**МЕТОДОЛОГІЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ В УМОВАХ ДЕЦЕНТРАЛІЗАЦІЇ В УКРАЇНІ**

Згідно Закону «Про місцеве самоврядування в Україні» [2] в умовах взятого курсу державою на децентралізацію, виходячи з Конституції України «Місцеве самоврядування» [1, c. 11 ‒ 15 ], одним із основних напрямів є їх фінансово-господарча діяльність забезпечення стійкого розвитку регіону.

На місцеві бюджети покладено обв’язки стабільного фінансування освіти, охорони здоров’я, соціальної сфери, культури, утримання доріг місцевого значення. Досить значний об’єм фінансування та складність поставлених завдань змушує органи самоврядування використовувати в повній мірі надані їм права, залучати інвестиції, сприяти створенню нових робочих місць, ефективно займатися господарською діяльністю, приймати відповідальні управлінські рішення. Зокрема, у фінансовій сфері слід виділити роботу з різними видами цінних паперів. Така діяльність несе у собі ряд ризиків і невизначеностей.

Вважається доцільним розглянути питання оптимізації ризиків капіталовкладень рівноправних інвесторів.

***Постановка задачі***. На фінансовому ринку обертається значна кількість цінних паперів: державні цінні папери, акції приватних фірм, векселі тощо. Такі цінні папери мають різний ступінь ризику й ефективність. Папери із меншим ступенем ризику, як правило, приносять низький прибуток. Високоприбуткові папери є більш ризикованими.

Розглянемо оптимізацію капіталовкладень у цінні папери n рівноправних інвесторів. У зв’язку з тим, що орган самоврядування є суб’єктом фінансового ринку, вважаємо його також одним із інвесторів. Кожний учасник має свій власний капітал , який вони хочуть розподілити певним чином для формування індивідуальних портфелів та спільного портфеля цінних паперів. Нехай на ринку цінних паперів обертається також *q* видів паперів, що мають ефективності . Кожний з учасників може сформувати свій власний портфель незалежно від інших. Задача полягає у зниженні значення максимального ризику інвесторів.

***Метод розв’язування та побудова математичної моделі***. Розглянемо узагальнену задачу розподілу капіталу, який учасник ринку хоче витратити на купівлю цінних паперів. Для розв’язання задачі формування оптимального портфеля використаємо побудову паттерна на основі пофарбування його еквівалентної теоретико-графової моделі та композиційної операції [8, c. 151].

Розподіл капіталу приводить до появи й існування структур, які можна описати еквівалентною графовою моделлю. На рис. 1 показаний приклад розподілу капіталу, що зображується у вигляді графа. Даний граф є зваженим, тобто кожна вершина графа  зіставляється із часткою капіталу .

При цьому структура зліва (рис. 1,а) відображає такий розподіл капіталу, при якому інвестор планує утворити центри прибутків , котрі підпорядковуються єдиному фонду .



Рис. 1. Теоретико-графові моделі розподілу капіталу:

а) структура у вигляді зірки; б) деревоподібна структура

Перерозподіл прибутку від обігу придбаних цінних паперів усередині структури здійснюється лише за участю фонду . Уведення до графа ребра  означало б, що центри прибутків та  мають спільні вклади й право на трансфер коштів без участі головного фонду .

Інша структура, граф (рис. 1,б), відображує ієрархічний розподіл коштів, коли центри прибутків  та  утворюють дочірні фонди . Ініціатором створення деревоподібної структури виступає головний фонд , який надає право центрам прибутків здійснювати трансфер коштів між дочірніми фондами без його участі.

Оскільки дочірні фонди  утворюються, виходячи з наявного капіталу центрів прибутків , то в деревоподібній структурі повинна виконуватись умова, що забезпечує підтримку всіх учасників інвестиційного портфеля:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |

Слід відмітити, що графові структури, наведені на рис. 1, є умовними. У них зв’язки відображують усні чи письмові домовленості між утримувачами часток капіталу .

Ініціатором створення таких умовних структур виступає інвестор із початковим капіталом .

