Міністерство освіти і науки України
Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка
Кафедра автомобільних доріг, геодезії, землеустрою
та сільських будівель

ЩЕПАК В.В.
КАРЮК А.М.
ТИМОШЕВСЬКИЙ В.В.

Економіко-математичні методи і моделювання у землеустрою

Навчальний посібник

Полтава 2019

УДК 332.334

Рецензенти:

Гришко В.В. - д.е.н., професор, директор навчально-наукового інституту фінансів, економіки та менеджменту ПолтНТУ;

Косик А.І. – заступник начальника – начальник Управління з контролю за використанням та охороною земель головного управління Держгеокадастру у Полтавській області.

Затверджено науково-методичною радою Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка (протокол № __ від ________2019 р.)

Економіко-математичні методи і моделювання в землеустрої – навч. посібн. / В.В. Щепак, А.М. Карюк, В.В. Тимошевський. – Полтава: ПолтНТУ, 2019. – 134 с.

В навчальному посібнику розглянуто теоретичні основи оптимізаційних задач та особливості застосування економіко-математичних методів і моделювання в землеустрої. Розкрито сутність симплексного методу розв'язання задач оптимізації, зокрема, побудову симплекс-таблиць з переходом до оптимального плану. Розглянуто графічний метод розв'язання задач оптимізації в землеустрої. Розкрито сутність транспортної задачі за критерієм вартості перевезення та розглянуто приклад формування планів перевезення кормів. Розглянуто особливості використання методу розгалужень і меж у землеустрої та алгоритм пошуку найкоротшого шляху мережі. Також розглянуто задачі оптимізації в умовах ризику та невизначеності. Розглянуті статистичні методи обробки інформації в землеустрої, зокрема, методи кількісного та якісного аналізу інформації.

Рекомендується для студентів спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» при вивченні дисципліни «Економіко-математичні методи і моделювання в землеустрої».

УДК 332.334

ЗМІСТ

ВСТУП

У ринкових умовах ефективне господарювання й управління виробничою діяльністю на будь-якому рівні в будь-якій галузі не можливі без використання сучасних методів планування й організації, основою яких є відповідний математичний апарат.

Поєднання математичних методів та економічного аналізу відкриває нові можливості для економічної науки та практики. Все це, безумовно, сприятиме високій фаховій підготовці спеціалістів і гарантуватиме їм подальше практичне використання їх знань і навичок.

Мета дисципліни полягає у вивченні теоретичних питань економіко-математичних методів і моделювання та практичного їх застосування при вирішенні задач землеустрою, а саме, у проведенні основного і поточного обліку земель; розподілу земель за формами власності, оптимізації територіального розташування об’єктів, тощо.

Завданнями вивчення дисципліни «Економіко-математичні методи і моделювання в землеустрої» є формування знань та умінь вирішувати задачі землеустрою на основі математичних методів моделювання та оптимізації комплексу робіт.

До економіко-математичних методів оптимізації відносяться симплексний метод, двоїстий метод, транспортна задача, метод гілок і меж, графи, методи оптимізації територіального розміщення об’єктів та ін.

ТЕМА 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ У ЗЕМЛЕУСТРОЇ

Процеси, які проходять у землеустрої, досить складні, їх поточний стан і перебіг в часі визначаються сукупністю багатьох чинників (факторів). Для об'єктивної оцінки впливу цих факториів у землеустрої необхідно розглядати кількісні виміри діючих чинників та описувати їх взаємозв'язки аналітичними залежностями. З цією метою використовуються математичні методи і моделювання. Чинники, вибрані для моделі за умови використання кількісної міри, називаються параметрами моделі.

Під моделюванням розуміють сукупність математичних залежностей, за допомогою яких описується взаємозв'язок між параметрами та змінними, вибраними для дослідження властивостей об'єкта або процесу. Процес розбудови моделі називається моделюванням.

Переважна кількість проблем і задач практичної діяльності пов'язана з керованими процесами, тобто процесами, перебіг яких певною мірою обумовлений прийнятими рішеннями та заходами по їх втіленню. Обґрунтуванню рішень передує аналіз умов функціонування досліджуваного об'єкта або процесу у землеустрої.

Доцільно виділити клас практично значимих оптимізаційних моделей з використанням аналітичного апарату функцій кількох змінних на основі використання математичного програмуваня, яке займається вивченням екстремальних задач і розробкою методів їх розв'язання.

1.1. Математичне програмування

Доцільно виділити клас практично значимих оптимізаційних моделей з використанням аналітичного апарату функцій кількох змінних при розбудові ММ відповідної операції. Методи розв'язання відповідних задач об'єднані в розділ математики, який називається математичним програмуванням.

Моделювання операцій планування й управління, в яких доцільно користуватися математичним апаратом функцій багатьох змінних, незважаючи на їх розмаїття, має спільний стрижень. По-перше, має бути побудована цільова функція (функція цілі) – оцінка за певним критерієм якості кожного можливого варіанта реалізації плану управління перебігом досліджуваного процесу. По-друге, необхідно враховувати, що можливості впливу на перебіг будь-якого процесу або явища завжди обмежені обсягом наявних ресурсів та іншими чинниками.

Математично такі обмеження формулюються як вимоги виконання системи певних рівнянь і нерівностей для можливих значень змінних, використовуваних у моделі. У загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого або найменшого значення цільової функції $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ за умов $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\left\{\begin{matrix}\le\\=\\\ge\end{matrix}\right\}b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$, де F і g_i – задані функції, а b_i дійсні числа.

Функція $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається цільовою, а умови $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\left\{\begin{matrix}\le\\=\\\ge\end{matrix}\right\}b_i$ – обмеженнями задачі.

Задачі математичного програмування застосовують у різних галузях людської діяльності, зокрема в землеустрої.

1.2. Класифікація задач математичного програмування

У математичному програмуванні можна виділити два напрями. До першого напрямку належать детерміновані задачі, в яких вся вхідна інформація є повністю визначеною; до другого – задачі, в яких вхідна інформація має елементи невизначеності, або деякі параметри яких носять випадковий характер з відомими ймовірнісними характеристиками.

У першому напрямку в залежності від властивостей функцій F і g_i математичне програмування можна розглядати як ряд самостійних дисциплін, які займаються вивченням і розробкою методів розв’язання певних класів задач.

Перш за все математичне програмування ділиться на задачі лінійного та нелінійного програмування. При цьому якщо всі функції F і g_i лінійні, то відповідна задача є задачею лінійного програмування. Якщо ж хоча б одна із указаних функцій нелінійна, то відповідна задача є задачею нелінійного програмування.

Нелінійне програмування має такі підрозділи:

– опукле програмування – цільова функція опукла (якщо мінімізується) і угнута (якщо вона максимізується), а множина, на якій розв’язується екстремальна задача, – опукла;

– квадратичне програмування – цільова функція квадратична, а обмеження лінійні (рівняння або нерівності).

Окремими класами математичного програмування є задачі цілочисельного і дробово-лінійного програмування. В задачах цілочисельного програмування змінні можуть приймати тільки цілочисельні значення. В задачах дробово-лінійного програмування цільова функція зображується як відношення двох лінійних функцій, а система обмежень є лінійною.

Деякі задачі в ринковій економіці пов’язані з неповною або недостовірною інформацією. Для окремих задач подібного типу можна указати ймовірнісні характеристики параметрів цільової функції й обмежень. Такі задачі дістали назву задач прийняття рішень в умовах ризику.

1.3. Особливості застосування математичного програмування

Багато задач зв’язано з розподілом обмежених ресурсів (сировини, робочої сили, енергії, палива і т.ін.). Часто розподіл ресурсів можна виконати не одним способом. Наприклад, продукцію певного виду можна одержати різними способами вибираючи різні технологію, сировину, обладнання, організацію виробництва. При цьому природним є бажання – знайти такий варіант застосування ресурсів, який гарантував би найбільший економічний ефект. Виробництво продукції, яке може дати найбільший ефект, називається оптимальним планом виробництва, для знаходження якого й застосовуються методи математичного програмування.

Кожну конкретну задачу необхідно підготувати для подальшої обробки – сформулювати математично, тобто побудувати математичну модель.

Побудова математичної моделі – складний процес, в якому можна виділити чотири основних етапи, На першому етапі необхідно визначити найважливіші фактори та взаємозв’язки міх ними. Цей етап визначає економічну постановку задачі.

Другий етап пов’язаний саме з побудовою математичної моделі – системи математичних і логічних виразів, які описують характеристики задачі і взаємозв’язки між ними. До складу моделі входять співвідношення, що виражають специфічні умови, яким має задовольняти розв’язок даної задачі.

На третьому етапі необхідно дослідити вплив змінних на значення цільової функції, оволодіти математичним апаратом для розв’язання математичних задач, що їх побудовано на другому етапі; користуючись математичним апаратом, знайти розв’язок.

На четвертому етапі аналізують одержані результати розв’язування і виявляють міри адекватності моделі об’єкта, що моделюється.

1.4. Основні поняття та визначення лінійного програмування

Визначення 1. Задача, в якій треба знайти найбільше (найменше) значення функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,k}; \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = \overline{k+1,l}; \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{l+1,m}; \tag{1.4}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,s}, \quad (s \le n), \tag{1.5}$$

де a_{ij}, b_i, c_j, $b_i \ge 0, i = \overline{1,m}$ – задані сталі величини, має назву загальної задачі лінійного програмування .

Визначення 2. Функція (1.1) називається цільовою функцією задачі (1.1)–(1.5).

Визначення 3. Умови (1.2)–(1.5) мають назву обмежень задачі (1.1) – (1.5).

Визначення 4. Симетричною (або стандартною) задачею лінійного програмування називається задача відшукання найбільшого значення цільової функції (1) при виконанні умов (2) та (5), де k=m і s=n, тобто, це задача вигляду

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = \overline{1,m};$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Визначення 5. Канонічною (або основною) задачею лінійного програмування називається задача відшукання найбільшого значення цільової функції (1) при виконанні умов (4) та (5) з додатними вільними членами b_i у системі обмежень, де l=0 і s=n. Іншими словами, канонічна задача лінійного програмування має вигляд

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1,m};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n},$$

де $b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$.

Симетрична та канонічна задачі лінійного програмування є частинними випадками загальної задачі лінійного програмування.

Визначення 6. Упорядкований набір чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, котрі задовольняють усі обмеження задачі (1)–(5), має назву допустимого розв'язку цієї задачі (або плану).

Визначення 7. Оптимальним розв’язком задачі (1)–(5) називається такий допустимий розв’язок $X^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$ цієї задачі, при якому цільова функція (1) приймає найбільше (найменше) значення.

1.5. Перехід від однієї форми задачі лінійного програмування до іншої

При переході від однієї форми запису задачі лінійного програмування до іншої потрібно, в загальному випадку, уміти зводити задачу мінімізації до задачі максимізації, переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей, замінювати змінні, на які не накладена умова невід’ємності на невід’ємні змінні.

Якщо треба знайти мінімум функції $F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, то можна перейти до знаходженн максимуму функції $F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$, оскільки $\min F = -\max(-F)$.

Обмеження-нерівность вихідної задачі вигляду "$\le$" можна перетворити в обмеження-рівність шляхом додавання до його лівої частини додаткової невід'ємної змінної, а обмеження-нерівність "$\ge$" – шляхом віднімання від його лівої частини додаткової невід'ємної змінної.

Додаткові змінні, котрі при цьому вводяться, мають цілком визначений економічний зміст. Так, якщо в обмеженнях вихідної задачі відображаються витрати і наявність ресурсів, то числове значення додаткових змінних в плані задачі, записаній у канонічній формі, дорівнює обсягу невикористаного відповідного ресурсу. (Більш детально про це буде йти мова при розгляді симплексного методу розв'язання задач лінійного програмування).

Кожне рівняння системо обмежень вигляду $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$ можна записати у вигляді системи нерівностей

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n \le -b_i. \end{cases}$$

Якщо на змінну x_k не накладена умова невід'ємності, то цю змінну замінюємо двома невід'ємними змінними, поклавши, наприклад,

$$x_k = x_k' - x_k''.$$

Приклад 1. Звести наступну задачу лінійного програмування до канонічної форми.

$$\boldsymbol{F = x_1 + 2x_2 \to max};$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Розв’язання.

Спочатку перетворимо обмеження-нерівності в обмеження-рівності.

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow max\ ;$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки в умові вихідної задачі на змінну x_2 не накладена умова невід’ємності, то цю змінну замінимо двома невід’ємними змінними, поклавши $x_2 = x_2' - x_2''$. Отже, канонічна форма даної задачі має вигляд

$$F = x_1 + 2x_2' - x_2'' \rightarrow max\ ;$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2' + x_2'' - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2' + x_2'' + x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x'' \geq 0,_2 x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте сутність моделювання операцій планування й управління.

2. Основні ознаки напрямів математичного програмування.

3. Охарактеризуйте особливості застосування математичного програмування

4. Що є основною при вирішенні задач лінійного програмування.

5. Що необхідно здійснити при переході від однієї форми запису задачі лінійного програмування до іншої.

ТЕМА 2. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЗЕМЛЕУСТРОЇ

2.1. Поняття опуклої множини точок

Визначення 1. Множина точок називається опуклою, якщо разом з будь-якими двома її точками вона містить і всі точки відрізка, що сполучає ці точки. Приклади опуклих та не опуклих множин наведені на рисунку 2.1.

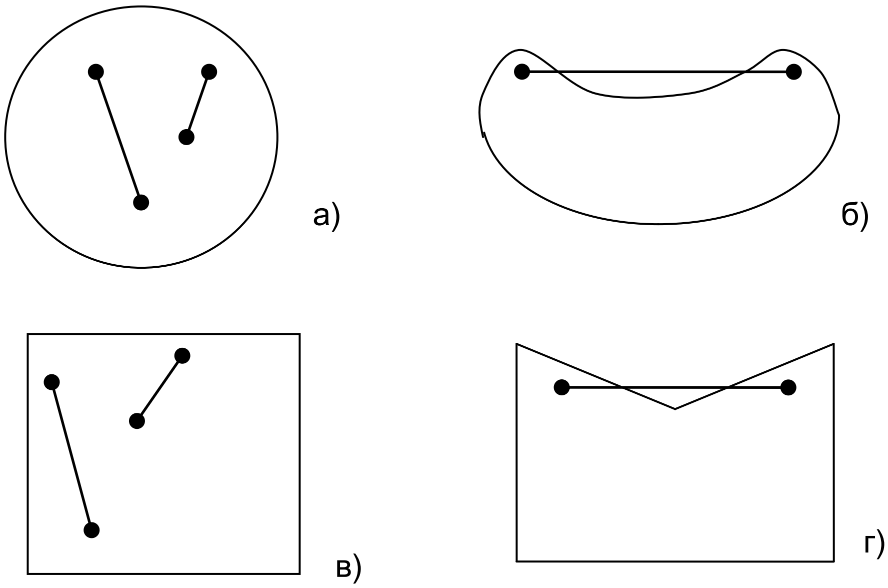


Рис. 2.1. Множини а), в) − опуклі;   б), г) − не опуклі.

Визначення 2. Точка А опуклої множини точок називається кутовою, якщо вона не може бути внутрішньою точкою жодного відрізка, який проходив би через цю точку і повністю належав би цій множині.

Визначення 3. Опуклим багатогранником називається опукла замкнена обмежена множина, яка має скінченну кількість кутових точок. Ці точки називаються вершинами багатогранника.

Нагадаємо, що система векторів $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_n$ називається лінійно незалежною, якщо рівність

$$x_1\boldsymbol{P}_1 + x_2\boldsymbol{P}_2 + ... + x_n\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{0}, \tag{2.1}$$

виконується тоді й тільки тоді, коли всі $x_j, j=\overline{1,n}$ дорівнюють нулю.

Так, наприклад, вектори $P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ є лінійно незалежними у тривимірному евклідовому просторі. Ці вектори називаються базисними. Будь-який вектор Р даного простору можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів, тобто записати

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 = P, \tag{2.2}$$

де не всі значення $x_j, j=\overline{1,3}$ дорівнюють нулю.

2.2. Деякі властивості розв'язків задач лінійного програмування

Нехай задача лінійного програмування, записана в канонічній формі

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max, \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}. \end{cases}, \tag{2.4}$$

Запишемо цю задачу у векторній формі: знайти максимум функції

$$F = CX, \tag{2.5}$$

за умов

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_nP_n = P_0, \tag{2.6}$$

$$X \ge 0$$

$C=(c_1, c_2, ..., c_n)$, $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, CX – скалярний добуток, $P_1, P_2, ..., P_n, P_0$ – m-вимірні вектори-стовпці, складені із коефіцієнтів при невідомих і вільних членів системи обмежень задачі:

$$P_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots\dots \\ b_m \end{pmatrix},\quad P_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots\dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots\dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots,\quad P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots\dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2.7)$$

Визначення 4. План $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається опорним планом основної задачі лінійного програмування, якщо система векторів P_j, які входять в рівність (*) з додатними коефіцієнтами x_j лінійно незалежна.

Оскільки вектори P_j m-вимірні, то із визначення опорного плану випливає, що кількість його додатних компонент не може бути більшим, ніж число m.

Визначення 2. Опорний план називається невиродженим, якщо він містить рівно m додатних компонент, у іншому випадку він називається виродженим.

Теорема 1. Якщо система векторів $P_1, P_2, ..., P_k\ (k \le n)$ у рівності (*) лінійно незалежна й така, що

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_kP_k = P_0, \qquad (2.8)$$

де всі $x_j \ge 0$, то точка $X=(x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$, є вершиною багатогранника розв'язків.

Теорема 2. Якщо $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, – вершина багатогранника розв'язків, то вектори P_j, котрі відповідають додатним x_j у формулі (*) лінійно незалежні.

Отже, множина планів основної задачі лінійного програмування (якщо вона не порожня) утворює опуклий багатогранник. Кожна вершина цього багатогранника визначає опорний план. В одній із вершин багатогранника розв'язків цільова функція досягає максимального значення (за умови, що функція на множині планів обмежена зверху). Якщо екстремального значення цільова функція задачі досягає в кількох вершинах одночасно, то вона досягає його в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією цих точок.

Нагадаємо, що опуклою комбінацією точок $X_1, X_2, ..., X_k$ називається сума $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_k X_k$, де α_j–довільні невід'ємні числа, сума яких дорівнює одиниці.

Наприклад, опуклою лінійною комбінацією двох точок X_1 та X_2 є довільна точка $X = (1-\lambda) X_1 + \lambda X_2$, де $0 \le \lambda \le 1$. При різних значеннях λ ця точка є точкою, яка належить відрізку $[X_1, X_2]$.

Можна показать, що опуклою лінійною комбінацією трьох точок, що не лежать на одній прямій, є довільна точки площини, обмеженої трикутником, вершинами якого є задані точки, і т.д.

2.3. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Розглянемо на площині x_1Ox_2 сумісну систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \quad (2.9)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Кожна нерівність цієї системи геометрично визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i=1,2, ..., т). Умови невід'ємності змінних визначають півплощини з граничними прямими $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$. Якщо система сумісна, то півплощини, як опуклі множини, перетинаючись, утворюють спільну частину, що є опуклою множиною і є сукупністю точок, координати кожної з яких є розв'язком даної системи (рис. 2.2).

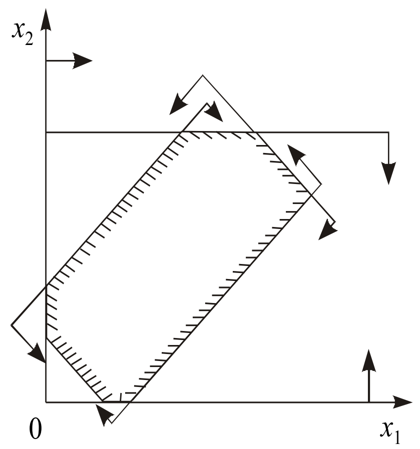


Рис. 2.2. Площина розв'язків

Сукупність цих точок і є багатогранником розв'язків, або областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування. В загальному випадку це може бути точка (єдиний розв'язок), відрізок, промінь, багатокутник, необмежена багатокутна область.

Якщо в системі обмежень (1) буде три змінних, то кожна нерівність геометрично визначатиме півпростір тривимірного простору, граничними площинами котрого будуть $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ ($i = 1, 2, ..., т$), а умови невід'ємності – півпростори з граничними площинами $x_j=0$ ($j = 1, 2, 3$), де i – номер обмеження, а j–номер змінної. Якщо система обмежень сумісна, то ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, утворять у тривимірному просторі спільну частину – багатогранник розв'язків. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.

Отже, геометрично задача лінійного програмування полягає у відшуканні координат такої точки багатогранника розв'язків, при підстановці яких у цільову лінійну функцію остання набирає максимального (мінімального) значення, причому допустимими розв'язками є усі точки багатогранника розв'язків.

Розглянемо геометричну інтерпретацію задачі: знайти

$$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2 \qquad (2.10)$$

за умов:

$$x_1 + x_2 \le 20; \qquad (2.11)$$

$$5x_1 + 25x_2 \le 270; \qquad (2.12)$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 80; \qquad (2.13)$$

$$x_2 \ge 5; \qquad (2.14)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (2.15)$$

Геометричну інтерпретацію задачі зображено на рис. 2.3.

.

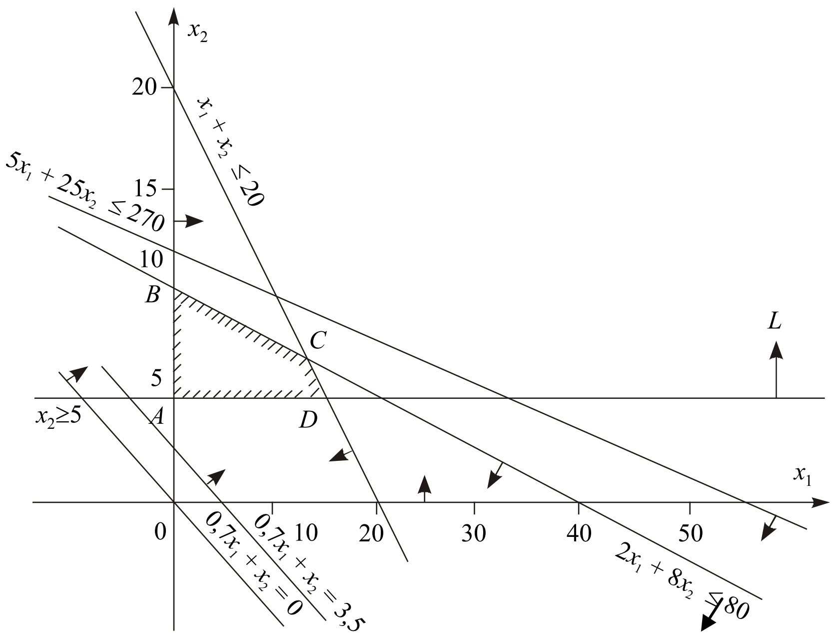


Рис. 2.3. Область допустимих розв'язків задачі

Область допустимих розв'язків цієї задачі дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \le 20$, задає півплощину з граничною прямою

$x_1 + x_2 = 20$. Будуємо цю пряму й визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \leq 20$. З цією метою в нерівність $x_1+x_2\leq 20$ підставляємо координати довільної точки, котра належить одній із півплощин, на які розбиває площину дана пряма, скажімо, $x_1=0$ і $x_2=0$. Переконуємося, що ця точка належить півплощині $x_1+x_2\leq 20$. Цей факт на рис. 2.3 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (2.4) – (2.7). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі (на рис. 2.3 – чотирикутник ABCD). Цільова функція $Z = 0{,}7x_1 + x_2$ при різних значеннях Z визначає сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню Z. Зокрема, якщо Z=0, то маємо пряму $0{,}7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли Z=3,5, то маємо пряму $0{,}7x_1 + x_2 = 3{,}5$. Ці прямі називаються лініями рівня цільової функції. У одній із вершин чотирикутника ABCD цільова функція й досягає свого екстремального значення.

Контрольні запитання

1. Яка множина точок називається опуклою.
2. Назвіть основні властивості розв'язків задач лінійного програмування.
3. У чому полягає геометричне рішення задач лінійного програмування
4. Як знаходиться область допустимих розв'язків задачі.
5. Що визначає цільова функція при різнихії значеннях.

ТЕМА 3. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

3.1. Основні поняття

Для розв'язання двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв'язків у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох у загальному випадку взагалі неможливе..

Розглянемо задачу. ПП «Агроекологія» має певну кількість ріллі з різним балом бонітету. Відома максимальна площа ріллі, яка може бути задіяна при вирощуванні сільськогосподарських культур, зокрема, жита, кукурудзи, соняшника та інші. Відомі також витрати на вирощування 1 тони пшениці, жита, кукурудзи, соняшника та інших та ціна 1 тони кожного виду сільськогосподарських культур.

