

УПРАВЛЕНИЕ В МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМАХ С ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЕЙ ОБЪЕКТА

*Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, Полтава, Украина

Анотація. Ставиться і вирішується задача управління багатозв'язним статичним об'єктом за наявності невимірюваних обмежених за рівнем збурень. Припускається, що передатна матриця цього об'єкта погано обумовлена. Встановлюється достатня умова, що гарантує дисипативність замкненої системи управління. Наводяться результати моделювання.

Ключові слова: багатозв'язна система, обмежене збурення, погано обумовлена передатна матриця, псевдообернення, дисипативність.

Аннотация. Ставится и решается задача управления многосвязным статическим объектом при наличии неизмеряемых ограниченных по уровню возмущений. Предполагается, что передаточная матрица этого объекта плохо обусловлена. Устанавливается достаточное условие, гарантирующее дисипативность замкнутой системы управления. Приводятся результаты моделирования.

Ключевые слова: многосвязная система, ограниченное возмущение, плохо обусловленная матрица, псевдообращение, дисипативность.

Abstract. The problem of management of multivariable static object in the presence of unmeasured bounded disturbances is posed and solved. The transfer matrix of this object is assumed to be ill-conditioned. A sufficient condition of guaranteeing the dissipativity of closed-loop control system is established. Simulation results are given.

Keywords: multivariable system, bounded disturbance, ill-conditioned transfer matrix, pseudo-inverse, dissipativity.

1. Введение

К настоящему времени уже разработаны и исследованы различные методы и алгоритмы управления многомерными (многосвязными) объектами при наличии неконтролируемых возмущений, которые порождаются нерегулярными, ограниченными по уровню, сигналами. Теоретической базой для построения таких систем управления выступает метод обратного оператора, представленный в работе [1]. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах [2–6]. Его реализация предусматривает использование обратной модели объекта, включенной в контур обратной связи.

Существенной особенностью метода обратного оператора является то, что в «чистом» виде он ориентирован на случай, когда передаточная матрица объекта является квадратной и невырожденной. Между тем даже при наличии невырожденной матрицы объекта данный метод приводит к заметному увеличению нормы управляющих воздействий, если эта матрица плохо обусловлена. Такое увеличение в практическом плане представляется неприемлемым.

Недавно в работе [7] был предложен метод псевдообратного оператора, позволяющий решить задачу управления при наличии вырожденной передаточной матрицы объекта. Оказывается, метод псевдообратного оператора может успешно использоваться не только в случае вырожденной, но и в случае плохо обусловленной матрицы.

В данной работе ставится и решается задача управления многосвязным статическим объектом при наличии неизмеряемых, ограниченных по уровню, возмущений в предположении, что передаточная матрица объекта плохо обусловлена.

2. Постановка задачи

Пусть имеется многосвязный статический объект, который функционирует в дискретном времени $n = 0, 1, 2, \dots$ и описывается разностным уравнением

$$y_n = Bu_{n-1} + v_n. \quad (1)$$

В этом уравнении

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $(N \times N)$ -матрица, $y_n = [y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(N)}]^T$ – N -мерный вектор выходных переменных, доступных для измерения в каждый n -й дискретный момент времени ($n = 0, 1, 2, \dots$); $u_n = [u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(N)}]^T$ – N -мерный вектор управлений, $v_n = [v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(N)}]^T$ – вектор неизмеряемых возмущений (Т – знак транспонирования). Предполагается, что вектор v_n ограничен по норме:

$$\|v_n\| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Предполагается далее, что матрица B плохо обусловлена [8, п. 16.4]. Это означает, что для так называемого числа обусловленности

$$\text{cond} B = \|B\| \|B^{-1}\| \quad (4)$$

справедливо соотношение

$$\text{cond} B \gg 1. \quad (5)$$

Рассматривается система стабилизации в условиях (5) вектора y_n на заданном уровне y^0 . Формирование последовательности $\{u_n\}$ управляющих воздействий в этой системе возлагается на интегральный регулятор вида

$$u_n = u_{n-1} + Ae_n, \quad (6)$$

$$e_n = y^0 - y_n, \quad (7)$$

где e_n – вектор текущего отклонения выхода y_n от вектора $y^0 = [y^{0(1)}, \dots, y^{0(N)}]^T$ заданных значений, а A – некоторая матрица, уточняемая позже.