*Відомі параметри моделі*:

*N* – загальна кількість часток капіталу;

*q* − кількість видів цінних паперів, із яких інвестор може сформувати портфель;

 − частка капіталу, витрачена на закупівлю цінних паперів *і*-го виду;

 − випадкова ефективність (наприклад, прибуток за деякий період часу) цінних паперів *і*-го виду ();

− відоме математичне очікуваннями ефективності ().

*Обчислювальні параметри моделі*:

 − середньоквадратичне відхилення ефективності , тобто , де  − варіація або дисперсія цієї ефективності. У літературі ризик цінних паперів *і*-го виду оцінюється за допомогою середньоквадратичного відхилення ;

− випадкова ефективність портфеля, що характеризує прибуток, який приносять цінні папери за деякий проміжок часу;

 − бажане математичне очікування ефективності портфеля, що задається інвестором, що обчислюється за формулою:

; (2)

  − дисперсія портфеля, що визначає у кінцевому випадку його ризик:

 (3)

 − коваріація цінних паперів *і*-го та *j*-го видів:

 (4)

− ризик портфеля, що визначається за формулою: .

 − загальний капітал, виражений у грошовому еквіваленті і визначається за формулою:

,  (5)

*Невідомі параметри моделі*:

 − центри фондів (вершина графа), що є бінарною змінною , значення якої дорівнює «1», якщо  пофарбована у колір  та «0» в іншому разі.

Задача оптимізації портфеля полягає у знаходженні такого варіанта розподілу капіталу, який би гарантував найменший ризик.

Оптимізація портфеля при застосуванні пофарбованості еквівалентної теоретико-графової моделі випливає з наступного. Припустимо, що значення ефективностей цінних паперів  є фарбами, у які потрібно пофарбувати зважений граф. Тоді задача знаходження оптимального портфеля полягає у пофарбуванні зваженого графа  у кольори  так, щоб . Беручи до уваги обмеження (2) – (3), мовою 0-1 програмування задача побудови паттерна формулюється таким чином [9, с. 219; 4, c. 1 – 3]:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6)(7)(8)(9) |

Розв’язок задачі пофарбування зваженого графа дає такий розподіл цінних паперів між частками капіталу, при якому ризик  є мінімальним. Отриманий розв’язок задачі залежатиме від значення ефективності цінних паперів  та від їх середньоквадратичного відхилення . Дана задача є задачею квадратичної оптимізації з накладеними обмеженнями та побудови гетерогенного паттерна, тому для її розв’язку можна застосувати комбінований підхід, який був розроблений.

Дано визначення n-мірного паттерна для розв’язування цілого класу задач дискретної оптимізації [9, с. 220; 10, с. 110 – 116].

**Означення 1**. n-мірний паттерн – це структура виду , де − масив елементів (об’єктів);

 − множина типів (властивостей);

− сюр’єктивне відображення , яке розбиває множину елементів  на  класів за даними типами;

− множина ін’єктивних відображень 

, що  і виконуються умови:

1. ;

2.

**Означення 2**. n-мірний паттерн  називається гомогенним, якщо

**Означення 3**. n-мірний паттерн називається гетерогенним, якщо 

Щоб побудувати паттерн, необхідно і достатньо [9, с. 221]:

1. Визначити (умова необхідності);
2. Задати набір ін’єктивних відображень (функцій) де  (умова достатності).

Отже, для побудови паттерна потрібно розробити математичну модель, у якій розв’язуються дві проблеми:

1. Пофарбування зв’язаного графа  з заданою кількістю вершин , (з урахуванням або не врахуванням обмежень на пофарбування). У результаті отримаємо оптимальний розв’язок ;
2. Визначення  за допомогою композиційної операції , де  − пофарбування графа, задане матрицею,  − набір кольорів.

Отже, для розв’язання поставленої задачі оптимізації портфеля цінних паперів потрібно пофарбувати граф  у кольори з множини E та визначити матрицю.

Розглянемо приклади застосування математичної моделі, де управління портфелем цінних паперів відбувається одним інвестором та кількома інвесторами.

