



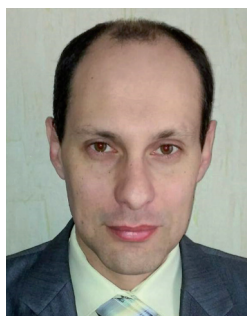
УДК 624.012.35:620.173



**ПАВЛІКОВ А.М.**

Д-р технічних наук, зав. каф.,  
Полтавський національний  
технічний університет  
ім. Ю. Кондратюка, м. Полтава,  
Україна.

e-mail: am.pavlikov@gmail.com,  
тел. +38 (066) 301 53 07,  
ORCID: 0000-0002-5654-5849



**КОЧКАРЬОВ Д.В.**

Канд. технічних наук, доц.,  
Національний університет  
водного господарства та при-  
родокористування, м. Рівне,  
Україна

e-mail: d.v.kochkarev@nuwm.edu.ua  
тел. +38 (066) 257 06 84.  
ORCID: 0000-0002-4525-7315

## РОЗРАХУНОК НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У НОРМАЛЬНИХ ПЕРЕРІЗАХ ПРИ КОСОМУ ЗГИНАННІ

**АНОТАЦІЯ.** Запропоновано інженерну методику розрахунку несучої здатності косо зігнутих залізобетонних елементів із використанням поняття розрахункового опору залізобетону. Розроблені формули дозволяють оцінювати міцність у нормальних перерізах балкових елементів, які зазнають косоного згинання, на основі розрахованих параметрів міцності при плоскому згинанні. Представлені залежності сприяють значному спрощенню варіантного проектування залізобетонних елементів на дію зусиль в обох площинах. Надійність запропонованого розрахункового апарату підтверджено експериментальними даними. Розроблений алгоритм розрахунку залізобетонних балок дозволяє встановлювати не тільки їх несучу здатність, але й підбирати площу перерізу арматури, необхідну для забезпечення експлуатаційних якостей балок в умовах косоного згинання.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** косо згинання, згин, опір, балка, деформаційна модель, залізобетон

### CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE ELEMENTS BEARING CAPACITY IN NORMAL SECTIONS WHEN OBLIQUE BENDING

**PAVLIKOV A.M.**, Dr, Head of a chair, Poltava National Technical University, by Yu. Kondratyuk, Poltava, Ukraine, E-mail: am.pavlikov@gmail.com, tel. +38 (066) 301 53 07, ORCID: 0000-0002-5654-5849

**KOCHKAREV D.V.**, PhD, Ass. Prof., National University of Water Management and Natural Resources Use, Rivne, Ukraine, E-mail: d.v.kochkarev@nuwm.edu.ua, tel. +38 (066) 257 06 84, ORCID: 0000-0002-4525-7315

**ABSTRACT.** Engineering method for calculating the strength of normal section of reinforced concrete

elements in conditions of oblique bending using the calculated resistance of reinforced concrete has been proposed. The need to develop the above calculation is based on the fact that, first, oblique flexion as a kind of complex deformation, is much more common than plane bending in the practical operation of the building structures. Secondly, the introducing in this calculation of concrete design resistance concept is greatly simplifies the calculation of the bearing capacity of the reinforced concrete beam elements in conditions of their work on oblique bending.

The main feature of oblique bending of beams, from the theoretical aspect, is the presence of bending moments in both planes in the element's cross-section. With regard to its practical aspect, as illustrated by the experience of construction structures operation, oblique bending of beams can be caused by many other reasons, among which, in particular, the most common are the following: technological inaccuracies occurred and installation errors, accidental exposure in another plane, structure damaging, influence of spatial working of frame structural systems, and more. These points to the need of solving tasks for improving the methods of calculating the strength of the oblique bended reinforced concrete elements and their subsequent experimental study.

After analyzing a large number of experimental data of flexible reinforced concrete elements for action efforts in two planes, it has been observed that bearing capacity of the oblique bended elements varies according to a certain law. Setting the law of variation of bearing capacity, general dependence of determination of the bearing capacity of the oblique bended elements has been suggested. With a view to its simplification, it was suggested to use the basic formulas for the method of concrete resistance calculation. This method is based on the diagrams of deformation of concrete and reinforcements, flat sections hypothesis, without usage of any empirical coefficients. On the basis of studies methods for solving problems of two types have been proposed: the first one - strength check of the element's normal section; the second one - calculating



the required area of reinforcement in conditions of well-known forces acting in two planes of the element. Both types of tasks can be solved quite simply without the use of numerical iteration methods. When solving the second problem, it becomes possible to establish the required number of reinforces in respective planes. Statistical comparison indicators of the bearing capacity have been calculated with the help of proposed method and the results of tests indicate sufficient accuracy for most engineering problems. This allows us to recommend the proposed method to a wide use not only in calculating the bearing capacity, but also in the calculation of the cross-sectional area of reinforcement required to ensure the performance of the reinforced concrete beams under conditions of oblique bending. Besides, the developed technique enables to perform the variant design of beam reinforced concrete elements, experiencing the oblique deformation.