Задача состоит в том, чтобы найти такую матрицу A , при которой норма вектора управления $\|u_n\|$ будет оставаться в приемлемых пределах.

3. Основные результаты

Согласно методу обратного оператора [1], в качестве матрицы A , фигурирующей в уравнении (6), принимается матрица, обратная передаточной матрице объекта, т.е.

$$A = B^{-1}. \quad (8)$$

При этом, как показано в работе [4], обеспечивается самая высокая точность стабилизации вектора y_n , выраженная в форме

$$\|e_n\| \leq 2\varepsilon. \quad (9)$$

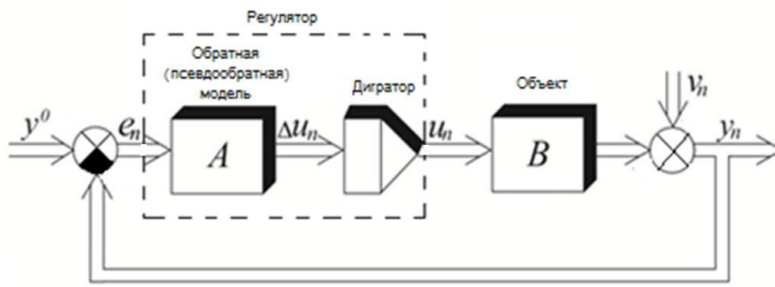


Рис. 1. Структурная схема системы управления

Структурная схема системы управления (1), (6), (7) представлена на рис. 1. Согласно (6), регулятор в этой системе должен содержать обратную модель объекта и дискретный интегратор (дигратор).

Чтобы оценить норму вектора управления

$\|u_n\|$, применим к (1), (6), (7) известный из теории дискретных систем аппарат z -преобразования. Тогда получим

$$Y(z) = Bz^{-1}U(z) + V(z),$$

$$U(z) = z^{-1}U(z) + B^{-1}E(z),$$

$$E(z) = Y^0 - Y(z),$$

где $Y(z), U(z), E(z), V(z), Y^0$ – изображения соответствующих последовательностей $\{y_n\}, \{u_n\}, \{e_n\}, \{v_n\}, \{y^0\} = y^0$. Отсюда

$$U(z) = B^{-1}(Y^0 - V(z)).$$

Переходя теперь к оригиналам, можно записать

$$u_n = B^{-1}(y^0 - v_n). \quad (10)$$

На основании (10) имеем

$$\|u_n\| \leq \|B^{-1}\| \|y^0 - v_n\|.$$

Усиление этого неравенства, с учетом (3), дает

$$\|u_n\| \leq \|B^{-1}\| (\|y^0\| + \varepsilon). \quad (11)$$

Как видно из неравенства (11), если B – плохо обусловленная матрица, т.е. $\det B \approx 0$, то, по определению обратной матрицы B^{-1} , ее норма $\|B^{-1}\|$ – достаточно большое по модулю число [8, п. 4.57].

Для того чтобы избежать появления сравнительно большого по норме вектора управляющих воздействий, матрицу A в (6) предлагается выбирать в виде

$$A = \tilde{B}^+. \quad (12)$$

Здесь \tilde{B}^+ – матрица, псевдообратная некоторой вырожденной матрице

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \dots & \tilde{b}_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{b}_{N1} & \dots & \tilde{b}_{NN} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Сама же матрица \tilde{B}^+ , согласно [9, теорема 3.4], определяется как

$$\tilde{B}^+ := \lim_{\delta \rightarrow 0} (\tilde{B}^T \tilde{B} + \delta^2 I)^{-1} \tilde{B}^T,$$

где I обозначает единичную $(N \times N)$ -матрицу.

