УДК 517.977

ИДЕНТИФИКАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫМИ СТАТИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С НЕСТОХАСТИЧЕСКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

В.Н. Азарсков
Национальный авиационный университет
Украина, 03580, Киев, пр. Космонавта Комарова, 1
E-mail: azarskov@nau.edu.ua

Л.С. Житецкий
Кибернетический центр НАН Украины
Украина, 03680, ГСП, Киев, пр. Академика Глушкова, 40
E-mail: leonid_zhiteckii@i.ua

К.Ю. Соловчук
Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем НАН и МОН Украины
Украина, 03680, ГСП, Киев, пр. Академика Глушкова, 40
E-mail: solovchuk_ok@mail.ru

Ключевые слова: многосвязный статический объект, вырожденная передаточная матрица, дискретное время, нестохастическая неопределенность, обратная модель, идентификация, робастность, рекуррентное оценивание, алгоритм адаптивного управления.

Рассматриваются задачи робастного неадаптивного и адаптивного управления линейным многосвязным статическим объектом при наличии нерегулярных ограниченных возмущений с неизвестными уровнями. Предполагается, что элементы неизвестной передаточной матрицы объекта принадлежат известным заданным интервалам, причем сама эта матрица может быть вырожденной. Получены достаточные условия, гарантирующие робастность замкнутой системы управления с использованием фиксированной обобщенной обратной модели объекта. Развивается метод робастного адаптивного управления, основанный на построении рекуррентных процедур оценивания параметров некоторого воображаемого объекта с априори неизвестной, но заведомо невырожденной передаточной матрицей и оценивания неизвестных уровней возмущений.

AN IDENTIFICATION APPROACH TO THE PROBLEM OF ROBUST CONTROL OF MULTIPLY CONNECTED STATIC PLANTS WITH NON-STOCHASTIC UNCERTAINTIES

V.N. Azarskov
National Aviation University
Ukraine, 03580, Kiev, Kosmonavta Komarova Prospect, 1
E-mail: azarskov@nau.edu.ua

L.S. Zhitetskiy
Cybernetic Center of the National Academy of Sciences of Ukraine
Ukraine, 03680, GSP, Kiev, Akademika Glushkova Prospect, 40

E-mail: leonid_zhiteckii@i.ua

K.Yu. Solovchuk
International Scientific and Education Center of Information Technologies and Systems of the National Academy of Sciences and Ministry of Education and Science of Ukraine
Ukraine, 03680, GSP, Kiev, Akademika Glushkova Prospect, 40
E-mail: solovchuk_ok@mail.ru

Key words: multiply connected static plant, degenerate transfer matrix, discrete time, non-stochastic uncertainty, inverse model, identification, robustness, recursive estimation, adaptive control algorithm.

Problems of robust adaptive and non-adaptive control of a linear multiply connected static plant under availability of non-regular bounded disturbances with unknown levels are considered. Elements of the unknown transfer matrix of the plant are assumed to belong to known set intervals; meanwhile the matrix itself may be degenerate. Sufficient conditions ensuring the robustness of the closed-loop control system are obtained by use of a fixed generalized model of the plant. A method of the robust control is developed, based on constructing recursive procedures of estimating parameters of an imaginary plant with a priori unknown but a fortiori non-degenerate transfer matrix and estimating unknown levels of the disturbances.

1. Введение

Для описания систем управления многими непрерывными технологическими процессами, ориентированными на функционирование в дискретном времени, при достаточно большом периоде квантования вполне можно довольствоваться их статическими моделями [1, 2]. Задачи оптимизации систем управления многосвязными линейными и нелинейными статическими объектами с использованием имеющейся априорной информации о линейной модели объекта впервые, по-видимому, были поставлены и решены в работе [2].

Эффективным методом построения систем управления многосвязными технологическими процессами представляется метод обратного оператора, восходящий к пионерным работам отечественных исследователей первой половины 60-х годов прошлого столетия [3]. Этот метод получил дальнейшее существенное развитие в [4] в рамках идеологии обратных задач динамики. К методу обратного оператора позже пришли также авторы книги [1, гл. 8]. Реализация упомянутого метода применительно к квадратным передаточным матрицам объектов предполагает, что эти матрицы невырождены и априори известны конструктору системы.

Задача анализа дискретных систем управления линейным многомерным статическим объектом с использованием фиксированной модели, отличающейся от объекта, рассматривалась в [5], а задача синтеза дискретных систем управления нелинейным одномерным статическим объектом с априори неизвестной характеристикой при наличии ограниченной случайной помехи рассматривалась в [6]. Трудности, которые могут практически возникнуть при построении систем управления технологическими процессами, состоят в том, что в условиях параметрической неопределенности передаточные матрицы моделей многосвязных объектов зачастую оказываются плохо обусловленными [7]. Можно вообразить, что эти передаточные функции могут даже вырождаться. В этой связи возникает общая задача построения систем управления многосвязными статическими объектами, передаточные матрицы которых плохо обусловлены или вырождены. Формальное решение этой задачи удалось найти недавно в работах [8-10] на основе так называемого метода псевдообратного оператора, обобщающего метод обратного оператора на случай плохой обусловленности или вырожденности передаточных матриц. Существенное предположение, которое вводится в этих работах, состоит в том, что модель адекватна объекту. Последние же результаты, относящиеся к решению задачи робастного управления нелинейными многосвязными статическими объектами, представлены в [11].

К сожалению, при довольно большой априорной неопределенности относительно возможных значений параметров объекта далеко не всегда можно гарантировать даже устойчивость (диссипативность) системы при управлении по фиксированной модели объекта. В этой ситуации обычно приходится адаптировать модель к неизвестному объекту и одновременно осуществлять управление этим объектом по его настраиваемой модели.

Методы и алгоритмы адаптивной параметрической идентификации, совмещенной с управлением, восходят к работе [12]. В последние три десятилетия они стали предметом интенсивных исследований (см., в частности, [13-17]). Заметные результаты в области робастного неадаптивного управления получены в [18-20].

Судя по доступным литературным источникам, решение задачи робастного адаптивного управления линейным многосвязным объектом с ограниченными возмущениями известного уровня в специальном случае, когда передаточная матрица объекта вырождена, впервые предложено в работе [21]. Ниже ставится и решается задача робастного управления многосвязным статическим объектом с неизвестной и возможно вырожденной передаточной матрицей и ограниченными возмущениями неизвестного уровня как в неадаптивной, так и в адаптивной постановке.

2. Постановка задачи

Пусть имеется линейный многосвязный статический объект, описываемый в дискретном времени $n = 0, 1, 2, \dots$ уравнением

(1) $$y_n = Bu_n + v_n.$$

В этом уравнении $y_n = [y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(N)}]^{\mathrm{T}}$ – N-мерный вектор выходных переменных, доступный для измерения в каждый n-й дискретный момент времени; $u_n = [u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(N)}]^{\mathrm{T}}$ – N-мерный вектор управляющих воздействий; $v_n = [v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(N)}]^{\mathrm{T}}$ – вектор неконтролируемых аддитивных возмущений (помех), приведенных к выходу объекта;

(2) $$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix}$$

– произвольная $N \times N$-матрица прямых и перекрестных связей, имеющая смысл передаточной матрицы объекта (1) (здесь и в дальнейшем T – знак транспонирования).

Предполагается, что элементы b_{ik} $(i, k = 1, \dots, N)$ матрицы B вида (2) неизвестны, но известны их априорные интервальные оценки

(3) $$\underline{b}_{ik} \le b_{ik} \le \overline{b}_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, N.$$

В рамках сделанных предположений (3) относительно матрицы B вполне допускается, что она в принципе может быть плохо обусловленной и даже вырожденной. А это означает, что в общем случае $\operatorname{rank} B \le N$.

Вводится предположение, что переменные $v_n^{(i)}$, которые являются компонентами вектора v_n, образуют последовательность $\{v_n^{(i)}\} := v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \dots$ случайных (нерегулярных) величин, не имеющих, вообще говоря, стохастической природы. Как и в [19, 20], а также в [13, гл.4], считается только, что

(4) $\{v_n^{(i)}\} \in \ell_\infty$,

где ℓ_∞ – повсеместно принятое в современной теории управления обозначение пространства всех ограниченных последовательностей $\{x_n\}$ переменных с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{0 \le n < \infty} |x_n| < \infty$ [18, 20]. Итак, $v_n^{(i)}$ – произвольные ограниченные по уровню переменные, т.е.