Необхідно визначити, скільки сільськогосподарських культур кожного виду треба виростити, щоб досягти максимальної виручки за весь обсяг продукції.

Знайти

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{3.1}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, =, \ge\} b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\le, =, \ge\} b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m. \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \qquad (3.3)$$

Припустимо, що система обмежень сумісна і багатокутник її розв’язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування кожне і-те обмеження-нерівність у (3.2) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (і = 1, 2, …, т). Системою обмежень (3.2) –(3.3) графічно можна зобразити спільну частину, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множину точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі – багатокутник розв’язків.

Умова (3.3) невід’ємності змінних означає, що область допустимих розв’язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім’я паралельних прямих $c_1x_1+c_2x_2$ = const.

Скористаємося для графічного розв’язання задачі лінійного програмування властивостями, наведеними раныше: якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатокутника розв’язків. Якщо ж цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині багатокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв’язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв’язків, у результаті підстановки координат якої в (1) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

3.2. Алгоритм графічного методу розв’язання задач

Алгоритм складається з таких кроків:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2) знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню. 3. Знаходимо багатокутник розв’язків задачі лінійного програмування.

4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1;\ c_2)$. Цей вектор задає напрям зростання значення цільової функції задачі.

5. Будуємо пряму $c_1x_1+c_2x_2=const$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.

6. Рухаючи пряму $c_1x_1+c_2x_2=const$ в напрямі вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв’язків, де цільова функція набирає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Випадки застосування графічного методу для розв’язання задач лінійного програмування:

1. Цільова функція набирає максимального значення в єдиній вершині А багатокутника розв’язків (рис. 3.4).

2. Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка АВ (рис. 3.5). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

3. Задача лінійного програмування не має оптимальних планів: якщо цільова функція необмежена згори (рис. 3.6) або система обмежень задачі несумісна (рис. 3.7).

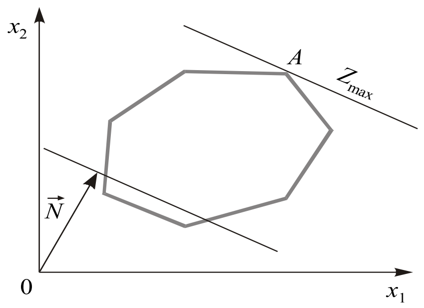


Рис. 3.4

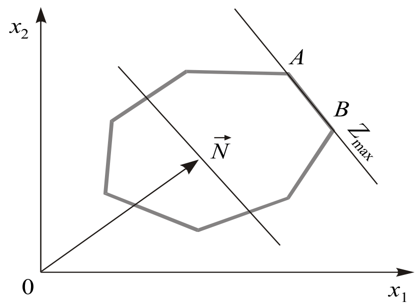


Рис. 3.5

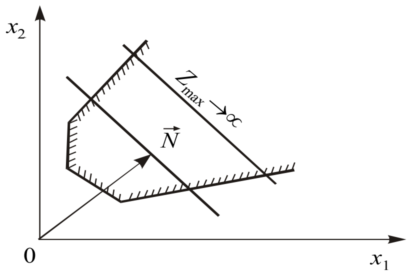


Рис. 3.6

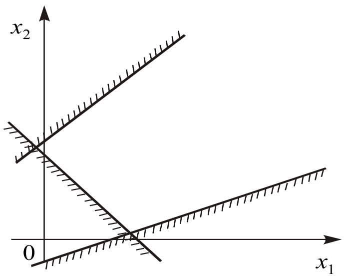


Рис. 3.7

4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рис. 3.8 і рис. 3.9). На рис. 3.8 у точці В маємо максимум, на рис. 3.9 у точці А – мінімум, на рис. 3.10 зображено, як у випадку необмеженої області допустимих планів цільова функція може набирати максимального чи мінімального значення у будь-якій точці променя.

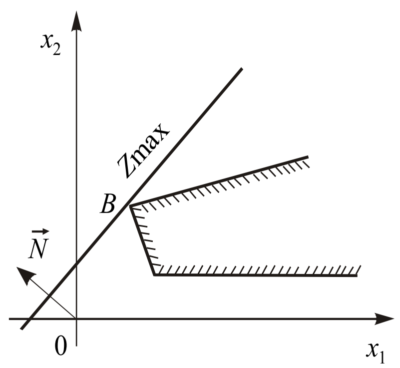


Рис. 3.8

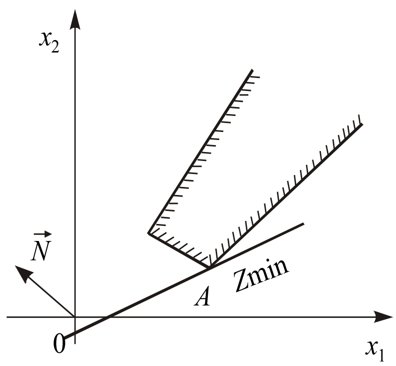


Рис. 3.9

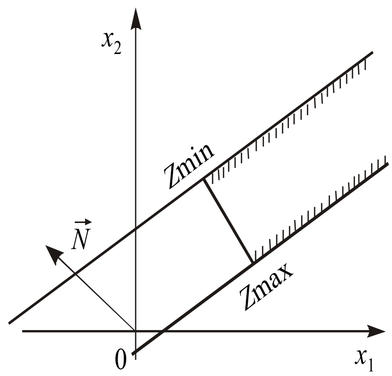


Рис. 3.10

Приклад 1.

Побудувати на площині множину розв'язків (багатокутник) системи лінійних обмежень-нерівностей й геометрично знайти найбільше та найменше значення лінійної функції в цьому багатокутнику ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$).

$$Z = 50x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \leq 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 \leq 2160; \\ x_1 - x_2 \leq 30; \\ x_2 \leq 80. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Задана економіко-математична модель є моделлю задачі лінійного програмування, що містить лише дві змінні, і тому може бути розв'язана графічно.

Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто у визначенні такої області, де водночас виконуються всі обмеження моделі.

Замінимо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і побудуємо графіки відповідних прямих (рис. 3.11.).

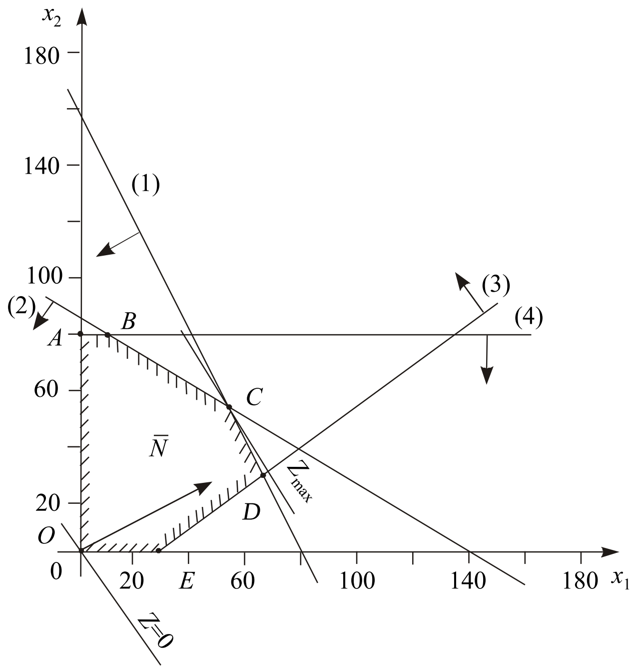


Рис. 3.11

Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з півплощин задовольняють розглядувану нерівність, а іншої – ні. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 3.11) її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. При цьому, якщо задовольняються умови, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. Інакше таким зображенням є інша півплощина.

Умова невід'ємності змінних $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі — шестикутник OABCDE.

Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв'язано, якщо зможемо відшукати таку точку багатокутника OABCDE, в якій цільова функція Z набирає найбільшого та найменшого значення. Для цього побудуємо вектор $\vec{N} = (c_1;\ c_2)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами ($x_1 = c_1$; $x_2 = c_2$). У задачі вектор $\vec{N} = (50;\ 30)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції Z, а вектор, протилежний йому, — напрям їх зменшення.

Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню Z=0. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}$ і проходить через початок координат. Оскільки в даному прикладі необхідно визначити найбільше значення цільової функції, то пересуватимемо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ паралельно самій собі згідно з напрямом вектора $\vec{N}$ доти, доки не визначимо вершину багатокутника, яка відповідає оптимальному плану задачі.

Із рис. 3.11 видно, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та багатокутника OABCDE є точка C. Координати цієї точки є оптимальним планом задачі. Координати точки C є розв'язком.

$$\max Z = 50x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160, \end{cases}$$

Звідси маємо: $x_1 = 50$; $x_2 = 60$. Отже, $\max Z = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300.$

Виходячи з аналогічних міркувань, знаходимо, що $\min Z = 50 \cdot 0 + 30 \cdot 0 = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 0$.

Контрольні запитання

1. Що означає розв'язати задачу лінійного програмування графічно

2. З яких кроків складається алгоритм графічного методу розв'язання задачі лінійного програмування

3. Поясніть як побудовані прямі поділяють площину

4. Як знайти найбільше значення цільової функції

ТЕМА 4. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЗЕМЛЕУСТРОЇ

4.1. Теоретичні основи симплексного методу

При розгляді даної теми також важливо розглянути розширену задачу та її зв'язок з вихідною задачею лінійного програмування (ЗЛП), та реалізацію М-методу.

Для того щоб можна було розв'язати задачу оптимізації симплекс-методом, необхідно наступне:

1) Задача має бути записана в канонічній формі.

2) Вільні члени в правих частинах системи обмежень повинні бути невід'ємними $b_i \geq 0 \;\; i = \overline{1,m}$.

3) Серед векторів умов $P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots\dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \; j = \overline{1,n}$ повинно бути m одиничних, тобто таких, у яких одна координата дорівнює 1, а всі інші координати дорівнюють нулю. Одиниці у цих векторів мають стояти на різних місцях (тобто ці вектори повинні бути лінійно незалежними). Такі вектори утворюють базис у m-вимірному просторі. Якщо виконані ці умови, то можна вказати перший опорний план задачі.

За симплекс-методом працюють так: перевіряють, чи буде перший знайдений опорний план оптимальним. Якщо це так, то задача розв'язана. Якщо ні, то перевіряють, чи можна цей план поліпшити. Якщо можна, то переходять до іншого опорного плану, для якого значення цільової функції буде більшим. Цей план знову перевіряють на оптимальність і так далі, поки не знайдуть оптимальний план або не переконаються, що задача розв'язку не має.

Дослідження плану на оптимальність та перехід до кращого плану зручно робити за допомогою симплекс-таблиць.

4.2. Побудова симплекс-таблиці. Перехід до оптимального плану

Приклад 1.

Знайти оптимальне рішення щодо визначення площ земельних ділянок x_1 і x_2.

$$Z = 4x_1 + x_2 \to max\ ; \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1; \\ x_1 + x_2 \le 3; \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_{1,2} \ge 0 \quad . \qquad (3)$$

Розв'язання.

Спочатку запишемо дану задачу у канонічній формі, перетворивши нерівності (2) у рівності за допомогою додаткових невідомих $x_3\ i\ x_4$ (їх додамо до лівих частин нерівностей (2), щоб зрівняти ліву та праву частини). Матимемо задачу

$$Z = 4x_1 + x_2 \to max\ ; \qquad (4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3; \end{cases} \qquad (5)$$

$$x_i \ge 0\ ; \quad i = \overline{1,4}\,. \qquad (6)$$

Очевидно, що праві частини додатні, кількість обмежень m=2, серед векторів умов $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ є два одиничних ($P_3\ й\ P_4$) і вони лінійно незалежні, отже, утворюють базис. Невідомі $x_3\ i\ x_4$ є базисними, а всі інші ($x_1\ ma\ x_2$) – вільними. Якщо вільним невідомим надати значення 0 ($x_1 = 0,\ x_2 = 0$), то отримаємо з (5) $x_3 = 1,\ x_4 = 3$. Отже, вектор $\overline{X}^{(1)} = (0,0,1,3)$ є першим опорним розв'язком (він задовольняє умови (5) та (6), тобто є допустимим, а вектори умов P_3 і P_4, які відповідають відмінним від нуля його координатам $x_3 = 1$ та $x_4 = 3$, є лінійно незалежними).

Тепер можна починати обчислення за симплекс-методом. Будемо це робити за допомогою таблиць 4.1–4.3.

Таблиці 4.1–4.3

i	Базис	$c_б$	P_0	4	1	0	0	
				P_1	P_2	P_3	P_4	
1	P_3	0	1	$\boxed{2}$	-1	1	0	Таблиця 4.1
2	P_4	0	3	1	1	0	1	
3			0	-4	-1	0	0	
1	P_1	4	½	1	-1/2	½	0	
2	P_4	0	5/2	0	$\boxed{3/2}$	-1/2	1	Таблиця 4.2
3			2	0	-3	2	0	
1	P_1	4	4/3	1	0	1/3	1/3	
2	P_2	1	5/3	0	1	-1/3	2/3	Таблиця 4.3
3			7	0	0	1	2	

Таблицю 4.1 заповнюємо так: у стовпчику «P_0» у перших m рядках, тобто в першому та другому рядках, записуємо числа, що стоять у правих частинах системи (5). У стовпчиках P_i, ($i = \overline{1,4}$) в тих самих рядках записуємо коефіцієнти при невідомих x_i ($i = \overline{1,4}$) цієї системи відповідно.

У стовпчику «Базис» записуємо вектори, що утворюють базис для першого опорного розв'язку (тобто P_3 і P_4), а в стовпчику «$c_б$» напроти базисних векторів записуємо коефіцієнти при відповідних невідомих у цільовій функції (4) (тобто при x_3 та x_4, а це c_3=0 і c_4=0).

Над стовпчиками P_i записуємо коефіцієнти при невідомих x_i ($i=\overline{1,4}$) у цільовій функції (4). Далі заповнюємо m+1-й, тобто третій рядок. У стовпчиках «Базис» і «$c_б$» у цьому рядку нічого не пишемо. У стовпчику P_0 записуємо число Z_1, котре дорівнює сумі добутків чисел із стовпчика $c_б$ на відповідні числа із стовпчика P_0,

$$Z_1 = 0\cdot 1 + 0\cdot 3 = 0 .$$

Z_1– це значення цільової функції для першого опорного плану $\overline{X}^{(1)} = (0,0,1,3)$, відмінні від нуля координати якого стоять у стовпчику P_0.

У стовпчиках "P_j" $(j=\overline{1,n})$ у (m + 1)–у рядку (тобто в останньому, третьому) записуємо числа Δ_j, що дорівнюють різниці між сумою добутків чисел із стовпчика $c_б$ на відповідні числа із стовпчика P_j та коефіцієнта c_j при невідомому x_j у цільовій функції (c_j стоїть над P_i),

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{2} c_i a_{ij} - c_j \quad (i=1,2 \ , j=\overline{1,4})$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 0\cdot 2 + 0\cdot 1 - 4 = -4,\\
\Delta_2 &= 0\cdot(-1) + 0\cdot 1 - 1 = -1,\\
\Delta_3 &= 0\cdot 1 + 0\cdot 0 - 0 = 0,\\
\Delta_4 &= 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

Числа Δ_j називаються оцінками.

З теорії симплекс-методу відомо, що оптимальним буде той план $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, для якого всі оцінки $\Delta_j \ge 0$.

Для прикладу, що розглядається, серед оцінок Δ_j є від‘ємні :$\Delta_1 < 0$ і $\Delta_2 < 0$. Отже, план $\overline{X}^{(1)}$ не є оптимальним.

Далі треба подивитися, чи є серед чисел a_{ij}, що стоять у стовпчиках із від'ємними оцінками, додатні числа. Якщо хоча б в одному з таких стовпчиків додатних чисел немає, то задача розв'язку не має ($Z_{max} = +\infty$).

Якщо додатні числа є в кожному із стовпчиків, де стоять від'ємні оцінки, то можна знайти кращий план.

Із таблиці 4.1 видно, що в тих стовпчиках, де стоять від'ємні оцінки Δ_1 і Δ_2, є додатні числа. Тому можна знайти кращий план.

Для цього треба один із базисних векторів умов вивести з базису, а замість нього ввести в базис один із небазисних векторів умов.

Із цією метою серед від'ємних оцінок $\Delta_j < 0$ вибираємо найбільшу за модулем (якщо таких декілька, то вибираємо одну з них, все одно яку). В нашому прикладі це $\Delta_1 = -4$.

Далі для кожного додатного числа $a_{ij} \geq 0$, що стоїть у стовпчику "P_j" над найбільшою за модулем від'ємною оцінкою Δ_j (тобто над $\Delta_1 = -4$ у першому стовпчику), знаходять відношення числа b_i із стовпчика " P_0" до цього числа a_{ij}. Для прикладу, що розглядається, ці відношення $\frac{1}{2}$ та $\frac{3}{1}$.

Число a_{ij}, для якого це відношення є найменшим, називають розв'язувальним елементом. Для прикладу це число 2, воно взяте в рамочку в таблиці 4.1. Рядок та стовпчик, на перетині яких стоїть розв'язувальний елемент, називаються розв'язувальними. У нашому прикладі це перший рядок і перший стовпчик.

Із базису виводиться той вектор, що стоїть у розв'язувальному рядку, а вводиться в базис той вектор, що стоїть у розв'язувальному стовпчику. В нашому прикладі з базису виводиться вектор P_3, а вводиться вектор P_1.

Далі переходимо до нового опорного плану, заповнюючи для цього таблицю 4.2. У ній, у стовпчику «Базис», записуємо новий базис (замість P_3

вписуємо P_1), в стовпчику $c_б$ записуємо коефіцієнти c_1=4 і c_4=0 при невідомих x_1 *та* x_4 у цільовій функції (вони стоять над P_1 *і* P_4).

Далі заповнюємо стовпчики, які відповідають базисним векторам. У нас це вектори P_1 *і* P_4. Ці вектори повинні бути одиничними.

У стовпчику P_1 в рядочку, де стоїть P_1, ставимо 1, а в усіх інших рядках у цьому стовпчику ставимо нулі.

Стовпчик P_4 має такий самий вигляд, як і в першій таблиці, тому що вектор P_4 залишився в базисі.

Далі елементи розв'язувального (першого) рядка ділимо на розв'язувальний елемент, тобто на 2, і записуємо одержані числа на відповідні місця в другій таблиці, тобто в її перший рядок у стовпчики P_0 та P_j, j=$\overline{1,4}$.

Усі інші числа, включаючи і числа з m+1 (тобто з третього рядка) , отримаємо за методом Жордано-Гауса (правило прямокутників).

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці, за правилом прямокутників необхідно в попередній симплекс-таблиці виділити умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

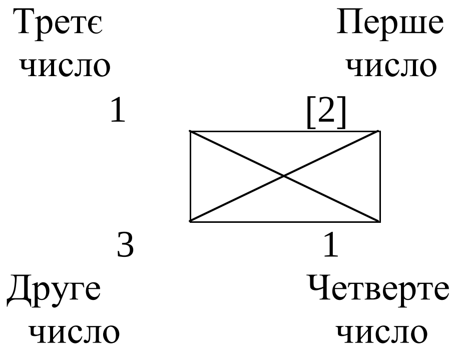
– перше число – розв'язувальний елемент;

– друге число – це число, котре стоїть на місці елемента нової таблиці, який ми знаходимо;

– третє та четверте – це числа, що розміщуються у двох інших протилежних вершинах цього прямокутника.

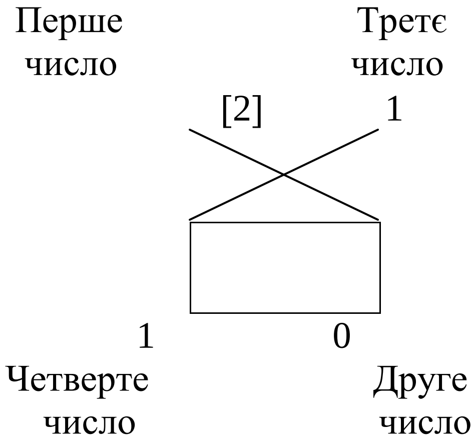
Далі шуканий елемент нової таблиці визначається так: перше число множимо на друе, від цього добутку віднімаємо добуток третього і четвертого, а потім результат ділимо на розв'язувальний елемент.

Наприклад, елемент $b_2^{/}$ другої таблиці, який стоїть у стовпчику " P_0" у другому рядку, визначаємо так: складаємо умовний прямокутник із чисел першої таблиці:



Тоді $b_2' = \dfrac{[2]\cdot 3 - 1\cdot 1}{[2]} = \dfrac{5}{2}$.

Аналогічно число a_{23}', що стоїть у другій таблиці, в другому рядку і в стовпчику P_3, вираховуємо так: складаємо умовний прямокутник:



Тоді

$$a_{23}' = \frac{[2]\cdot 0 - 1\cdot 1}{[2]} = -\frac{1}{2}.$$

Так само вираховуємо всі інші елементи другої таблиці

$$a_{22}' = \frac{[2]\cdot 1 - 1\cdot(-1)}{[2]} = \frac{3}{2};$$

$$\Delta_2' = \frac{[2]\cdot(-1) - (-4)\cdot(-1)}{[2]} = -3;$$

$$\Delta_3' = \frac{[2]\cdot 0 - (-4)\cdot 1}{2} = 2.$$

Число Z_2 (значення цільової функції для нового опорного плану $\overline{X}^{(2)}$) визначаємо аналогічно: $Z_2 = \frac{[2]\cdot 0 - 1\cdot(-4)}{[2]} = 2$.

План $\overline{X}^{(2)}$, який відповідає таблиці 4.2, має вигляд $\overline{X}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{5}{2}\right)$ (відмінні від нуля координати цього плану стоять у стовпчику P_0 другої таблиці, x_1 і x_4 – базисні невідомі).

В останньому рядку другої таблиці записані оцінки $\Delta_1' = 0,\ \Delta_2' = -3,\ \Delta_3' = 2,\ \Delta_4' = 0$. Через те, що наявна від'ємна оцінка Δ_2', план $\overline{X}^{(2)}$ ще не є оптимальним.

Оскільки над P_2 в стовпчику "P_2" є додатне число, то можна знайти кращий план. Для цього знову вибираємо розв'язувальний елемент.

Очевидно, що це $\frac{3}{2}$ (це єдиний додатний елемент у стовпчику P_2). Він стоїть у таблиці 2 в рамочці. Потім переходимо до таблиці 4.3.

З базису вийде вектор P_4 (він стоїть у розв'язувальному рядку), а замість нього в базис увійде вектор P_2 (він стоїть у розв'язувальному стовпчику). У стовпчику $c_б$ записуємо c_1=4 і c_2=1.

У другому рядку третьої таблиці записуємо числа другого (розв'язувального) рядка другої таблиці, поділені на розв'язувальний елемент $\frac{3}{2}$.

Далі записуємо в стовпчиках P_1 і P_2 координати базисних (одиничних) векторів P_1 та P_2.

Усі інші елементи третьої таблиці розраховуємо за правилом прямокутників.

Оскільки в останньому рядку третьої таблиці немає від'ємних чисел (оцінок) у стовпчиках P_1, P_2, P_3 і P_4, то план $\overline{X}^{3}$, що відповідає цій таблиці, є оптимальним. Його додатні координати записані в стовпчику P_0 третьої таблиці $\overline{X}^3 = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0\right)$. У цьому ж стовпчику в останньому рядку записане значення цільової функції для оптимального плану $Z^*_{max} = 7$. Це найбільше значення цільової функції Z в області, заданій нерівностями (2) і (3).

Отже, відкинувши значення додаткових невідомих x_3 та x_4, отримаємо розв‘язок задачі (1) – (3) $\overline{x}^* = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), \quad Z^*_{max} = 7$.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте основні умови для пошуку оптимального рішення задач із землеустрою симплекс-методом.

2. Який знайдений опорний план є оптимальним ?

3. З якою метою вводяться віртуальні земельні ділянки ?

4. Що характеризує цільова функція при визначенні оптимальних площ земельних ділянок ?

5. За якої умови завершується пошук оптимального рішення ?

ТЕМА 5. СПРЯЖЕНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

5.1. Двоїстість у лінійному програмуванні

Двоїстість відноситься до фундаментальних понять математичного програмування. Двоїстість у лінійному програмуванні була розроблена ще в 1933 році професором Ленінградського університету Л.В. Канторовичем, який пізніше в 1975 році вже як академік разом з американським математиком Т. Купмансом за відкриття двоїстості та її застосування в задачах оптимального використання ресурсів одержав Нобіліївську премію.

Поняття двоїстості розглянемо на прикладі задачі визначення оптимального плану виробництва сільськогосподарської продукції ПП «Агроекологія».

Приклад.