В качестве матрицы \tilde{B} уместно принять вырожденную матрицу \tilde{B}_* , ближайшую к матрице B в смысле

$$\tilde{B}_* = \arg \inf_{\tilde{B}: \det \tilde{B} = 0} \|B - \tilde{B}\|. \quad (14)$$

Тогда уравнение регулятора приобретет вид

$$u_n = u_{n-1} + \tilde{B}_*^+ e_n. \quad (15)$$

Введем в рассмотрение N^2 – мерный вектор

$$\tilde{b} = [\underbrace{\tilde{b}_{11}, \dots, \tilde{b}_{N1}}_N, \dots, \underbrace{\tilde{b}_{N1}, \dots, \tilde{b}_{NN}}_N]^T,$$

составленный из N строк матрицы \tilde{B} вида (13). Согласно [8, п. 4.9], имеем

$$\det \tilde{B} = D(\tilde{b}), \quad (16)$$

где $D(\tilde{b})$ – некоторая нелинейная скалярная функция, зависящая от вектора \tilde{b} .

В геометрическом плане это означает, что множество $\{\tilde{B}\}$ вырожденных матриц \tilde{B} вида (13) можно интерпретировать как множество всех векторов \tilde{b} в $R^{N \times N}$, лежащих на гиперповерхности, которая в силу (16) описывается уравнением

$$D(\tilde{b}) = 0 \quad (17)$$

и проходит, очевидно, через точку $\tilde{b}_0 = [\underbrace{0, \dots, 0}_N]^T$. При этом операция (14) отыскания матрицы \tilde{B}_* сводится к определению вектора \tilde{b}_* из условий

$$\tilde{b}_* = \arg \min_{\tilde{b} \in D(\tilde{b})=0} \|\tilde{b} - b\|,$$

в котором норма $\|\cdot\|$ представляет собой не что иное, как расстояние от вектора $b = [\underbrace{b_{11}, \dots, b_{N1}}_N, \dots, \underbrace{b_{N1}, \dots, b_{NN}}_N]^T$ до гиперповерхности (17) (рис. 2).

В математическом плане вектор \tilde{b}_* может рассматриваться как решение задачи условной оптимизации функции

$$\tilde{b}_* = \arg \min_{\tilde{b} \in D(\tilde{b})=0} \|\tilde{b} - b\|,$$

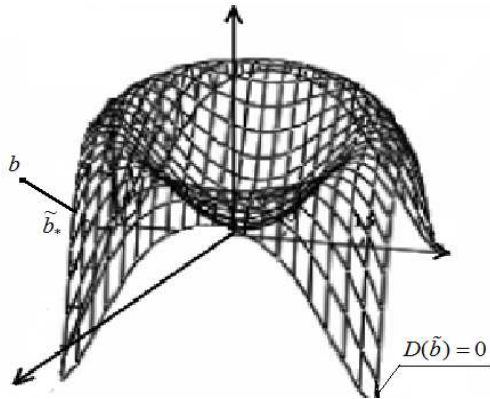


Рис. 2. Геометрическая интерпретация отыскания \tilde{b}_*

Повторяя практически те же выкладки, которые привели к выражению (10) в условиях (8), при выборе матрицы A в виде (12) получаем

$$u_n = (I - \tilde{B}_*^+ B)u_{n-1} + \tilde{B}_*^+ (y^0 - v_n). \quad (18)$$

Обозначим

$$Q := I - \tilde{B}_*^+ B, \quad (19)$$

$$\Delta := B - \tilde{B}_*. \quad (20)$$

Тогда можно записать

$$Q = I - \tilde{B}_*^+ \tilde{B}_* - \tilde{B}_*^+ \Delta. \quad (21)$$

Последовательное определение

u_1, u_2, \dots, u_n по формуле (18) позволяет получить выражение для u_n при любом n в виде

$$u_n = Q^n u_0 + \tilde{B}_*^+ (y^0 - v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} Q^i \tilde{B}_*^+ (y^0 - v_{n-i}). \quad (22)$$

Известно [8, п. 6.50], что в силу одного из так называемых уравнений Пенроуза [9], которое может быть представлено как

$$\tilde{B}_*^+ \tilde{B}_* \tilde{B}_*^+ = \tilde{B}_*^+, \quad (23)$$

следует соотношение

$$(I - \tilde{B}_*^+ \tilde{B}_*)^i = I - \tilde{B}_*^+ \tilde{B}_*. \quad (24)$$

Полагая далее $i = 2, 3, \dots$, последовательными вычислениями i -й степени матрицы Q как $Q^i = (Q^{i-1})Q$, на основании (21) с учетом соотношения (23), устанавливаем, что

$$Q^i = I - \tilde{B}_*^+ \tilde{B}_* + (-1)^i (\tilde{B}_*^+ \Delta)^i. \quad (25)$$

Принимая во внимание, что в силу уравнения (23)

$$(I - \tilde{B}_*^+ \tilde{B}_*) \tilde{B}_*^+ = 0,$$

на основании (22), с учетом выражения (25) и ограничения (3), получаем оценку сверху нормы $\|u_n\|$:

$$\|u_n\| \leq \|Q^n\| \|u_0\| + \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \|(\tilde{B}_*^+ \Delta)^i\| \right) \|\tilde{B}_*^+\| (\|y^0\| + \varepsilon). \quad (26)$$

Если учесть, что

$$\|\tilde{B}_*^+ \Delta\| \leq \|\tilde{B}_*^+\| \|\Delta\|, \quad (27)$$

то при любой матрице \tilde{B}_*^+ норма $\|\tilde{B}_*^+ \Delta\|$ может быть сколь угодно близкой к 0, если величина $\|\Delta\|$, определяемая согласно (20) как

$$\|\Delta\| = \|B - \tilde{B}_*\|, \quad (28)$$

представляет собой достаточно малое положительное число. Поэтому при некотором значении $\|\Delta\|$ в принципе может быть выполнено условие

$$\|\tilde{B}_*^+ \Delta\| < 1. \quad (29)$$

Согласно (25), можно записать:

$$\|Q^n\| \leq \|I - \tilde{B}_*^+ \tilde{B}_*\| + \|\tilde{B}_*^+ \Delta\|^n.$$

Откуда следует, что при выполнении (29) справедливо предельное соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q^n\| = \|I - \tilde{B}_*^+ \tilde{B}_*\|. \quad (30)$$

Из рассмотрения (26) видно, что второй член в ее правой части при $n \rightarrow \infty$ представляет не что иное, как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \|\tilde{B}_*^+ \Delta\|$, если только выполняется условие (29). Отсюда, с учетом (30), вытекает, что верхний предел нормы $\|u_n\|$ будет оставаться ограниченным сверху по норме:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|I - \tilde{B}_*^+ \tilde{B}_*\| \|u_0\| + \frac{\|\tilde{B}_*^+\|}{1 - \|\tilde{B}_*^+ \Delta\|} (\|y^0\| + \varepsilon) < \infty. \quad (31)$$

Предельное соотношение (31) совместно с уравнением (1) объекта показывает, что в условиях ограничений (3) и (29) замкнутая система (1), (7), (15) с матрицей \tilde{B}_*^+ , псевдообратной к матрице (14), будет оставаться диссипативной [3] по состоянию $[u_n^T, y_n^T]$. Таким образом, условие (29), которое, по существу, налагает ограничение сверху на допустимую норму матрицы Δ , определяемую выражением (28), выступает в качестве достаточного условия диссипативности построенной системы.

На основании (31), с учетом (27), заключаем, что при выборе матрицы \tilde{B}_* в виде (14) гарантируется наименьшая оценка сверху $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$, поскольку в этом случае $\|\Delta\| = \left\| B - \arg \inf_{\tilde{B}: \det \tilde{B} = 0} \|B - \tilde{B}\| \right\|$ минимальна.

Можно показать, что при выборе матрицы A , фигурирующей в уравнении регулятора (6), согласно (12), оценка точности системы получается хуже, чем оценка (9), которая достигается при выборе матрицы A согласно (8).

