1 - Z_{Si}) \right] \div e_o. \quad (15)$$

Залежності (1), (2), (3), (5) та (7) відповідають критерію вичерпання несучої здатності перерізу, котрий викладено в нормах [2, п.4.1.1].

Вихідними даними для такої задачі будуть характеристики поперечного перерізу  $h$ ,  $b$ ,  $Z_{S1}$ ,  $Z_{S2}$ ,  $Z_{S3}$ ,  $Z_{S4}$ ,  $A_{S1}$ ,  $A_{S2}$ ,  $A_{S3}$ ,  $A_{S4}$ , бетону  $f_{cd}$ ,  $\varepsilon_{cu1,cd}$ ,  $\varepsilon_{c1,cd}$ , арматури  $f_{yd1}$ ,  $f_{yd2}$ ,  $f_{yd3}$ ,  $f_{yd4}$ ,  $\varepsilon_{ud1}$ ,  $\varepsilon_{ud2}$ ,

$\varepsilon_{ud3}$ ,  $\varepsilon_{ud4}$  та коефіцієнти полінома  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$ . Невідомими величинами у цій задачі будуть фіброві деформації бетону  $\varepsilon_{c(1)}$ ,  $\varepsilon_{c(2)}$  та значення стискної сили  $N_{MAX}$  (рис. 2), яку може сприйняти поперечний переріз.

Для розв'язування оптимізаційної задачі можна застосувати програмний пакет «Excel», команда «Сервис\Поиск решения».

Результатом розрахунку будуть значення фібрових деформацій бетону  $\varepsilon_{c(1)}$ ,  $\varepsilon_{c(2)}$ , максимальне значення  $N_{MAX}$ , також будуть розраховані деформації  $\varepsilon_{s1}$ ,  $\varepsilon_{s2}$ ,  $\varepsilon_{s3}$ ,  $\varepsilon_{s4}$  та напруження в стиснутій  $\sigma_{s1}$ ,  $\sigma_{s2}$ ,  $\sigma_{s3}$ ,  $\sigma_{s4}$  арматурах. Сам процес розрахунку триває не більше 1 с. Якщо дослідити область  $\varepsilon_{c(1)} \pm \Delta\varepsilon_{c(1)}$ , де  $\Delta\varepsilon_{c(1)} = 0,001\varepsilon_{c(1)}$ , то виявиться, що за результатами розрахунку отримано абсолютний екстремум.

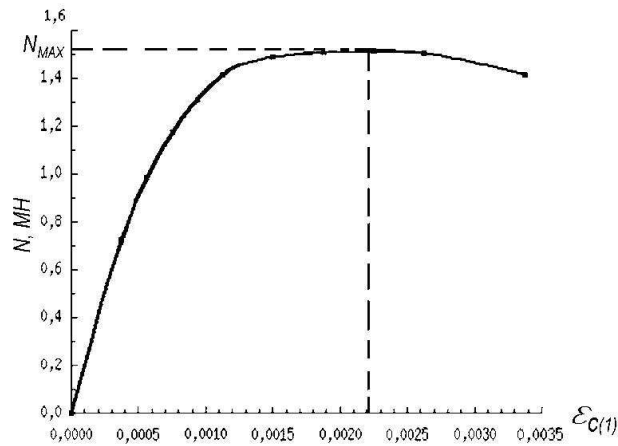


Рисунок 2 – Діаграма «стискна сила – деформація бетону»

Для визначення несучої здатності поперечного перерізу за другою формою рівноваги (рис. 1, з, д) максимальне значення критерію оптимальності  $K_{MAX}$  знаходиться при обмеженнях у вигляді нерівностей (1), (2), (3), (5) та рівняння (8). Вираз для критерію оптимальності для другої форми рівноваги отримуємо з формули (9)

$$K_{MAX} = M_{MAX} = N \cdot e_o = \frac{b \cdot f_{cd}}{\bar{\kappa}^2} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \gamma^{k+2} + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} (X_1 - Z_{si}). \quad (16)$$

Невідомими величинами у цій задачі будуть фіброві деформації бетону  $\varepsilon_{c(1)}$ ,  $\varepsilon_{c(2)}$  та значення згинального моменту  $M_{MAX}$  (рис. 3), який може сприйняти поперечний переріз.