Фірма має певну кількість ріллі з різним балом бонітету. Відома максимальна площа ріллі, яка може бути задіяна при вирощуванні сільськогосподарських культур. Відомі також витрати на вирощування та ціна 1 тони кожного виду сільськогосподарських культур.

Необхідно визначити обсяг сільськогосподарських культур треба виростити, щоб досягти максимальної виручки за весь обсяг продукції.

Розв’язання. Позначимо: b_i – ліміт і-того ресурсу, який перебуває в розпорядженні фірми; a_{ij} – норми витрат і-того ресурсу на одиницю j-тої продукції, c_j – ціна одиниці j-тої продукції. Введемо невідомі змінні x_j, які визначають кількість j-тої продукції, що буде вирощувати фірма.

Запишемо модель цієї задачі:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... c_j x_j + ... + c_n x_n \to max \tag{5.1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \quad (5.2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l};\ l \le n). \quad (5.3)$$

Із моделі видно, що всієї ріллі буде m, а видів сільськогосподарської продукції – n.

Припустимо, що з самого початку при вивченні питання про використання ріллі для вирощування сільськогосподарської продукції фірма має змогу здати ріллю в аренду деякій організації. Необхідно встановити «ціни» на аренду, які є на фірмі.

Позначимо $y_1, y_2, ...y_m$ – «ціни» на земельні ресурси.

Їх треба встановити, виходячи із суперечливих інтересів організації, яка арендує ріллю, і фірми, яка їх здає в аренду.

При цьому, загальна вартість насіння сільськогосподарських культур, яку купує фірма, має бути мінімальною.

Фірма прагне одержати виручку з аренди, не меншу від суми, яку вона могла б мати, якби вирощувала сільськогосподарськ самостійно.

Ці вимоги сформулюємо у вигляді такої моделі задачі:

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to min \quad (5.4)$$

за обмежень

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{i1}y_i + ... + a_{m1}y_m \geq c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{i2}y_i + ... + a_{m2}y_m \geq c_2; \\ .... \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{ij}y_i + ... + a_{mj}y_m \geq c_j; \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{in}y_i + ... + a_{mn}y_m \geq c_n; \end{cases} \quad (5.5)$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}) \quad (5.6)$$

Цільова функція (5.4) відображає вимогу, щоб вартість всього обсягу насіння, яку купує фірма була мінімальною.

Вимоги фірми, яка здає в аренду ріллю, записані у вигляді системи обмежень (5.5); виручка з аренди повинна бути не менша від суми, яку вона могла б мати, якби вирощувала сільськогосподарську продукцію самостійно.

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{ij}y_i + ... + a_{mj}y_m \geq c_j, \quad (5.7)$$

За змістом задачі змінні y_i мають бути невід’ємними, тобто виконуються умови (5.6). Побудована задача (5.4) – (5.6) називається двоїстою до початкової (5.1) – (5.3). Змінні y_i називаються двоїстими оцінками, Л.В. Канторович у своїх роботах назвав їх об’єктивно обумовленими оцінками (о, о, о). В іноземній літературі їх часто називають тіньовими цінами. Задачі (5.1) – (5.3) і (5.4) – (5.6) також називають парами спряжених задач лінійного програмування.

5.2. Основні визначення

Кожній задачі ЛП можна поставити у відповідність деяку іншу задачу ЛП, яку називають двоїстою (або спряженою).

Дамо означення двоїстої задачі по відношенню до загальної задачі ЛП (яку називають прямою), яка полягає в знаходженні максимального значення функції

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to max$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k; \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l};\ l \le n).$$

Визначення 1. Задача, що полягає в знаходженні мінімального значення функції

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to min$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m \ge c_l; \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + \ldots + a_{m,l+1}y_m = c_{l+1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_n; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,k},\ k \le m)$$

називається двоїстою по відношенню до заданої задачі. Ці дві задачі утворюють так звану двоїсту пару задач лінійного програмування.

Визначення 2. Двоїстою задачею для задачі лінійного програмування, записаної в канонічній формі ,

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max;$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\ ; \\ \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\ ; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,n}$$

Називається задача

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to min;$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2\ ; \\ \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots; \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_m. \end{cases}$$

Визначення 3. Двоїстою задачею для задачі лінійного програмування, записаної в симетричній формі ,

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max;$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2\ ; \\ \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\ ; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,n}$$

Називається задача:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to min;$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2\ ; \\ \quad\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\ ; \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_m; \end{cases}$$
$$y_i \ge 0; \qquad i = \overline{1,m}.$$

Аналізуючи наведені вище пари двоїстих задач, можна побачити, що двоїста задача будується за вихідною задачею за такими правилами:

1) пряма задача є задачею максимізації, а двоїста – задачею мінімізації;

2) матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих у системі

обмежень двоїстої задачі, є транспонованою до матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (тобто рядками матриці $A^{/}$ є стовпчики матриці A, і навпаки);

3) кожному і-му обмеженню із системи прямої задачі відповідає невідоме $y_i\ (i = \overline{1,m})$ двоїстої задачі, тобто у двоїстій задачі стільки невідомих, скільки в прямій обмежень містить відповідна система;

4) у двоїстій задачі стільки обмежень у системах скільки невідомих у прямій задачі; коефіцієнти при невідомих у цільовій функції прямої задачі є правими частинами обмежень у системах, а праві частини в системах обмежень прямої задачі є коефіцієнтами при невідомих у цільовій функції двоїстої задачі;

5) якщо на невідоме x_j прямої задачі накладено обмеження $x_j \geq 0$, то j-те обмеження в системах обмежень двоїстої задачі буде нерівністю із знаком "≥". Якщо ж x_j може мати довільний знак, то j-те обмеження двоїстої задачі буде рівністю; якщо i-те обмеження в системі обмежень прямої задачі є нерівністю, то на невідоме y_i двоїстої задачі накладається обмеження $y_i \geq 0$. Якщо ж i-те обмеження є рівністю, то y_i може мати довільний знак.

Контрольні запитання

1. Опишіть сутність двоїстості.

2. Охарактеризуйте оптимальний план виробництва сільськогосподарської продукції.

3. Охарактеризуйте складові оптимізаційної моделі.

4. Які ознаки враховуються при формуванні умов обмеження.

5. Яку вимогу відображає цільова функція двоїстості.

ТЕМА 6. ЗВ'ЯЗОК МІЖ РОЗВ'ЯЗКАМИ ПРЯМОЇ ТА ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ.

6.1. Теоретичні основи зв'язку між розв'язками прямої та двоїстої задачі

Розглянемо пару двоїстих задач:

пряма задача

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \tag{6.1}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \ (i = \overline{1,m}), \tag{6.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}; \tag{6.3}$$

двоїста задача:

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min \tag{6.4}$$

за умов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad (j = \overline{1,m}). \tag{6.5}$$

Задачі (6.1) – (6.3); (6.4) – (6.5) можуть бути розв'язані незалежно. Але при визначенні симплекс-методом оптимального розв'язку однієї задачі знаходиться розв'язок і другої.

Існуючі залежності між розв'язками пари двоїстих задач можуть бути сформульовані у вигляді таких тверджень.

Лема 1. Якщо X – деякий допустимий розв'язок задачі (6.1) – (6.3), а Y – довільний допустимий розв'язок двоїстої задачі (6.4) – (6.5), тоді:

$$F(X) \le F^*(Y),$$

тобто значення цільової функції вихідної задачі на допустимому розв'язку X завжди не більше значення цільової функції двоїстої задачі на допустимому розв’язку Y.

Лема 2. Якщо $F(X^*) = F^*(Y^*)$ для деяких допустимих розв’язків X^* і Y^* відповідно задач (5.1) – (5.3) та (5.4) – (5.5), то X^* – оптимальний розв’язок вихідної, а Y^* – двоїстої задачі.

Теорема 1. (Перша теорема двоїстості). Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то й інша має оптимальний розв'язок, причому значення цільових функцій при їх оптимальних розв'язках рівні між собою $F_{max} = F^*{}_{min}$.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то інша задача двоїстої пари зовсім немає допустимих розв'язків.

6.2. Приклад геометричної інтерпретації двоїстих задач

Можуть мати місце 3 випадки:

1) обидві задачі мають допустимі розв’язки;
2) одна задача має допустимі розв’язки;
3) жодна задача не має допустимих розв’язків.

Приклад 1.

Скласти задачу двоїсту до даної та знайти графічним методом розв’язок кожної із цих задач.

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14; \\ x_1 + x_2 \le 8; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв’язання. Складемо двоїсту задачу

$$F^* = 14y_1 + 8y_2 \to min$$
$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2; \\ 3y_1 + y_2 \ge 7; \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Знайдемо розв’язок кожної із задач.

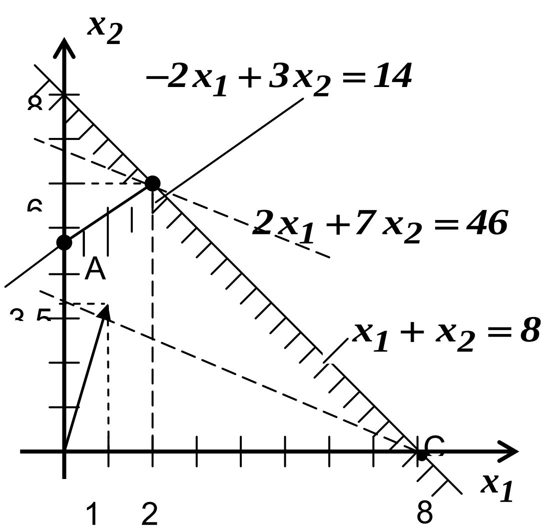


Рис. 6.1. Розв’язок прямої ЗЛП

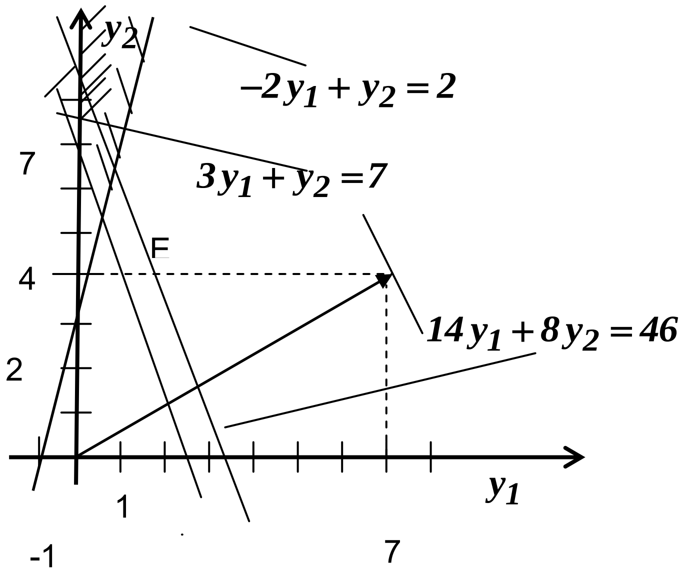


Рис. 6.2. Розв’язок двоїстої ЗЛП

$$B = X^* = (2,6);\ F_{max} = F(X^*) = 46;$$
$$E = Y^* = (1,4);\ F^*_{min} = F^*(Y^*) = 46;$$
$$F_{max} = F^*_{min}$$

Знаходження розв'язку двоїстих задач

Для того щоб знайти розв’язок пари двоїстих задач, не обов’язково розв’язувати обидві задачі. Можна розв’язати симплекс-методом задачу максимізації, а розв‘язок другої задачі $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ знайти з останньої симплекс-таблиці для розв‘язаної задачі. Для цього треба в останньому рядку цієї таблиці знайти ті числа (оцінки) Δ_j, що стоять у тих стовпчиках, в яких у першій таблиці стоять одиничні (базисні) вектори, а потім до цих чисел Δ_j додати відповідні коефіцієнти c_j цільової функції. Значення $y_i^* = \Delta_j + c_j$ знаходять за тим стовпчиком A_j, в якому в першій симплекс-таблиці в одиничному векторі A_j одиниця стояла на і-му місці.

Приклад 2.

Знайти розв'язок задачі, двоїстої до задачі

$$Z = 7x_1 + 5x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3; \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \;\; ; \\ 2x_1 - x_2 \le 0; \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Розв'язання.

Записуємо дану задачу у формі

$$Z = 7x_1 + 5x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3; \\ -x_1 - 5x_2 \le -5; \\ 2x_1 - x_2 \le 0; \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Двоїстою до неї є задача:

$$F = 3y_1 - 5y_2 \to min;$$
$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 2y_3 \le 7; \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \le 5; \end{cases}$$
$$y_{1,2} \ge 0.$$

Дану задачу уже було розв'язано симплекс-методом (див. лекція 5). З останнього рядка останньої симплекс-таблиці знаходимо

$F^*_{min} = Z^*_{max} = 17$; $y^*_1 = \frac{17}{3} + 0 = \frac{17}{3}$, тому що число $\frac{17}{3}$ стоїть у стовпчику P_3, в якому у першій симплекс-таблиці стояв одиничний вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ з одиницею на першому місці.

Аналогічно маємо $y^*_2 = M - M = 0$, $y^*_3 = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$. Отже, розв‘язок двоїстої задачі знайдено $Y^* = \left(\frac{17}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$, $F_{min} = 17$.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте зв’язки між розв’язками прямої та двоїстої задачі
2. Наведіть приклади геометричної інтерпретації двоїстих задач.
3. Дайте пояснення, яким чином знаходиться розв'язк двоїстої задачі

ТЕМА 7. ВИКОРИСТАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ В ЗЕМЛЕУСТРОЇ

Суттєво важливими для організації та планування господарської діяльності є так звані *задачі розподілу* – особливі задачі лінійного програмування. Такі задачі за специфікою їх математичного формулювання поділяються на два типи.

7.1. Задачі розподілу першого і другого типу

Математична модель таких задач може бути описана так. Знайти такі *невід'ємні значення* невідомих величин x_{ij}, які мають задовольняти системі рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1;\ m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1;\ n}), \tag{7.1}$$

забезпечуючи лінійній формі

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{7.2}$$

екстремальне значення (найбільше або найменше).

Коефіцієнти a_i, b_j, c_{ij} $(i = \overline{1; m}; \quad j = \overline{1; n})$ – відомі величини.

До такого типу задач належать задачі планування перевезень за певних умов, задачі планування роботи кількох підприємств з метою випуску продукції певних найменувань за умов спеціалізації виробництва, задачі планування підготовки та розподілу кадрів та ін.

Задачі розподілу другого типу. Математична модель таких задач при використанні певних гіпотез може бути описана так.

Знайти такі значення величин x_{ij} $(i=\overline{1;\, m};\ \ j=\overline{1;\, n})$, для яких виконується система обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = a_i \quad (i=\overline{1;m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_{ij} \le b_j \quad (j=\overline{1;n}), \tag{7.3}$$

а функція

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{7.4}$$

досягає свого екстремального значення (найбільшого або найменшого) в залежності від практичного сенсу розв'язуваної задачі; коефіцієнти a_i, b_j, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} $(i=\overline{1;\, m};\ \ j=\overline{1;\, n})$ – відомі величини. Задачі, математичні моделі яких можна привести до вказаної, мають велике практичне значення.

Назвемо деякі з таких задач:

1) оптимальне використання різних видів пального за умови різних типів сільськогосподарської техніки, в яких воно використовується;

2) визначення оптимальної структури використання сільськогосподарських угідь з метою одержання максимальних обсягів продукції;

3) оптимізація транспортних перевезень і т. ін.

Задачі розподілу, які мають математичні моделі (7.1) і (7.2), (7.3) і (7.4), можна привести до стандартних задач лінійного програмування. Введемо інше найменування невідомих.

Розглянемо невідомі x_{ij} $(i=\overline{1;\, m};\ \ j=\overline{1;\, n})$ в такому порядку: за певного фіксованого номера індексу j, починаючи з числа 1, будемо кожного разу брати значення індексу i від 1 до m. Так упорядкованим невідомим x_{ij} дамо нові найменування з одним індексом, який має змінюватися неперервно від 1 до mn. Тобто упорядкуємо множину вихідних невідомих $\{ x_{ij} \}$ за такою схемою:

$$\begin{array}{cccccccccccc} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{m1}; & x_{12}, & x_{22}, & \ldots, & x_{m2}; & \ldots, & x_{1n}, & x_{2n}, & \ldots, & x_{mn} \\ z_1, & z_2, & \ldots, & z_m; & z_{m+1}, & z_{m+2}, & \ldots, & z_{m+m}; & \ldots, & z_{m(n-1)+1}, & z_{m(n-1)+2}, & \ldots, & z_{mn} \end{array}$$

Якщо змінити і позначення коефіцієнтів за такою ж схемою, то одержимо для названих задач розподілу задачу лінійного програмування із значною частиною нульових величин у матриці обмежень. Так, для задачі (1), (2) в кожному стовпці буде лише два відмінних від нуля елементи. Такі обставини дають можливість розбудувати для задач розподілу більш ефективні методи розв’язання, ніж симплексний метод. Розглянемо детально одну з моделей транспортної задачі та методи її розв’язання.

7.2. Транспортна задача за критерієм вартості перевезення

При плануванні обсягів перевезень завжди з’являється задача їх оптимальної (за певним критерієм) оцінки організації. За одних умов це означає таке планування, при якому вартість перевезення була б мінімальною, за інших – у якомога менший можливий термін, наприклад, транспортування під час збирання врожаю. Але яка б транспортна задача планування перевезення не розв’язувалася, завжди необхідно мати певні характеристики маршруту (або маршрутів, якщо їх кілька), який з’єднує відповідні пункти.

Розглянемо в загальному випадку один із можливих варіантів постановки транспортної задачі за критерієм вартості перевезення.

Маємо m пунктів постачання, на кожному з яких перебуває відповідно a_1, a_2, ..., a_m одиниць вантажу, та n пунктів призначення, на кожний з яких необхідно завезти b_1, b_2, ..., b_n одиниць. За відомих тарифів c_{ij} (вартість перевезення одиниці вантажу) перевезення з i-го пункту постачання в j-ий пункт призначення необхідно спланувати так, щоб їх вартість була найменшою.

Позначимо x_{ij} кількість вантажу, яку планується перевезти з i-го пункту постачання в j-ий пункт призначення.

Умову сформульованої транспортної задачі доцільно записати так званою розподільчою таблицею, схему якої наведено в табл. 7. 1. Коефіцієнти матриці тарифів c_{ij} позначені кружками.

Таблиця 7. 1

Розподільча таблиця

Пункти постачання та наявні обсяги	Пункт призначення та запити на обсяги			
	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\vdots\vdots$	$\vdots$
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

Планом транспортної задачі називається матриця $\{x_{ij}\}_{m\times n}$, елементи якої визначають кількість вантажу, призначеного для перевезення з i-го пункту постачання в j-ий пункт призначення. Матриця з елементами c_{ij} $(i=\overline{1;\,m};\;\; j=\overline{1;\,n})$ називається *матрицею тарифів.*

Загальні затрати, обумовлені певним планом перевезення $\{x_{ij}\}$, визначаються цільовою функцією

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\,. \tag{7.5}$$

Змінні x_{ij} мають задовольняти умовам по обсягах наявних запасів, по запитах на обсяги вантажів та природній умові невід'ємності.

Сформульовані умови аналітично слід записати так:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = \overline{1;\ m}) \tag{7.6 а}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1;\ n}) \tag{7.6 б}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = \overline{1;\ m}; \quad j = \overline{1;\ n}). \tag{7.7}$$

Задача оптимізації плану перевезення за критерієм найменшої вартості формулюється так. Знайти такий план перевезення $\{x_{ij}\}$ $(i = \overline{1;\ m};\ \ j = \overline{1;\ n})$, при якому цільова функція досягає найменшого значення за умови виконання обмежень (7.6а), (7.6б), (7.7). Задача має $m \times n$ невідомих та $m + n$ обмежень (7.6а), (7.6б).

Математична модель планування перевезення за критерієм найменшого терміну його реалізації має свої особливості. У цьому випадку необхідно мати інформацію про термін t_{ij} перевезення вантажу з i-го пункту постачання в j-ий пункт призначення.

Транспортна задача оптимізації за критерієм найменшого терміну реалізації перевезення не зводиться до задачі лінійного програмування.

Постановка таких задач додатково ускладнюється, якщо враховувати пропускну спроможність маршрутів транспортування, можливі обмеження по обсягах вантажів стосовно транспортних засобів і т. ін.

Далі будемо розглядати лише транспортну задачу за критерієм вартості планування перевезень.

7.3. Прикладформування планів перевезення кормів

Припустимо, що маємо три пункти постачання з обсягами вантажів 10, 15 та 25 одиниць і чотири пункти призначення із запитами на обсяги відповідно 5, 10, 20 та 15 одиниць за відомої матриці тарифів, коефіцієнти якої наведені в табл. 7. 2 і обведені кружками.

Розглянемо деякі можливі плани перевезення та оцінимо вартість реалізації кожного з них.

Розглянемо план перевезень, компоненти якого записані у відповідних клітинах табл. 7. 2. Згідно з таким планом, з 1-го пункту постачання вантаж в обсягах 5 і 5 одиниць необхідно відправити в 1-й та 2-й пункти призначення, з 2-го пункту постачання вантаж в обсязі 5 і 10 одиниць – в 2-й та 3-й пункти призначення, з 3-го пункту постачання – в 3-й та 4-й пункти призначення в обсягах 10 та 15 одиниць.

Таблиця 7.2

План перевезень 1

Обсяги запитів / Обсяги можливостей	5	10	20	15
10	8 5	3 5	5	2
15	4	1 5	6 10	7
25	1	9	4 10	3 15

Вартість перевезення при такому плані складає:

$$5 \cdot 8 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3 = 205 \text{ одиниць.}$$

Якщо розглянути план, представлений у табл. 7. 3, то вартість його реалізації дорівнює:

$$10 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 140 \text{ одиниць.}$$

Таблиця 7.3

План перевезень 2

Обсяги запитів / Обсяги можливостей	5	10	20	15
10	8	3	5	2 10
15	4	1 10	6 5	7
25	1 5	9	4 15	3 5

План, представлений у табл. 7. 3, має меншу вартість, ніж план табл. 7. 2. Питання пошуку оптимального плану розглянемо згодом.

Тепер припустимо, що необхідно знайти такий план перевезення, при якому термін його реалізації буде найменшим.

Розглядаємо цей же приклад за умови, що замість матриці тарифів маємо матрицю термінів перевезення з пунктів постачання в пункти призначення з такими ж числовими характеристиками, але в одиницях виміру часу (година, доба).

За критерієм часу план перевезення, представлений у табл. 7. 3, буде реалізований за 6 ум. одиниць часу; найбільшим є термін перевезення з 2-го пункту постачання в 3-й пункт призначення.

План перевезення, представлений у табл. 7. 4, буде реалізовано за 4 у. о. часу. Значення лінійної функції $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij}$ при плані табл. 7.4 дорівнює 145, при плані табл. 7. 3 – 140.

Таблиця 7.4

План перевезень 3

Обсяги запитів / Обсяги можливостей	5	10	20	15
10	8	3	5	2 10
15	4 5	1 10	6	7
25	1	9	4 20	3 5

Тобто план, кращий за критерієм вартості, може бути гіршим плану за критерієм часу.

7.4. Збалансовані та незбалансовані моделі транспортних задач

Розрізняють два типи транспортних задач:

а) збалансовані, в яких загальний обсяг вантажу в пунктах постачання дорівнює загальному обсягу запитів пунктів призначення, тобто:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ; \qquad (7.8)$$

б) незбалансовані, в яких загальний обсяг вантажу в пунктах постачання не дорівнює загальному обсягу запитів, а може бути більшим або меншим за нього, тобто:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ або } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (7.9)$$

Незбалансовану модель можна завжди привести до збалансованої.

Якщо маємо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то в математичну модель за такої умови необхідно прилучити фіктивний (n+1)-й пункт призначення. До матриці умов задачі додають ще один стовпець, який відповідає фіктивному пункту призначення з обсягом запиту, який дорівнює різниці між загальним обсягом вантажу в пунктах постачання та загальним обсягом запитів:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{7.10}$$

Тарифи на перевезення до фіктивного (n+1)-го пункту призначення мають бути з нульовими значеннями. За таких умов незбалансована модель транспортної задачі перетворюється на збалансовану. Цільова функція обох задач буде одна й та ж, оскільки тарифи перевезення до фіктивного пункту призначення нульові.

За умови $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ в математичну модель прилучають фіктивний (m+1) пункт постачання, запас вантажу для якого приймають рівним $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а тарифи перевезення з фіктивного пункту мають бути нульовими. У матрицю умов задачі прилучається один рядок, а цільова функція не змінюється, оскільки фіктивні тарифи нульові, але нова задача буде збалансованою.

Для збалансованих транспортних задач умова (6а) буде представлена системою рівностей.