(5) $|v_n^{(i)}| \le \varepsilon_i < \infty \quad \forall\, i = 1, \ldots, N$,

где $\varepsilon_i \equiv \mathrm{const}$. Считается, что оценки сверху ε_i уровней помех в (5) априори неизвестны (это здесь принципиальный момент).

Определение. Неопределенности относительно параметров b_{ik} объекта (1) и уровней ε_i неконтролируемых возмущений $v^{(i)}$, выраженные в форме ограничений (3), (4) соответственно, будем называть нестохастическими.

Рассматривается система стабилизации выходных переменных $y_n^{(i)}$ на заданных уровнях $y^{0(i)}$ ($y^{0(i)} \equiv \mathrm{const}$ для всех $i = 1, \ldots, N$). Без умаления общности считается, что компоненты вектора $y^0 = [y^{0(1)}, \ldots, y^{0(N)}]^{\mathrm{T}}$ удовлетворяют требованию

$$|y^{0(1)}| + \ldots + |y^{0(N)}| \ne 0.$$

Последнее выступает как требование $\|y^0\| \ne 0$, означающее, что, по крайней мере, одна из компонент этого вектора отлична от нуля. Для построения самой системы управления вводится обратная связь по выходу $y_n^{(i)}$ с использованием регулятора, реализующего некоторый одношаговый закон управления

(6) $u_{n+1} = U(u_n, y_n, y^0, B_n)$,

и идентификатора, позволяющего уточнять текущую оценку B_n неизвестной матрицы B по измеренным значениям $y_n, y_{n-1}, \ldots$ вектора выходных переменных и значениям $u_n, u_{n-1}, \ldots$ векторов управляющих воздействий, которые сформированы по закону (6). Здесь $U: R^N \times R^N \times R^N \times R^{N \times N} \to R^N$ – определенный линейный оператор.

Требуется построить алгоритм робастного адаптивного управления объектом (1), гарантирующий предельную ограниченность (диссипативность по состоянию [13, 19-20]) замкнутой системы (1), (6) в смысле выполнения требования

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \; (\|y_n\| + \tau \|u_n\|) < \infty, \quad \tau > 0$

в условиях нестохастических неопределенностей, выраженных в форме (3), (4).

3. Неадаптивный вариант

3.1. Оптимальное управление при известной и невырожденной передаточной матрице объекта

В соответствии с классическим идентификационным подходом к построению систем управления при наличии параметрической неопределенности [13, §4.2] предположим вначале, что передаточная матрица B объекта априори точно известна, т.е.

$\underline{b}_{ik} = \overline{b}_{ik} = b_{ik}$ для всех $i, k = 1, \dots, N$ в оценках (3), и рассмотрим прежде всего случай, когда эта матрица невырождена:

(8) $\det B \neq 0.$

Следуя [5], возложим управление объектом (1) на регулятор интегрального типа, описываемый уравнением

(9) $u_{n+1} = u_n + B^{-1} e_n,$

где

(10) $e_n = y^0 - y_n$

– N-мерный вектор ошибок системы в n-й дискретный момент времени. Уравнение (9) совместно с выражением (10) конкретизирует закон управления (6) в случае $B_n \equiv B$. Как видно, регулятор, реализующий этот закон управления, строится на базе обратной модели объекта и дигратора (дискретного интегратора).

Известно [15, п.7.2], что в условиях (8) регулятор (9), (10) является оптимальным на классе всех регуляторов, минимизирующих предельный показатель качества функционирования системы управления:

$$J := \lim_{n\to\infty} \sup \| e_n \|_2 \leq 2\varepsilon;$$

при этом

$$\lim_{n\to\infty} \sup \| u_n \|_2 \leq \| B^{-1} y^0 \|_2 + \| B^{-1} \|_2 \ \varepsilon < \infty.$$

Здесь и в дальнейшем $\| \cdot \|_2$ означает евклидову норму матрицы (вектора) [2, с.20], а $\varepsilon = (\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_N^2)^{1/2}$ – оценка сверху $\| v_n \|_2 \leq \varepsilon$ евклидовой нормы вектора v_n. Тем самым устанавливается, что требование (7) выполняется.

3.2. Оптимальное управление при известной и вырожденной передаточной матрице объекта

Предположим теперь, что хотя матрица B и известна, но заведомо вырождена, т.е.

$$\det B = 0.$$

В этом случае воспользоваться законом управления (9), (10), поскольку обратная матрица B^{-1} не существует. Следуя [8], заменим ее на псевдообратную (обобщенную обратную) матрицу B^+, определяемую как

$$B^+ = \lim_{\delta\to 0} (B^{\mathrm{T}} B + \delta^2 I)^{-1} \ B^{\mathrm{T}},$$

где I обозначает единичную матрицу. Тогда уравнение регулятора приобретет вид

(11) $u_{n+1} = u_n + B^+ e_n.$

Из результатов, полученных в работе [10], следует, что регулятор (11), (10) является оптимальным по функционалу типа верхней грани

$$\overline{J} = \sup_{\{v_n\}: |v_n^{(i)}| \leq \varepsilon_i} J$$

предельного показателя качества $J := \lim_{n\to\infty} \sup \| e_n \|$. При этом

$$J \leq \overline{J} = \| Q_e \|_2 \| e_0 \|_2 + 2\varepsilon(1 + | Q_e \|_2),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \| u_n \|_2 \leq | Q_u \|_2 \| u_0 \|_2 + \| B^+ \|_2 \ (\| y^0 \|_2 + \varepsilon),$$

где $y^0 = [y^{0(1)}, \dots, y^{0(N)}]^T$ – вектор заданных значений выходных переменных, а

$$Q_e := I - BB^+, \ Q_u := I - B^+ B.$$

Замечание 1. В условиях невырожденности B уравнение (11) переходит в уравнение (9), поскольку при $B^{+} = B^{-1}$ выполнено (8). В этой связи регулятор (11), (10) может рассматриваться как своеобразный универсальный регулятор для управления объектом (1) с произвольной передаточной матрицей B.

3.3. Робастное управление в условиях нестохастической неопределенности

Рассмотрим теперь возможность робастного управления объектом (1) при наличии параметрической неопределенности в форме (3). С этой целью попытаемся использовать регулятор, описываемый уравнением

(12) $$u_{n+1} = u_n + B_*^{+} e_n.$$

Последнее получается заменой в уравнении (11) неизвестной матрицы B на некоторую ее оценку B_*.

Положение равновесия системы (1), (12), (10) при $\| v_n \| \equiv 0$ определяется парой $\{u^e, y^e\}$ векторов u^e, $y^e = Bu^e$, которые должны удовлетворять уравнению

(13) $$B_*^{+}(y^0 - Bu) = 0,$$

подстановкой $u = u^e$. Примечательно, что при управлении по закону (11), (10), когда матрица B известна, положение равновесия замкнутой системы (1), (11), (10) всегда существует независимо от того, является ли эта матрица невырожденной или вырожденной. Оказывается, что если B – неизвестная и возможно вырожденная матрица, а выбранная ее оценка B_* такова, что $B_*^{+} \neq B^{+}$, то положения равновесия $\{u^e, y^e\}$ системы (1), (12), (10) может и не существовать.

Лемма 1 [9]. *Для существования положения равновесия системы* (1), (12), (10) *необходимо, чтобы матрица* B_* *была вырожденной, т.е.*

(14) $$\det B_* = 0.$$

Необходимые же и достаточные условия существования равновесия системы, фигурирующей в лемме 1, были установлены в работе [11] в форме следующих лемм.

Лемма 2. *Для существования положения равновесия системы* (1), (12), (10) *необходимо и достаточно, чтобы*

(15) $$\operatorname{rank} B_*^{+}B = \operatorname{rank}\,[B_*^{+}B : B_*^{+}y^0].$$

Лемма 3. *Положение равновесия* $\{u^e, y^e\}$ *системы* (1), (12), (10) *существует тогда и только тогда, когда*

(16) $$\ker B_*^{+} \cap (\{y^0\} + \operatorname{im} B) \neq \varnothing,$$

где $\ker C$ *и* $\operatorname{im} C$ *обозначают ядро и множество образов матрицы* C [22, с.44].

Геометрическая интерпретация условия (16) дана на рис. 1.