**Розрахунок площі поперечного перерізу арматури.** Розв'язання задачі знаходження площі поперечного перерізу арматури має важливе значення для проектування нових конструкцій, хоча алгоритму для її вирішення в нормах [1, 2] не наведено. Для визначення площі поперечного перерізу арматури теж запропоновано використати методи умовної оптимізації. Необхідно знайти задане значення критерію оптимальності  $K_{DET}$  при обмеженнях у вигляді нерівностей (1) - (3), (5) та рівняння (6).

Вираз для критерію оптимальності  $K_{DET}$  для першої форми рівноваги теж отримано з формули (7)

$$K_{DET} = N e_o = \frac{b \cdot f_{cd}}{\bar{\kappa}^2} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left( \frac{\varepsilon_{c(1)}^{k+2} - \varepsilon_{c(2)}^{k+2}}{\varepsilon_{c(1)}^{k+2}} \right) + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} (X_1 - Z_{si}) \quad (17)$$

де  $N$  – стискальна сила від зовнішнього навантаження, на дію якої необхідно розрахувати площу поперечного перерізу арматури.

Вихідними даними для такої задачі будуть значення стискної сили  $N$ , ексцентриситет  $e_o$ , характеристики поперечного перерізу  $h$ ,  $b$ ,  $Z_{s1}$ ,  $Z_{s2}$ ,  $Z_{s3}$ ,  $Z_{s4}$ , бетону  $f_{cd}$ ,  $\varepsilon_{cu1,cd}$ ,  $\varepsilon_{c1,cd}$ , арматури  $f_{yd1}$ ,  $f_{yd2}$ ,  $\varepsilon_{ud1}$ ,  $\varepsilon_{ud2}$  та коефіцієнти полінома  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$ . Невідомими

величинами у цій задачі будуть фіброві деформації бетону  $\varepsilon_{c(1)}$ ,  $\varepsilon_{c(2)}$  та площі поперечного перерізу стиснутої  $A_{S1}$ ,  $A_{S2}$ ,  $A_{S3}$ ,  $A_{S4}$  арматур.

Для другої форми рівноваги критерій оптимальності можна отримати з рівняння (9)

$$K_{DET} = M = N \cdot e_0 = \frac{b \cdot f_{cd}}{\bar{\kappa}^2} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \gamma^{k+2} + \sum_{i=1}^n \sigma_{Si} A_{Si} (X_1 - Z_{Si}), \quad (18)$$

де  $M$  – згинальний момент зовнішнього навантаження, на дію якого необхідно розрахувати площу поперечного перерізу арматури.

Результатом розрахунку будуть значення  $A_{S1}$ ,  $A_{S2}$ ,  $A_{S3}$ ,  $A_{S4}$ ,  $\varepsilon_{c(1)}$ ,  $\varepsilon_{c(2)}$ , кривизна  $1/r$ , деформації  $\varepsilon_{s1}$ ,  $\varepsilon_{s2}$ ,  $\varepsilon_{s3}$ ,  $\varepsilon_{s4}$  та напруження в стиснутій  $\sigma_{S1}$ ,  $\sigma_{S2}$  і розтягнутій  $\sigma_{S3}$ ,  $\sigma_{S4}$  арматурах. Якщо виявиться, що  $A_{S1} = 0$ ,  $A_{S2} = 0$ , то стиснута арматура за розрахунком не потрібна.