Ознака наявності розв’язку транспортної задачі

Теорема 1. *Для того, щоб транспортна задача мала допустимі плани, необхідно і достатньо, щоб вона була збалансованою*.

Надалі будемо розглядати лише моделі збалансованих транспортних задач за критерієм вартості перевезення. Система обмежень збалансованих задач має $m \times n$ невідомих $\{x_{ij}\}$ $(i = \overline{1; m};\ j = \overline{1; n})$ та $m + n - 1$ лінійно незалежних рівнянь, m відношень (6а), які для збалансованих задач мають бути рівняннями, та n рівнянь (6б), пов’язаних умовою (8). Оскільки збалансована транспортна задача є частковим випадком задачі лінійного програмування, то кожний її план повинен мати $m + n - 1$ базисних змінних та $mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$ вільних змінних.

Алгоритм розв’язання транспортної задачі має три етапи:

а) побудова вихідного плану;

б) оцінка наявного плану;

в) удосконалення наявного плану, якщо він ще не оптимальний, та перехідна п. б).

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте задачі розподілу

2. Наведіть приклади використання задач розподілу у землеустрою

3. Які встановлюються умови при плануванні обсягів перевезень ?

4. Які характеристики необхідно мати при організації перевезень

5. Охарактеризуйте етапи розв’язку транспортної задачі за критерієм вартості перевезення

.

ТЕМА 8. МЕТОД РОЗГАЛУЖЕНЬ І МЕЖ

8.1. Особливості задачі цілочислового та дискретного програмування

У практиці розв’язання задач у землеустрою досить часто зустрічаються задачі, в яких частина або всі змінні мають бути лише з цілими або дискретними значеннями.

Необхідно розрізняти два класи таких задач:

а) значення змінних мають бути цілочисловими, але на множині цілих чисел змінюватися неперервно;

б) значення допустимо змінювати лише дискретно на множині цілих або нецілих чисел.

Наведемо приклади таких задач. При проектуванні парку тракторів відомих типів їх кількість має бутилише цілим значенням, але можуть змінюватися неперервно на множині цілих чисел. Безглуздо говорити в такій задачі про $3/4$ трактора, але є сенс говорити як про кількість k, так і про $k \pm 1$. Вимоги цілочисловості до значення величин змінних будуть з’являтися завжди, коли змінні є цілими нероздільними величинами: кількість одиниць певного виду та типу техніки, обладнання, поголів’я тварин та ін.

Дещо іншою є ситуація, коли вимога цілочисловості змінних за фізичним змістом задачі має бути замінена вимогою дискретності їх можливих значень. Назвемо деякі задачі такого класу:

– планування перевезення в контейнерах, об’єми яких приймають дискретні значення;

– планування площ земельних ділянок під розташування певних агрегатів з різними дискретними зонами обслуговування і т. ін.

Існують ґрунтовні теоретичні дослідження стосовно дискретного програмування[*].

Проблеми, обумовлені вимогами цілочисловості або дискретності стосовно множини допустимих значень змінних, з'являються не лише за умови лінійних математичних моделей, але зупинимося коротко лише на лінійних задачах.

Задача цілочислового дискретного лінійного програмування в загальному вигляді формулюється так. Знайти план $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, за якого цільова функція

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.1}$$

досягає екстремального значення, за умови виконання обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \{\leq = \geq\}\ b_i \qquad (i = \overline{1,\ m}) \tag{8.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1;\ n}); \tag{8.3}$$

усі x_j або їх частина є цілими числами або можуть приймати лише дискретні значення з певної допустимої множини.

Як відомо, екстремальне значення цільової функції *задачі лінійного програмування* досягається (за умови його наявності) у вершині опуклої множини, представленої системою обмежень (8.2), (8.3) або в точці, яка є лінійною комбінацією вершин.

Для цілочислового або дискретного лінійного програмування точкою екстремуму може бути будь-яка точка області допустимих розв'язків (8.2), (8.3), (8.4). Такі обставини обумовлюють необхідність розбудови спеціальних методів розв'язання названих задач. Далі розглянемо лише задачу цілочислового лінійного програмування.

---

[*] Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969.

Основні засади методів розв'язання задач цілочислового лінійного програмування

Порівнюючи математичну модель (1) - (4) ЗЦЛП із загальною задачею ЛП, зазначимо, що вони відрізняються умовою (4) – вимогою, щоб розв'язок був частково або повністю цілочисловим. На прикладах переконаємося, що спрощений підхід до розв'язання ЗЦЛП за схемою: розв'язати спочатку задачу ЛП, нехтуючи умовою (4) цілочисловості, а потім результати розв'язку округлити до цілих чисел, -не може гарантувати розв'язання ЗЦЛП.

Приклад. Знайти найбільше значення функції

$$f = x_1 + x_2,$$

за умови

$$x_1 - 15x_2 \geq -45$$
$$7x_1 - 11x_2 \leq 14$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0;\ \ x_2 \geq 0$$
$$x_1,\ x_2 \text{ - цілі числа.}$$

Графічний розв'язок задачі *без урахування умови цілочисловості* наведено на рис. 8. 1, де область допустимих розв'язків зображено багатокутником *ABCDE*.

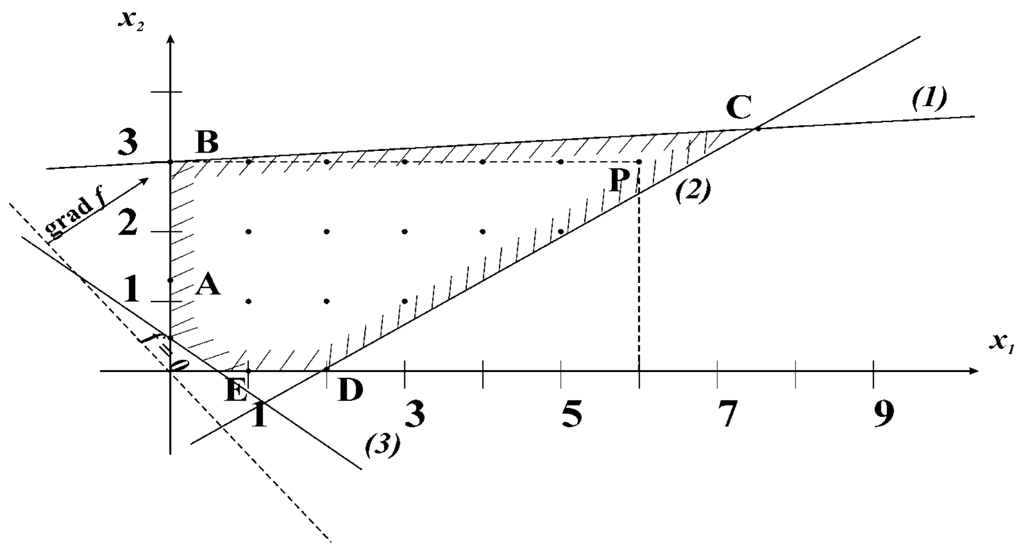


Рис. 8.1.

Найбільше значення цільової функції досягається в точці $C(7\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{2})$, що відповідає точці перетину ліній (1) та (2):

$$\begin{cases} x_1 - 15x_2 = -45 \\ 7x_1 - 11x_2 = 14. \end{cases}$$

За такого плану значення цільової функції $f = 11$ буде найбільшим.

При будь-якому округленні результату $\{(7;3);\ (7;4);\ (8;3);\ (8;4)\}$ не будуть виконані умови (1), (2) і (3) стосовно обмежень. За вимоги цілочисловості стосовно шуканих невідомих при наявних обмеженнях оптимальний план $x_1 = 6;\ x_2 = 3,$ значення цільової функції $f = 9$. Точка P, яка відповідає оптимальному плану розв'язуваної задачі, розташована всередині допустимої області.

На рис. 8. 1 зображені цілочислові "грати" області допустимих розв'язків.

Наведений приклад свідчить, що, виконавши округлення результатів розв'язку ЗЛП до цілих, не завжди можна сподіватися на розв'язок задачі цілочислового програмування.

На практиці, розв'язуючи ЗЦЛП використовують округлення результатів розв'язку ЗЛП до цілих чисел за умови, що величини компонент оптимального плану суттєво значні і похибками, обумовленими округленнями, можна знехтувати.

У загальному випадку для розв'язання задач дискретного програмування потрібні спеціальні методи пошуку екстремуму, які більш складні та вимагають більших обсягів розрахунків, ніж симплексний метод.

Методи цілочислового програмування можна розділити на три групи за характером їх основних положень:

а) методи відтинання, різні модифікації яких розбудовані на такій основній засаді: розв'язок ЗЛП без урахування вимог цілочисловості уточнюється за рахунок розширення кількості обмежень, обумовлених вимогами цілочисловості;

б) комбінаторні методи, розбудовані за певними правилами цілеспрямованої вибірки планів на множині скінченної кількості допустимих цілочислових розв'язків;

в) наближені методи пошуку оптимальних планів, які часто дозволяють знайти шуканий розв'язок за меншого обсягу обчислень та спрощення відповідних алгоритмів.

Ми розглядаємо цілочислове програмування як складову частину більш широкого класу задач дискретного програмування.

Методи пошуку цілочислових розв'язків, розбудовані на засадах відтинання, дають завжди точні рішення, але не мають широкого використання через великий обсяг обчислення за наявності значної кількості змінних.

Приклад. Для закупівлі сільськогосподарського обладнання двох типів маємо кошти 68 тис. у. о. Для розташування обладнання можна використати площу 124 м^2.

Вартість одиниці обладнання першого типу 6 тис. у. о., а площа, необхідна для розміщення та обслуговування, 10 м^2. Вартість одиниці обладнання другого типу 7 тис. у. о., а площа, необхідна для розміщення та обслуговування, 14 м^2.

Продуктивність в одиницю часу обладнання першого типу 4 у. о., а другого – 5 у. о. За названих умов необхідно визначити, в яких кількостях треба закупити обладнання кожного типу, щоб мати найбільшу загальну продуктивність.

Позначимо x_1 кількість обладнання першого типу, x_2 - другого типу; загальна продуктивність f буде визначена залежністю

$f=4x_1+5x_2$. За названих кількостей обладнання його вартість буде рівна $6x_1+7x_2$, а площа необхідна, для його використання, $10x_1+14x_2$.

Задача пошуку оптимального плану закупівлі обладнання буде сформульована так: знайти найбільше значення

$$f=4x_1+5x_2,$$

за умови, що величини x_1 та x_2 мають задовольняти вимогам:

$$\begin{aligned}&6x_1+7x_2\le 68\\&10x_1+14x_2\le 124\\&x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ \ x_1\ \textit{та}\ x_2\ -\textit{цілі числа}.\end{aligned}$$

Запишемо канонічну форму ЗЛП:

$$\max\ f=4x_1+5x_2$$

за умови

$$\begin{aligned}&6x_1+7x_2+x_3\qquad=68\\&10x_1+14x_2\quad+x_4=124\\&x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ \ x_1\ \textit{та}\ x_2\ -\textit{цілі числа}.\end{aligned}$$

Вибравши x_3, x_4 за базисні змінні, запишемо вихідну симплекс-таблицю *T* (частина *A* табл. 8. 1).

Вибравши найменше від’ємне число в f-рядку та оцінивши симплексні відношення b_{i0}/b_{is}, визначаємо провідний елемент 14, помічений колом.

Симплекс-таблиці *T* подальших перетворень записані в частинах *B* і *C* табл. 8. 1.

Таблиця 8.1

Симплекс таблиця 1

A				
БЗ	b_{i0}	-x_1	-x_2	b_{i0} / b_{is}
x_3	68	6	7	68/7
x_4	124	10	14	124/14
f		-4	-5	
B				
БЗ	b_{i0}	-x_1	-x_4	b_{i0} / b_{is}
x_3	6	1	-1/2	6
x_2	124/14	10/14	1/14	124/10
f	620/14	-6/14	5/14	-
C				
БЗ	b_{i0}	-x_3	-x_4	b_{i0} / b_{is}
x_1	6	1	-1/2	
x_2	64/14	-10/14	6/14	
f	656/14	6/14	2/14	-

Аналіз частини *C* табл. 10. 1 свідчить, що досягнуто оптимального, *але не цілочислового,* плану $x_1 = 6,\ x_2 = 4\frac{4}{7},$ за якого цільова функція $f = 46\frac{6}{7}$. Використовуючи рядок “x_2” нецілочислової компоненти плану, формуємо додаткове обмеження, яке відтинає від області допустимих розв’язків її частину *без цілочислових допустимих компонент:*

$$\frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 \geq \frac{4}{7} \Rightarrow -\frac{2}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4 + x_5 = -\frac{4}{7}.$$

Згідно з визначенням дробова частина від`ємного числа $-\frac{5}{7}$

дорівнює $\frac{2}{7}(-\frac{5}{7}-(-1))$. Використавши додаткову змінну x_5, записуємо нову вихідну *T*-таблицю, як це показано в частині *A* табл. 8. 2.

Таблиця 8.2

Симплекс таблиця 2

A				
БЗ	b_{i0}	$-x_3$	$-x_4$	b_{i0}/b_{is}
x_1	6	1	-1/2	-
x_2	64/14	-10/14	6/14	64/6
x_5	-8/14	-4/14	-6/14	8/6
f	656/14	6/14	2/14	-
B				
БЗ	b_{i0}	$-x_3$	$-x_5$	b_{i0}/b_{is}
x_1	40/6	8/6	-7/6	-
x_2	4	-1	1	-
x_4	8/6	4/6	-14/6	-
f	140/3	1/3	1/3	-
C				
БЗ	b_{i0}	$-x_3$	$-x_5$	b_{i0}/b_{is}
x_1	40/6	8/6	-7/6	5
x_2	4	-1	1	-
x_4	8/6	4/6	-14/6	2
x_6	-4/6	-2/6	-5/6	2
f	140/3	1/3	1/3	

Рядок “x_5” частини *A* табл. 10. 2 має від’ємний вільний член –8/14, тому вибір провідних стовпця та елемента виконаємо за правилами, які відповідають наявності від`ємного вільного члена.

У нашому випадку за провідний елемент виберемо –6/14, відмічений колом (можна взяти також і –4/14). Результати симплексних перетворень наведені в частині *B* табл. 8. 2.

Аналіз свідчить, що *T*-таблиця, записана в частині *B*, відповідає оптимальному, але нецілочисловому плану $x_1 = 6\frac{2}{3},\ x_2 = 4,$ за якого $f = 280/6 = 46\frac{2}{3}$. Використовуючи рядок "$x_1$" нецілочислової компоненти досягнутого оптимального плану, формуємо додаткове обмеження (відтинання):

$$\frac{2}{6}x_3 + \frac{5}{6}x_5 \geq \frac{4}{6} \Rightarrow -\frac{2}{6}x_3 - \frac{5}{6}x_5 + x_6 = -\frac{4}{6}.$$

Арифметичні спрощення не виконано, щоб зберегти співвідношення між одиницями виміру вихідних величин.

Вихідна *T*-таблиця за умови врахування наступного додаткового відтинання наведена в частині *C* табл. 10. 2. Виконавши наступне симплексне перетворення, отримаємо *T*-таблицю, записану в табл. 8. 3, яка відповідає цілочисловому плану $x_1 = 4,\ x_2 = 6,$ за якого значення $f = 46$, але f-рядок має від'ємний елемент. Розв'язувана задача на множині цілочислових розв'язків має два альтернативних оптимальних плани: $x_1 = 4,\ x_2 = 6$ (досягнутий) та $x_1 = 9,\ x_2 = 2$. Тому, якщо продовжити пошук, то одержимо зациклений процес, при реалізації якого відбувається перехід від плану (4; 6) до плану (9; 2), а потім навпаки.

Таблиця 8.3

Симплекс таблиця 3

БЗ	b_{i0}	$-x_6$	$-x_5$	b_{i0}/b_{is}
x_1	4	4	-9/2	
x_2	6	-3	7/2	
x_4	0	2	-4	
x_3	2	-3	5/2	
f	46	1	-1/2	

Наявна ситуація віддзеркалена на рис. 8. 2, де зображено цілочислові “грати” області допустимих планів і компоненти альтернативних оптимальних планів; лінія рівня $f = 46$ зображена пунктиром.

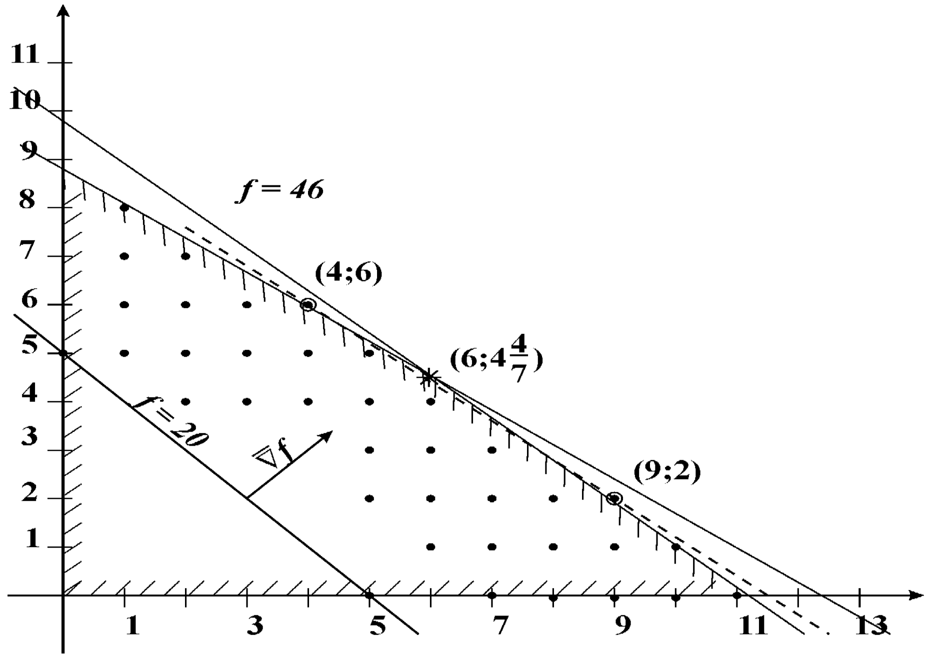


Рис. 8.2.

Практичне завершення розв’язання задачі може бути таким. Одержавши альтернативні оптимальні плани, оцінимо виконання необхідних обмежень.

При плані ($x_1 = 4,\ x_2 = 6$) маємо:

$$\begin{aligned}&(1)\ \ 6 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 66 < 68\\&(2)\ 10 \cdot 4 + 14 \cdot 6 = 124;\end{aligned}$$

а при плані ($x_1 = 9,\ x_2 = 2$):

$$\begin{aligned}&(1)\ \ 6 \cdot 9 + 7 \cdot 2 = 68\\&(2)\ 10 \cdot 9 + 14 \cdot 2 = 118 < 124.\end{aligned}$$

За обох планів загальна продуктивність обладнання становить 46. Реалізувавши перший план, одержимо економію коштів 2 тис. у. о., другий –залишок 6 м^2 від наданої площі. Маючи такі результати аналізу для завершальної вибірки плану, можна використати інші критерії: надійність обладнання, забезпеченість ремонтними деталями, витрати на експлуатацію, екологічні вимоги (шум, вібрація) і т. ін. Досягнуті цілочислові плани не можна одержати шляхом будь-якого округлення оптимального плану ($x_1 = 6,\ x_2 = 4\frac{4}{7}$) задачі без вимоги цілочисловості. Наведений приклад задачі лише з двома змінними переконливо свідчить про складність та особливості задач цілочислового програмування.

8.2. Сутність методу розгалужень і меж

У розв'язанні задач цілочислового та дискретного програмування широке застосування мають комбінаторні методи, розбудовані на засадах цілеспрямованого перебору множин допустимих планів. Ряд комбінаторних методів ґрунтуються на методі розгалужень та меж. Розглянемо схему розбудови одного з можливих варіантів названого методу.

Необхідно знайти найбільше значення функції $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за умови, що допустимі плани $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ утворюють деяку скінченну множину G, а їх компоненти мають бути повністю або частково цілочисловими або дискретними.

Пошук оптимального плану починається з розбудови певного правила обчислення величини так званої верхньої межі $\alpha(\bar{x})$ можливих значень $f(\bar{x})$ на кожній множині допустимих планів. Якщо, наприклад, розглядаємо задачу лінійного цілочислового програмування, то величина $\alpha(G)$ може бути обчислена як величина цільової функції на множині G *без урахування вимог цілочисловості.* Потім множина G певним чином поділяється на дві (або більше) підмножини G_1 та G_2, *які не перетинаються,* тобто не мають спільних планів (точок). На кожній з підмножині G_1 та G_2 є верхні межі $\alpha(G_1)$ та $\alpha(G_2)$ функції $f(\bar{x})$.

Для подальших розрахунків вибирають підмножину $G_в$ з більшою верхньою межею. За умови, що обидві верхні межі тотожні, для подальших розрахунків залишають обидві підмножини G_1 та G_2. Якщо на вибраній підмножині буде знайдено такий план $\bar{x}^*$, що $f(\bar{x}^*) = \alpha G_в$, то це оптимальний план. Якщо такого плану не знайдемо, то вибрана підмножина $G_в$ знову поділяється на дві або більше підмножин, і процес пошуку оптимального плану продовжується.

Отже, при кожному розподілі досягнутої підмножині розв’язання задачі оптимізації розгалужується частини. Оскільки число допустимих планів скінчене, то оптимальний план буде знайдено за скінченої кількості розтинання вихідної множини G на частини.

Доцільно наголосити, що до методу розгалужень і меж у загальній задачі математичного програмування відносять значну кількість алгоритмів, розбудованих стосовно окремих класів задач дискретного програмування з використанням різних правил розгалуження та пошуку меж.

Для задач лінійного цілочислового програмування вимоги розгалуження та пошуку верхніх меж не викликають особливих труднощів. Як наголошувалося раніше, для обчислення верхньої межі використовують задану цільову функцію і розрахунки виконують без урахування вимоги цілочисловості.

Розглянемо реалізацію основних засад методу розгалужень і меж стосовно задачі лінійного цілочислового програмування.

Знайти найбільше значення

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.6}$$

за умови

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1; m}) \tag{8.7}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1; n}) \tag{8.8}$$

$$x_j - \textit{цілі числа} \quad (j = \overline{1; n}). \tag{8.9}$$

За критерій визначення верхньої межі планів на множині розв'язків виберемо цільову функції $f(\bar{x})$ ЗЛП (6) - (8), тобто нехтуючи умовою цілочисловості.

Припустимо, що оптимальний план $\bar{x}^*$ ЗЛП (8.1) - (8.3) *знайдено,* але компонента x_p^* у цьому плані дробова, а не цілочислова, як це необхідно в задачі (8.6) - (8.9). Інтервал $\lfloor x_p^* \rfloor < x_p < \lfloor x_p^* \rfloor + 1$ ($[x_p^*]$- ціла частина величини x_p^*) *не містить* у собі допустимих цілочислових компонент шуканого розв'язку задачі (8.6) - (8.9). Тому шукана величина цілочислового значення x_p має задовольняти одній із нерівностей: $x_p \le \lfloor x_p^* \rfloor$ або $x_p \ge \lfloor x_p^* \rfloor + 1$.

Для пошуку цілочислового значення компоненти x_p тепер необхідно розв'язувати *дві задачі лінійного нецілочислового програмування,* пов'язані з вихідною задачею (8.6) - (8.9), *з вилученою умовою цілочисловості* для компоненти x_p, але з додатковими обмеженнями:

$$\begin{array}{ll} \max f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \max f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1; m}) & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1; m}) \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1; n) & x_j \ge 0 \quad (j = 1; n) \\ x_p \le [x_p^*] & x_p \ge [x_p^*] + 1. \end{array} \tag{8.10}$$

Остання вимога в (8.10) стосовно компоненти x_p обумовлює розгалуження вихідної задачі на дві інші задачі з тотожною цільовою функцією, але зміненими обмеженнями. Результати розв'язку задач (8.10) можуть бути такі:

а) оптимальний план однієї із задач, в порівнянні з іншою, забезпечує більше значення цільової функції; якщо такий оптимальний план має цілочислову компоненту x_p, то переходять до *пошуку цілочислового значення іншої компоненти,* інакше ту задачу з двох (8.10), для якої досягнуто найбільше значення цільової функції, знову розгалужують на дві задачі і т. д.;

б) якщо оптимальні плани кожної із задач дають тотожні значення цільової функції, необхідно продовжувати дослідження кожної з задач (8.10).

Процес розгалуження продовжують до тих пір, поки кожна задача (8.10) не завершиться цілочисловим розв'язком або не буде встановлено неможливість подальшого поліпшення розв'язку, досягнутого на певному кроці.