***Реалізація моделі у випадку управління портфелем цінних паперів одним інвестором***

**Приклад 1**. Нехай деякий орган самоврядування має три дочірні підприємства. Усі вони створили спільний портфель цінних паперів. Підприємства вклали певну частку капіталу у придбання трьох видів цінних паперів , що мають за чотири періоди певну випадкову ефективність (табл. 1). На придбання цінних паперів орган самоврядування розподілив свій спільний капітал між своїми дочірніми підприємствами таким чином: перше підприємство вклало у цінні папери *0,2* частки загального капіталу, друге − *0,4*, третє − *0,3*, четверте − *0,1*. Бажане математичне очікування ефективності портфеля становить 1,1. Визначити у які цінні папери потрібно підприємствам вкласти виділені їм кошти, щоб вказаний розподіл капіталу гарантував би найменший ризик.

Таблиця 1 ‒Таблиця ефективності цінних паперів за чотири періоди

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид цінного паперу | Випадкова ефективність | 1 період | 2 період | 3 період | 4 період |
|  |  | 1,03 | 1,09 | 1,20 | 1,10 |
|  |  | 1,20 | 1,10 | 1,05 | **0,80** |
|  |  | 1,01 | 1,10 | 1,03 | 0,90 |

**Розв’язок**. Нехай розподілу капіталу підприємств відповідає зважений граф  (рис. 2), де  – множина вершин (підприємств),  – множина часток загального капіталу, вкладених підприємствами у цінні папери.



Рис. 2. Граф  розподілу капіталу на підприємствах

Даний граф має чотири вершини  відповідно з заданою вагою , , , .

Оскільки підприємства вклали певні капітали у придбання трьох видів цінних паперів з випадковою ефективністю , то граф  визначить відповідність  між множиною вершин (підприємств)  та множиною цінних паперів з відповідною випадковою ефективністю , причому, .

Потрібно визначити у які ж саме цінні папери потрібно підприємствам вкласти виділені їм кошти, щоб розподіл капіталу гарантував би найменший ризик.

Коваріаційна матриця цінних паперів обчислена за допомогою (4) і наведена в таблиці 2.

Таблиця 2 ‒Коваріаційна матриця цінних паперів

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0,003725 | -0,00269 | 0,000275 |
|  | -0,00269 | 0,021719 | 0,008 |
|  | 0,000275 | 0,008 | 0,00515 |

Використовуючи модель (6) – (9), для даної задачі побудуємо паттерн. За даними таблиці 1 визначимо математичне очікування ефективності кожного виду цінних паперів (середнє значення ефективності), а також відхилення ефективності кожного виду цінних паперів від цього значення (табл. 3).

Таблиця 3 ‒ Таблиця відхилення ефективності цінних паперів від середнього значення

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Випадкова ефективність | 1 період | 2 період | 3 період | 4 період | Середнє значення ефективності,  | Відхилення від середнього значення |
|  | 1,03 | 1,09 | 1,20 | 1,10 | 1,105 | 0,038 |
|  | 1,20 | 1,10 | 1,05 | **0,80** | 1,038 | 0,095 |
|  | 1,01 | 1,10 | 1,03 | 0,90 | 1,010 | 0,044 |

Щоб побудувати паттерн, потрібно пофарбувати граф  у кольори з множини , тобто  та визначити . Застосувавши генетичний алгоритм [11, с. 166 – 176; 12, с. 194 – 203; 3; 5], знаходимо . Згідно отриманого пофарбування графа маємо, що . У результаті побудовано гетерогенний паттерн . Для  значення цільової функції (6), тобто значення дисперсії портфеля, дорівнює . Ця величина в кінцевому випадку визначає ризик портфеля .

Отже, при заданому розподілі спільного капіталу з найменшим ризиком , другому, третьому та четвертому підприємствам потрібно вкласти виділені ними кошти у перший вид цінних паперів, а першому підприємству – у другий.

Розглянемо, як вплине на паттерн зміна часток розподілу загального капіталу.

**Приклад 2**. Розв’язати аналогічну задачу, попередньо змінивши розподіл спільного капіталу між підприємствами таким чином: перше підприємство вклало у цінні папери *0,1* частки загального капіталу, друге − *0,2*, третє − *0,4*, четверте − *0,3*.

 **Розв’язок**. Оскільки за умовою задачі ефективність цінних паперів за вказані періоди залишилась незмінною, то коваріаційна матриця матиме той самий вид (табл. 2).