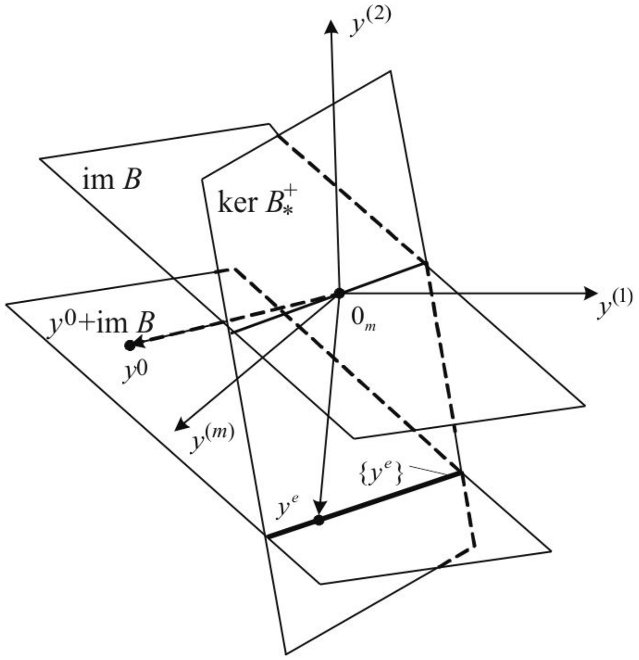


Рис. 1. Геометрическая интерпретация условия (16).

Для иллюстрации того досадного факта, что положение равновесия системы (1), (12), (10) может не существовать, приведем один численный пример.

Пример 1. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

а $y^0 = [1, 3]^{\mathrm{T}}$. Тогда $\operatorname{rank} B_* B = 0$, $\operatorname{rank} [B_*^+ B : B_*^+ y^0] = 1$ и условие (15) не выполняется. При этом хотя необходимое условие (14) вырожденности матрицы B_* и выполняется, но уравнение (13) не имеет решения.

Определим множество Ω всех возможных матриц $B' = \{b'_{ik}\}$, включая матрицу B, с элементами b'_{ik}, удовлетворяющими ограничениям $\underline{b}_{ik} \le b'_{ik} \le \overline{b}_{ik}$. Зафиксируем некоторую матрицу $B' = B_*$ из Ω (последнюю уместно интерпретировать как передаточную матрицу опорной модели объекта). Пусть выполнены условия

(17) $$\min \{|\underline{b}_{ii}|, |\overline{b}_{ii}|\} > \sum_{\substack{k=1 \\ i \ne k}}^{N} \max \{|\underline{b}_{ik}|, |\overline{b}_{ik}|\} \text{ для всех } i = 1, \ldots, N,$$

гарантирующие в силу известной в теории матриц теоремы Адамара [22, п. 16.27] невырожденность любой матрицы $B' = \{b'_{ik}\} \in \Omega.$

Теорема 1. *При выполнении условия* (17) *регулятор*

(18) $$u_{n+1} = u_n + B_*^{-1} e_n$$

обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы (1), (18), (10) *с произвольной передаточной матрицей* $B \in \Omega$. *объекта, если*

(19) $$\max_{B' \in \Omega.} \| I - B' B_*^{-1} \| < 1$$

для любой матричной нормы $\| \cdot \|$.

Доказательство теоремы 1 можно найти, в частности, в [5].

В свое время в работе [5] было установлено, что при выполнении условия (19) справедлива оценка

$$\lim_{n\to\infty} \sup \| e_n \|_2 \le \frac{2\varepsilon}{1 - \max\limits_{B'\in\Omega.} \| I - B'B_*^{-1} \|_2} < \infty.$$

Определим матрицу $B_0 = \{b_{ik}^0\}$ с элементами

(20) $$b_{ik}^0 = \frac{\underline{b}_{ik} + \overline{b}_{ik}}{2}$$

и введем матрицу

(21) $$\Delta := B' - B_0$$

«отклонения» любой матрицы $B' \in \Omega$ от матрицы B_0. Предположим, что

(22) $$\det B_0 \ne 0.$$

Из результатов, приведенных в [18, лемма 7.2], и известных свойств матричных норм [22, с.103] можно заключить, что при выполнении (22) условие

(23) $$\max_{i,k=1,\dots,N} | \underline{b}_{ik} - \overline{b}_{ik} | < \frac{2}{N \| B_0^{-1} \|},$$

которое нетрудно проверить, гарантирует невырожденность множества Ω матриц B'. Более того, оказывается справедливой такая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены требования* (22), (23). *Тогда регулятор, описываемый уравнением*

(24) $$u_{n+1} = u_n + B_0^{-1} e_n$$

совместно с выражением (10), *является робастно стабилизирующим в условиях* (3) *неопределенности относительно матрицы* B.

Доказательство. При $B_* = B_0$ в силу (21) соотношение (19) можно преобразовать к виду

(25) $$\max_{\Delta} \| \Delta B_0^{-1} \|_2 < 1.$$

Поскольку же, как известно

$$\| \Delta B_0^{-1} \| \le \| \Delta \| \| B_0^{-1} \|$$

для любой матричной нормы (см., например, [18, с. 259]), то неравенство (25) заведомо выполняется, если

(26) $$\max \| \Delta \|_2 < 1 / \| B_0^{-1} \|_2 .$$

Но согласно [22, п.14.49] в силу (20) справедливо неравенство

$$\max \| \Delta \|_2 \le \frac{N}{2} \max_{i,k=1,\dots,N} | \underline{b}_{ik} - \overline{b}_{ik} | .$$

Отсюда следует, что выполнение требования (23) немедленно влечет за собой выполнение (26). А это доказывает справедливость теоремы.

Замечание 2. Условие теоремы 2 представляются более жесткими, нежели условия теоремы 1. Зато они могут быть более просто проверены.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда требование (23) не выполняется. Согласно [18, лемма 7.2] в этом случае множество Ω может содержать вырожденные матрицы B', и регулятор (24) уже не будет гарантировать робастную стабилизируемость всего семейства объектов, передаточные матрицы которых входят в Ω, по крайней мере, когда $\det B_0 \ne 0$, поскольку условие леммы 1 не выполняется.

Достаточные условия, при которых гарантируется робастная стабилизация данного семейства объектов, устанавливает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $B_* \in \Omega$ *– некоторая фиксированная вырожденная матрица, удовлетворяющая требованию* (14) *вырожденности. Предположим, что при любой матрице* $B' \in \Omega$ *положение равновесия* $\{u^e, y^e\}$ *существует. Тогда регулятор*

(27) $$u_{n+1} = u_n + B_*^+ e_n$$

будет робастно стабилизировать семейство объектов (1) *с передаточными матрицами* $B \in \Omega$ *при*

(28) $$\max_{\Delta} \| B_*^+ \Delta \| < 1,$$

где

(29) $$\Delta := B_* - B.$$

Доказательство. Согласно (27) в силу (1) с учетом уравнения (13) равновесия и выражения (29) можно записать

(30) $$u_n - u^e = Q_u (u_{n-1} - u^e) - B_*^+ v_n,$$

где

(31) $$Q_u = I - B_*^+ B + B_*^+ \Delta.$$

Итерируя соотношение (30), находим

(32) $$u_n - u^e = Q_u^n (u_0 - u^e) - Q_u^{n-1} B_*^+ v_1 - \cdots - B_*^+ v_n.$$

Из свойств обобщенной обратной матрицы [22, с.47] на основании (31) заключаем, что

(33) $$Q_u^n = I - B_*^+ B_* + (B_*^+ \Delta)^n,$$

(34) $$Q_u^n B_*^+ = (B_*^+ \Delta)^n B_*^+.$$

Подстановка выражений (33), (34) в соотношение (32) с учетом того факта, что $\| v \|_2 < \varepsilon$, позволяет получить оценку

$$| u_n - u^e \| \le \| I - B_*^+ B_* \| + \| B_*^+ \Delta \|^n \; \| u_0 - u^e | + [\| B_*^+ \Delta \|^{n-1} \| B_*^+ \| + \cdots$$

(35) $$\cdots + \| B_*^+ \|] \sup_{0 \le n < \infty} \| v_n \|.$$

При $n \to \infty$ выражение, заключенное в квадратные скобки правой части (35), определяется как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\| B_*^+ \Delta \|$ (в силу (28)). Поэтому

$$\| u_\infty - u^e \| \le \| I - B_*^+ B_* \| \| u_0 - u^e \| + \| B_*^+ \| (1 - \| B_*^+ \Delta \|_2)^{-1} \sup_{0 \le n < \infty} \| v_n \| < \infty.$$

Отсюда немедленно следует, что $\{u_n\}$ – ограниченная последовательность: $\{u_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \cdots \times \ell_\infty}_{N}$. А это означает, что $\{y_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \cdots \times \ell_\infty}_{N}$. (в силу уравнения (1) и свойства $\{v_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \cdots \times \ell_\infty}_{N}$). Тем самым завершается доказательство теоремы.