Приклад. Знайти найбільше значення функції

$$f = 5x_1 + 3x_2$$

за умови

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 - x_2 &\le 3 \\ x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0;& \;\; x_1,\ x_2 - \textit{цілі числа}. \end{aligned}$$

Якщо вилучити умову цілочисловості, то оптимальний план $\bar{x} = (7/2;\ 1/2)$ забезпечить найбільше значення $f = 19$. Обидві компоненти дробові, будь-яку можна обрати для розгалуження.

Вибираємо x_1, тоді згідно з теорією необхідно розв'язувати дві задачі - 1. 1 та 1. 2.

Знайти найбільше значення $f = 5x_1 + 3x_2$

за умов:

задача 1. 1.	*задача 1. 2.*
$-x_1 + x_2 \le 1$	$-x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 - x_2 \le 3$	$x_1 - x_2 \le 3$
$x_1 + x_2 \le 4$	$x_1 + x_2 \le 4$
$x_1 \le 3$	$x_1 \ge 4$
$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$	$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$

Розв'яжемо задачу 1. 1, привівши її до канонічної форми:

$$\max \quad f = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 1\\
x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 3\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 4\\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_6 &= 3.
\end{aligned}$$

Обравши x_3, x_4, x_5, x_6 за базисні змінні, записуємо їх у симплекс-таблицю T (табл. 10. 4).

Наявний план $\bar{x}$=(0; 0; 1; 3; 4; 3) має бути поліпшений, бо f-рядок містить від'ємні величини.

Оцінивши відношення b_{i0} / b_{i1} за провідний елемент виберемо 1, що дає підстави прилучити до базису x_1 та вилучити x_6.

Таблиця T, що відповідає зміненому базису, наведена в табл. 10. 4. Маємо від'ємний елемент у f-рядку та два додатних елементи в стовпці - x_2.

Таблиця 8. 4

Симплекс таблиця 1

A				
БЗ	b_{i0}	$-x_1$	$-x_2$	b_{i0} / b_{is}
x_3	1	-1	1	-
x_4	3	1	-1	3
x_5	4	1	1	4
x_6	3	1	0	3
f	0	-5	-3	
B				
БЗ	b_{i0}	$-x_6$	$-x_2$	b_{i0} / b_{is}
x_3	4	1	1	4
x_4	0	-1	-1	
x_5	1	-1	1	1
x_1	3	1	0	
f	15	5	-3	
C				
БЗ	b_{i0}	$-x_6$	$-x_5$	b_{i0} / b_{is}
x_3	3	2	-1	
x_4	1	-2	1	
x_2	1	-1	1	
x_1	3	1	0	
f	18	2	3	

Аналіз таблиці *T*, наведеної в табл. 10. 4, показує, що в задачі 1. 1 досягнуто оптимального цілочислового плану $\bar{x}$=(3; 1; 3; 1; 0; 0), за якого f=18, але *він не обов`язково буде оптимальним для вихідної задачі.* Розглянемо тепер задачу 1. 2. Система її обмежень не сумісна тому, що $x_1 + x_2 \le 4;\ x_1 \ge 4;\ x_2 \ge 0 \Rightarrow x_1 = 4;\ x_2 = 0$, але за таких значень змінних x_1 та x_2 не виконується решта обмежень умови задачі 1. 2.

Отже, розв’язок вихідної задачі тотожний розв’язку задачі 1. 1.

Розглянемо розв'язання вихідної задачі за умови, що її розгалуження виконано з використанням компоненти $x_2^* = \frac{1}{2}$ оптимального плану без урахування умови цілочисловості. За названої умови на першому кроці розгалуження необхідно розв'язати такі дві задачі.

Знайти найбільше значення $f = 5x_1 + 3x_2$ за умов:

задача 1. 1.	*задача 1. 2.*
$-x_1 + x_2 \le 1$	$-x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 - x_2 \le 3$	$x_1 - x_2 \le 3$
$x_1 + x_2 \le 4$	$x_1 + x_2 \le 4$
$0 \le x_2 \le 0$	$x_2 \ge 1$
$x_1 \ge 0$	$x_1 \ge 0.$

За умовами задачі 1. 1 визначаємо, що наявна система обмежень має єдиний розв'язок - допустимий план $x_1 = 1;\quad x_2 = 0,$ за якого f =5.

Розв'яжемо задачу 1. 2, привівши її до канонічної форми:

$$\max \quad f = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 1 \\
x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 3 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 4 \\
x_2 \qquad\qquad\qquad - x_6 &= 1 \Rightarrow -x_2 + x_6 = -1.
\end{aligned}$$

Обравши x_3, x_4, x_5, x_6 за базисні змінні, вихідну симплекс-таблицю T запишемо так, як наведено в табл. 10. 5, але враховуючи, що маємо від'ємний вільний член у стовпці b_{i0}, провідні стовпець і рядок обираються за іншими правилами, ніж за умови лише додатних вільних членів.

У рядку з від'ємним вільним членом знаходимо від'ємний коефіцієнт (за умови сумісності обмежень такий коефіцієнт обов’язково буде), відповідний йому стовпець обираємо за провідний. Для елементів провідного рядка обчислюємо симплексні відношення b_{i0} / b_{is}, але використовуємо лише ті елементи, які мають однакові знаки. Провідний рядок, а потім і провідний елемент визначаємо за розташуванням найменшого симплексного відношення.

Таблиця 8.5

Симплекс таблиця 2

A				
БЗ	b_{i0}	$-x_1$	$-x_2$	b_{i0} / b_{is}
x_3	1	-1	1	1
x_4	3	1	-1	-
x_5	4	1	1	4
x_6	-1	0	-1	1
f	0	-5	-3	
B				
БЗ	b_{i0}	$-x_1$	$-x_6$	b_{i0} / b_{is}
x_3	4	1	-1	4
x_4	3	1	1	3
x_5	1	-1	-1	
x_2	1	0	1	
f	3	-5	3	
C				
БЗ	b_{i0}	$-x_4$	$-x_6$	b_{i0} / b_{is}
x_3	1	-1	-2	
x_1	3	1	1	
x_5	4	1	1	
x_2	1	0	1	
f	18	5	8	

Для вихідної симплекс-таблиці T провідний елемент -1 розташований на перетині стовпця -x_2 та рядка x_6 і позначений кружком. Результати симплексних перетворень за обраного провідного елемента -1 наведені в частині B табл. 8. 5.

Наявність від'ємного елемента -5 в f -рядку за умови, що всі вільні члени b_{i0} невід'ємні свідчить, що досягнутий план $\bar{x}$=(0; 1; 4; 3; 1; 0) не оптимальний і може бути поліпшений, якщо, скориставшися розташованим на перетині рядка x_4 та стовпця -x_1 провідним елементом 1, залучимо до базису x_1, вилучивши x_4.

Результати відповідних обчислень наведені в табл. 10. 5. У f-рядку немає від'ємних елементів, отже, досягнутий план $\bar{x}$=(3; 1; 1; 0; 4; 0) оптимальний і цілочисловий.

Розв'язок вихідної задачі: x_1 = 3, x_2 = 1 знайдено, і він тотожний раніше обчисленому.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте класи задач, змінні яких мають бути лише з цілими або дискретними значеннями

2. Наведіть приклади задач у землеустрою, значення змінних яких мають бути лише з цілими

3. Охарактеризуйте основні засади методів розв'язання задач цілочислового лінійного програмування

4. Поясніть особливості трьох груп методів цілочислового програмування за характером їх основних положень

5. Поясніть сутність методу розгалужень і меж

ТЕМА 9. МЕТОДИ ПЛАНУВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ МЕРЕЖАМИ

9.1. Призначення та сфера використання

Темпи виробництва, його масштаби та спеціалізація окремих галузей, багатопрофільні зв'язки обумовлюють необхідність розробки ефективних методів планування та управління, які б давали можливість оцінити змінний стан системи та передбачити її майбутнє, щоб оптимізувати відповідний процес й керувати його перебігом.

Системи об'єктів дослідження разом зі зв'язками між ними називаються *мережею*. Діапазон реального існування мереж дуже широкий: мережі електропостачання, радіо- та телекомунікацій, транспортні (залізничні, автомобільні), об'єкти господарювання як в одному господарстві, так і в їх комплексі, плани виконання робіт з реалізації певних проектів і т. ін. Але прикладами таких систем можуть бути також організація поточного виробництва, реконструкція існуючого виробництва, організація капітального будівництва, реконструкція та ремонт існуючих споруд, організація науково-дослідних робіт і т. ін., де також необхідно узгоджувати та оцінювати зв'язки між окремими елементами. Методи планування та управління мережею забезпечують:

– складання календарного плану виконання певного комплексу робіт;

– оцінку необхідних трудових, матеріальних та фінансових ресурсів, затрат часу;

– контроль комплексу робіт з прогнозуванням і запобіганням можливих зривів при виконанні робіт;

– ефективне управління при чіткому розподілі відповідальності між керівниками різних рівнів і виконавцями робіт;

– оцінку дієздатність та якості системи стосовно певних критеріїв.

Для одних систем зв'язки між об'єктами реалізовані фізично (система комунікацій між населеними пунктами), для інших мають інформаційний характер або є поєднанням як фізичної реалізації, так і інформаційної.

У цій главі розглядаються дві задачі стосовно управління мережами: планування робіт з реалізації певного проекту та оцінка пропускної спроможності даної мережі.

Математичний апарат, який використовується при дослідженні мереж, розроблений у так званій теорії графів.

9.2. Основні поняття графів

Побудова математичних моделей розв'язання вказаних задач планування та управління мережами ґрунтується на дослідженні попарних (бінарних) зв'язків між об'єктами, які утворюють систему дослідження. Графічне зображення множини досліджуваних об'єктів і зв'язків між ними називається *графом*. Граф доцільно зображати у вигляді діаграми. На діаграмі об'єкти зображаються пронумерованими точками або кружками, які називаються вершинами, зв'язки між об'єктами – відрізками ліній, які з'єднують відповідні об'єкти. Якщо зв'язок між двома об'єктами *A* та *B* однобічний (від *A* до *B* є зв'язок, а зворотний зв'язок відсутній), то це зображається орієнтованим відрізком, стрілка якого відповідає напрямку зв'язку. Такий однобічний орієнтований відрізок називається *дугою*, а графічне зображення неорієнтованих попарних зв'язків між об'єктами - *ребрами* (ситуація, коли об'єкт *A* може бути пов'язаний з об'єктом *B* і навпаки). У подальшому ми не будемо в термінології відрізняти поняття графу та його діаграми. Граф, вершини якого мають лише однобічний зв'язки, називається *орієнтованим*, або *орграфом*.

Приклади графів: Карта автомобільних доріг є граф, вершини якого – населені пункти, а зв'язки (ребра або дуги у випадку однобічного руху) – дороги, які з'єднують населені пункти.

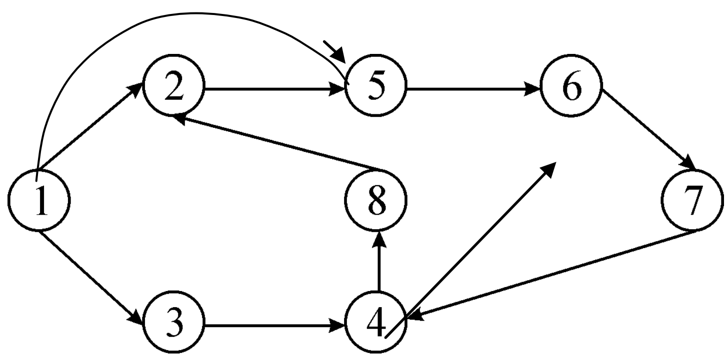
Граф вважається *завантаженим*, якщо він визначений разом з певною функцією на множині його ребер або дуг. Така функція може визначати віддаль між вершинами (карта доріг), час або вартість перевезень між населеними пунктами, пропускну спроможність лінії електропередач або каналу системи зрошення.

Маршрутом називається така послідовність ребер, коли кожна пара сусідніх ребер має одну загальну вершину.

Простим ланцюгом називається маршрут, в якому вершини не повторюються. У подальшому будемо користуватися лише простими ланцюгами, опускаючи слово простий. Ланцюг визначається послідовністю вершин, через які він проходить.

Цикл – це ланцюг, початкова вершина якого співпадає з кінцевою.

Шляхом називається орієнтований ланцюг. Отже, поняття “шлях” стосується лише орієнтованих графів, рис. 9.1.



б)

Рис. 9.1. Загальний вид графа

9.3. Побудова правильної нумерації вершин графу

Взагалі вершини графа можна нумерувати довільно, але для розв’язання багатьох практичних задач зручно виконати так звану правильну нумерацію вершин. За такої нумерації будь-який шлях від вершини з меншим номером до вершини з більшим номером буде проходити лише через вершини зі зростаючими номерами. Правильна нумерація вершин виконується за так званим “алгоритмом викреслення дуг”.

Опишемо зміст цього алгоритму, пояснюючи його етапи стосовно завантаженого графу, зображеного на рис. 9.2, для якого у квадратах наводиться деяка довільна нумерація вершин.

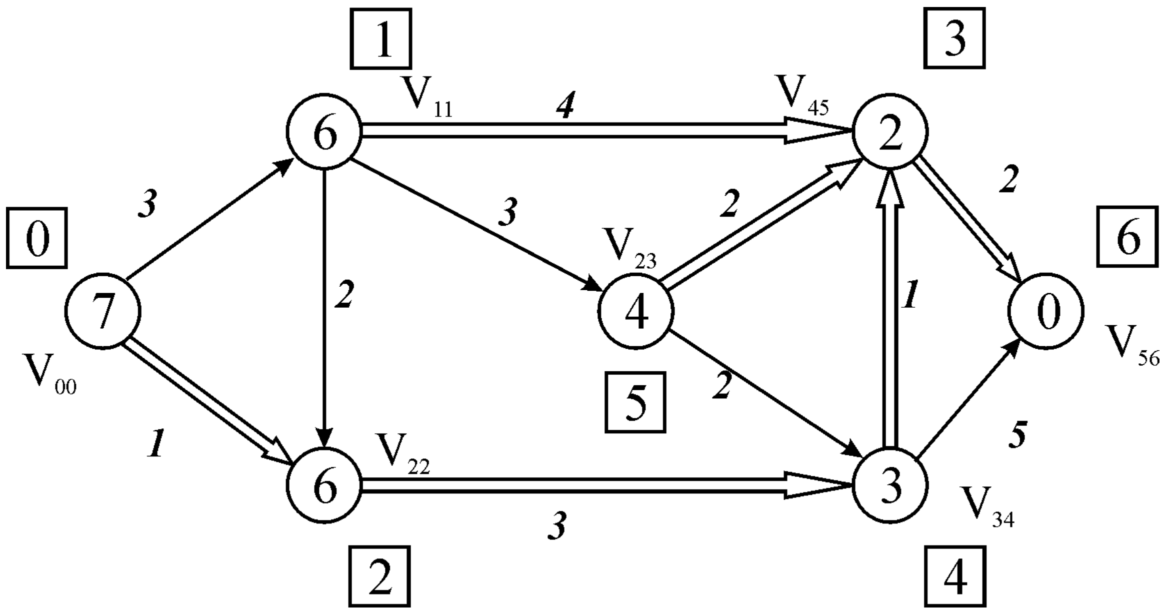


Рис. 9.2. Завантажений граф

I. Умовно виділимо всі дуги, які виходять з початкової вершини, назвемо її вершиною нульового рангу та дамо їй номер “00” (V_{00}). Тепер розглянемо вершини, в які не заходять інші дуги, окрім викреслених. Такі вершини назвемо вершинами 1-го рангу та пронумеруємо їх у довільному порядку, дотримуючись неперервності в нумерації.

За цих умов кожній вершині будемо надавати два індекси: перший – ранг вершини, другий – її порядковий номер серед множини вершин однакового рангу. На графові рис. 12. 2 маємо одну вершину “11” (V_{11})

першого рангу.

II. Умовно викреслимо всі дуги, які виходять з вершин 1-го рангу. Вершини, в які не заходять інші дуги, окрім уже позначених, назвемо вершинами 2-го рангу та пронумеруємо їх в довільній послідовності, зберігаючи неперервність в нумерації стосовно раніше використаних чисел натурального ряду. Для графу рис. 12. 2 це вершини “22” (V_{22}) та “23” (V_{23}).

Припустимо, пройдений n-1 етап і визначено вершини (n-1)-го рангу. Викреслимо всі дуги, які виходять з вершин (n-1)-го рангу. Розглянемо всі вершини, в яких закінчуються викреслені на цьому етапі дуги.

Вершини, в які заходять лише дуги, визначені на (n-1)-му етапі, утворюють множину вершин n-го рангу. Пронумеруємо їх у довільному порядку, використовуючи неперервно числа натурального ряду, починаючи з найменшого, яке не було використане для нумерації вершин (n-1)-го рангу.

Алгоритм завершується по досягненні кінцевою вершиною. Для нашого прикладу (рис. 9. 2) це вершина “56” (V_{56}), де індекс 5 означає ранг кінцевої вершини, а індекс 6 – її порядковий номер. Виконавши правильно нумерацію вершин графу, в подальшому індекс рангу вершини можна не вказувати. Алгоритм правильної нумерації вершин графу може бути представлений по-іншому[*].

9.4. Алгоритм пошуку найкоротшого шляху мережі

Виконавши правильну нумерацію графу мережі, можна ефективно реалізувати алгоритм пошуку найкоротшого шляху між заданими вершинами. Реалізацію алгоритму приведено до побудови послідовності шляхів з однієї дуги, двох дуг, трьох дуг і т. д., які з’єднують вершини

[*] Кузнецов А. В., Холод Н. И. Математическое программирование: Учеб. пособие. – Минск: Вышейша шк., 1984.

певного рангу з кінцевою вершиною. При цьому перегляд вершин виконується в послідовності зменшення їх номерів.

На кожному етапі алгоритму відбувається перехід від вершини більш високого рангу до вершини меншого рангу за умови, що із множини всіх шляхів, які починаються в одній і тій же вершині, необхідно залишити для наступного кроку реалізації алгоритму лише найкоротший шлях від цієї вершини до завершальної. За правильної нумерації вершин такий упорядкований перехід у послідовності зменшення рангів відбувається автоматично, навіть за умови, коли нумерацію рангів вершин опущено.

Розглянемо реалізацію алгоритму на прикладі графу, зображеного на рис. 9.2. Згідно з алгоритмом будемо рухатися від кінцевої вершини V_{56} до початкової V_{00}, крокуючи послідовно від вершин більш високого рангу до вершин меншого рангу.

У кружках, які зображають вершини графу, будемо записувати найкоротшу віддаль від вершини (n-1)-го рангу до кінцевої вершини. Одночасно найкоротший шлях від кожної вершини до кінцевої будемо відмічати подвійною стрілкою.

У кружку останньої кінцевої вершини V_{56} записуємо “0”, бо звідси виконуємо відлік віддалі. Потім переходимо до вершини 4-го рангу - в прикладі це вершина V_{45}. Від цієї вершини в кінцеву маємо лише один шлях: (V_{45}, V_{56}), його довжина дорівнює двом одиницям виміру, її і запишемо у вершині V_{45}, а відповідну дугу позначимо на графові подвійною стрілкою.

Переходимо до вершини 3-го рангу V_{34}. З цієї вершини в кінцеву маємо два шляхи: (V_{34}, V_{56}) та (V_{34}, V_{45}, V_{56}). Найкоротшим є останній. Його одержуємо, додаючи дугу (V_{34}, V_{45}), до вже побудованого шляху (V_{45}, V_{56}) та відмічаючи шлях (V_{34}, V_{45}) подвійною стрілкою.

Довжина шляху (V_{34}, V_{45}, V_{56}) дорівнює 1+2=3, записуємо це число у вершині V_{34}. Шлях (V_{34}, V_{56}) при наступних пошуках не використовуємо, тому що з вершини 3-го рангу вже знайдено найкоротший шлях до кінцевої вершини.

Переходимо до вершин 2-го рангу: V_{22}, V_{23}. Розглянемо шляхи, якими можна перейти від цих вершин до вершин вищого рангу. З вершини V_{22} до вершини вищого рангу можна потрапити лише по дузі (V_{22}, V_{34}). Її відмічаємо подвійною лінією та записуємо в V_{22} число 3+3=6 – найкоротша віддаль від V_{22} до V_{56}, враховуючи, що найкоротша віддаль від V_{34} до V_{56} уже визначена.

З вершини V_{23} можна потрапити в вершини вищого рангу або по дузі (V_{23}, V_{34}) або по дузі (V_{23}, V_{45}). Обчислюємо шлях від V_{23} до V_{56} за умов руху із V_{23} по названим дугам. Шлях (V_{23}, V_{45}, V_{56}) має довжину 2+2=4, шлях (V_{23}, V_{34}, V_{56}) 2+3=5. Порівнявши названі величини, приходимо до висновку, що найкоротшим шляхом від V_{23} до V_{56} буде шлях (V_{23}, V_{45}, V_{56}), отже дугу (V_{23}, V_{45}) позначаємо подвійною лінією, а в вершині V_{23} ставимо “4”.

Розглянувши всі вершини 2-го рангу, переходимо до вершин 1-го рангу. У наведеному прикладі це лише V_{11}, з якої виходять дуги (V_{11}, V_{22}), (V_{11}, V_{23}) та (V_{11}, V_{45}). Розглядаємо й оцінюємо шляхи, які починаються цими дугами та закінчуються в V_{56}: (V_{11}, V_{45}, V_{56}), (V_{11}, V_{23}, V_{45}, V_{56}) та (V_{11}, V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}).

Решту шляхів, що починаються цими дугами й закінчуються в V_{56}, не розглядаємо, бо вони мають дуги, які не позначені подвійною стрілкою (шляхи з непозначеними подвійною стрілкою дугами не можуть бути найкоротшими до кінцевої вершини).

Обчислюємо довжину кожного з трьох названих шляхів та вибираємо найкоротший: (V_{11}, V_{45}, V_{56}). Довжину цього шляху 4+2=6 записуємо в V_{11}, позначивши подвійною лінією дугу (V_{11}, V_{45}).

Отже, найкоротші шляхи як від V_{11}, так і від V_{22} до V_{56} мають однакову довжину – шість одиниць.

Перейдемо до розгляду вершини V_{00}. З неї виходять дві дуги - (V_{00}, V_{11}) та (V_{00}, V_{22}), користуючись якими можна дістатися до вершин вищого, ніж нульовий, рангу. З двох названих дуг меншу довжину має дуга (V_{00}, V_{22}). Тому найкоротший шлях від початкової вершини V_{00} до кінцевої V_{56} буде (V_{00}, V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}), його довжина - сім одиниць. Складові дуги шляху всі позначені подвійною лінією. Якщо завантаження графу рис. 9.2 тлумачити не як відстані, а як тарифи перевезень вантажу, то ми знайшли шлях найменшої вартості перевезення з вершини V_{00} до V_{56}.

Зауваження 1. Використання описаного алгоритму дає можливість визначити найкоротший шлях та найменшу відстань від довільної вершини графу до кінцевої: найменша відстань записується в кружках, які зображають вершини, а найкоротший шлях відмічається на графові подвійною лінією. Наприклад (рис. 9.2): найкоротший шлях з вершини V_{11} до V_{56} має довжину шість одиниць і проходить через вершини (V_{11}, V_{45}, V_{56}), з вершини V_{22} – теж шість одиниць і проходить через вершини (V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}).

Зауваження 2. Описаний алгоритм побудований на так званому "принципі оптимальності": якщо найкоротший шлях від початкової вершини до кінцевої проходить через деяку вершину V_i, то відрізок цього шляху від вершини V_i до кінцевої вершини є найкоротшим серед усіх шляхів, які з'єднують вершину V_i та кінцеву. Так, у розглянутому прикладі найкоротший шлях від V_{00} до V_{56} (V_{00}, V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}) як свої складові має найкоротші шляхи до кінцевої вершини від усіх вершин, через які він проходить.

9.5. Побудова графу планування та управління мережею

Розглянемо методи планування та управління при реалізації проектів створення складних систем, якими можуть бути як виробничі, так і науково-дослідні системи. Щоб скласти план виконання робіт за такими проектами, необхідно зобразити його деякою математичною моделлю, яка називається моделлю мережі і є відображенням певних послідовностей виконання робіт і взаємозв'язків між ними з урахуванням необхідних матеріальних ресурсів. Отже, у цьому розділі під *моделлю мережі* будемо розуміти план виконання комплексу взаємопов'язаних робіт, представлений у специфічній формі графу, який називається *графіком мережі*.

Основними елементами графіка мережі є поняття події та роботи.

Термін *робота* використовується в системі планування та управління мереж (ПУМ) у широкому розумінні. По-перше, це певна реальна робота, яка потребує затрат матеріальних ресурсів та відповідного терміну виконання. Кожна така робота має бути чітко визначеною, конкретною та стосуватися відповідального виконавця, без наявності якого марно говорити про планування.