Застосувавши генетичний алгоритм [11, с. 166 – 176; 12, с. 194 – 203; 6], знаходимо . Застосувавши операцію композиції, маємо . Для знайденого  значення цільової функції (6) , а ризик портфеля . Отже, при заданому розподілі спільного капіталу з найменшим ризиком , другому, третьому, четвертому підприємствам потрібно вкласти виділені ними кошти у перший вид цінних паперів, а першому підприємству – у третій. Згідно отриманого пофарбування графа побудовано гетерогенний паттерн При такому розподілі маємо менший ризик, ніж у попередній задачі.

Розглянемо, як вплине на отриманий паттерн зміна відхилення ефективності цінних паперів від середнього значення, при цьому частки загального капіталу, вкладених підприємствами у цінні папери, залишаться без зміни.

**Приклад 3**. Розв’язати аналогічну задачу, попередньо змінивши в умові значення ефективності цінних паперів (табл. 4).

Таблиця 4‒ Таблиця ефективності цінних паперів за чотири періоди

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид цінного паперу | Випадкова ефективність | 1 період | 2 період | 3 період | 4 період |
|  |  | 1,03 | 1,09 | 1,20 | 1,10 |
|  |  | 1,20 | 1,10 | 1,05 | **1,10** |
|  |  | 1,01 | 1,10 | 1,03 | 0,90 |

**Розв’язок**. Обчислено коваріаційну матрицю цінних паперів (табл. 5).

Таблиця 5‒ Коваріаційна матриця цінних паперів

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0,003725 | -0,00306 | 0,000275 |
|  | -0,00306 | 0,002969 | -0,00025 |
|  | 0,000275 | -0,00025 | 0,00515 |

За допомогою генетичного алгоритму [11, с. 166 – 176; 12, с. 194 – 203; 6] знаходимо . Застосувавши операцію композиції, маємо .

Для знайденого  значення цільової функції (6) , а ризик портфеля .

При заданому розподілі спільного капіталу з найменшим ризиком , другому, третьому, четвертому підприємствам потрібно вкласти виділені ними кошти у перший вид цінних паперів, а першому підприємству – у другий. Згідно отриманого пофарбування графа побудовано гетерогенний паттерн Результати наводяться у таблиці 6.

Таблиця 6‒ Таблиця залежності розв’язку від зміни випадкової ефективності

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Паттерн | Середнє значення випадкової ефективності  | Розподіл капіталу підприємствами при формуванні спільного портфеля | Ризик |
|  |  |  |  |
|  | 1,04 | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,043 |
|  | 1,11 | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,033 |
|  | 1,14 | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,034 |
|  | 0,99 | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,056 |

Отже, зміна ефективності цінного паперу впливає на значення ризику портфеля, а паттерн не змінюється.

З іншого боку паттерн ‒ це структура, яка дає інформацію не лише про розв’язок, але й про зв’язки між об’єктами. Розглянемо приклади, де покажемо, як змінюється розв’язок задачі при зміні паттерна.

**Приклад 4**. Нехай деякому органу самоврядування та трьом його дочірнім підприємствам запропоновано створити спільний портфель цінних паперів виду , що мають за чотири періоди певну випадкову ефективність (табл. 1). Відомо, що друге, третє та четверте підприємство вклали свої частини капіталу у придбання першого виду цінних паперів , а перше підприємство придбало третій вид цінних паперів . Бажане математичне очікування ефективності портфеля становить *1,06*. Визначити частку капіталу, вкладену кожним підприємством на придбання цінних паперів спільного портфеля, щоб розподіл капіталу гарантував би найменший ризик.

**Розв’язок**. Виходячи з умови, ми маємо гетерогенний паттерн . Спрощеною моделлю гетерогенного партерна є зважений граф  (рис. 2) з чотирма вершинами . Побудова гетерогенного партерна передбачає пофарбування цього графа у три кольори , , . Даний гетерогенний паттерн є шаблоном розв’язку .

При даному розподілі цінних паперів (пофарбуванні графа) визначимо вагу вершин у графі (частку капіталу) за допомогою рівнянь (6) - (8). Коваріаційна матриця цінних паперів обчислена за допомогою (4) і наведена в таблиці 2. Дану задачу розв’язуємо в Excel за допомогою вбудованого додатку «Пошук рішень». У результаті маємо , , , . При такому розподілі капіталу значення цільової функції (6) дорівнює  а ризик портфеля .