**KEYWORDS:** oblique bending, bending, resistance, beam, deformation model, reinforced concrete

**ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ.** Дія згинальних моментів в обох площинах у перерізі елемента, як відомо, зумовлює появу в ньому косоного згинання. Але косо згинання балок також може бути наслідком багатьох інших чинників. Зокрема, найбільш часто з них зустрічаються такі як: технологічні неточності та похибки монтажу, випадкові впливи, які викликають момент в іншій площині, пошкодження конструкцій, вплив просторової роботи рамних конструктивних систем. Це вказує на необхідність розв'язання задач з удосконалення методик розрахунку косозігнутих залізобетонних елементів.

**АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ.** Вдосконаленню розрахунків несучої здатності залізобетонних елементів, що зазнають косоного згинання, присвячено багато робіт [1-7]. На сьогодні існує велика кількість практичних методик, оснований на формулах та таблицях з розрахунку міцності таких елементів. Але, як свідчить аналіз, розрахунок несучої здатності косозігнутих залізобетонних елементів у нормальних перерізах і досі є доволі складним та громіздким. Тому практика проектування елементів із залізобетону потребує розроблення простої інженерної методики на основі результатів експериментально-теоретичних досліджень.

Основна складність у розрахунках міцності косозігнутих залізобетонних елементів полягає в тому, що силова площина не співпадає із площиною прогинів. Це вимагає використовувати додаткову умову про розташування зовнішнього і внутрішнього моментів у паралельних площинах. Застосування деформаційної моделі в розрахунках міцності таких елементів можна реалізовувати за різ-

ними методиками.

Одна з методик, запропонована у роботі [8], полягає в тому, що переріз елемента розбивається на певну кількість ділянок. На кожній ділянці приймають постійне значення напруг у бетоні. Далі проводять числове інтегрування з використанням відповідних рівнянь рівноваги та гіпотези плоских перерізів. Для такого методу діаграма деформування бетону суттєвого значення не має, так само як і форма поперечного перерізу. Точність цього методу розрахунку залежить від розмірів ділянок, на які було розподілено переріз.

На дещо іншому підході основана методика, викладена в роботах [3 – 6]: вона основана на розгляді різних форм стиснутої зони бетону. При застосуванні цієї методики використання складних апроксимацій діаграм деформування бетону ускладнює процес розрахунку. Але на сьогодні зазначена методика є найбільш точною в розглядуваних розрахунках косозігнутих елементів.

Сучасні деформаційні методики, в основному, дають можливість виконувати перевірку несучої здатності. Окремі методики дають можливість установлювати армування за певних попередньо прийнятих схем армування. Що ж стосується пропозицій застосування простих методик із визначення площі перерізу арматури, то поки що таких немає.

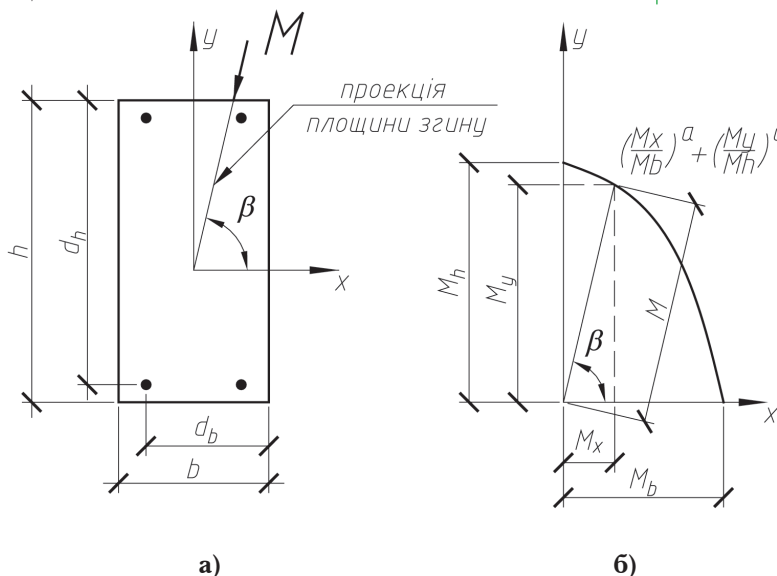
**ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ СТАТТІ.** Розробити розрахунковий апарат для розрахунку косозігнутих елементів інженерним методом. Перевірити його надійність за експериментальними даними.

**ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ З ПОВНИМ ОБГРУНТУВАННЯМ ОТРИМАНИХ НОВИХ НАУКОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ.** Наведений в нормах [8] метод розрахунку несучої здатності залізобетонних елементів при двовісному впливові згинальних моментів та поздовжніх сил є достатньо складним та трудомістким. Тому багато дослідників, як і раніше, ведуть пошуки простих інженерних способів розрахунку залізобетонних елементів при складних видах деформування [1-7]. Зокрема, для розв'язання цієї задачі, розглядають можливість поєднання розрахунків у кожній із взаємно перпендикулярних площин в один загальний розрахунок косозігнутого елемента. Наприклад, у нормативних документах [9, 10] приймають, що несучу здатність елементів прямокутного перерізу із симетричним армуванням при зміні кута нахилу силової площини від 0° до 90° (рис. 1) можна розраховувати за такою залежністю

$$\left(\frac{M_x}{M_b}\right)^a + \left(\frac{M_y}{M_h}\right)^a = 1, \quad (1)$$



де  $M_x, M_y$  - проекції розрахункового зусилля  $M$  на осі  $X$  і  $Y$  при заданому куті нахилу  $\beta$  силової площини;  $M_h, M_b$  - несуча здатність елемента при куті нахилу силової площини  $90^\circ$  і  $0^\circ$ ;  $a$  - показник ступеня, який залежить від класу бетону, процента армування, співвідношення сторін тощо.



**Рис.1.** Зміна несучої здатності елемента в нормальному перерізі при косому згинанні: а – схема армування; б – графік залежності (1)

Наведену формулу (1), використовуючи метод розрахункових опорів залізобетону [11], можна подати таким чином

$$\left(\frac{\sigma_{zM,y}}{f_{zM,h}}\right)^a + \left(\frac{\sigma_{zM,x}}{f_{zM,b}}\right)^a = 1, \quad (2)$$

де  $\sigma_{zM,x}, \sigma_{zM,y}$  - напруження у залізобетоні відповідно до зусиль  $M_x, M_y$ ;  $f_{zM,h}, f_{zM,b}$  - розрахункові опори залізобетону, які необхідні для сприйняття зусиль  $M_h, M_b$ .

Нанесемо на графік залежності (2) експериментальні дані за [4], отримаємо зміну несучої здатності балкових елементів при косому згинанні (рис. 2).

На отриманому графіку суцільна лінія відповідає показнику ступеня 2. Пунктирні лінії вказують відповідні діапазони розташування експериментальних даних [2]. Як видно з графіку, високу надійність розрахункового методу забезпечує показник ступеня  $a=2$ , при цьому більшість експериментальних даних знаходиться в межах допустимої інженерної похибки, яка відповідає нормативним значенням коефіцієнта варіації міцності бетону. Порівняння експерименталь-

ної несучої здатності з теоретично визначеною за виразом (2) з показником ступеня 2 представлено у табл. 1. Статистичні показники підтверджують надійність запропонованих виразів. Це дає змогу застосовувати формулу (2) у вигляді:

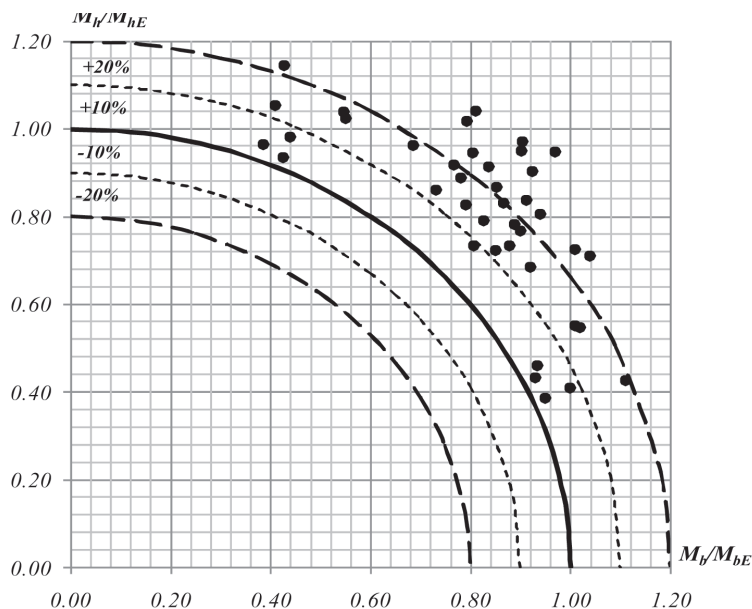
$$\left(\frac{\sigma_{zM,y}}{f_{zM,h}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{zM,x}}{f_{zM,b}}\right)^2 = 1. \quad (3)$$

Вираз (3) є умовою міцності в нормальних перерізах косозігнутих елементів.

У розрахунку за міцністю розглядаємо дві задачі. Перша - перевіряння міцності нормального перерізу елемента та друга - обчислення необхідної площі армування за відомих зусиль, що діють у двох площинах елемента.

Задача 1. Перевірка міцності перерізу елемента за відомого армування та значень діючих зусиль у двох площинах (рис. 1).

- 1.1. Обчислюємо процент армування перерізу по кожній площині -  $\rho_{fx}, \rho_{fy}$ .
- 1.2. З відповідних таблиць, наведених у роботах [11, 12], знаходимо розрахунковий опір залізобетону  $f_{zM,h}, f_{zM,b}$ , який відповідає заданому армуванню.
- 1.3. Розраховуємо значення згинальних моментів, які може сприйняти переріз по кожній із площин



**Рис. 2.** Зміна несучої здатності балкових елементів при косому згинанні в межах відхилень  $\pm 20\%$ , де:  $M_h/M_{hE}$  - відношення згинаючого моменту в напрямку висоти елемента до його несучої здатності в напрямку висоти;  $M_b/M_{bE}$  - те ж саме, в напрямку ширини



$$M_h = f_{z_{Mh}} W_{A,h}; \quad M_b = f_{z_{Mb}} W_{A,b}. \quad (4)$$

1.4. Визначаємо значення напружень у залізобетонному перерізі в кожній з площин за виразами

$$\sigma_{z_{M,x}} = \frac{M_x}{W_{A,b}}; \quad \sigma_{z_{M,y}} = \frac{M_y}{W_{A,h}}. \quad (5)$$

1.5. За виразом (3) виконуємо перевірку міцності перерізу елемента.

Таблиця 1. Порівняння розрахункових значень міцності косозігнутих перерізів залізобетонних елементів  $M_{Ed}$  за виразом (3) з експериментальними даними  $M_{Ed}^E$ , за [2]

№ n/n	Шифр зразка	$\beta$ , град	$\rho_p$ , %	$f_y$ , МПа	$f_c$ , МПа	$\frac{M_{Ed}^E}{M_{Ed}}$
1	2	3	4	5	6	8
1	Зразок № 1	70	1.516	234.0	30.5	1.130
2	Зразок № 2	70	1.516	234.0	30.5	1.242
3	Зразок № 3	70	1.485	234.0	30.5	1.195
4	Зразок № 4	80	1.516	234.0	29.2	1.038
5	Зразок № 5	80	1.455	234.0	29.2	1.130
6	Зразок № 6	80	1.507	234.0	29.2	1.221
7	Зразок № 7	59	2.383	324.0	27.4	1.144
8	Зразок № 8	70	1.933	324.0	27.4	1.162
9	Зразок № 9	70	1.874	324.0	23.6	1.174
10	Зразок № 10	70	1.933	324.0	23.6	1.181
11	Зразок № 13	80	2.018	324.0	17.1	1.074
12	Зразок № 14	80	1.994	324.0	17.1	1.026
13	Зразок № 15	59	2.455	324.0	28.6	1.186
14	Зразок № 16	59	2.408	324.0	28.6	1.215
15	Зразок № 17	63	1.179	227.0	23.0	1.184
16	Зразок № 18	62	1.179	220.3	20.6	1.238
17	Зразок № 21	63	0.821	263.8	28.9	1.289
18	Зразок № 22	63	0.821	265.0	29.7	1.317
Середнє значення $x_{сер}$						1.17
Середнє квадратичне значення $\sigma$ , %						7.77
Коефіцієнт варіації $v$ , %						6.61

Задача 2. Визначення необхідної площі перерізу арматури за відомих зусиль  $M_x$ ,  $M_y$  у двох площинах елемента (рис. 1).

2.1. Розраховуємо напруження у найбільш деформованих фібрах залізобетонного перерізу від  $M_x$ ,  $M_y$

$$\sigma_{z_{M,x}} = \frac{M_x}{W_{A,b}}; \quad \sigma_{z_{M,y}} = \frac{M_y}{W_{A,h}}. \quad (6)$$

2.2. Із умови пропорційності напруг і розрахункових опорів залізобетону в площинах

$$\frac{\sigma_{z_{M,E}}}{\sigma_{z_{M,y}}} = \frac{f_{z_{M,b}}}{f_{z_{M,h}}} \rightarrow \frac{\sigma_{z_{M,E}}}{f_{z_{M,b}}} = \frac{\sigma_{z_{M,y}}}{f_{z_{M,h}}} \quad (7)$$

отримаємо значення розрахункових опорів залізобетону із формули (3)

$$f_{z_{M,b}} = \frac{\sigma_{z_{M,E}}}{\rho\sqrt{0,5}}; \quad f_{z_{M,h}} = \frac{\sigma_{z_{M,y}}}{\rho\sqrt{0,5}}. \quad (8)$$

У даному випадку можна розглядати різні варіанти пропорційності, забезпечуючи найбільш раціональне армування.

2.3. З відповідних таблиць, представлених у роботах [11, 12], за розрахунковими значеннями опору залізобетону знаходимо відсотки армування  $\rho_{fx}$ ,  $\rho_{fy}$ , а за ними необхідну площу поперечного перерізу арматури, розташовуючи її таким чином, щоб кутові стрижні входили в площу арматури і вертикального і горизонтального напрямків.

## ВИСНОВКИ

Запропоновано інженерний метод розрахунку міцності косозігнутих залізобетонних елементів на основі методу розрахункових опорів залізобетону. Розроблений метод є доволі простим та достатньо надійним. Основною перевагою цього методу є те, що він показує, яка міцність повинна бути у кожній з площин перерізу. Це дає можливість забезпечувати варіантне проектування косозігнутих елементів та забезпечувати найбільш раціональне їх армування в умовах складного деформування. У подальшому планується поширення запропонованої методики розрахунку на похилі перерізи залізобетонних елементів.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Горяник М.С. Расчет железобетонных конструкций при сложных деформациях /М.С. Горяник, П.Ф. Вахненко, Л.В. Фалеев, А.И. Сердюк и др.; под ред. М.С. Горяника. – М.: Стройиздат, 1974. – 297 с.
2. Глазер С.И. Расчет косоизгибаемых железобетонных элементов. – Киев: Будівельник. – 1973. – 211 с.
3. Павліков А.М., Бойко О.В. Міцність косозігнутих залізобетонних елементів за умови дволінійної роботи бетону та арматури // Буд. конструкції: зб. наукових пр. – Київ: НДІБК, 2007. – Вип. 67. – С. 263– 270.
4. Павліков А.М., Бойко О.В. Розрахунок міцності косозігнутих балок на основі дволінійних діаграм стану матеріалів // Буд. конструкції: зб. наукових пр. – Київ: НДІБК, 2006. – Вип. 65. – С. 172– 178.



5. Павліков А.М. Міцність косозігнутих залізо-бетонних балок таврового профілю за умови дволінійної роботи бетону та арматури / А.М. Павліков, О.В. Бойко, М.О. Харченко // Галузеве машинобудування, буд-во : зб. наукових пр. – Полтава : ПолтНТУ, 2011. – Вип. 2 (30). – С.33 – 37.
6. Павліков А.М. Розмежування форм стиснутої зони бетону в перерізі косозігнутих балок таврового / А.М. Павліков, О.В. Бойко, М.О. Харченко // Вісн. ОДАБА. – Одеса : ОДАБА, 2012. – Вип. № 47. – С. 255–261.
7. Ромашко В.Н. Несущая способность гибких кососжимаемых керамзитожелезобетонных колонн при кратковременном и длительном действии нагрузок: автореф. дис. ... канд. техн. наук / НИИ строит. конструкций. – Киев, 1987. – 20 с.
8. Проектування залізобетонних конструкцій. Частина 1-1. Загальні правила і правила для споруд: ДСТУ- Н Б EN 1992-1-1:2010. Єврокод 2. – [Чинний від 2013-07-01]. - Київ: ДП «Укрархбудінформ», 2012. - VIII, 312 с. – (Національний стандарт України).
9. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення: ДБН В.2.6-98:2009. – [Чинний від 2011-06-01]. - Київ: ДП «Укрархбудінформ», 2011. - 70 с. –(Будівельні норми України).
10. EN 1992: Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1: General rules and rules for buildings. – Brussels, 2002. – 230 p.
11. Кочкар'ов Д.В. Основи розрахунку залізобетонних елементів методом розрахункових опорів залізобетону / Кочкар'ов Д.В. // Сталезалізобетонні конструкції: дослідження, проектування, буд-во, експлуатація: зб. наукових пр. – Полтава: ПолтНТУ, 2014.- Вип. 3 (42). - Том 2. - С. 67-73.
12. Кочкар'ов Д.В. Нелінійний опір залізобетонних елементів і конструкцій силовим впливам. - Рівне: О. Зень, 2015. - 384 с.
4. Pavlikov A.M., Boyko O.V. Rozrakhunok mitsnosti kosozihnutykh balok na osnovi dvoliniynykh diahram stanu materialiv // Budivel'ni konstruktsiyi. – Kiev: NDIBK, 2006. – Vyp. 65. – S. 172– 178.
5. Pavlikov A.M. Mitsnist' kosozihnutykh zalizobetonnykh balok tavravocho profilyu za umovy dvoliniynoyi roboty betonu ta armatury / A.M. Pavlikov, O.V. Boyko, M.O. Kharchenko // Haluzeve mashynobuduvannya, budivnytstvo : zb. nauk. prats'. – Poltava : PoltNTU, 2011. – Vyp. 2 (30). – S.33 – 37.
6. Pavlikov A.M. Rozmezhuvannya form stysnutoyi zony betonu v pererizi kosozihnutykh balok tavravocho / A.M. Pavlikov, O.V. Boyko, M.O. Kharchenko // Visnyk ODABA. – Odesa : ODABA, 2012. – Vyp. # 47. – S. 255–261.
7. Romashko V.N. Nesuschaya sposobnost gibkih kosozhimaemyih keramzitozhelezobetonnyih kolonn pri kratkovremennom i dlitelnom deystvii nagruzki: avtoreferat. diss. ... kand. tehn. nauk / NII stroit. konstruktsiy. – Kiev, 1987.–20 s.
8. DBN V.2.6-98:2009. Konstruktsiyi budynkiv i sporud. Betonni ta zalizobetonni konstruktsiyi. Osnovni polozhennya. – Kiev: DP “Ukrarhbudinform”, 2011. – 71 s. – (Building norms of Ukraine).
9. DSTU- N B EN 1992-1-1:2010. Yevrokod 2. Proektuvannya zalizobetonnykh konstruktsiy. Chastyna 1-1.Zahal'ni pravyla i pravyla dlya sporud. – Kiev: DP “Ukrarhbudinform”, 2012. – 311 s. (National standard of Ukraine).
10. EN 1992: Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1: General rules and rules for buildings. – Brussels, 2002. – 230 p.
11. Kochkarev D.V. Osnovy rozrakhunku zalizobetonnykh elementiv metodom rozrakhunkovykh oporiv zalizobetonu / Kochkar'ov D.V. // Stalezalizobetonni konstruktsiyi: doslidzhennya, proektuvannya, budivnytstvo, ekspluatatsiya // Zbirnyk naukovykh prats'. – Poltava: PoltNTU, 2014. Vyp.3(42). Tom2. S. 67-73.
12. Kochkarev D.V. Neliniynyy opir zalizobetonnykh elementiv i konstruktsiy sylovym vplyvam. Rivne: O.Zen', 2015. 384 s.

## REFERENCES

1. Toryanik M.S. Raschet zhelezobetonnyih konstruktsiy pri slozhnyih deformatsiyah. /M.S. Toryanik, P.F. Vahnenko, L.V.Faleev, L.I. Serdyuk i dr.; Pod red. M.S. Toryanika. – M.: Stroyizdat, 1974. – 297 s.
2. Glazer S.I. Raschet kosoizgibaemyih zhelezobetonnyih elementov. – Kiev: Budivelnik. – 1973. – 211 s.
3. Pavlikov A.M., Boyko O.V. Mitsnist' kosozihnutykh zalizobetonnykh elementiv za umovy dvoliniynoyi roboty betonu ta armatury // Budivel'ni konstruktsiyi. – Kiev: NDIBK, 2007. – Vyp. 67. – S. 263– 270.