По-друге, до поняття роботи відносять чекання – процес у часі, який не потребує ніяких матеріальних затрат (наприклад, затвердіння бетону після виконанню відповідних робіт, висихання фарби тощо).

По-третє, *фіктивна робота* – це природний, логічний взаємозв'язок між двома або кількома роботами чи їх завершенням, який не потребує затрат праці, матеріальних ресурсів або часу. Такий взаємозв'язок показує, що можливість виконання однієї роботи безпосередньо залежить від результатів іншої. Термін виконання фіктивної роботи приймають рівним нулю.

Подія – це фіксація моменту завершення певного етапу виконання проекту. Подія може бути як результатом однієї роботи, так і підсумковим результатом декількох робіт. Подія може відбутися лише тоді, коли будуть виконані всі роботи, які передують події. Наступні роботи можуть розпочатися лише за умови, що відповідна подія відбулася. Отже, для всіх безпосередньо попередніх робіт подія фіксує момент їх закінчення, а для безпосередньо наступних – початок.

Серед подій ПУМ виділяють *вихідну та завершальні події*. Вихідна подія не має попередніх робіт та подій стосовно досліджуваного в моделі комплексу робіт. Завершальна подія не може мати наступних робіт і подій. Події, які визначають термін виконання певної роботи, назвемо *початковою та кінцевою*.

Подію на графові ПУМ зображають кружками (вершини графу), а роботи - орієнтованими дугами, які показують, які роботи необхідно виконати, щоб відбулася певна подія, та які роботи можна виконувати, якщо подія відбувалася. Отже, будь-яка робота на графові ПУМ позначається двома подіями, між якими вона знаходиться. Подія ж може належати кільком роботам, які можна розпочинати, якщо відповідна подія відбулася. Фіктивні роботи на графові ПУМ позначаються штриховою лінією без зазначення часу. На рис. 9.3 наведено граф, який узагальнено описує комплекс будівельних робіт при спорудженні виробничого корпусу. На початку, і по завершенні реальної роботи повинна бути лише одна подія, бо роботи ідентифікуються за номерами подій, між якими виконуються, тому введено фіктивні роботи (3; 4) та (5; 4).

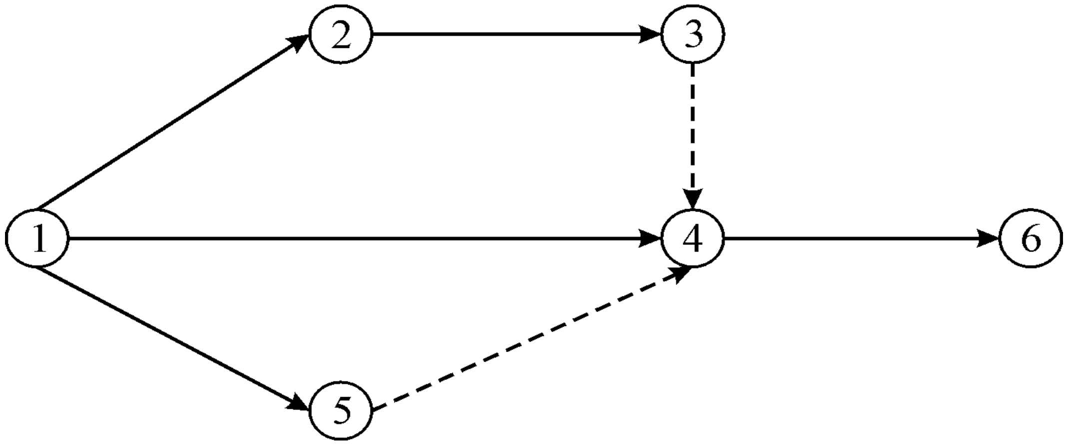


Рис. 9.3. Граф з фіктивними подіями

Використовуються два принципи побудови графів ПУМ. При реалізації одного з них роботи зображаються дугами, а вершини відповідають (співставляються) подіям, які означають завершення робіт. Це так званий граф “події - роботи”. Але використовується і інший підхід до побудови графів ПУМ – без подій.

За таким принципом роботи є вершинами графу, а дуги означають залежність між певними роботами в послідовності їх виконання. Побудовані за таким принципом графи ПУМ, як правило, більш місткі та менш зручні для аналізу та реалізації в ЕОМ.

З вище зазначених причин на практиці ширше використовується побудова графу ПУМ за принципом “події - роботи”. Саме цей принцип будемо використовувати в подальшому.

Порядок та правила побудови графів ПУМ. План реалізації проекту виконання комплексу робіт починається з побудови відповідного графу.

У планованому процесі виділяються роботи, які відповідають певним етапам, складається реєстр робіт і подій, аналізується послідовність виконання робіт і взаємозв’язки між ними, за роботами закріплюються виконавці.

Про визначення термінів виконання робіт буде сказано нижче. Виходячи з розподілу процесу реалізації проекту на роботи та терміни їх виконання, будують відповідний граф ПУМ. Потім виконують аналіз побудованого графу та його оптимізацію за обраними критеріями.

При побудові графу ПУМ необхідно дотримуватися певних правил, щоб у подальшому можна було досліджувати його.

Графічне зображення вимог щодо побудови графів ПУМ наведено на рис. 9.4 (позиції a-k).

1. Граф ПУМ не повинен мати “глухих кутів”, тобто подій, з яких не виходить жодної роботи, окрім завершальної події (рис. 4, а). Поява “глухих кутів” подій свідчить про не досить ретельно виконаний аналіз

робіт та їх взаємозв'язків.

2. На графові не може бути "хвостових" подій (окрім вихідної події), тобто подій, яким не передує жодна робота. На рис. 9. 4, б такою "хвостовою" подією є подія 3; вона не може відбутися, отже, не можуть відбутися і наступні події.

3. Граф не може мати замкнутих контурів і петель, тобто шляхів, які з'єднують певні події з ними ж (рис. 9.4, в, г).

Поява замкнутих контурів вимагає перегляду складу робіт та їх взаємозв'язків, після змістовного аналізу яких завжди з'являється можливість уникнути замкнутих контурів і петель.

4. Дві довільні події повинні бути безпосередньо пов'язаними не більше ніж однією дугою – роботою. Ця вимога обумовлена тим, що роботи позначають двома індексами (i, j), які відповідають подіям "i" та "j".

У дійсності треба виконати кілька робіт, які розпочинаються та завершуються одночасно, при одних і тих же подіях початкових та кінцевих, то в таких випадках необхідно ввести фіктивні події та фіктивні роботи (рис. 9.4, д), паралельні роботи при цьому замикаються на фіктивні події (рис. 9.4, е).

5. На графові ПУМ повинна бути лише одна вихідна та лише одна завершальна подія. Якщо це об'єктивно не так (початок реалізації комплексу робіт можна розпочинати паралельно з декількох робіт - рис. 9.4, є), то необхідно ввести фіктивні події та роботи, як це показано на рис. 9.4, ж.

Фіктивні події та роботи можуть вводитися і через інші умови. Однією з таких умов є відображення залежності подій, не пов'язаних з реальними роботами.

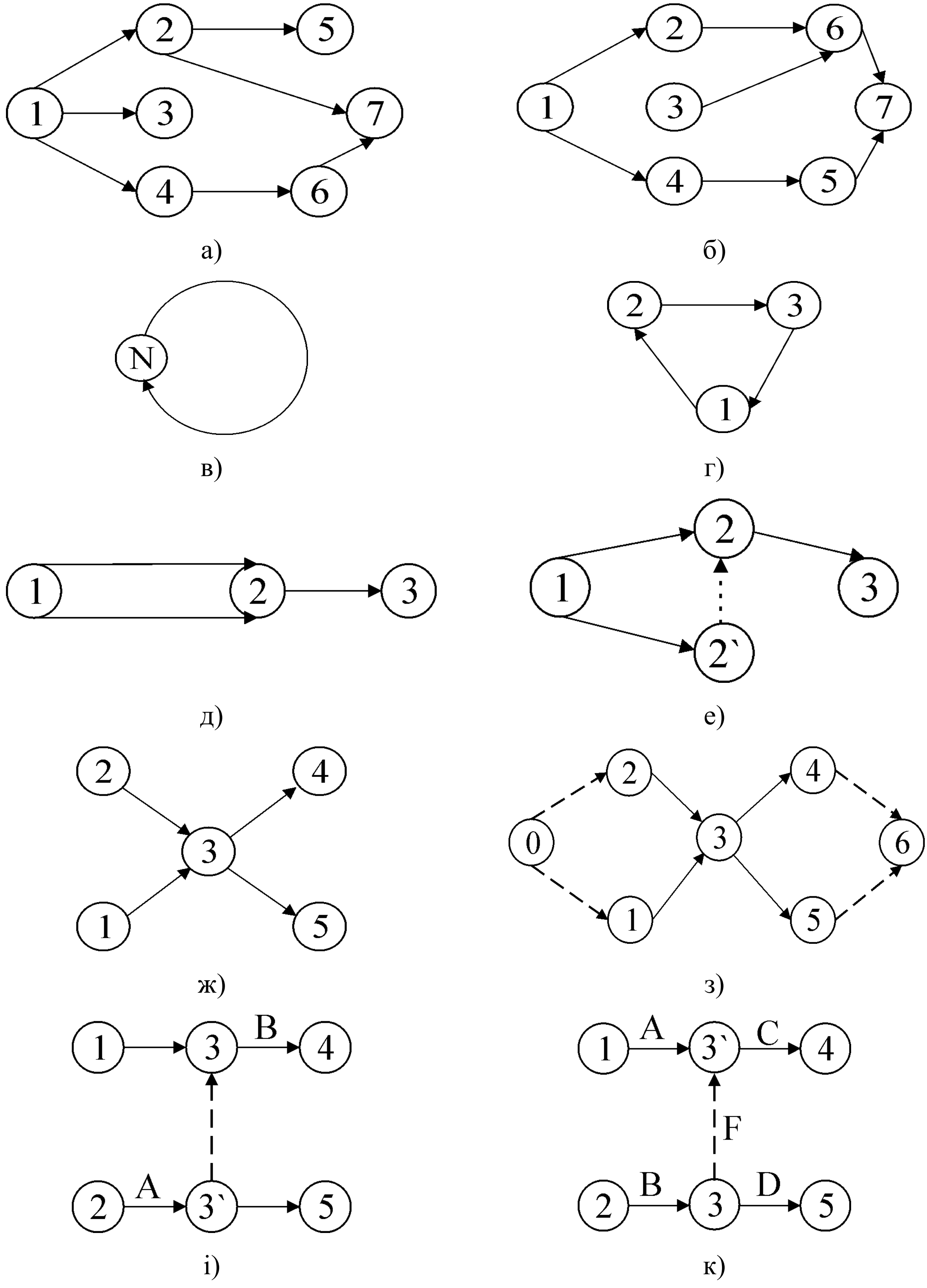


Рис. 9.4. Графічне зображення вимог до побудови графіків ПУМ

Наприклад, роботи A та B (рис. 9.4, і) можуть виконуватися технологічно незалежно одна від одної, але в умовах конкретного виробництва робота B не може розпочатися раніше, ніж завершиться робота A. За таких обставин необхідно ввести фіктивну роботу C (рис. 9. 4, к).

Другий випадок – неповна залежність робіт. Наприклад, робота C може бути розпочата лише по завершенні робіт A та B, але робота D - лише по завершенні роботи B і не залежить від роботи A. Тоді необхідно ввести фіктивну роботу F та фіктивну подію 3′, як показано на рис.9.4, к.

Фіктивні роботи можуть бути введені і для відображення реальних відстрочок і чекань - в цих випадках вони характеризуються відповідним часом.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте призначення та сфера використання методів планування та управління мережами
2. На чому ґрунтуються задачі планування та управління мережами
3. Охарактеризуйте основні поняття графів
4. Поясніть побудову правильної нумерації вершин графа
5. Поясніть сутність алгоритму пошуку найкоротшого шляху мережі
6. Назвіть основні ознаки побудови графа планування та управління мережею

ТЕМА 10. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ ІГОР

10.1. Основні поняття та визначення теорії ігор

В економічних системах будь-якого рівня в умовах ринку з'являється багато задач, в яких ціла сукупність підсистем має протилежні інтереси (це можуть бути виробничі підсистеми, землеустрійові, фінансові та інші).

Ситуація, в якій є декілька учасників із різними інтересами, називається конфліктною ситуацією або конфліктом (наприклад, діяльність фірми в умовах ринку).

Модель конфліктної ситуації називається грою, а учасники конфліктної ситуації – гравцями.

Від реального конфлікту гра відрізняється тим, що ведеться за визначеними правилами. Правила гри – це допустимі дії кожного з гравців у тій чи іншій ситуації. Для позначення можливої реалізації таких правил використовується термін "партія". Словом "хід" позначається вибір гравцем однієї з дій, котра дозволяється правилами гри, та її здійснення. Правилами гри передбачається, що наприкінці партії проводяться грошові розрахунки. Стратегією гравця називається план, за яким він здійснює свій вибір у довільній можливій ситуації. Гравець уже перед початком партії знає, який хід він буде робити в довільній ситуації (вибравши стратегію своєї поведінки). Стратегія гравця називається оптимальною, якщо при багаторазовому повторенні гри вона забезпечує цьому гравцю максимально можливий середній виграш (або мінімально можливий середній програш).

Визначення 1. Гра називається грою N осіб, якщо за правилами даної гри гравці розподіляються на N множин, котрі не перетинаються, так, що гравці, які входять в одну множину, мають однакові цілі.

Нехай виграш k-го гравця (k =1, 2, …, N) наприкінці партії дорівнює $f_к$. Якщо $\sum_{k=1}^{N} f_k = 0$, то гра називається грою з нульовою сумою.

Якщо N=2, то це означає, що один гравець виграє стільки, скільки другий програє. Тоді в кінці партії гравець, що програв, платить гравцю, який виграв, виграш. Далі будемо розглядати ігри з нульовою сумою, в котрих беруть участь два гравці, кожен із яких може зробити лише один хід і має тільки скінченну кількість виборів. Такі ігри називаються іграми двох осіб із нульовою сумою.

Визначення 2. Кожен із можливих способів дії гравця називається чистою стратегією.

Нехай у першого гравця m чистих стратегій, а у другого n. Позначимо через a_{ij} виграш першого гравця, котрий він отримає, якщо вибере свою i-ту чисту стратегію, а другий гравець вибере свою j-ту чисту стратегію. Очевидно, що величина програшу другого гравця в цьому випадку буде дорівнювати теж a_{ij}.

Визначення 3. Із чисел a_{ij} ($i = 1,m\ ,\ j = 1,n$) можна скласти матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, яка називається платіжною матрицею.

Рядки матриці A відповідають чистим стратегіям першого гравця, а стовпці – чистим стратегіям другого гравця.

Визначення 4. Гру, що визначається платіжною матрицею A, у якої m рядків та n стовпців, називають скінченною грою вимірності $m \times n$.

Визначення 5. Число $\alpha = \max_i(\min_j a_{ij})$ називається нижньою ціною гри, або максиміном, а рядок, у якому воно стоїть, називають максимінним.

Визначення 6. Число $\beta = \min_j(\max_i a_{ij})$ називають верхньою ціною гри, чи мінімаксом, а стовпчик, у котрому воно стоїть , – мінімаксним стовпчиком.

Теорема 1. Нижня ціна гри завжди не перевищує верхню ціну гри $\alpha \le \beta$.

Визначення 7. Якщо $\alpha = \beta = \upsilon$, то число υ називається ціною гри.

Визначення 8. Гра, для якої $\alpha = \beta$, називається грою із сідловою точкою.

Якщо гра є грою із сідловою точкою, то розв‘язати її – це значить знайти ціну гри і максимінну та мінімаксну стратегії першого й другого гравців відповідно. Дані стратегії і будуть їх оптимальними стратегіями.

Приклад 1.

Дві фірми є конкурентними на ринку. Перша фірма може вирощувати сільськогосподарську продукцію одну з трьох видів A_1, A_2, A_3, а друга – одну із чотирьох видів $B_1, B_2, B_3, B_4.$ Цю продукцію фірми можуть продавати на ринку. Відома матриця А прибутків першої фірми, елемент $a_{ij}(i = 1,2,3, j = 1,2,3,4)$ якої – це прибуток першої фірми за умови, що вона вирішила випускати продукцію виду A_i, а друга фірма вирішила випускати продукцію виду B_j,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 40 & -30 & -35 & 36 \\ 35 & 25 & 15 & 20 \\ 30 & 10 & -30 & 25 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Оскільки дана матриця є матрицею виграшів першого гравця, то від’ємні елементи цієї матриці указують фактично на величину програшу першого гравця, тобто на величину виграшу другого гравця.

Треба з‘ясувати, як повинні діяти ці фірми, щоб перша отримала максимально можливий гарантований середній виграш, а друга – мінімально можливий гарантований середній програш.

Розв’язання. Перша фірма – це перший гравець. У нього є три можливі способи дії, тобто три чисті стратегії: перша – вирощувати сільськогосподарську продукцію виду A_1, друга – продукцію виду A_2, третя – продукцію виду A_3.

Аналогічно друга фірма – це другий гравець. У другого гравця чотири способи дій (чотири чисті стратегії) – випускати продукцію видів B_1, B_2, B_3, B_4. Чистим стратегіям першого гравця в матриці A відповідають рядки, а чистим стратегіям другого гравця – стовпці. Якщо перший гравець вибере свою i-ту чисту стратегію, а другий – свою j-ту чисту стратегію, то виграш першого гравця дорівнюватиме числу a_{ij}. Це число буде одночасно і величиною програшу другого гравця. Наприклад, якщо перший гравець вибере свою третю чисту стратегію (тобто перша фірма вирішить випускати продукцію виду A_3), а другий – свою першу чисту стратегію (друга фірма буде випускати продукцію виду B_2), то виграш першого гравця (тобто прибуток першої фірми) й одночасно програш другого гравця (тобто величина збитків другої фірми) складатимуть 30 грошових одиниць.

З‘ясуємо спочатку, чи буде ця гра грою із сідловою точкою. У першому рядку знайдемо найменше число. Це число $a_{12} = -35$. У другому найменшим буде число $a_{23} = 15$. У третьому $a_{33} = -30$. Тепер знайдемо серед цих чисел найбільше, тобто нижню ціну гри α: $\alpha = \max_i(\min_j a_{ij}) = \max(-35, 15. -30) = 15$. Для того щоб визначити верхню ціну гри $\beta = \min_j(\max_i a_{ij})$, знайдемо в кожному стовпчику найбільше число. У першому – це число $a_{11} = 40$, у другому – $a_{22} = 25$, у третьому –

$a_{23} = 15$, у четвертому $a_{14} = 36$. Далі серед визначених чисел виберемо найменше. Це і буде верхня ціна гри β: $\beta = min(40,25,15,36) = 15$. Отже, $\alpha = \beta = 15$, тобто гра є грою із сідловою точкою. Ціна гри $\upsilon = 15$. Це число стоїть у другому рядку і в третьому стовпчику. Тому оптимальною стратегією першого гравця є його друга чиста стратегія, а оптимальною стратегією для другого гравця – його третя чиста стратегія. Отже, перша фірма повинна випускати продукцію виду A_2, а друга – продукцію B_3. При цьому перша фірма одержить максимальний можливий середній прибуток $\upsilon = 15$ грошових одиниць, а друга буде мати мінімальний можливий середній збиток, величина якого дорівнює теж $\upsilon = 15$ грошових одиниць.

10.2. Знаходження розв'язків матричних ігор

Якщо матрична гра є грою із сідловою точкою, то, як показано вище, оптимальні стратегії гравців будуть чистими стратегіями. Якщо ж матрична гра не має сідлової точки, то вона не має розв'язку в чистих стратегіях. У цьому випадку оптимальні стратегії гравців шукають серед їх мішаних стратегій.

Визначення 9. Мішаною стратегією гравця називається вектор, координати якого являють собою ймовірності, з котрими цей гравець застосовує свої чисті стратегії. Будемо позначати стратегію першого гравця вектором $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$, а другого – вектором $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$. Із цього визначення випливає, що координати даних векторів невід'ємні та їх сума дорівнює одиниці $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Позначимо через $p^* = (p_1^*, p_2^*, p, ..., p_m^*)$ і $\bar{q}^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ оптимальні стратегії першого та другого гравців відповідно. Тоді число $\upsilon = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*$ є ціною гри.

Ціна гри – це математичне сподівання величини виграшу першого гравця й величини програшу другого гравця. Якщо кількість партій N велика, то математичне сподівання величини виграшу (програшу) гравця дорівнює наближено середньому виграшу (програшу) гравця в N партіях.

Визначення 10. Чиста стратегія гравця називається активною, якщо ймовірність її застосування в оптимальній стратегії цього гравця є додатною (більшою від нуля). Наприклад, якщо оптимальна мішана стратегія першого гравця має вигляд $p^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$, то із трьох чистих стратегій, які є у цього гравця, активними є перша і друга.

Розв‘язати гру – це значить знайти оптимальні стратегії гравців та ціну гри. Американський математик Джон Нейман довів теорему, котра є основною теоремою теорії матричних ігор:

Теорема 2. Довільна матрична гра з нульовою сумою має розв‘язок у мішаних стратегіях.

Отже, якщо гра не має розв‘язків у чистих стратегіях (тобто не є грою із сідловою точкою), то її розв‘язок треба шукати в мішаних стратегіях. Методи відшукання розв‘язків матричних ігор у мішаних стратегіях ґрунтуються на таких теоремах:

Теорема 3. Для того щоб число υ було ціною гри, заданої матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

а вектори $\vec{p}^{\,*} = \left(p_1^*, p_2^*, \dots p_m^*\right)$, $\vec{q}^{\,*} = \left(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*\right)$ – оптимальними стратегіями першого та другого гравців відповідно, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ p_i^* \geq \upsilon\ \left(j=\overline{1,n}\right);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ q_j^* \leq \upsilon\ \left(i=\overline{1,m}\right).$$

Теорема 4. Якщо один із гравців застосовує свою оптимальну мішану стратегію, то математичне сподівання його виграшу дорівнює ціні гри υ, незалежно від того, з якими ймовірностями використовує другий гравець свої активні чисті стратегії.

Найбільш простою матричною грою є гра, задана матрицею розмірності 2ґ 2

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Якщо ця гра не є грою із сідловою точкою, то оптимальними стратегіями гравців будуть мішані стратегії. Для того щоб їх знайти, скористаємося теоремою 4: якщо перший гравець використовує свою оптимальну стратегію $\overline{p}^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$, то математичне сподівання його виграшу буде дорівнювати ціні гри як у випадку, коли другий гравець застосовує свою першу чисту стратегію, так і у випадку, коли він використовує свою другу чисту стратегію. Величина виграшу першого гравця є дискретною випадковою величиною. Вона приймає значення a_{11} *та* a_{21} з ймовірностями p_1^* *і* p_2^* у випадку, коли другий гравець застосовує свою першу чисту стратегію, й значення a_{12} *та* a_{22} з тими самими ймовірностями p_1^* *і* p_2^* у випадку, коли другий гравець використовує свою другу чисту стратегію. Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків значень цієї величини на їх імовірності. Тому для визначення координат оптимальної стратегії першого гравця p^* та ціни гри υ маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* = \upsilon; \\ a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* = \upsilon; \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Аналогічно для знаходження оптимальної мішаної стратегії другого гравця треба скористатися тим, що коли він використовує свою оптимальну мішану стратегію, то математичне сподівання його виграшу буде дорівнювати ціні гри, як у випадку, коли перший гравець застосовує свою першу чисту стратегію, так і у випадку, коли перший гравець використовує свою другу чисту стратегію. Тому для визначення оптимальної стратегії другого гравця $q^* = (q_1^*, q_2^*)$ треба розв'язати систему

$$\begin{cases} a_{11} q_1^* + a_{12} q_2^* = \upsilon; \\ a_{21} q_1^* + a_{22} q_2^* = \upsilon; \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

10.3. Графічний метод розв'язання матричних ігор із платіжними матрицями вимірності 2×n та n×2

При розв'язуванні матричних ігор із платіжними матрицями розмірності 2×n і n×2 можна спочатку за допомогою графічних побудов з'ясувати, які чисті стратегії другого гравця будуть активними у випадку гри з матрицею розмірності 2×n або які чисті стратегії першого гравця будуть активними у випадку гри з матрицею n×2 . Після їх визначення оптимальні стратегії гравців та ціну гри знаходять так, як і для гри з матрицею розмірності 2 х 2.

Приклад 1.

Розв'язати гру з платіжною матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв’язання.

На площині введемо прямокутну систему координат p0z і на осі 0p відкладемо відрізок одиничної довжини $0A_2$, кожній точці котрого поставимо у відповідність деяку мішану стратегію першого гравця $\overline{p}=(p_1,p_2)$ (рис. 10.1).