Теорема 3, устанавливающая согласно (25) ограничения на любую норму $\| B_*^+ \Delta \|$, допускает переформулировку ее в терминах задач линейного программирования, которые ставятся следующим образом:

найти

(36) $$\min \sigma_{ik}, \; \max \sigma_{ik},$$

при ограничениях

(37) $\underline{b}_{ik} - b^*_{ik} \le \delta_{ik} \le \overline{b}_{ik} - b^*_{ik},\ i, k = 1,\ldots, N.$

Здесь δ_{ik} и b^*_{ik} – элементы матрицы Δ и B_* соответственно, а

$$\sigma_{ik} = \sum_{j=1}^{N} \beta^*_{ij}\delta_{jk}$$

– линейные формы, зависящие от элементов β^*_{ik} выбранной обобщенной обратной матрицы B^+_*.

Теорема 4. *Пусть выполнено требование* (14). *При*

$$\sum_{k=1}^{N} \max\{|\min\sigma_{ik}|, |\max\sigma_{ik}|\} < 1 \quad \forall i = 1,\ldots, N,$$

где $\min\sigma_{ik}$ *и* $\max\sigma_{ik}$ *– решение задач* (36), (37) *линейного программирования, регулятор* (18) *обеспечивает робастную стабилизацию семейства всех объектов* (1) *с передаточными матрицами* $B \in \Omega$.

Результат немедленно следует из определения строчной нормы $\|\cdot\|_1$ матрицы (см., например, [18, с.259]) и использования того факта, что условие (28) должно выполняться для любой матричной нормы $\|\cdot\|$.

Пример 2. Пусть заданы такие априорные оценки неизвестных элементов матрицы $B: 0 \le b_{11} \le 2,\ 0 \le b_{12} \le 4,\ -4 \le b_{13} \le 0,\ 0 \le b_{21} \le 2,\ 0 \le b_{22} \le 6,\ 0 \le b_{23} \le 4,\ -2 \le b_{31} \le 0,$ $-2 \le b_{32} \le 0,\ 1 \le b_{33} \le 11.$ При такой неопределенности множество Ω будет содержать вырожденные матрицы B'. Выберем одну из них в качестве матрицы B_* опорной модели объекта, приняв

$$B_* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

(38) $$B^+_* = \frac{1}{702}\begin{pmatrix} 34 & 52 & -16 \\ 80 & 143 & -17 \\ -20 & 52 & 92 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи (36), (37) линейного программирования дает

$$\sum_{k=1}^{3} \max\{|\min\sigma_{1k}|, |\max\sigma_{1k}|\} = 252/702 < 1,\ \sum_{k=1}^{3} \max\{|\min\sigma_{2k}|, |\max\sigma_{2k}|\} = 606/702 < 1,$$

$$\sum_{k=1}^{3} \max\{|\min\sigma_{3k}|, |\max\sigma_{3k}|\} = 604/702 < 1.$$

Как видно, в рассматриваемом примере робастная стабилизация заданного семейства объектов обеспечивается при выборе в законе управления (27) матрицы B^+_* в виде (38) (согласно теореме 4). Для подтверждения этого факта на рис. 2 приведены результаты моделирования замкнутой системы управления (1), (27), (10) при

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$y^{0(1)} = 5,\ y^{0(2)} = 13,\ y^{0(3)} = 7$ и таких начальных значениях управляющих воздействий: $u_0^{(1)} = 1,\ u_0^{(2)} = 2,\ u_0^{(3)} = 1$. Последовательности $\{v_n^{(i)}\}$ $(i = 1, 2,\ldots)$ генерировалась как последовательности независимых равномерно распределенных в интервале $[-1, 1]$ псевдослучайных чисел.

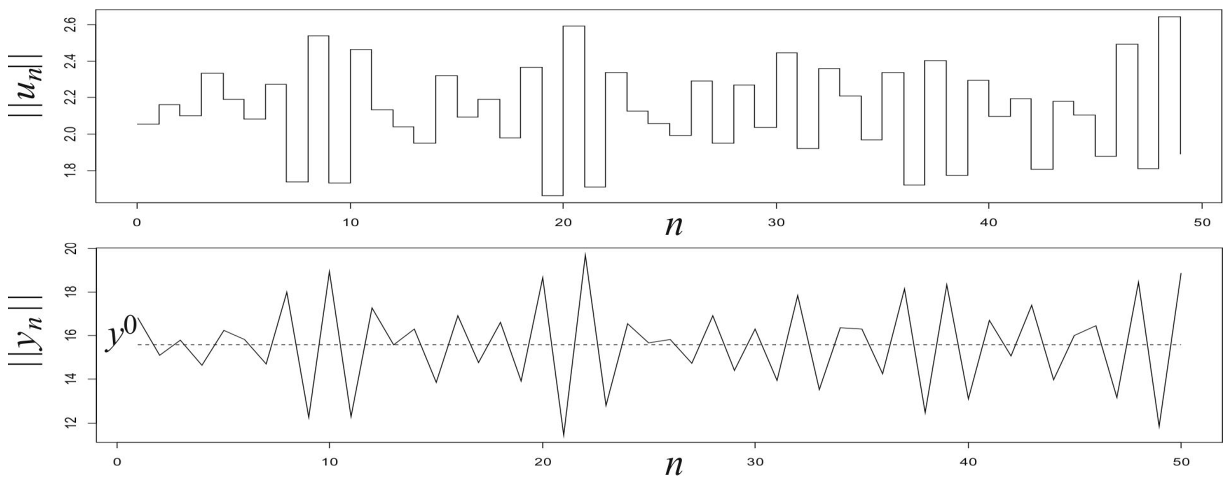


Рис. 2. Динамика процессов управления в условиях примера 2.

4. Адаптивный вариант

4.1. Идея метода адаптивного управления

Основная идея предлагаемого метода состоит в переходе от адаптивной идентификации истинного объекта с вырожденной передаточной матрицей B к адаптивной идентификации другого (воображаемого) объекта с заведомо невырожденной передаточной матрицей

$$(39)\qquad \widetilde{B} = B + \delta_0 I,$$

отличающейся от B своими диагональными элементами на некоторую фиксированную величину δ_0 определенного знака.

Оказывается, что хотя матрица $\widetilde{B}$ так же, как и матрица B, остается неизвестной, но в условиях (3) требование

$$(40)\qquad \det \widetilde{B} \neq 0$$

всегда можно выполнить надлежащим выбором числа δ_0 в (39). В самом деле, каждое i -е собственное значение $\lambda_i(B)$ лежит, как известно [18, с.275], в одной из N замкнутых областей плоскости комплексного переменного λ, образованных кругами Гершгорина

$$(41)\qquad |\lambda - b_{ii}| \le \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} |b_{ik}|, \quad i = 1,\ldots, N.$$

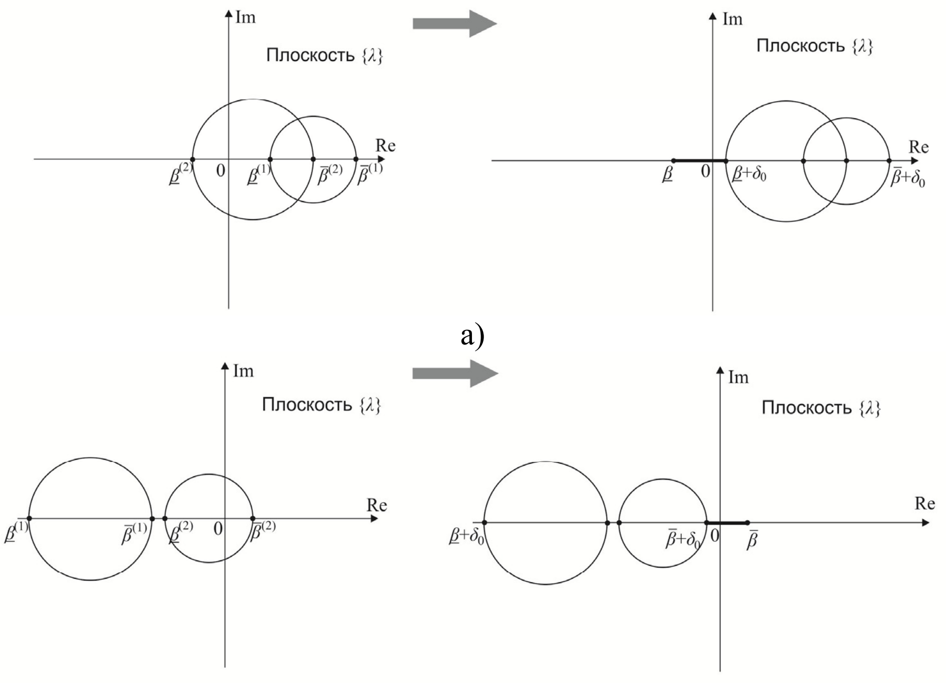
Поскольку же по крайней мере одно из собственных значений матрицы B может быть равно нулю, то согласно (41) хотя бы для одного i числа

$$(42)\qquad \underline{\beta}^{(i)} := b_{ii} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} |b_{ik}|, \quad \overline{\beta}^{(i)} := b_{ii} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} |b_{ik}|,$$

определяющие точки пересечения i-го круга Гершгорина с действительной осью на плоскости $\{\lambda\}$, таковы, что при

$$(43)\qquad |b_{i1}| + \ldots + |b_{iN}| \neq 0$$

или $\underline{\beta}^{(i)} \le 0,$ а $\overline{\beta}^{(i)} > 0,$ или же $\underline{\beta}^{(i)} < 0,$ а $\overline{\beta}^{(i)} \ge 0,$ как показано слева на рис. 3,а и 3,б соответственно (на примере, когда $N = 2$). Но в обоих случаях $\underline{\beta}^{(i)}\,\overline{\beta}^{(i)} \le 0,$ если только выполнено (43): числа $\underline{\beta}^{(i)}$ и $\overline{\beta}^{(i)}$ не могут иметь одинаковый знак.



а)

б)

Рис. 3. Круги Гершгорина при N=2 : а) – в случае $|\underline{\beta}^{(2)}|<|\overline{\beta}^{(1)}|$; б) – в случае $|\overline{\beta}^{(2)}|<|\underline{\beta}^{(1)}|$.

Обозначим

(44) $$\underline{\beta} := \min\{\underline{\beta}^{(1)},\dots,\underline{\beta}^{(N)}\}, \quad \overline{\beta} := \max\{\overline{\beta}^{(1)},\dots,\overline{\beta}^{(N)}\},$$

и рассмотрим следующие возможные случаи: а) $|\underline{\beta}|<|\overline{\beta}|$; б) $|\underline{\beta}|>|\overline{\beta}|$. (Случай, когда $|\underline{\beta}|=|\overline{\beta}|$, может быть присоединен к любому из этих двух случаев.) В случае а) для перехода к передаточной матрице $\widetilde{B}$ воображаемого объекта вида (39) достаточно сдвинуть вправо круги Гершгорина (41) на величину

(45) $$\delta_0 > |\underline{\beta}|$$

(см. рис. 3,а справа). В случае же б) для такого перехода уместно осуществить сдвиг кругов (41) влево на величину

(46) $$\delta_0 < -|\overline{\beta}|$$

(см. рис. 3,б справа). При этом в обоих случаях невырожденность матрицы $\widetilde{B}$ гарантируется. Между тем выбор числа δ_0 в соответствии с соотношениями (45), (46) пока еще не представляется возможным: ведь фигурирующие в них величины $\underline{\beta}, \overline{\beta},$ определяемые выражениями (44) с учетом (42), зависят от элементов b_{ik} матрицы $B,$ а они априори неизвестны. В этой связи для нахождения числа $\delta_0,$ при котором гарантируется выполнение требования (40), предлагается поступить следующем образом.

Определим величины

(47) $$\underline{\beta}_{\min}^{(i)} := \underline{b}_{ii} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \max\{|\,\underline{b}_{ik}\,|, |\,\overline{b}_{ik}\,|\},$$

(48) $$\overline{\beta}_{\max}^{(i)} := \overline{b}_{ii} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \max\{|\,\underline{b}_{ik}\,|, |\,\overline{b}_{ik}\,|\},$$

минимизируя и максимизируя правые части выражений (42) для $\underline{\beta}^{(i)}$ и $\overline{\beta}^{(i)}$ соответственно по всем возможным значениям $b_{ik} \in [\underline{b}_{ik}, \overline{b}_{ik}]$.

Введем далее такие величины:

(49) $$\underline{\beta}_{\min} := \min\{\underline{\beta}_{\min}^{(1)},\ldots,\underline{\beta}_{\min}^{(N)}\}, \quad \overline{\beta}_{\max} := \max\{\overline{\beta}_{\max}^{(1)},\ldots,\overline{\beta}_{\max}^{(N)}\}.$$

Тогда требуемое значение δ_0 должно удовлетворять условиям

(50) $$\delta_0 > -\underline{\beta}_{\min} \text{ при } |\,\underline{\beta}_{\min}\,| < |\,\overline{\beta}_{\max}\,|, \qquad \delta_0 < -\overline{\beta}_{\max} \text{ при } |\,\underline{\beta}_{\min}\,| > |\,\overline{\beta}_{\max}\,|.$$

Можно понять, что при выполнении условий (50) с учетом (47)–(49) требование (40) непременно выполнятся.

После того как определено число δ_0, фигурирующее в выражении (39) передаточной матрицы $\widetilde{B}$ воображаемого объекта, перейдем к рассмотрению самого этого объекта, на входы которого должны поступать те же управляющие воздействия $u_n^{(1)},\ldots,u_n^{(N)}$ и неконтролируемые возмущения (помехи) $v_n^{(1)},\ldots,v_n^{(N)}$, что и на истинный объект. Такое представление позволяет описать воображаемый объект уравнением

(51) $$\widetilde{y}_n = \widetilde{B}u_n + v_n,$$

подобным уравнению (1). В этом уравнении $\widetilde{y}_n = [\widetilde{y}_n^{(1)},\ldots,\widetilde{y}_n^{(N)}]^{\mathrm{T}}$ обозначает вектор выходных переменных воображаемого объекта.

Любопытно, что хотя составляющие вектора v_n в уравнении (51) по-прежнему недоступны измерению, но составляющие вектора $\widetilde{y}_n$ могут быть косвенно измерены. Действительно, подставляя выражение (39) для $\widetilde{B}$ в (51) и учитывая (1), получим

(52) $$\widetilde{y}_n = y_n + \delta_0 I u_n.$$

Как видно из выражения (52), при заданном δ_0 вектор $\widetilde{y}_n$ всегда можно найти по известному u_n и измеренному y_n.

Задача теперь сводится прямо к известной задаче функциональной параметрической идентификации воображаемого объекта, и задаче оценивания уровней возмущений с одновременным управлением по настраиваемой обратной модели применительно к воображаемому объекту (51).

4.2. Процедуры адаптивного оценивания и управления

Согласно [21], закон управления воображаемым объектом (51) а, значит, и истинным объектом (1)) будем строить в форме

(53) $$u_{n+1} = u_n + \widetilde{B}_n^{-1}\widetilde{e}_n,$$

где $\widetilde{B}_n$ – текущая оценка неизвестной матрицы $\widetilde{B}$ в уравнении (51), а

(54) $$\widetilde{e}_n = y^0 - \widetilde{y}_n.$$

Алгоритм адаптивной параметрической идентификации воображаемого объекта определяется далее рекуррентной процедурой

(55) $$\widetilde{b}_n^{(i)} = \widetilde{b}_{n-1}^{(i)} - \gamma_n^{(i)} \frac{f(\widetilde{e}_n^{*(i)}, \varepsilon_{n-1}^{(i)})}{1+\|\nabla u_n\|^2} \nabla u_n \ \mathrm{sign}\ \widetilde{e}_n^{*(i)}, \quad i = 1,\ldots, N,$$

предложенной и обоснованной в [16, п.4.2]. В этом алгоритме $\widetilde{b}_n^{(i)\mathrm{T}} = [\widetilde{b}_{i1}(n),\ldots,\widetilde{b}_{iN}(n)]$ – транспонированная i-я строка матрицы $\widetilde{B}_n$; $\nabla u_n := u_n - u_{n-1}$;

(56) $$f(e, \bar{\varepsilon}) = \begin{cases} 0, & \text{если } |e| \le \bar{\varepsilon}, \\ |e| - \bar{\varepsilon} & \text{при } |e| > \bar{\varepsilon} \end{cases}$$

– функция нечувствительности, зависящая от переменной

(57) $$\widetilde{e}_n^{*(i)} = \nabla \widetilde{y}_n^{(i)} - \widetilde{b}_{n-1}^{(i)\mathrm{T}} \nabla u_n,$$

которая является i-й компонентой вектора $\widetilde{e}_n^{*} = [\widetilde{e}_n^{*(1)},\ldots,\widetilde{e}_n^{*(N)}]^{\mathrm{T}}$, а также от оценки $\varepsilon_n^{(i)}$ неизвестного уровня i-го возмущения, выстроенной на предыдущем шаге; $\gamma_n^{(i)}$ – коэффициент, выбираемый из условий

(58) $$0 < \gamma' \le \gamma_n^{(i)} \le \gamma'' < 2$$

таким образом, чтобы матрица $\widetilde{B}_n$ была невырожденной, т.е. чтобы $\det \widetilde{B}_n \ne 0$ на каждом n-м шаге.

Алгоритм текущего оценивания уровня каждого i-го возмущения, согласно [16, с.118], определяется процедурой

(59) $$\varepsilon_n^{(i)} = \varepsilon_{n-1}^{(i)} + \gamma_n^{(i)} \frac{f(\widetilde{e}_n^{*(i)}, \varepsilon_{n-1}^{(i)})}{1+\|\nabla u_n\|^2}, \quad i = 1,\ldots, N.$$

Замечание 3. Функция нечувствительности $f(e, \bar{\varepsilon})$ вида (56), которая показана на рис. 4, отличается от функции нечувствительности, предложенной в [23], тем, что она неотрицательна; при этом сам размер ее зоны нечувствительности, определяемый числом $\bar{\varepsilon}$, изменяется с течением времени в зависимости от изменения текущей оценки уровня соответствующего возмущения (это принципиальный момент).

Комментарий. Как видно, при адаптивном оценивании строк неизвестной матрицы $\widetilde{B}$ с использованием рекуррентной процедуры (55) на каждом n-м шаге используются текущие оценки $\varepsilon_{n-1}^{(i)}$ неизвестных уровней возмущений, формируемые процедурой (59). Особенность же самой процедуры (59) состоит в том, что последовательности оценок $\{\varepsilon_n^{(i)}\}$ $(i = 1,\ldots, N)$, которые формируются этой процедурой, являются неубывающими (в силу неотрицательности функции $f(e, \bar{\varepsilon})$).

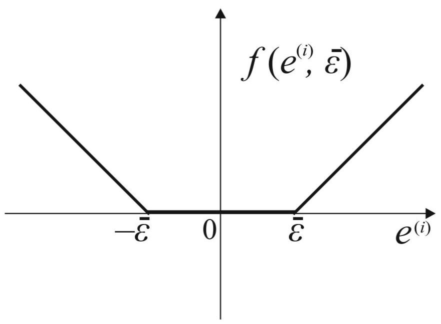


Рис. 4. Функция нечувствительности вида (56).

Асимптотические свойства построенных алгоритмов адаптивного оценивания устанавливает

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения* (3), (4), *а также дополнительное предположение* (43). *Рассмотрим замкнутую систему управления объектом* (1), *содержащую в контуре обратной связи регулятор* (53), (54) *и идентификатор, реализующий алгоритм адаптации* (55)-(59), *в котором последовательности* $\{\gamma_n^{(i)}\}$ *выбираются из условия* (58) *таким образом, чтобы выполнить требование* $\det \widetilde{B}_n \neq 0$. *Примем* $\varepsilon_0^{(i)} = 0$ *для всех* $i = 1, \ldots, N$ *и выберем любую начальную оценку* $\widetilde{B}_0 = B_0 + \delta_0 I$ *из условий* $\underline{b}_{ik} \leq b_{ik}(0) \leq \bar{b}_{ik}$.

Тогда:

i) *последовательность* $\{\widetilde{B}_n\} := \widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \ldots$, *порожденная процедурой* (55)-(58), *сходится:*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{B}_n = \widetilde{B}_\infty;$$

ii) *последовательности оценок* $\{\varepsilon_n^{(i)}\} = \varepsilon_0^{(i)}, \varepsilon_1^{(i)}, \ldots$ *порожденных процедурой* (59), *сходятся:*

$$\lim_{n\to\infty} \{\varepsilon_n^{(i)}\} = \varepsilon_\infty^{(i)},\ i = 1, \ldots, N;$$

iii) *система управления диссипативна* (*по состоянию*).

Доказательство. Справедливость положений i) и ii) прямо следует из результатов, полученных в [16, п.4.2]. Техника доказательства существенно использует тот факт, что последовательности функций

(60) $$V^{(i)}(n) = V_{\widetilde{b}}^{(i)}(n) + V_{\varepsilon}^{(i)}(n),$$

где

$$V_{\widetilde{b}}^{(i)}(n) := \| \widetilde{b}^{(i)} - \widetilde{b}_n^{(i)} \|^2,\ V_{\varepsilon}^{(i)}(n) := \| 2\varepsilon - \varepsilon_n^{(i)} \|^2,$$

а $\widetilde{b}^{(i)} = [\widetilde{b}_{i1}, \ldots, \widetilde{b}_{iN}]^{\mathrm{T}}$, являются невозрастающими неотрицательным функциям от n и выступают как функции Ляпунова алгоритма (55), (59).

Доказательство положения iii) основано на установленном в [16, п.4.2]. свойстве ограниченности последовательностей $\{\widetilde{y}_n^{(i)}\}$ выходных величин объекта, описываемого уравнением (51). В силу этого свойства имеем

(61) $$\limsup_{n\to\infty} \| \widetilde{y}_n \| < \infty.$$

Подстановка (51) в (61) позволяет записать

$$\limsup_{n\to\infty} (\widetilde{B}u_n + v_n) < \infty.$$

Поскольку же $\{v_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \cdots \times \ell_\infty}_{N})$, а $\widetilde{B}$ – невырожденная матрица, то из этого соотношения следует, что $\{u_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \cdots \times \ell_\infty}_{N})$. Отсюда в силу ограниченности $\{v_n\}$ вытекает ограниченность $\{y_n\}$. А это в конечном счете доказывает справедливость положения iii) теоремы. Теорема доказана.

Положение iii) теоремы 5 показывает, что алгоритм робастного адаптивного управления, описываемый уравнениями (53) – (59), позволяет решить поставленную задачу: требование (7) может быть выполнено при любой начальной неопределенности относительно множества Ω матриц B и неизвестных уровнях ε_i возмущений.

4.3. Модельный эксперимент

Рассмотрим один числовой пример, результаты которого необходимы для задания числа δ_0 (перед проведением модельного эксперимента).

Пример 3. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \det B = 0.$$

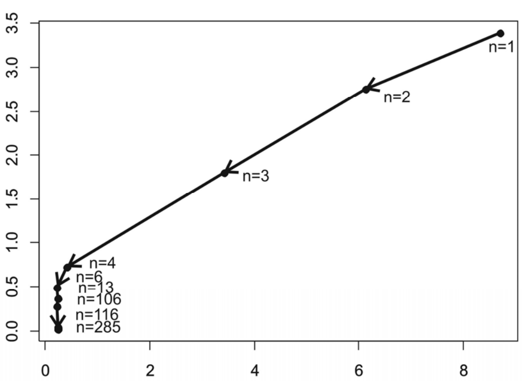
Пусть далее заданы такие априорные оценки (3) элементов матрицы B: $1 \le b_{11} \le 5$, $0 \le b_{12} \le 2$, $0 \le b_{21} \le 2$, $1 \le b_{22} \le 2$.

По формулам (47)-(49) последовательно найдены величины $\underline{\beta}_{\min}^{(1)} = -1$, $\underline{\beta}_{\min}^{(2)} = -1$, $\overline{\beta}_{\max}^{(1)} = 7$, $\overline{\beta}_{\max}^{(2)} = 4$, $\underline{\beta}_{\min} = -1$, $\overline{\beta}_{\max} = 7$. Поскольку в данном эксперименте так оказалось, что $|\underline{\beta}_{\min}| < |\overline{\beta}_{\max}|$, то согласно (50) должно быть $\delta_0 > 1$. Поэтому было принято $\delta_0 = 1{,}1$.

Для проверки работоспособности и эффективности предложенного метода адаптивной параметрической идентификации проводилось моделирование системы (1), (53)-(57). При проведении эксперимента положено $y^0 = [1, 3]^{\mathrm{T}}$. Из условий $b_{11}(0) \in [1, 5]$, $b_{12}(0) \in [0, 2]$, $b_{21}(0) \in [0, 2]$, $b_{22}(0) \in [1, 2]$ были взяты такие оценки элементов B_n : $b_{11}(0) = 1, b_{12}(0) = 1, b_{21}(0) = 0$, $b_{22}(0) = 1{,}9$; при этом $\widetilde{b}_{11}(0) = 2{,}1$, $\widetilde{b}_{12}(0) = 1$, $\widetilde{b}_{21}(0) = 0$, $\widetilde{b}_{22}(0) = 3$. Последовательности $\{v_n^{(i)}\}$ $(i = 1, 2)$ генерировалась как последовательности независимых равномерно распределенных в интервалах $[-1, 1]$, $[-0{,}5, 0{,}5]$ псевдослучайных чисел.

Результаты проведенного эксперимента представлены на рис. 5 – 9.

Как видно из рис. 5, с течением времени всякий раз, когда происходит уточнение оценок $\widetilde{b}_n^{(i)}$ и $\varepsilon_n^{(i)}$, функции Ляпунова $V^{(i)}(n)$, определяемые согласно (60) квадратом расстояния точек годографа $\{V_{\widetilde{b}}^{(i)}(n), V_{\varepsilon}^{(i)}(n)\}$ от начала координат, уменьшаются. При этом сами оценки $\widetilde{b}_{11}(n), \widetilde{b}_{12}(n), \widetilde{b}_{21}(n), \widetilde{b}_{22}(n)$, $\varepsilon_n^{(i)}$ в процессе адаптации стабилизируются (см. рис. 6,7). Рис. 8, 9 наглядно демонстрирует установленное в теореме 1 свойство iii) ограниченности $\{u_n\}$ и $\{y_n\}$.



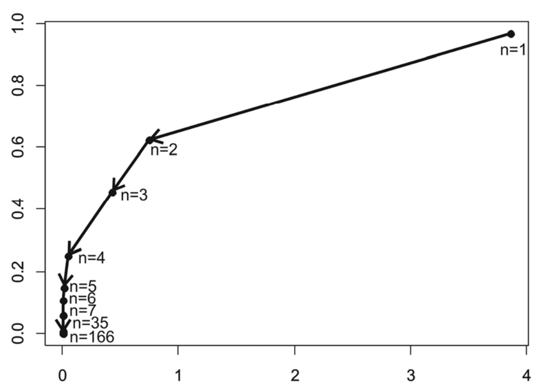


Рис. 5. Процессы адаптивного оценивания неизвестных параметров воображаемого объекта и уровней возмущений.

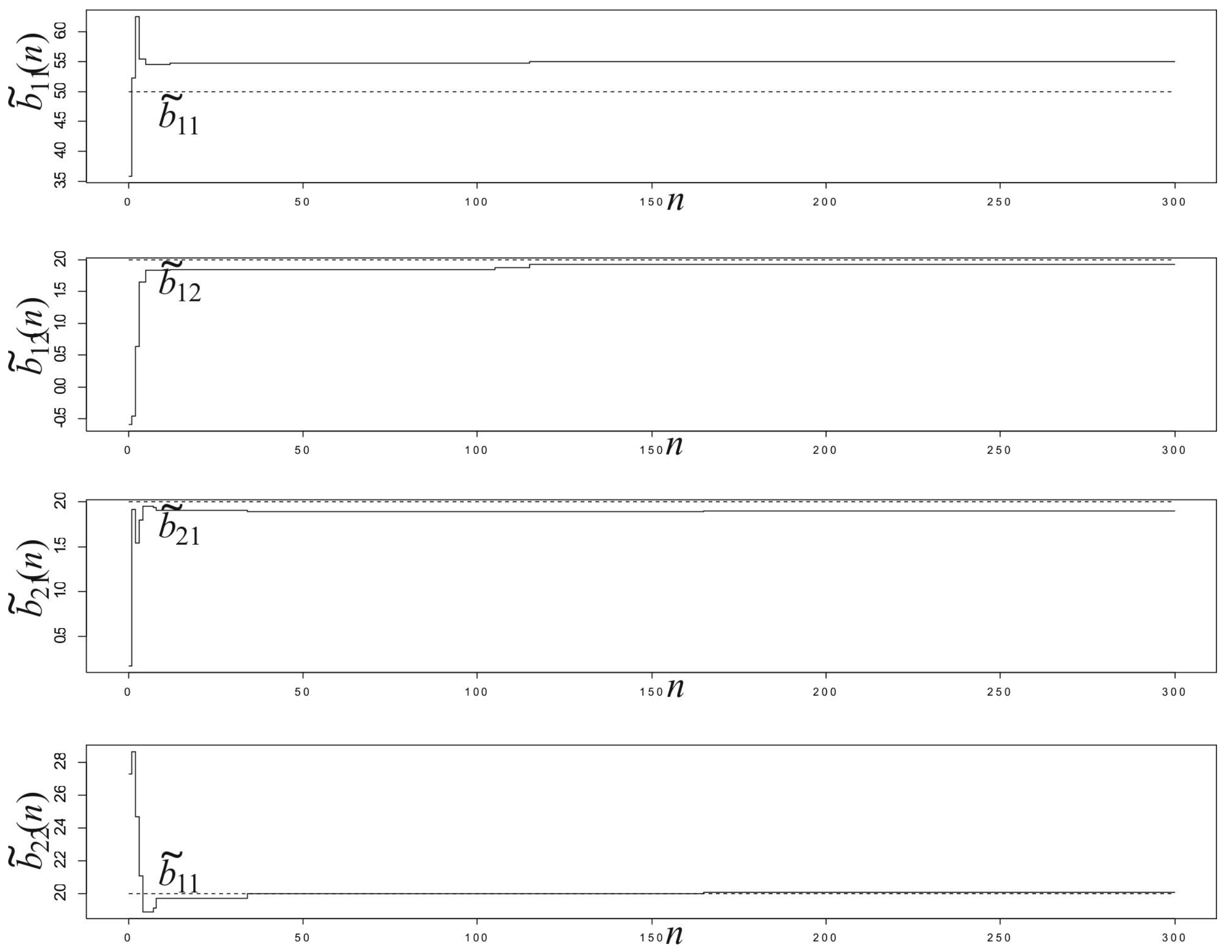


Рис. 6. Оценки $\tilde{b}_{11}$, $\tilde{b}_{12}$, $\tilde{b}_{21}$, $\tilde{b}_{22}$.

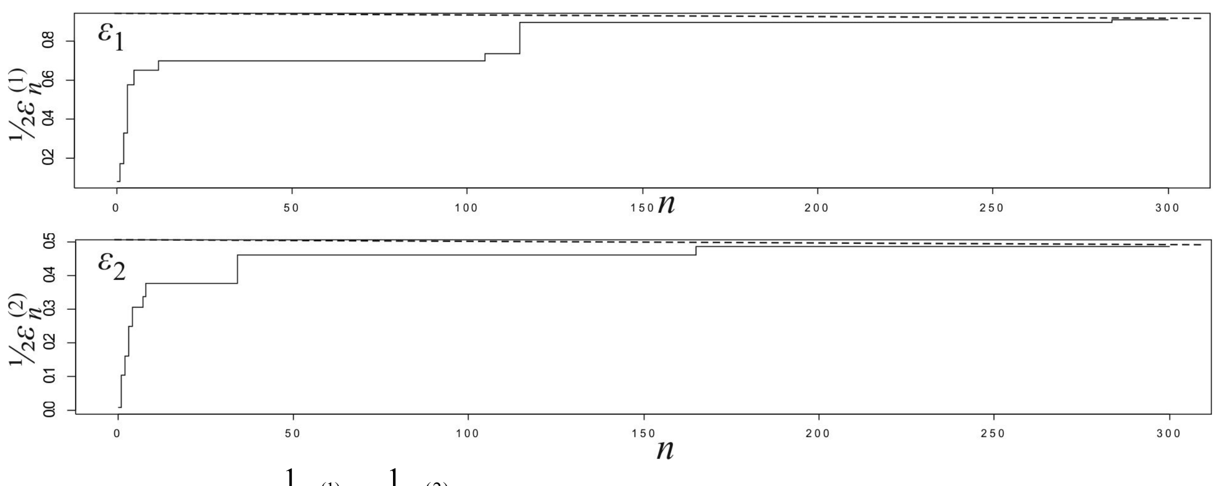


Рис. 7. Оценки $\frac{1}{2}\varepsilon_n^{(1)}$ и $\frac{1}{2}\varepsilon_n^{(2)}$.