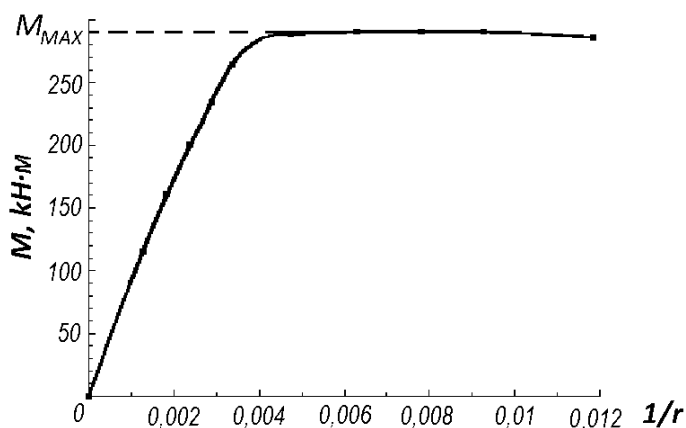


Рисунок 3 – Діаграма «момент – кривизна»

**Висновок.** Запропоновано методи визначення несучої здатності поперечного перерізу та розрахунку площі поперечного перерізу арматури на основі методів умовної оптимізації з урахуванням нелінійної деформаційної моделі для стиснутого бетону. За результатами розрахунку площі арматури отримано мінімальну кількість поздовжньої арматури, необхідної для армування заданого перерізу. Таким чином, за результатами розрахунків буде запроєктовано елементи, не переармовані поздовжньою арматурою. Виконання розрахунків не потребує особливих комп'ютерних програм, застосування пакета оптимізації в складі програми «Excel» дає можливість проектувальникам, аспірантам та студентам швидко і без складностей виконувати розрахунки згідно з діючими нормами [1, 2].

#### Література

1. ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 71 с.
2. ДСТУ Б В.2.6-156:2010. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 118 с.
3. Павліков, А.М. Застосування нелінійної деформаційної моделі в інженерних розрахунках міцності залізобетонних елементів // А.М. Павліков / Ресурсоекономні матеріали, будівельні конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2012. – Вип. 23. – С. 355 – 363.
4. Бабич, Є.М. Розрахунок несучої здатності поперечних перерізів згинальних залізобетонних елементів // Є.М. Бабич, В.Є. Бабич, В.В. Савицький / Ресурсоекономні матеріали, будівельні конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2012. – Вип. 23. – С. 94 – 103.

5. Лазовский, Д.Н. Программы расчета железобетонных конструкций по проекту СНБ 5.03.01 // Д.Н. Лазовский, Д.О. Глухов, О.Н. Лешкевич / Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовка инженерных кадров в Республике Беларусь: материалы VII Междунар. науч.-практ. семинара. – Брест: БГТУ, 2001. – С. 133 – 137.
6. Mitrofanov, V.P. Optimization strength theory of reinforced concrete bar elements and structures with practical aspects of its use / V.P. Mitrofanov // Bygningssstatistiske neddelelser. Edited and published by the Danish Society for Structural Science and Engineering. – Kobenhavn, 2000. – P.73 – 125.
7. Митрофанов, В.П. Экстремальный критерий прочности железобетонных элементов у деформационной модели / В.П. Митрофанов, А.М. Павлюков // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2005. – Вип. 62, Т.1. – С. 205 – 213.
8. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.

*Микитенко С.Н., к. т. н., доц., докторант  
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка*

## **ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ**

*На основе оптимизационного подхода разработаны практические методы расчета прочности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов с учетом нелинейного деформирования сжатого бетона.*

**Ключевые слова:** оптимизация, деформационная модель, расчет прочности.

*Mykytenko S.N., Ph. D., Docent, Doctoral St.  
Poltava national technical university named after Yury Kondratyuk, Poltava*

## **OPTIMIZATION METHODS OF CALCULATION OF STRENGTH OF REINFORCE CONCRETE ELEMENTS ARE ON BASIS OF NONLINEAR DEFORMATION MODEL**

*On the basis of optimization approach the practical methods of calculation of strength of normal cuts of arcuated reinforce concret elements are worked out taking into account nonlinear deformation of the compressed concrete*

**Keywords:** optimization, deformation model, calculation of strength.

*Надійшла до редакції 05.09. 2012*

*© С.М. Микитенко*