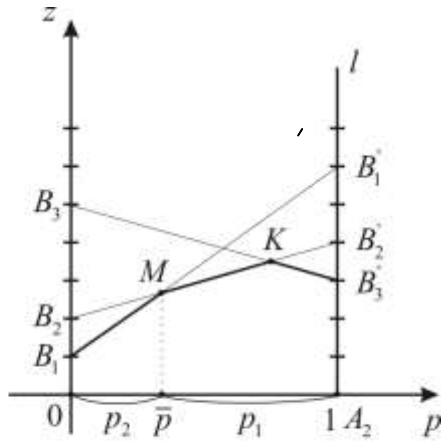


Рис. 10.1 Розв’язок гри з платіжною матрицею 1

Очевидно, що точці 0 буде відповідати стратегія $\overline{p_1}=(1,0)$, тобто перша чиста стратегія першого гравця. Аналогічно точці A_2 відповідатиме стратегія $\overline{p_2}=(0,1)$, тобто друга чиста стратегія першого гравця. Через точку A_2 проведемо пряму L перпендикулярно до осі 0p. На осі 0z відкладемо виграші першого гравця, які він отримає за умови, що другий гравець застосовує свої першу, другу та третю чисті стратегії (тобто відкладаємо числа 1, 2, 5). Цим числам на осі 0z відповідають точки B_1, B_2, B_3 відповідно. На прямій L так само побудуємо точки $B_1', B_2'\ i\ B_3'$, котрим відповідають виграші першого гравця за умови, що він використовує свою другу чисту стратегію, а другий гравець застосовує свої першу, другу та третю чисті стратегії відповідно. (Масштаби на осях 0z і 0p різні!)

З’єднаємо точки $B_1\ ma\ B_1', B_2\ i\ B_2'\ ma\ B_3\ i\ B_3'$ відрізками прямих. Якщо взяти на кожному із цих відрізків довільну точку й опустити з неї перпендикуляр на вісь 0р, то довжина цього перпендикуляра буде дорівнювати середньому виграшу (математичному сподіванню виграшу) першого гравця за умови, що він застосовує свою мішану стратегію, яка зображується точкою перетину цього перпендикуляра та осі 0р.

Очевидно, що відстані від точок ламаної $B_1MKB_3^{/}$ до осі 0р будуть дорівнювати мінімальним середнім виграшам першого гравця при довільних мішаних стратегіях цього гравця. Ламана $B_1MKB_3^{/}$ – це нижня межа середніх виграшів першого гравця.

Точка К, для котрої мінімальний середній виграш першого гравця буде найбільшим, визначає ціну гри υ та оптимальну стратегію першого гравця p^* (рис. 10.1). За цим рисунком можна з‘ясувати, які стратегії другого гравця будуть активними.

Оскільки в точці К перетинаються прямі $B_2 B_2^{/}$ і $B_3 B_3^{/}$, а їм відповідають друга та третя стратегії другого гравця, то ці стратегії і будуть активними. Отже, оптимальна мішана стратегія другого гравця q^* матиме вигляд $q^* = (0, q_2^*, q_3^*)$.

Позначимо через $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ оптимальну стратегію першого гравця. Далі запишемо системи рівнянь для визначення ціни гри υ та координат оптимальних стратегій гравців:

$$\begin{cases} 2p_1^* + 4p_2^* = \upsilon; \\ 5p_1^* + 3p_2^* = \upsilon; \\ p_1^* + p_2^* = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2q_2^* + 5q_3^* = \upsilon; \\ 4q_2^* + 3q_3^* = \upsilon; \\ q_2^* + q_3^* = 1. \end{cases}$$

Розв‘язавши ці системи, отримаємо $p_1^* = \frac{1}{4},\ p_2^* = \frac{3}{4},\ q_2^* = \frac{1}{2},\ q_3^* = \frac{1}{2},\ \upsilon = \frac{7}{2}$.

Відповідь: ціна гри $\upsilon = \frac{7}{2}$, оптимальні стратегії гравців $p_1^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right),\ q_1^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Зауваження. Якщо матриця А має розмірність n ґ 2, то на горизонтальній осі, яку позначимо через 0q, точкам одиничного відрізку відповідатимуть мішані стратегії другого гравця. На вертикальних прямих відкладають величини програшу другого гравця (тобто величини виграшу першого гравця). Будують прямі, що відповідають стратегіям першого гравця. Визначають ламану, котра відповідає верхній межі виграшу першого гравця (програшу другого гравця), і на ній знаходять точку, відстань якої від горизонтальної осі є найменшою. Ця точка й буде визначати оптимальні стратегії гравців та ціну гри.

Наприклад, для гри з платіжною матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ рисунок буде таким (рис. 10.2):

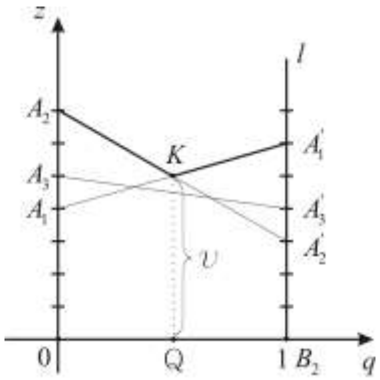


Рис. 10.2 Розв’язок гри з платіжною матрицею 2

Ламана A_2KA_1' – верхня межа виграшу першого гравця (програшу другого). Довжина відрізка KQ дорівнює ціні гри υ, точці Q відповідає оптимальна стратегія q^* другого гравця. У точці К перетинаються прямі A_2A_2' *і* A_1A_1', тому для першого гравця активними будуть його перша та друга чисті стратегії. Оптимальні мішані стратегії гравців матимуть вигляд $p^* = (p_1^*, p_2^*, 0),\ q^* = (q_1^*, q_2^*)$. Їх координати й ціна гри визначаються на основі теореми 4 попередньої лекції (так само, як у попередньому прикладі).

10.4. Розв'язання матричних ігор

Нехай треба розв‘язати матричну гру, задану матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Спочатку необхідно перевірити, чи буде ця гра грою із сідловою точкою. Якщо буде, то сідлова точка матриці є, як відомо, ціною гри, чиста стратегія першого гравця, що відповідає рядку, в якому стоїть сідлова точка, буде оптимальною чистою стратегією цього гравця.

Чиста стратегія другого гравця, котра відповідає стовпчику, в якому стоїть сідлова точка, виступатиме оптимальною чистою стратегією другого гравця. Тобто задача розв‘язана.

Якщо ж ця гра не є грою із сідловою точкою, то її можна розв'язати за допомогою лінійного програмування. Для цього треба зробити наступне:

1.Скласти пару двоїстих задач виду:

Задача 1.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} x_j \to max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n} \le 1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} \le 1; \\ \dots. \quad \dots. \quad \dots. \quad \dots. \quad \dots.; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} \le 1; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,n}.$$

Задача 2.

$$F = \sum_{i=1}^{m} y_i \to min;$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge 1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge 1; \\ .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... ; \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge 1; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0; \; i = \overline{1,m}.$$

2. Знайти оптимальний план та оптимум задачі 1 $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*), Z_{max}^*$

й оптимальний план та оптимум задачі 2 $y* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*), F_{min}^*$.

Для цього можна задачу 1 розв’язати симплекс-методом, а розв’язок двоїстої до неї задачі 2 знайти з останньої симплекс-таблиці для задачі 1.

2. Обчислити розв‘язок матричної гри за формулами:

$$\upsilon = \frac{1}{Z_{max}^*} \left(або \;\; \upsilon = \frac{1}{F_{min}^*} \right);$$

$$p^* = \upsilon \cdot y^*; \quad q^* = \upsilon \cdot x^*.$$

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте ссновні поняття та визначення теорії ігор

2. Якщо відома матриця виграшів першого гравця, то на що указують від’ємні елементи цієї матриці

3. На чому ґрунтуються знаходження розв’язків матричних ігор

4. Поясніть графічний метод розв’язання матричних ігор із платіжними матрицями вимірності 2 n та n 2

5. Поясніть сутність розв’язання матричних ігор

ТЕМА 11. ПОНЯТТЯ ПРО ЕКОНОМЕТРИКУ ЯК ЕКОНОМІЧНУ ТЕОРІЮ В ЇЇ ЗВ'ЯЗКУ ЗІ СТАТИСТИКОЮ У ЗЕМЛЕУСТРОЮ

11.1. Основні задачі econометрики

В 1931р. було створено "Міжнародне товариство розвитку економічної теорії в її зв'язку зі статистикою і математикою". В 1933р. це товариство почало видавати журнал "Економетрика".

Поняття "економетрика" ("економетрія") було загальноприйнятим терміном тільки в період його зародження. В подальшому почали швидко розвиватися окремі напрямки економетрики: теоретичні дослідження, що грунтувалися на використані математики й статистики; абстрактно-теоретичні дослідження математичних моделей економіки, які не використовують емпіричних даних; дослідження чисто емпірично-статистичного спрямування.

Економетрія пов'язана з науковою діяльністю таких видатних вчених, лауреатів Нобелівської премії як Р.Фішер, Я.Тімберген, В.Леонтьєв, Т.Кумпанс. Варто також нагадати про внесок в економетрію вчених: В.К.Ошітрієва, В.І.Борткевича, Н.А. Столярова, Н.Н.Шапошнікова, Е.Е.Слуцького, Л.В.Канторовича.

Економетрія, в широкому розумінні, є сукупністю різного роду економічних досліджень, що здійснюються з використанням математичних методів. Поряд із економіко-математичними дослідженнями, економетрія включає в свою сферу також всі області застосування математичних методів для розв'язування прикладних економічних задач, задач землеустрою і т. п. Тому економетрія у вузькому розумінні – це використання статистичних методів в економічних (зокрема в землеустрійових) дослідженнях, а саме, побудова математико-статистичних моделей економічних процесів, оцінка параметрів моделей.

Якщо результати економічної теорії мають якісний зміст, то економетрія привносить в них емпіричну суть. Якщо математична економіка виражає економічні закони у вигляді математичних співвідношень, то економетрія здійснює статистичну перевірку цих законів, використовуючи емпіричну інформацію. Одержані математичними методами і виражені мовою математики результати лише тоді мають цінність, якщо їх можна інтерпретувати мовою економіки.

Економетрія використовує традиційні математико-статистичні та спеціально розроблені методи для виявлення кількісних взаємозв’язків між економічними показниками. Економетрія має економічну та математичну складові, причому економічній складовій надається перевага.

Важливою проблемою є правильне прогнозування певної реальної ситуації, в якій відбувається досліджуваний економічний процес, а також знаходження таких важелів впливу на цей процес, за допомогою яких він розвивався б необхідним чином. В реальній обстановці часто трапляються ситуації, коли розв’язуючи одну й ту ж саму проблему, її дослідники можуть пропонувати різні, часом навіть протилежні методи її вирішення.

Першою із основних задач економетрії є дослідження розвитку економічних процесів і прогнозування їх динаміки. Вдалим чи невдалим буде цей прогноз залежатиме від того, чи поталанить дослідникові виявити рушійні чинники, що впливають на ці процеси і які не завжди можна визначити. Врахування цих факторів в математичних моделях дає змогу раціонально керувати ними і, таким чином, досягти наміченої мети.

Будь-який економічний процес характеризується певними економічними показниками (параметрами), значення яких залежать від великої кількості факторів, що впливають на них і які практично врахувати всі неможливо. Але в кожній конкретній ситуації зі всієї множини цих факторів суттєвий вплив на економічні параметри процесу має лише деяка обмежена кількість факторів.

Тому другою задачею економетрії є правильний вибір факторів при побудові математико-статистичних моделей. Бажано, щоб питома вага решти факторів, які будуть неврахованими в моделі, була настільки несуттєвою, що ігнорування їх в процесі побудови моделі не призводила до значних відхилень поведінки модельованої системи (процесу) порівняно з реальною.

В наш час економічна теорія дослідила та вивчила значну кількість стабільних зв’язків між показниками економічних систем (процесів). Так, наприклад, добре вивчені такі зв’язки: між попитом споживача на продукцію та сумою коштів, що він може витрачати на неї; між рівнем безробіття та інфляцією; між обсягом виробництва та рядом показників, таких як основні фонди, термін їхньої експлуатації, кількість оборотних коштів, професійний рівень персоналу; між продуктивністю праці та рівнем механізації виробничих процесів, технологією виробництва.

Дослідження такого роду зв’язків і їм подібним дає можливість спрямовувати економічні процеси в потрібному напрямку, тобто реалізовувати бажану економічну політику не лише на мікрорівні, а й на рівні економіки держави. Для ефективної реалізації економічної політики необхідно здійснювати регулювання певних економічних параметрів, а для цього необхідно володіти достеменною інформацією про зв’язок їх із іншими, ключовими величинами, щоб в майбутньому прийняти правильне рішення на мікро-, мезорівні чи в масштабах всієї країни.

В реальних умовах, навіть в стабільних залежностях між показниками економічних величин, завжди проявляється певна невідповідність. Особливо виникають труднощі під час аналізу маловивчених і нестабільних зв’язків. Тому в сучасній економічній теорії в дослідженнях використовують апарат математичних моделей, ймовірнісні та статистичні методи аналізу параметрів цих моделей.

Отже, третьою важливою задачею економетрії є вибір та побудова математико-статистичної моделі, здійснення ряду модельних експериментів, аналіз одержаних результатів і перенесення їх на реальну економічну систему (процес) як основу для прийняття належних управлінських рішень.

З’ясуємо сутність кореляційного та регресійного аналізу.

Якщо в природничих науках в значній мірі мають справу з функціональними залежностями між змінними, то в економіці (землеустрою) такі залежності в більшості випадків бувають відсутні. Наприклад, не може існувати строгої функціональної залежності між доходами громадян і їх витратами на споживання, між ціною на певний товар і попитом на нього.

11.2. Статистичні методи й економетрика

Відсутність жорсткої функціональної залежності між змінними в сфері, наприклад, землеустрою пов’язана з рядом причин. Так, при аналізі впливу однієї змінної на іншу може бути не врахований ряд факторів, що впливають або на кожну із змінних окремо, або на всі одночасно. Цей вплив може бути як безпосереднім, так і через цілий ланцюг інших факторів, врахувати які практично неможливо, оскільки вони мають випадкове походження. Тому в економічних дослідженнях як правило мають справу не з функціональною, а зі статистичною або кореляційною залежністю, вивченням якої займається кореляційний та регресійний аналіз.

Для прикладу розглянемо дві змінні Y та X, між якими можуть існувати дві форми зв’язку – кореляційний та регресійний.

При наявності кореляційного зв’язку між Y та X ці змінні вважають рівноправними в тому розумінні, що їх не поділяють на залежну та незалежну.

В цьому випадку вирішується лише питання про наявність між цими змінними зв'язку, про який нас інформує кореляційний (коваріаційний) момент K_{xy} (cov(x,y)). У випадку, коли $K_{xy} \neq 0$ (cov(x,y)≠0), цей зв'язок існує.

В протилежному випадку – $K_{xy}=0$ (cov(x,y)=0), – зв'язок відсутній. Суттєвість цього зв'язку (тісноту) вимірюють коефіцієнтом кореляції r_{xy} ($|r_{xy}| \leq 1$ або $-1 \leq r_{xy} \leq 1$). Цей зв'язок не має направленого характеру. Серед змінних Y та X немає залежної і незалежної.

Регресійний зв'язок між змінними Y та X є таким, що коли одна із них, наприклад X, вибирається як незалежна змінна, то її називають пояснюючою змінною (регресором), а другу змінну Y – залежною (пояснювальною, регресантом). В цьому випадку пояснююча змінна X (регресор) є причиною зміни залежної змінної Y (регресанта).

Так, збільшення доходу населення викликає збільшення витрат на споживання; збільшення ціни на товар викликає зменшення попиту на нього; зниження відсоткової ставки збільшує кількість інвестицій. Але залежності, наведені в прикладах, в дійсності, не будуть однозначними.

Кожному конкретному значенню пояснюючої змінної $X=x_i$ буде відповідати множина значень змінної Y. Отже, пояснююча змінна X впливає на Y в середньому.

11.3. Поняття про парну лінійну регресію

В економічних дослідженнях найбільш широке використання знайшли моделі лінійної регресії, хоча це і є спрощений засіб в моделюванні реальних економічних процесів.

Ґрунтовне вивчення і застосування методики побудови лінійних моделей надає необхідну теоретичну базу для створення більш складних, нелінійних моделей, які в більшій мірі відповідають реальним економічним процесам.

Якщо в рівняння включено лише одну пояснюючу змінну, то одержуємо теоретичну модель, яка дістала назву парної лінійної регресії:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + \varepsilon_i \tag{11.1}$$

Теоретичну модель для парної лінійної регресії можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_2 + \varepsilon_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_n + \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{11.2}$$

або у векторно-матричній формі, співвідношення (11.1) буде мати такий вигляд:

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon} \tag{11.3}$$

де:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Для визначення теоретичних коефіцієнтів β_0, β_1 необхідно буде використати всі значення (x_i, y_i) $(i = \overline{1, n})$ змінних Y і X генеральної сукупності, що практично здійснити неможливо.

Тому переходимо до побудови так званого емпіричного рівняння на базі інформації, одержаної із статистичної вибірки.

Емпіричне рівняння регресії має вигляд:

$$\begin{aligned}
y_1^* &= \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + e_1, \\
y_2^* &= \beta_0^* + \beta_1^* x_2 + e_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_i^* &= \beta_0^* + \beta_1^* x_i + e, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n^* &= \beta_0^* + \beta_1^* x_n + e_n
\end{aligned} \tag{11.4}$$

який аналогічно із теоретичною моделлю, запишемо у векторно-матричній формі:

$$\vec{y} = X\vec{\beta}^* + \vec{e} \tag{11.5}$$

де

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta}^* = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Будь-яка математична модель є спрощеним образом оригіналу, який може являти собою економічну систему, в якій взаємодіє безліч факторів, які впливають на залежну змінну, багато з яких фізично не можливо включити до моделі.

Тому задачу побудови якісної математичної моделі в формі рівняння регресії на основі певної статистичної вибірки можна умовно поділити на такі три етапи:

1) вибір форми рівняння регресії (специфікація моделі);

2) визначення параметрів, які є складовими частинами вибраного рівняння;

3) аналіз якості рівняння як математичної моделі досліджуваного процесу та перевірка моделі на адекватність емпіричним даним із можливим наступним удосконаленням специфікації рівняння зв'язку.

Найбільш очевидним є вибір специфікації моделі у випадку парної регресії, оскільки його можна виконати візуально, використовуючи графічне зображення емпіричних даних як точок (x_i, y_i) на кореляційному полі в декартовій системі координат, які утворюють так звану діаграму розсіювання.

11.4. Деяка інформація про випадкові збудники $\varepsilon_i \ (i = \overline{1, n})$

Причини, які спонукають появу випадкових збудників ε_i в рівняннях (1) можуть бути такими:

1. Слід пам'ятати, що будь-яка регресійна модель є в певній мірі спрощенням реальної ситуації, яка в дійсності є складним переплетінням різних факторів, багато з яких практично неможливо врахувати в моделі.

Так, наприклад, попит на товар буде визначатися як його ціною, так і ціною на ті товари, які можуть його заміняти, ціною на супроводжуючі товари, доходами споживачів та їх вподобаннями і т.ін.

Однак в цьому переліку не враховуються традиції як релігійні, так і національні, особливості кліматичних умов і багато інших факторів.

При цьому ще виникає проблема визначення факторів, які за певних умов будуть домінуючими, а якими можна знехтувати. В ряді випадків існують фактори, які не можна використати в моделі тому, що для них проблематично одержати необхідні статистичні дані.

Наприклад, величина заощаджень родини визначається не лише доходами її членів, а й їхнім здоров'ям, інформацію про що в цивілізованих країнах тримають в таємниці.

Окрім цього, багато факторів мають випадковий характер (погода, стихійні лиха), які посилюють неоднозначність.

Неправильно вибрана функціональна залежність. Це може трапитися внаслідок недостатнього дослідження процесу, який підлягає моделюванню. Так, виробнича функція, яка описує залежність Y від одного фактора X може бути виражена лінійним співвідношенням:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X, \tag{11.6}$$

хоча насправді, при більш ретельному дослідженні, стане відомо, що співвідношення між Y та X матиме нелінійний характер, наприклад:

$$Y = \beta_0 X^{\beta_1}, \tag{11.7}$$

Вибір форм функціональної залежності між змінними називають специфікацією моделі.

3. Можуть бути невірно вибрані пояснюючі змінні.

4. В багатьох моделях залежність між факторами має складну форму зв’язку між цілими комплексами подібних величин.

Так, при дослідженні залежності попиту Y в якості пояснюючої вибирають змінну, яка уособлює складну комбінацію індивідуальних запитів, що мають на неї певний вплив поряд із факторами, які враховані в моделі.

Здійснюється так зване агрегування пояснюючих змінних, що може бути однією із причин появи в моделі випадкового збудника ε_i.

5. Можуть бути допущені помилки при аналізі та обробці статистичних даних, які також сприятимуть появі ε_i.

6. Як правило, будь-яка статистична інформація є обмеженою і, крім цього, більшість моделей описуються неперервними функціями, але при цьому використовуються вибіркові дані, які мають дискретну структуру.

7. Слід також зважити на наявність людського фактора, який в тій чи іншій мірі обов'язково є присутнім в будь-якому економічному процесі, але врахувати який в моделі поки що практично неможливо. В певних ситуаціях цей фактор може навіть якісну модель деформувати до примітивного рівня.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення економетрії
2. Охарактеризуйте основні три задачі економетрії
3. З якою залежністю мають справу в економічних дослідженнях
4. Охарактеризуйте особливості парної лінійної регресії
5. Назвіть причини, які спонукають появу випадкових збудників (неточностей) при моделюванні процесів у землеустрою

ТЕМА 12. ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ РИЗИКУ ТА НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

12.1. Поняття про стохастичне програмування

Прийняття рішень в управлінні певними процессами далеко не завжди здійснюється на основі точно визначеної інформації. В такому випадку виникає проблема розв’язання задач оптимізації в умовах ризику та невизначеності.

Якщо для постановки задачі використовується інформація, яка має ймовірністний характер, то говорять, що рішення приймається в умовах ризику. Якщо інформація про характер зміни параметрів, які описують даний процесс, недостатньо відома, та таку ситуацію називають невизначеною.

Для дослідження цих ситуацій розробляються спеціальні методи, які називаються методами стохастичного програмуввання.

Наприклад, задача розподілу сільськогосподарської продукції між споживачами є стохастичною задачею, якщо попит є випадковою величиною.

Задачі стохастичного програмування можна розбити на три групи:

1) з стохастичними коефіцієнтами цільової функції та детермінованими обмеженнями;

2) з детермінованими стохастичними коефіцієнтами цільової функції та стохастичними системи обмеженнь;

3) з випадковими вільними членами системи обмежень.

У задачах стохастичного програмування велике значення має поняття якості розв’язання задачі. Відповідно до цієї ознаки задачі стохастичного програмування розділяють на чотири групи: задачі з цільовою функцією, яка має 1) математичне сподівання; 2) дисперсію; 3) математичне сподівання та дисперсію; 4) встановлену межу, яку з певною ймовірністю не повинна перевищувати цільва функція.

12.2. Пиклад задачі стохастичного програмування та її розв'язання

Наведемо приклад задачі стохастичного програмування.

Задача. Треба перевезти корми від двох земельних ділянок трьом фермам. Обсяг кормів кожного постачальника заданий: a_1=300 одиниць, a_2=200 одиниць. Попит на продукцію кожної із ферм може змінюватися від різних умов. Для кожної із ферм визначена ймовірність попиту, яка наведена у наступних таблиці 12.1.

Таблиця 12.1

Попит на корми першої ферми	Ймовірність попиту	Попит на корми другої ферми	Ймовірність попиту	Попит на корми третьої ферми	Ймовірність попиту
100	0,3	200	0,2	150	0,4
150	0,2	150	0,3	280	0,15
175	0,4	180	0,3	200	0,25
120	0,1	140	0,2	130	0,2

Витрати на перевезення одиниці кормів від кожного поля до кожної ферми наведені в таблиці 12.2.

Таблиця 12.2

Поля	Ферми		
	1	2	4
1	7	9	2
2	8	5	7

Якщо попит на корма ферми буде більшим за її наявність, то треба буде платити штраф за недопостачання кожної одиниці в сумі 20 тис. гр., 18 тис. гр., 22 тис. гр., а якщо попит буде меншим, то виникають витрати, пов’язаніз зберіганням одиниці продукції в сумі 10 тис. гр., 12 тис. гр., 15 тис. гр. (відповідно) .

Треба визначити обсяги перевезення кормів від полів до ферм $\left(x_{ij}\right)$, які забезпечили б за заданих умов мінімальні витрати на постачання й зберігання кормів, а також на штрафи за незадоволений попит.