4. Моделирование

При моделировании были проведены четыре эксперимента. Во всех экспериментах была взята такая передаточная матрица объекта:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 5 & 2,5 & 10,2 \end{pmatrix}.$$

При этом $\det B = -0,2$. В качестве вектора заданных значений выходных величин принимался вектор $y^o = [5, 13, 20]^T$.

Модельные эксперименты 1 и 2. Эти эксперименты проводились в условиях, когда возмущения отсутствуют: $v_n \equiv 0$. В эксперименте 1 матрица A выбиралась как матрица, обратная матрице B :

$$A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 49 & 0,5 & -10 \\ 4 & -1 & 0 \\ -25 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Проведению модельного эксперимента 2 предшествовало определение вырожденной матрицы \tilde{B}_* из условия (14). Расчет дал

$$\tilde{B}_* = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 2,5 & 10 \end{pmatrix}.$$

При этом ($\det \tilde{B}_* = 0$), как и должно быть. Далее, согласно (12), была найдена матрица $\tilde{B}_*^+ = (1/220,5)\tilde{B}_*^T$, псевдообратная найденной матрице \tilde{B}_* , и принято $A = \tilde{B}_*^+$.

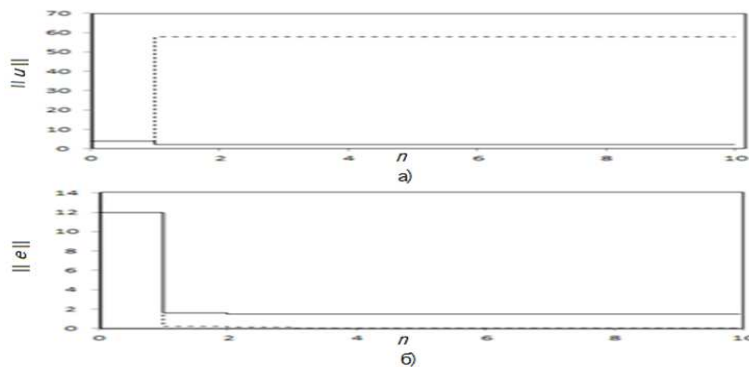


Рис. 3. Процессы управления при проведении модельного эксперимента 1 (пунктирная линия) и модельного эксперимента 2 (сплошная линия): а) норма вектора управления, б) норма вектора ошибки

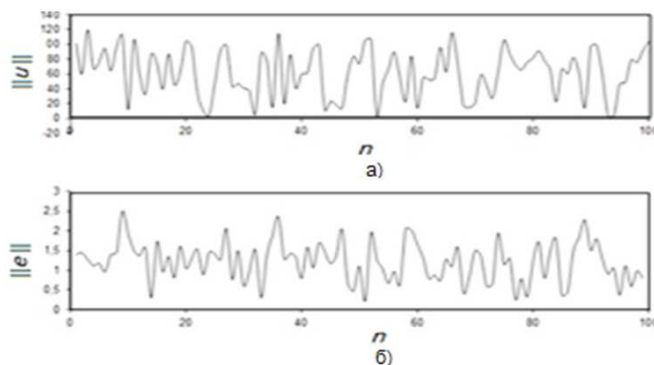


Рис. 4. Процессы управления при проведении модельного эксперимента 3: а) норма вектора управления, б) норма вектора ошибки

была взята матрица B^{-1} . При проведении же эксперимента 4, как и эксперимента 2, принималось $A = \tilde{B}_*^+$.

Результаты моделирования системы (1), (6), (7) при $A = B^{-1}$ и $A = \tilde{B}_*^+$ представлены на рис. 3. Как видно, во втором эксперименте норма вектора управляющих воздействий $\|u_n\|$ значительно меньше (рис. 3а); впрочем такое уменьшение $\|u_n\|$ достигается ценой некоторого повышения нормы вектора ошибок $\|e_n\|$ системы (рис. 3б).

Модельные эксперименты 3 и 4. При проведении этих двух экспериментов вводились ограниченные возмущения $v_n^{(1)} \neq 0$, $v_n^{(2)} \neq 0$, $v_n^{(3)} \neq 0$. В обоих экспериментах последовательности составляющих вектора v_n моделировались как последовательности псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[-1, 1]$ так, что $\|v_n\| \leq +\sqrt{3}$. Эксперимент 3 проводился в условиях, когда в качестве матрицы регулятора A

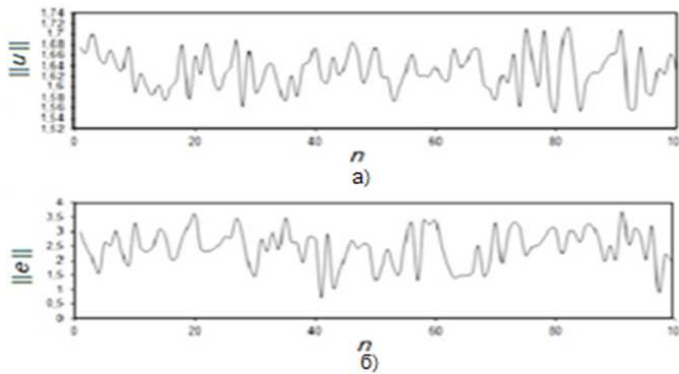


Рис. 5. Процессы управления при проведении модельного эксперимента 4: а) норма вектора управления, б) норма вектора ошибки

Результаты модельного эксперимента 3 приведены на рис. 4, а эксперимента 4 – на рис. 5.

Сравнение рис. 4 и 5 показывает эффективность построения регулятора (15), в котором \tilde{B}_*^+ – матрица, псевдообратная матрице вида (14).

5. Выводы

Анализ системы управления много-связным объектом (1) показал, что при наличии плохо обусловленной передаточной матрицы B следует отдавать

предпочтение методу, который сводится к псевдообращению вырожденной матрицы \tilde{B}_* , наиболее близкой к передаточной матрице объекта B . К тому же при незначительных изменениях элементов такой матрицы B она может вырождаться, следовательно, не иметь соответствующей обратной матрицы B^{-1} . Это означает, что в условиях (3), (5) система (1), (6), (7) теряет свойство робастности, если матрицу A выбирать в форме (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жук К.Д. Вопросы синтеза управляющих моделей в многосвязных автоматических системах / К.Д. Жук, Т.Г. Пятенко, В.И. Скурихин // Труды семинара «Методы математического моделирования и теория электр. цепей». – К., 1964. – С. 3 – 17.
2. Пухов Г.Е. Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов / Г.Е. Пухов, К.Д. Жук. – К.: Наукова думка, 1966. – 218 с.
3. Скурихин В.И. Итеративно-табличные автоматы / Скурихин В.И., Житецкий Л.С., Проценко Н.М. – К.: Наукова думка, 1977. – 165 с.
4. Об оценке допустимой неадекватности модели объекта при построении системы управления технологическим процессом по методу обратного оператора / В.И. Скурихин, Н.М. Проценко, Л.С. Житецкий [и др.] // Электронное моделирование. – 1982. – № 6. – С. 11 – 16.
5. Lyubchik L.M. The output control of multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances: the inverse model approach / L.M. Lyubchik, Yu.T. Kostenko // Proc. of 2nd European Control Conference. – 1993. – Vol. 2. – P. 1160 – 1165.
6. Костенко Ю.Т. Системы управления с динамическими моделями / Ю.Т. Костенко, Л.М. Любчик. – Харьков: Основа, 1996. – 212 с.
7. Скурихин В.И. Метод псевдообратного оператора в задаче оптимального управления многосвязным объектом с вырожденной передаточной матрицей / В.И. Скурихин, Л.С. Житецкий, К.Ю. Соловчук // Матеріали XIX міжнарод. конф. з автоматичного управління «Automatics 2012», (м. Київ, 26–28 вересня 2012 р.). – К: НУХТ, 2012. – С. 63 – 64.
8. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
9. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / Альберт А. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

Стаття дійшла до редакції 04.02.2013