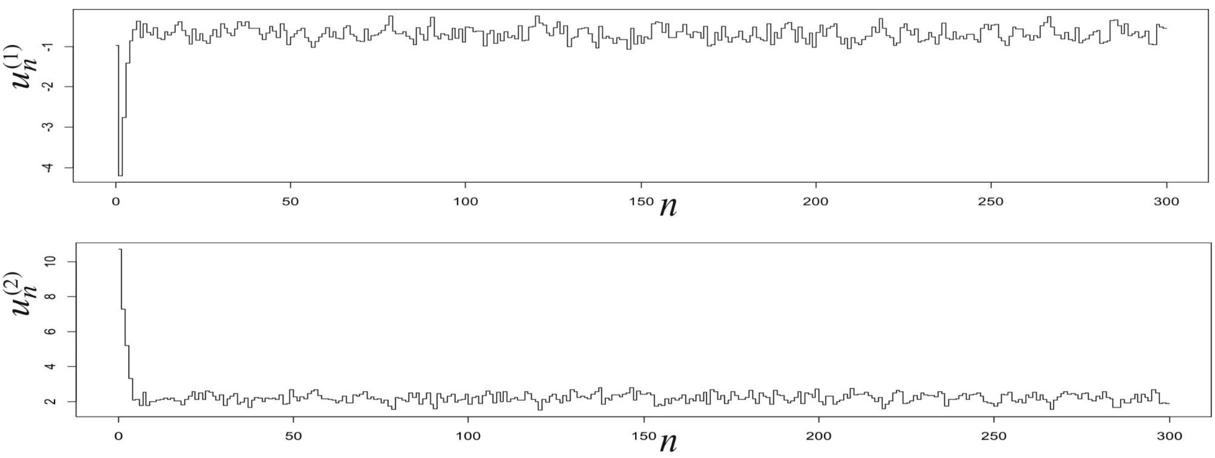


Рис. 8. Управляющие воздействия $u_n^{(1)}$ и $u_n^{(2)}$.

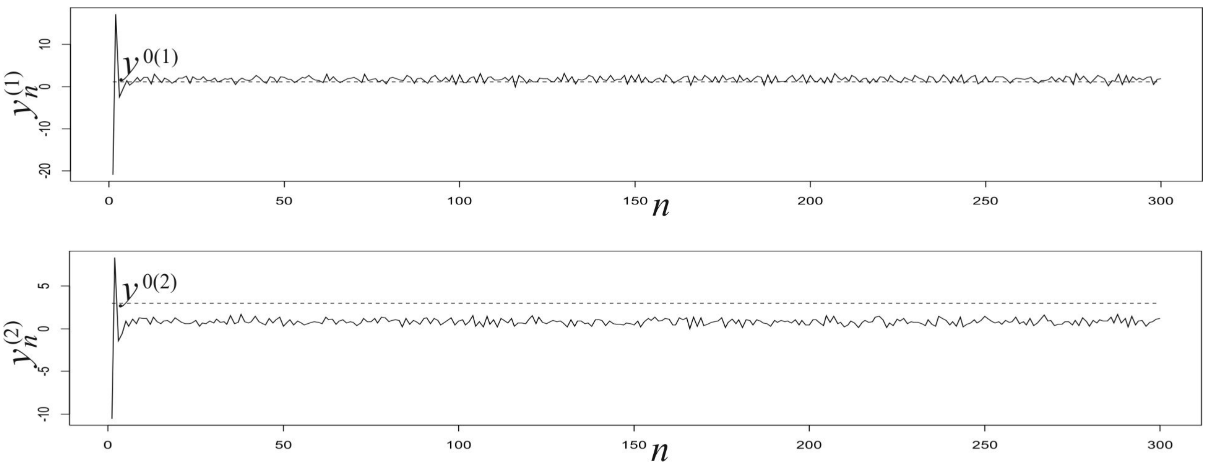


Рис. 9. Выходные переменные $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$.

5. Заключение

При определенных ограничениях, налагаемых на множество возможных наборов значений элементов передаточной матрицы многосвязного статического объекта, можно обеспечить робастность замкнутой системы управления по некоторой фиксированной обобщенной обратной модели этого объекта даже в том случае, когда эта матрица, оставаясь неизвестной, является вырожденной. Использование предложенного алгоритма адаптивного оценивания неизвестных параметров некоторого воображаемого объекта и алгоритма адаптивного оценивания неизвестных уровней возмущений позволяет в принципе осуществлять робастное управление таким объектом при наличии любых нестохастических неопределенностей.

Список литературы

1. Ли Т.Г., Адамс Г.Э., Гейнз У.М. Управление процессами с помощью вычислительных машин. Моделирование и оптимизация. М.: Советское радио, 1972. 312 с.
2. Катковник В.А. Градиентные законы управления в задачах стабилизации многомерных систем управления // Теория и методы построения систем многосвязного регулирования. М.: Наука, 1973. С. 84-93.

3. Пухов Г.Е., Жук К.Д. Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов. Киев: Наукова думка, 1966. 218 с.
4. Костенко Ю.Т., Любчик Л.М. Системы управления с динамическими моделями. Харьков: Основа, 1996. 212 с.
5. Скурихин В. И., Проценко Н. М., Житецкий Л. С., Потапова Т. П. Об оценке допустимой неадекватности модели объекта при построении системы управления технологическим процессом по методу обратного оператора // Электронное моделирование. 1982. № 6. С. 11-16.
6. Бунич А.Л. О некоторых нестандартных задачах синтеза дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. № 6. С. 114-123.
7. Skogestad S., Morari M., Doyle J. Robust Control of Ill-Conditioned Plants: High Purity Distillation // IEEE Transactions on Automatic Control. 1988. Vol. AC-33, No. 12. P. 1092-1105.
8. Скурихин В.И., Житецкий Л.С., Соловчук К.Ю. Управление многосвязными объектами с вырожденными и плохо обусловленными передаточными матрицами на основе метода псевдообратного оператора // Управляющие системы и машины. 2013. №3. С. 14-20, 29.
9. Azarskov V.N., Zhiteckii L.S., Solovchuk K.Yu. Discrete-time control of linear multivariable systems with either singular or ill-conditioned transfer function matrices // Proceedings of the National Aviation University. 2014. № 2. С. 19-27.
10. Скурихин В.И., Гриценко В.И., Житецкий Л.С., Соловчук К.Ю. Метод обобщенного обратного оператора в задаче оптимального управления линейными многосвязными статическими объектами // Доклады НАН Украины. 2014. № 8. С. 57-66.
11. Zhiteckii L.S., Azarskov V.N., Solovchuk K.Yu., Sushchenko O.A. Discrete-time robust steady-state control of nonlinear multivariable systems: a unified approach // IFAC-PapersOnLine. ISSN: 1474-6670. 2014. Vol. 20 | Part# 1. World Congress. P. 8140-8145.
12. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Адаптивные модели в системах управления. М.: Сов. радио, 1966. 159 с.
13. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.
14. Goodwin G. C., Sin K. S. Adaptive Filtering, Prediction and Control. NJ.: Prentice-Hall, 1984. 540 p.
15. Азарсков В.Н., Блохин Л.Н., Житецкий Л.С., Куссуль Н.Н. Робастные методы оценивания, идентификации и адаптивного управления. Киев: НАУ, 2004. 500 с.
16. Житецкий Л.С., Скурихин В.И. Адаптивные системы управления с параметрическими и непараметрическими неопределенностями. Киев: Наук. думка, 2010. 301 с.
17. Чернышев К.Р. Об одном алгоритме рекуррентной параметрической идентификации. Труды ИПУ РАН. Том XIII. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2001. С. 39-46.
18. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
19. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наук. думка, 2006. 264 с.
20. Соколов В.Ф. Робастное управление при ограниченных возмущениях. Сыктывкар, 2011. 218с.
21. Азарсков В.Н., Житецкий Л.С., Соловчук К.Ю. Параметрическая идентификация многосвязного статического объекта в замкнутом контуре управления: специальный случай // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г. Труды. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 2764-2776.
22. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
23. Бунич А.Л. Быстросходящийся алгоритм идентификации линейного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика. 1983. №8. С. 101-107.