Потрібно скласти математичну модель задачі.

Розв’язання.

Знайдемо мтематичне сподівання попиту кожної ферми.

M(b_1) = 100·0,3+150·0,2+175·0,4+120·0,1=142 ;

M(b_2) = 200·0,2+150·0,3+180·0,3+140·0,2=199 ;

M(b_3) = 150·0,4+280·0,15+200·0,25+130·0,2=142 .

Порівняємо кількість кормів на полях і попит на них всіх ферм:

$\sum_{i=1}^{2} a_i = 500$ од.; $\sum_{j=1}^{3} M\left(b_j\right) = 519$ од.

Оскільки $\sum_{i=1}^{2} a_i < \sum_{j=1}^{3} M\left(b_j\right)$, то виникає незадоволений попит:

$\sum_{j=1}^{3} M\left(b_j\right) - \sum_{i=1}^{2} a_i$ = 519-500 = 19 од.

Запишемо невідомі задачі, що характеризують обсяги перевезень кормів з кожного поля до кожної ферми у вигляді матриці

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix},$$

а невідомі величини, що характеризують недопостачання (Δ_j^-) чи зберігання кормів в кожної ферми (Δ_j^+) двома векторами:

$$\Delta^+ = \left(\Delta_1^+, \Delta_3^+, \Delta_2^+\right),$$
$$\Delta^- = \left(\Delta_1^-, \Delta_3^-, \Delta_2^-\right).$$

Тоді математичну модель задачі можна записати як задачу лінійного програмування:

$$\begin{aligned} Z = 7x_{11} + 9x_{12} + 2x_{13} + 8x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 20\Delta_1^- + \\ +18\Delta_2^- + 22\Delta_3^- + 10\Delta_1^+ + 12\Delta_2^+ + 15x_{22}\Delta_3^+ \to \min \end{aligned}$$

за умов

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200, \\ x_{11} + x_{21} + \Delta^+ - \Delta^- = 142, \\ x_{12} + x_{22} + \Delta^+ - \Delta^- = 199, \\ x_{13} + x_{23} + \Delta^+ - \Delta^- = 178, \\ X_{ij} \geq 0, \Delta_j^+ \geq 0, \Delta_j^- \geq 0, i = \overline{1,2}\,,\ j = \overline{1,3}. \end{gathered}$$

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте три групи задач стохастичного програмування

2. При якій умові розподілу сільськогосподарської продукції між споживачами є стохастичною задачею

3. Наведіть приклади задачі стохастичного програмування

4. Поясніть алгоритм розв’язку задач стохастичного програмування1. .

ЛЕКЦІЯ 13. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ У ЗЕМЛЕУСТРОЇ

13.1. Порівняння табличних даних

Яким повинно бути порівняння і чи завжди потрібно його проводити? Якщо заміряти деяке явище та отримати емпіричну щільність розподілу його значень, то буде констатація фактичного стану речей без визначення, як змінити цей стан.

Отриманий розподіл може бути використаний для більш глибокого аналізу взаємозв'язку двох або більше величин, порівняння груп між собою. Для досягнення порівнянності даних використовуються різноманітні системи класифікації даних. Але не завжди можна бути впевненим, що враховано всі фактори. Отже, тлумачення вхідних даних міститиме деякий ступінь невизначеності. Тому необхідно виключити випадкові взаємозв'язки і врахувати неявні.

Установлення причинних взаємозв'язків – одна з головних задач аналізу. І хоча сама кореляція не визначає напрямів причинної залежності (що є причиною, а що наслідком), у землеустрійових дослідженнях саме кореляцію використовують для визначення її («у городі бузина...» потрібно виключити).

Щодо неявних взаємозв'язків, то дослідник найчастіше відчуває їх інтуїтивно, що не випливає з аналізу, скажімо, лінійної залежності. Тому необхідно спробувати використати складніші функціональні залежності. Інколи одна тенденція може перекрити іншу. Тоді потрібна додаткова інформація і додатковий аналіз. Однак у цьому пошуку треба вчасно зупинитися.

Емпіричне узагальнення експериментальних результатів. При прогнозуванні дуже важливо отримати узагальнені результати.

Для узагальнення емпіричних даних, отриманих у результаті проведення спостережень та експериментів, можна класифікувати їх таким чином:

- переписи, цензи або вибіркові обстеження, що мають статистично репрезентативний характер;
- дослідження, в яких спостерігаються або вимірюються тільки характеристики, що являють інтерес для дослідника, або конкретні статистичні дослідження;
- експерименти, в яких дослідник самостійно регулює або змінює деякі фактори.

Межі між цими групами дещо розпливчасті: де кінчається простий відбір і починається втручання людини — сказати іноді важко, однак штучний лабораторний експеримент очевидно відрізняється від простого накопичення емпіричних даних. Визначальним моментом тут є те, якою мірою дослідник контролює і регулює розглядувані фактори.

Характерною рисою наукових результатів є те, що вони повинні мати узагальнюючий характер, бути відтворюваними. У будь-якому представницькому дослідженні якого-небудь емпіричного явища має бути розглянуто більше за одну сукупність даних. Отже, повторення — це ключовий елемент при збиранні даних.

Методи аналізу первинної інформації передбачають використання отриманої інформації для проведення попередньої обробки її та аналізу, щоб на його основі підготувати для керівництва рішень з конкретної проблеми.

Насамперед необхідно визначити можливості у землеустрою для ефективного використання земельних ресурсів. Аналіз можливостей у землеустрою є необхідною передумовою для прийняття управлінських рішень з використання та охорони земель.

13.2. Методи кількісного та якісного аналізу інформації

Для проведення аналізу інформації, виходячи з поставленої мети, вибирають метод аналізу:

- функціональний – вивчається процес і закони функціонування аналізованої системи чи об'єкта;
- генетичний – вивчає поведінку показників, спираючись на їх попередні значення та тенденції їх розвитку. Метод використовується при вивченні інформаційних потоків;
- граничний – вивчає граничні економічні ефекти та наслідки від впровадження управлінських рішень з землеустрою;
- дескриптивний (описовий) – використовується для опису явищ і подій, пов'язаних з об'єктом дослідження. Використовується в роботі з базами даних і знань, в об'єктно-орієнтованих технологіях тощо;
- SWOT-аналіз – використовується для оцінювання сильних (Strengths) і слабких (Weaknesses) внутрішніх сторін фірми, потенційних зовнішніх можливостей (Opportunities) фірми, потенційних перешкод і небезпек (Threats), для чого формуються групи характеристик, що їх описують;
- методика І. Ансоффа оцінки можливостей і небезпек ринку – методика сприйняття підприємством сильних і слабких сигналів, що надходять із зовнішнього середовища. Сильні сигнали надходять з несподіваних джерел і швидко впливають на економічні показники розвитку підприємства (наприклад, процеси різкого зниження платоспроможності споживачів, зміни цін, інфляції тощо). Слабкі сигнали – це ранні й неточні ознаки настання важливих подій, які в майбутньому можуть мати велике значення для підприємства (наприклад, зростання конкуренції зарубіжних фірм, збільшення кількості безробітних, непідготовленість інфраструктури ринку та ін.).

– ситуаційний аналіз – послідовний розгляд вибраних елементів мікросередовища та оцінювання їх впливу на землеустрійові можливості підприємства (знання стану ринку, врахування поведінки споживачів, оцінка реакції підприємства на дії конкурентів, політика відносно постачальників і посередників та ін.);

– метод «5 х 5», який був запропонований А. Месконом, передбачає визначення найзначущих елементів зовнішнього середовища. Він включає 5 питань про 5 чинників зовнішнього середовища:

1. Якщо ви володієте інформацією про фактори зовнішнього середовища, назвіть хоч би 5 з них.

2. Які 5 факторів зовнішнього середовища для вас найбільш небезпечні?

3. Які 5 факторів із планів ваших конкурентів вам відомі?

4. Якщо ви вже визначили напрями стратегії, які 5 факторів могли б стати найбільш важливими для досягнення цілей?

5. Назвіть 5 зовнішніх сторін, зміни яких могли б стати сприятливими для вас.

– STEP-аналіз – методика аналізу ключових елементів макросередовища підприємства, яке містить такі фактори:

– соціально-демографічні (старіння населення, формування нових структур сім’ї та ін.);

– техніко-технологічні (поява нових матеріалів, технологій, товарів);

– економічні (динаміка цін, валютних курсів і т. д.);

– екологічні (охорона навколишнього середовища, вимоги до екологічної чистоти продуктів та ін.);

– етичні (етичні і моральні норми сучасного бізнесу);

– політичні (протекціонізм);

– правові (законодавство у сфері захисту прав споживачів, реклами, товарних знаків, антимонопольне законодавство і т. п.);

– GAP-аналіз – вивчає стратегічне розходження між бажаним – чого підприємство хоче досягнути в своєму розвитку – і реальним – чого фактично може досягти підприємство, не змінюючи свою нинішню політику. GAP-аналіз – «організована атака на розрив» між бажаною і реальною дійсністю підприємства;

– динамічний – використовується для вивчення поведінки та оцінювання стану будь-якого об’єкта у плині часу для визначення стадій його життєвого циклу, тенденцій розвитку, для вирішення стратегічних задач розвитку та прогнозування;

– статичний – досліджує явище чи поведінку об’єкта у конкретний момент часу. Використовується для отримання деякого інформаційного зрізу за заданими параметрами;

– стохастичний – використовується для вивчення поведінки об’єктів, параметри яких приймають випадкові значення в різні моменти часу. Використовується при вивченні поведінки покупців, їх уподобань, попиту на нові продукти і послуги;

– експертний – аналіз результатів опитування експертів з використанням вагових коефіцієнтів, пріоритетів для попереднього дослідження проблем;

– системний – загальний аналіз економіки як економічної системи та її складових, дослідження законів функціонування її.

Можна виділити такі статистичні методи аналізу:

– кореляційний – вивчає взаємодію та ступінь щільності взаємозв’язку показників системи в процесі функціонування її;

– регресійний – використовується для визначення залежності змінної від однієї чи декількох незалежних змінних (проста чи багатофакторна регресія). Використовується для розв’язання таких задач, як визначення залежності між обсягом продажу на конкретному сегменті ринку та ціною, сервісом, рекламою і т. ін.;

- дисперсійний – використовується для виявлення впливу деякого фактора на певний економічний показник (наприклад, вплив реклами на обсяги продажу в польових дослідженнях ринку);
- варіаційний – використовується для визначення ступеня впливу варіацій незалежних змінних на залежні у лабораторних експериментах;
- дискримінантний – використовується для визначення різниці та проведення чітких меж між заданими (існуючими) групами об’єктів за допомогою комбінації значень декількох незалежних змінних, що характеризують об’єкти, достатніх для розмежування груп та для віднесення будь-якого нового об’єкта до певної групи за його характеристиками;
- факторний – використовується для дослідження взаємозв’зку між змінними з метою визначення найбільш впливових суттєвих факторів. Наприклад, при сегментації ринку з усіх змінних, що описують вимоги до продукту та потреби потенційних споживачів, необхідно вибрати основні – принципові – для формування сегментів;
- кластерний – використовується для об’єднання об’єктів у групи або кластери, так щоб відмінності між об’єктами одного кластера були меншими за відмінності між об’єктами різних кластерів.

Треба зауважити, що кожний математичний метод, застосовуваний при обробці інформації, має характерні для нього обмежувальні умови. За неправильно обраного методу обробки може бути втрачено важливу інформацію.

Якщо метод обробки отриманого в ході досліджень масиву даних обрано правильно й обмежувальні умови поставлено коректно, уявлення фірми про її зовнішнє середовище відповідатиме дійсності.

Якщо метод обробки даних обрано неправильно, то уявлення фірми про зовнішнє середовище буде викривленим і, відповідно, її стратегічна поведінка не буде адекватною до ринкових реалій. Щоб уникнути цього, для обробки даних у землеустрої можна використовувати метод експертних оцінок, який дає найбільш коректні результати обробки найціннішої, інтуїтивної інформації.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте одну з головних задач аналізу
2. Наведіть класифікацію для узагальнення емпіричних даних, отриманих у результаті проведення спостережень та експериментів
3. Назвіть характерну рису наукових результатів досліджень
4. Поясніть методи аналізу для проведення аналізу інформації
5. Охарактертизуйте статистичні методи аналізу

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Конституція України від 28.06.1996 № 254к/96-ВР // zakon1.rada.gov.ua.

2. Земельний кодекс України. Відомості Верховної Ради України. – 2002. – № 3–4. – Ст. 27.

3. Податковий кодекс України

4. Закон України "Про землеустрій", Офіційний вісник України.– 2003. – № 125. – С. – 122–142.

5. Закон України "Про охорону земель": Прийнятий 19.06.2003 № 962-IV // Відомості Верховної Ради України. – 2003. – № 39. – Ст. 349.

6. Закон України "Про державний контроль за раціональним використанням та охороною земель": Прийнятий 19.06.2003 № 963-IV // Відомості Верховної Ради України. – 2003. – № 39. – Ст. 350.

7. Про державний земельний кадастр: закон України від 7 липня 2011 року № 3613-VI // Відомості Верховної Ради України. – 2012. – № 8. Ст. 61.

8. Про оренду землі: Закон України

9. Про затвердження Положення про моніторинг земель : Постанова Кабінету Міністрів України, Зібрання урядових нормативних актів України. – 1994. – № 1. – Ст. 5.

10. Про Положення про державну систему моніторингу довкілля: Постанова Кабінету Міністрів України, Збірник урядових нормативних актів України. – 1998. – № 9. – Ст. 211.

11. Положенням про порядок інформаційної взаємодії органів Мінекоресурсів України та інших суб'єктів системи моніторингу довкілля при здійсненні режимних спостережень за станом довкілля. Режим доступу: http://search.ligazakon.ua/l_doc2.nsf/link1/FIN18809.html.

12. Браславец М. Е. Экономико-математические методы в организации планирования сельского хозяйства. – К.: Урожай, 2018. – 237 с.

13. Кузнецов А. В., Холод Н. И. Математическое программирование: Учеб. пособие. – Минск: Вышейша шк., 2014. – 351 с.

14. Ульянченко О. В. Методи оптимізацій в економіці: Навч. посібник / Харк. держ. аграр. ун-т ім. В. В. Докучаєва. – Харків, 2010. – 567 с.

15. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие / Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, Я. Н. Жихар и др.; Под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск: БГЭУ, 2015.

16. Щепак В. В. Економічна модель системи моніторингу земель / В. В. Щепак // Бізнес Інформ // – 2016. – № 11. – С. 124–128.

17. Білявський Г. О. Удосконалення агроекологічного моніторингу для забезпечення збалансованого розвитку агросфери Поділля / Г. О. Білявський, О. В. Мудрак // Вісник ХНАУ. – 2009. – № 3. – С. 175–183.]

18. Ботезат О.П. Зарубіжний досвід землекористування як крок до реалізації земельної реформи в Україні / О. П. Ботезат // Інвестиції: практика та досвід. – № 24. – 2016. – С. 116–119.

19. Відтворення та ефективне використання ресурсного потенціалу АПК /Теоретичні і практичні аспекти/ Відп. редактор акад. УААН В. М. Трегобчук. – Київ: Ін-т економіки НАН України, 2013. – 259 с.

20. Вишиванюк М. В. Моніторинг земель сільськогосподарського використання / М. В. Вишиванюк, В. Х. Брус, І. Ф. Баланюк, П. Є. Матковський // Сталий розвиток економіки. – 2011. – Вип. 5. – С. 3-7.

21. Гоголь Т. В. Формування системи державного регулювання земельних відносин та управління землекористуванням на сільських територіях / Т. В. Гоголь // Теорія та практика державного управління. – 2011. – Вип. 4. – С. 174-181.

22. Горлачук В.В. Економіка підприємства [навч. посібник] / В. В. Горлачук, І. Г. Яненкова. – Миколаїв: Вид. ЧДУ ім. Петра Могили, 2010. – 344 с.

23. Дорош О. С. Інвентаризація земель: методичні підходи до її проведення / О. С. Дорош // Агросвіт. – 2015. –№ 11. – С. 24–30.

24. Кривов В. М. Екологічно безпечне користування Лісостепу України. Проблеми охорони ґрунтів / В. М. Кривов. – К. : Урожай, 2008. – 299 с.

25. Куйбіда В.С. Збірник «Регіональний розвиток та просторове планування територій: досвід України та інших держав-членів Ради Європи» / В.С. Куйбіда, В.А. Негода, В.В.Толкованов. – К.: Крамар, 2009. – 170 с.

26. Літвак О. А. Екологічне оцінювання структури земельних ресурсів регіону/ О. А. Літвак // Актуальні проблеми економіки. – 2014. – № 9 (159). – С. 287–294.

27. Механізми управління земельними відносинами в контексті забезпечення сталого розвитку / Ш.І. Ібатуллін, О.В. Степенко, О.В. Сакаль [та ін.]. – К.: Державна установа «Інститут економіки природокористування та сталого розвитку Національної академії наук України», – 2012. – 52 с.

28. Муляр О. А. Реформування аграрного сектора в країнах Центральної і Східної Європи //Економіка АПК. – 2017. № 4–5. – С. 354 - 359.

29. Новаковський Л. Я. Соціально-економічні проблеми сучасного землекористування [монографія] / Л. Я. Новаковсьий, М. А. Олещенко. – К.: Урожай, 2007. – 276 с.

30. Оцінка ефективності землекористування за різних технологій вирощування сільськогосподарських культур / О.В. Ульянченко, Г.І.

Шарий, Є.М. Улько, О.Б. Бухало // Вісник аграрної науки. – 2014. – № 2. – С. 66 – 71.

31. Панас Р. Сучасні проблеми здійснення моніторингу ґрунтового покриву України / Р. Панас, М. Маланчук // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2013. – Вип. 78. – С. 201–204.

32. Попова О. Л. Екодіагностика природо-господарської організації території України: агроландшафтний аспект/ О. Л. Попова // Економіка і прогнозування. – 2012. – № 3. – С. 91–101.

33. Покращення ландшафтів [Tymoshevskyi V. Improving Landscape Spacious Development / V. Tymoshevskyi, I. Yurko, G. Sharyi // International Journal of Engineering & Technology. – 2018. – № 7 (3.2). – P. 463-468].

34. Ракоїд О. О. Агроекологічна оцінка земель сільськогосподарського призначення Спеціальність : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. сільськогосп. наук : спец. 03.00.16 « Екологія» / О. О. Ракоїд. – К., 2007. – 21 с.

35. Сохнич А. Я. Проблеми використання та охорони земель в умовах ринкової економіки/ А. Я. Сохнич. – Львів:Укр.технології. – 2002. – 252 с.

36. Третяк В. М. Стале (збалансоване) землекористування як фактор підвищення економічної ефективності використання сільськогосподарських земель / В. М. Третяк, В. Ю. Свентух // Землеустрій, кадастр і моніторинг земель. – 2015. – № 4. – С. 24 – 31.

37. Управління земельними ресурсами. Т. 1. Законодавча база / О.І. Митрофанова, М.О. Пілічева, А.Я. Сохнич [та ін.] – Донецьк : УНИТЕХ, 2012. – 406 с.

38. Управління земельними ресурсами. Т. 2. Економіка землекористування / П.П. Колодій, О.І. Черечон, В.В. Тишковець [та ін.] – Донецьк : УНИТЕХ, 2012. – 438 с.

39. Управління земельними ресурсами. Т. 3. Кадастрова діяльність та інформаційні системи / А.С. Попов, А.О. Луньов, С.Г. Могильний [та ін.] – Донецьк : УНИТЕХ, 2012. – 445 с.

40. Управління земельними ресурсами. Т. 4. Екологічне, планувальне та будівельне право / О.С. Петраковська, Я.І. Гузова. – Донецьк : УНИТЕХ, 2012. – 282 с.

41. Управління земельними ресурсами. Т. 5. Сталий розвиток урбанізованих територій / О.С. Петраковська, Ю.О. Гацій. – Донецьк : УНИТЕХ, 2012. – 485 с.

42. Управління земельними ресурсами. Т. 6. Сталий розвиток сільських територій / С.С. Радомський, В.В. Тимошевський, А.С. Попов [та ін.] – Донецьк : УНИТЕХ, 2012. – 461 с.

43. Управління земельними ресурсами. Т. 7. Теорія та методологія наукових досліджень / Ю.Ф. Креніда, А.Г. Петрушин, О.В. Мотильова [та ін.] – Донецьк : УНИТЕХ, 2012. – 237 с.

44. Шарий Г.І. Державне землевпорядкування в Україні: парадигма розвитку / Г.І. Шарий // Землевпорядний вісник. – 2014. – № 10. – С. 4 – 6.

45. Shary G.I. Government regulation of land relations: circulation of agricultural land / G.I. Shary, V.P. Dubischev // Економіка і регіон. – 2017. – Вип. 3(64). – С. 48 – 51.

46. Шарий Г.І. Інституційне забезпечення розвитку земельних відносин в аграрному секторі України: монографія / Г.І. Шарий; Полтавський НТУ ім. Юрія Кондратюка. – Х.: Смугаста тип., 2016. – 601 с.

47. Шарий Г.І. Проблеми земельно-орендних відносин в аграрній сфері / Г.І. Шарий, В.І. Тимошевський // Землевпорядний вісник. – 2016. – № 6. – С. 26 – 29.

48. Яцук І. П. Аналіз агроекологічного стану ґрунтів Житомирської області за допомогою методики еколого-агрохімічної паспортизації /

І. П. Яцук // Збалансоване природокористування. – 2014. – Вип. 2. – С. 107–110.

49. Awotwi, A., Anornu, G., Quaye-Ballard, J. & Annor, T. (2018), Monitoring land use and land cover changes due to extensive gold mining, urban expansion, and agriculture in the Pra River Basin of Ghana, 1986–2025, Land Degradation & Development, Online Version of Record before inclusion in an issue, doi.org/10.1002/ldr.3093.

50. Francesco Nex, f., Delucchi, L., Gianelle, D., Neteler, M., Remondino, F. & Dalponte, M. (2017), Land Cover Classification and Monitoring: the STEM Open Source Solution, European Journal of Remote Sensing, 48:1, pp. 811-831, DOI: 10.5721/EuJRS20154845.

51. Hansen, M. & Loveland, T. (2011), A review of large area monitoring of land cover change using Landsat data. Remote Sensing of Environment, Vol. 122, doi.org/10.1016/j.rse.2011.08.024: pp. 66-74.

52. Kingwell, R., John, M. and Robertson, M. (2007), Areview of a community-based approach to combating land degradation: dry land salinity management in Australia, Environment Development and Sustainability, DOI:10.1007/s10668-007-9091-6: p. 51.

53. Krüger, T., Gotthard, M., & Ulrich, S. (2013), Land-use monitoring by topographic data, Journal Cartography and Geographic Information Science, Vol. 40, Issue 3, pp. 220-228, doi.org/10.1080/15230406.2013.809232.

54. Litvak, O.A. (2014), Environmental evaluation structure of land resources in the region, Aktualni problemy ekonomiky, No. 9(159), pp. 287-294.

55. Li B. Forest Landscape Restoration in the Netherlands. Reference Document [Електронний ресурс] / B. Li, M. Mann, G. Oforiwaa and other. – Wageningen Centre of Development Innovation, Wageningen University, 2010. – 81 p. – Режим доступу: http://www.forestland-scaperestoration.org

56. Moudon, A. & Hubner, M. (2000), Monitoring Land Supply with Geographic Information Systems. Theory, Practice and Parcel-Based Approaches. John Wiley & Sons, Inc., New York, 327 p.

57. Popova, O.L. (2012), "Ecological diagnosis of the natural and economic organization on theterritory of Ukraine: agriculturallandscape of aspect", Ekonomika i prohnozuvannia, No. 3, pp. 92-101.

58. Rawat, J.S. & Kumar, M. (2015), Monitoring land use/cover change using remote sensing and GIS techniques: A case study of Hawalbagh block, district Almora, Uttarakhand, India. The Egyptian Journal of Remote Sensing and Space Science, Vol. 18, Issul 1, doi.org/10.1016/j.ejrs.2015.02.002: pp. 77-84.

ЩЕПАК В.В. КАРЮК А.М.

ТИМОШЕВСЬКИЙ В.В.

Економіко-математичні методи і моделювання у землеустрою

Навчальний посібник

Друкується в авторській редакції

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка 36011, м. Полтава, Першотравневий проспект, 24.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК, № 3130 від 06.03.2008.
Тираж 10 прим. Друк. арк. – 5,58

Щепак Віра Василівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобільних доріг, геодезії, землеустрою та сільських будівель Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

Карюк Алла Миколаївна, кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобільних доріг, геодезії, землеустрою та сільських будівель Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

Тимошевський Владислав Вікторович, кандидат економічних наук, доцент кафедри автомобільних доріг, геодезії, землеустрою та сільських будівель Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка