

## ЗАЛЕЖНІСТЬ КУТА НАХИЛУ НЕЙТРАЛЬНОЇ ЛІНІЇ ВІД КУТА ДІЇ СИЛОВОЇ ПЛОЩИНИ У КОСОЗІГНУТИХ ЕЛЕМЕНТАХ ПРЯМОКУТНОГО ПРОФІЛЮ

*Наведені функціональні залежності кута нахилу нейтральної лінії від кута нахилу силової площини на прикладі бетонних елементів прямокутного поперечного перерізу, котрі зазнають косоного згинання.*

**Ключові слова:** бетон, косий згин, кут нахилу нейтральної лінії, кут нахилу силової площини.

**Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими та практичними завданнями.** Важливим фактором напружено-деформованого стану поперечного перерізу залізобетонних елементів, які зазнають косоного згинання, є положення нейтральної лінії, котре залежить від ряду чинників, визначальний із яких – кут нахилу силової площини до вертикальної головної площини елемента. Положення нейтральної лінії в елементах прямокутного профілю однозначно встановлюється двома параметрами, котрими зазвичай приймають висоту стиснутої зони бетону  $x$  та кут нахилу нейтральної лінії до горизонтальної осі  $\theta$ . Основним із цих параметрів є кут  $\theta$ , тому виведення залежностей для обчислення його значень для залізобетонних і бетонних елементів є важливим завданням.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій, де започатковано розв'язання поставленої проблеми.** Питанню вивчення залізобетонних елементів, які зазнають косоного згинання, присвячені праці багатьох учених. Проблему виведення теоретичних залежностей між кутом нахилу нейтральної лінії та кутом нахилу силової площини у явному вигляді досліджували А.М. Павліков [1], М.Л. Яровий [3], Л.І. Сердюк [4].

**Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття.** Однак усі ці залежності були представлені у вигляді складних сплайн-функцій, пов'язували  $\theta$  з  $\beta$  неявно, мали різний математичний запис на різних ділянках. Через це отримати з існуючих залежностей розв'язок  $\theta = f(\beta)$  у явному вигляді неможливо.

**Формулювання цілей статті.** Метою статті є розроблення у явному вигляді функціональної залежності  $\theta = f(\beta)$  для визначення кута нахилу нейтральної лінії.

**Виклад основного матеріалу досліджень.** Для розроблення шуканої функції  $\theta = f(\beta)$  була задана таблична залежність між визначальними параметрами. Для цього використані теоретичні залежності для бетонного елемента [1]:

$$\text{при } 0 < \theta < \arccos\left(\frac{b}{h}\right)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \theta (6 \cos^2 \theta - 12 \xi \cos \theta + 5 K' \sin 2\theta - 2 \xi K' \sin \theta + K'^2 \sin^2 \theta)}{\left\{ 6 (\cos^2 \theta - \xi^2 + \xi \cos \theta) (K' \sin \theta + \cos \theta) + \right.}, \quad (1)$$

$$\left. + K'^2 \sin^2 \theta (4 \xi - K' \sin \theta - 2 \cos \theta) + 2 \xi (\xi^2 - 6 \cos^2 \theta) \right\}$$

де

$$\xi = \frac{6 \cos^2 \theta + 4,5K' \sin 2\theta + K'^2 \sin^2 \theta}{12 \cos \theta + 3K' \sin \theta}; \quad (2)$$

при  $\text{arctg} \left( \frac{b}{h} \right) \leq \theta < 90^\circ$

$$\text{tg} \beta = \frac{\left\{ \begin{aligned} &6(K'^2 \sin^2 \theta - \xi^2 + \xi K' \sin \theta)(K' \sin \theta + \cos \theta) + \\ &+ \cos^2 \theta (4\xi - \cos \theta - 2K' \sin \theta) + 2\xi (\xi^2 - 6K'^2 \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\}}{\sin \theta (6K'^2 \sin^2 \theta - 12\xi K' \sin \theta + 5K' \sin 2\theta - 2\xi \cos \theta + \cos^2 \theta)}, \quad (3)$$

де

$$\xi = \frac{6K'^2 \sin^2 \theta + 4,5K' \sin 2\theta + \cos^2 \theta}{12K' \sin \theta + 3 \cos \theta}. \quad (4)$$

Вихідні передумови для отримання залежностей (1) – (4) прийняті за [2, п.3.1].

У формулах (1) – (4)  $K' = b/h$ . Базові табличні залежності визначалися для випадків  $K' = \{0,5; 0,667; 0,8; 1\}$ .

Функції (1), (2) описують випадок положення нейтральної лінії, зображеного на рис. 1, а, а функції (3), (4) – випадок положення, зображеного на рис.1, б.

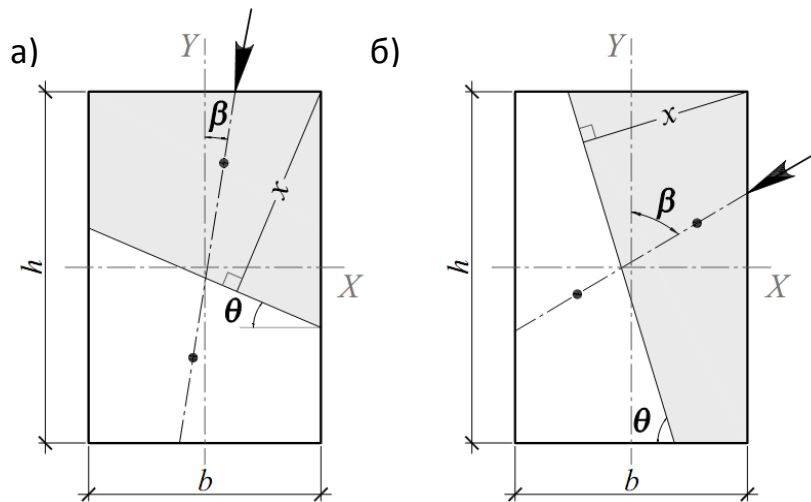


Рисунок 1 – Випадки положення нейтральної лінії:

а) при  $0 < \theta < \text{arctg} \left( \frac{b}{h} \right)$ ; б) при  $\text{arctg} \left( \frac{b}{h} \right) \leq \theta < 90^\circ$

З курсу опору матеріалів відомо, що залежність  $\theta = f(\beta)$  для елементів, матеріал яких має ідеально пружні властивості, має вигляд

$$\theta = \text{arctg} \left( \frac{I_x}{I_y} \text{tg} \beta \right), \quad (5)$$

де  $I_x, I_y$  – пружні моменти опору перерізу відносно головних осей інерції X та Y.

Для прямокутного перерізу формула (5) перетворюється в таку:

$$\theta = \text{arctg} \left[ \left( \frac{h}{b} \right)^2 \text{tg} \beta \right]. \quad (6)$$

Із взаємного аналізу графіків залежностей (1)–(4) та (6), який частково виконаний у роботі [1], видно, що до певного значення кута нахилу силової площини  $\beta$  значення кутів  $\theta$  нахилу нейтральної лінії для бетонних перерізів за формулами (1)–(4) перевищують значення, отримані для пружних матеріалів за залежністю (6); при подальшому ж збільшенні кута  $\beta$  спостерігається зворотнє: значення кута  $\theta$  бетону менші за значення  $\theta$  для елементів з пружних матеріалів (рис. 2).

Подібний зв'язок між залежностями  $\theta - \beta$  за формулами (1)–(4) і (6) має місце для будь-яких значень співвідношення  $h/b$ . Цей факт дозволяє отримати функцію  $\theta = f(\beta)$  у вигляді суми пружної та пластичної складової

$$\theta = f_{el}\left(\frac{b}{h}; \beta\right) + f_{pl}\left(\frac{b}{h}; \beta\right), \quad (7)$$

де пружна складова  $f_{el}\left(\frac{b}{h}; \beta\right) = \arctg\left(\left(\frac{b}{h}\right)^2 \operatorname{tg} \beta\right)$ , а пластична описується деякою періодичною функцією, наприклад  $\sin \beta$ .

Грунтуючись на такому підході, апроксимацію залежностей (1) і (3) у вигляді  $\theta = f(\beta, b/h)$  представляємо таким чином:

$$\theta = \arctg\left(\left(\frac{b}{h}\right)^2 \operatorname{tg} \beta\right) + k_1 \beta^{k_2} (\sin(A\beta + B) - C), \quad (8)$$

де  $k_1, k_2, A, B, C$  – коефіцієнти апроксимації.

Для обчислення коефіцієнтів апроксимації залежності (8) реалізовані наступні граничні умови:

середньоквадратична похибка значень  $\theta$ , за формулою (8) порівняно зі значеннями за теоретичними залежностями (1)–(4) повинна бути мінімальною;

апроксимаційна крива (8) на графіку  $\beta^\circ - \theta^\circ$  завжди має проходити через точки з координатами  $(0^\circ; 0^\circ)$  та  $(90^\circ; 90^\circ)$ ;

апроксимаційна крива повинна проходити через точку, яка є серединою базової кривої  $\theta = \arctg\left(\left(\frac{b}{h}\right)^2 \operatorname{tg} \beta\right)$ .

Відповідно до висунутих граничних умов знайдені вирази для визначення параметрів періодичної апроксимаційної функції (8):

$A = 4$  – коефіцієнт переходу періоду апроксимаційної функції від  $2\pi$  до  $\pi/2$ ;

$C = \cos(2 \cdot \arctg(b/h))$  – коефіцієнт, який визначає умову проходження апроксимаційної кривої через середину базової кривої  $\theta = \arctg\left(\left(\frac{b}{h}\right)^2 \operatorname{tg} \beta\right)$ ;

$B = \arcsin(C)$  – умова проходження функції через початок координат.

Коефіцієнти апроксимації  $k_1$  та  $k_2$ , визначені відповідно до першої вимоги, будуть обчислюватися з таких залежностей:

$$k_1 = -99k_2^3 - 18,3k_2^2 - 16k_2 + 3,2; \quad (9)$$

$$k_2 = 2\frac{b}{h} - 2. \quad (10)$$

Найбільше середнє квадратичне відхилення значень, обчислених за формулою (8), від значень, отриманих із залежностей (1)–(4), склало  $1,3^\circ$  тільки для випадку, коли

$b/h = 0,5$ . Графічне порівняння апроксимації (8) із залежностями (1)–(4) та (6) наведене на рис. 2.

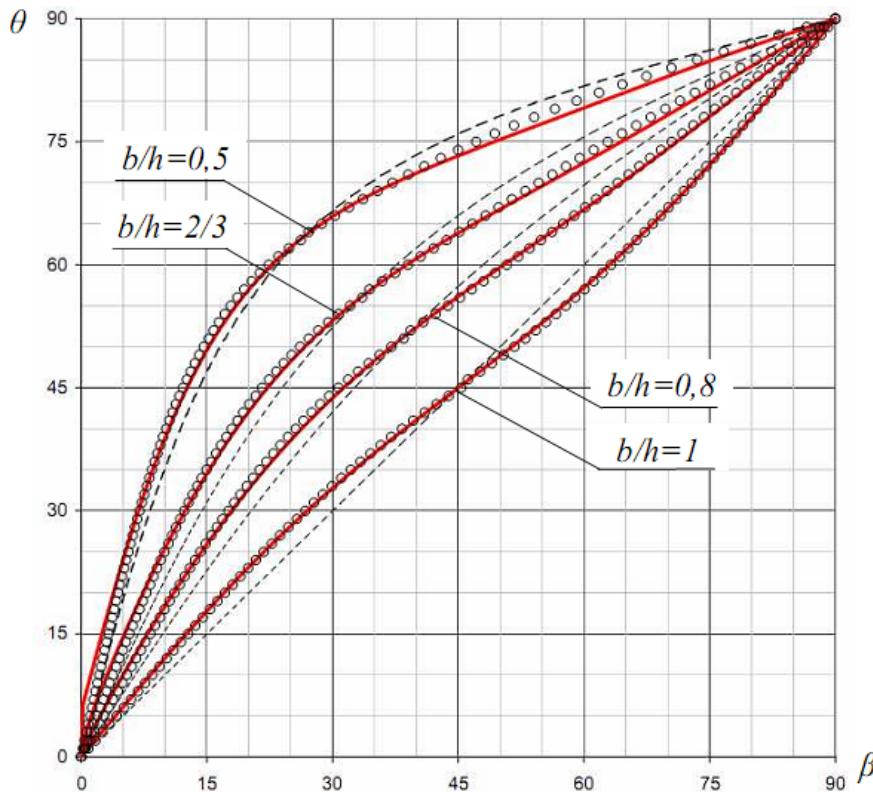


Рисунок 2 – Графічне зображення  $\theta - \beta$ , представлено різними рівняннями:  
 --- за формулою (6);  $\circ$  – за залежностями (1) – (4); — за функцією (8)

З аналізу рис. 2 видно, що функція (8) відповідає характеру залежності  $\theta - \beta$  за формулами (1) – (4). Крім цього, наведений графік чітко показує, що неврахування пластичних властивостей бетону може призвести до значних неточностей у визначенні кута  $\theta$ . Наприклад, при відношенні  $b/h = 0,5$  для кута  $\beta = 10^\circ$  формула (6), яка враховує лише пружні властивості матеріалу, занижує значення величини кута  $\theta$  на 12 %.

**Висновки.** Розроблена формула дозволяє з достатньою точністю описати у явному вигляді залежність між кутом  $\beta$  нахилу силової до головної вертикальної площини та кутом  $\theta$  нахилу нейтральної лінії відносно горизонталі. Отримана формула може бути застосована для обчислення параметрів напружено-деформованого стану бетонних елементів прямокутного профілю, що зазнають косоного згину, а також в подальших теоретичних дослідженнях їх з урахуванням нелінійних властивостей бетону.

#### Література

1. Павликов, А.Н. Экспериментально-теоретические исследования прочности, деформативности, образования и раскрытия трещин по сечениям, нормальным к продольной оси косоизгибаемых керамзитобетонных элементов: дис. кандидата техн. наук: 05.23.01 / Павликов Андрей Николаевич. – Полтава, 1979. – 226 с.
2. Бетонные и железобетонные конструкции: СНиП 2.03.01-84\*. – [Чинний від 1988-08-25 г.] – М.: Госстрой СССР. – (Строительные нормы и правила).

3. Яровой, М.Л. Экспериментально-теоретические исследования трещинообразования и деформативности косоизгибаемых предварительно напряженных железобетонных элементов прямоугольного сечения: дис. кандидата техн. наук: 05.23.01 / Яровой Михаил Лукич. – Полтава, 1980. – 269 с.

4. Сердюк, Л.И. Расчет трещиностойкости предварительно напрягаемых элементов прямоугольного сечения / Л.И. Сердюк // Расчет железобетонных конструкций при сложных деформациях / М.С. Торяник, П.Ф. Вахненко, Л.В. Фалеев. – М.: Стройиздат, 1974. – Глава VII. – С.256–268.

Надійшла до редакції 25.11. 2010

© А.М. Павліков, Д.Ф. Федоров

### **ЗАВИСИМОСТЬ УГЛА НАКЛОНА НЕЙТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ ОТ УГЛА ДЕЙСТВИЯ СИЛОВОЙ ПЛОСКОСТИ В КОСОИЗГИБАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ**

*Приведены функциональные зависимости угла наклона нейтральной линии от угла наклона силовой плоскости на примере бетонных элементов прямоугольного поперечного сечения, которые подвержены косому изгибу.*

**Ключевые слова:** бетон, косоизгиб, угол наклона нейтральной линии, угол наклона силовой плоскости.

### **RELATIONSHIPS BETWEEN TILTING ANGLE OF NEUTRAL AXIS AND INCLINATION ANGLE OF PLANE OF LOADING FOR SKEW BENDED RECTANGULAR MEMBERS**

*Functional relationships between tilting angle of neutral axis and plane of loading inclination angle for skew bended rectangular plain concrete members are discussed.*

**Keywords:** concrete, biaxial bending, tilting angle of neutral axis, inclination angle of plane of loading.