Розглянемо аналогічну задачу, але вклади підприємств у спільний портфель задамо гетерогенним паттерном . Заданому паттерну відповідає граф  розподілу капіталу на підприємствах (рис. 3).



Рис. 3. Граф  розподілу капіталу на підприємствах

Отримано розв’язок: , , , . При такому розподілі капіталу дисперсія спільного портфеля дорівнює , а ризик портфеля – .

Для паттерна  маємо розв’язок , , , . Дисперсія спільного портфеля дорівнює , а ризик портфеля – .

Аналогічно провели розрахунки для паттерна . Отримали розв’язок: , , , . У цьому випадку дисперсія спільного портфеля дорівнює , а ризик портфеля – .

Результати обчислень наведених прикладів відображено у таблиці 7.

Таблиця 7‒ Таблиця розв’язків для прикладу 4

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Паттерн | Розподіл капіталу підприємствами при формуванні спільного портфеля | Середнє відхилення, | Очікувана ефективність,  | Ризик |
|  |  |  |  | E1 | E2 | E3 |
|  | 0,5 | 0,17 | 0,17 | 0,17 | 1,11 | 1,04 | 1,01 | 1,06 | 0,040 |
|  | 0,5 | 0,13 | 0,18 | 0,18 | 1,11 | 1,04 | 1,01 | 1,06 | 0,036 |
|  | 0,5 | 0,18 | 0,13 | 0,18 | 1,11 | 1,04 | 1,01 | 1,06 | 0,036 |
|  | 0,5 | 0,18 | 0,18 | 0,13 | 1,11 | 1,04 | 1,01 | 1,06 | 0,036 |

Гетерогенний паттерн такого виду відповідає графу-зірці, що відображає такий розподіл капіталу, при якому інвестор планує утворити центри прибутків, котрі підпорядковуються єдиному фонду. Маючи шаблон, наприклад , не потрібно розв’язувати подібну задачу заново, а можна через «базу знань» знаходити розв’язки задачі, що відповідають, наприклад, .

**Приклад 5**. Нехай деякому органу місцевого самоврядування та трьом його дочірнім підприємствам запропоновано створити спільний портфель цінних паперів виду , що мають за чотири періоди певну випадкову ефективність (табл. 3.1). Відомо, що перше підприємство вклало свої частини капіталу у придбання цінних паперів виду , друге та третє – у , а четверте – у , причому, останнє підприємство з другим та третім підприємствами має право на трансфер коштів без участі головного фонду першого підприємства. Визначити частку капіталу, вкладену кожним підприємством на придбання цінних паперів спільного портфеля, щоб розподіл капіталу гарантував би найменший ризик при очікуваній ефективності .

**Розв’язок**. Виходячи з умови задачі, ми маємо гетерогенний паттерн , який відповідає графу  (рис. 4). Ребра  та

 означають, що центри прибутків  та , а також  та  мають право на трансфер коштів без участі головного фонду .



Рис. 4. Граф  розподілу капіталу на підприємствах

Даному паттерну відповідає . При такому розподілі цінних паперів визначимо частку капіталу кожного підприємства за допомогою рівнянь (6) – (8). Знаходимо розв’язок даної задачі.

Щоб мати найменший ризик формування спільного портфеля з очікуваною ефективністю , підприємства розподілять свій капітал так: , , , .

При такому розподілі капіталу дисперсія спільного портфеля дорівнює , а ризик портфеля – .

Змінивши умову задачі, а саме, поклавши, що перше підприємство вклало свої частини капіталу у придбання цінних паперів виду , друге та третє – у   а четверте – у , матимемо паттерн .

Розв’язок задачі наводиться у таблиці 8.

Таблиця 8‒ Таблиця розв’язків до прикладу 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Паттерн | Розподіл капіталу підприємствами при формуванні спільного портфеля | Середнє відхилення, | Очікувана ефективність,  | Ризик |
|  |  |  |  | E1 | E2 | E3 |
|  | 0,09 | 0,24 | 0,24 | 0,44 | 1,11 | 1,04 | 1,01 | 1,06 | 0,040 |
|  | 0,50 | 0,18 | 0,18 | 0,15 | 1,11 | 1,04 | 1,01 | 1,06 | 0,045 |

Таким чином, ми бачимо, що паттерн − це така універсальна структура, яка дає уяву про множину розв’язків.

*Реалізація моделі у випадку управління портфелем цінних паперів кількома інвесторами*

Розглянемо оптимізацію капіталовкладень у цінні папери за наявності кількох рівноправних учасників, при чому одним із них є орган самоврядування. У цьому випадку кожний інвестор має свій власний капітал . Нехай на ринку цінних паперів обертається також *q* видів паперів із ефективностями . Кожний з учасників може сформувати свій власний портфель незалежно від інших. У такому випадку ризик капіталовкладень є індивідуальним для кожного учасника, а неприбуткові портфелі не підтримуються іншими інвесторами.

Відомо, що диверсифікація портфеля дає позитивний результат, тобто при збільшенні числа видів цінних паперів у портфелі ризик стає обмеженим і наближується до нуля

 (10)

, (11)

де *q* – кількість видів цінних паперів, що обертаються на ринку; − максимальне значення ризику для *і*-го виду цінних паперів. Відповідно для зменшення ризику портфеля потрібно збільшити номенклатуру цінних паперів у ньому. Але при цьому розмір часток капіталовкладень за окремими видами паперів зменшується, а отже, знижується відсоток прибутку від більш прибуткових паперів.

Значно цікавішою є ситуація, коли вдається знизити значення максимального ризику або збільшити кількість цінних паперів у портфелі без зменшення відсоткового співвідношення часток капіталу за окремими видами паперів. Це можливо у таких випадках:

‒ об’єднання портфелів декількох інвесторів в один;

‒ формування спільного портфеля шляхом об’єднання часток капіталу.

У першому випадку номенклатура цінних паперів автоматично збільшується при об’єднанні портфелів, а отже, ризик відповідно до (10) зменшується. Проте ця ситуація провокує боротьбу за контроль портфеля між учасниками.

У другому випадку право контролю за портфелем зберігається у кожного учасника, проте інвестори виділяють певну частку власного капіталу для формування спільного портфеля, який належить усім учасникам. Розподіл прибутку в такому разі відбувається за домовленою схемою, наприклад в еквіваленті вкладених коштів кожного з учасників. У цьому випадку оптимізація спільного портфеля відбувається за рахунок спільних коштів, вона передбачає купівлю та розподіл цінних паперів між учасниками. Хоча формально існує  портфель, у реальності придбані папери зберігаються у  учасників, тобто реально існує  портфелів.

Отже, ризик для кожного з учасників буде обчислюватись так:

 (12)

 (13)

де  − ризик спільного портфеля, тобто ризик для кожного з учасників;  − максимальний ризик портфелів учасників;  − значення ризику для *j*-го портфеля. У даному випадку склад початкового портфеля не накладає ризик на всі інші портфелі, оскільки формування спільного портфеля оптимізує індивідуальні портфелі учасників.

З’ясуємо, яким чином відбувається оптимізація портфелів кожного з учасників. Нехай існує *n* учасників із початковими капіталами , які вони хочуть розподілити певним чином для формування індивідуальних портфелів та спільного портфеля цінних паперів.

Нехай кожний з учасників виділяє певну частку свого капіталу для формування спільного портфеля, тоді капітал кожного з інвесторів буде дорівнювати

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (14) |

де  − частка капіталу *і*-го інвестора, котру він планує вкласти в спільний портфель;  − капітал, що *і*-ий інвестор планує вкласти у власний портфель, який буде для кожного учасника розподілений по-різному

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (15) |

Отже, графова модель, котра відображає такий розподіл капіталу між учасниками, матиме вигляд, показаний на рис. 5 [9, c. 219; 7].



Рис. 5. Модель формування спільного портфеля

Спільний портфель, сформований *n* інвесторами, є графом . Оскільки планується придбати *q* видів цінних паперів, які будуть розподілені між *n* учасниками, то розподілений таким чином капітал буде *n*-дольним графом, утвореним із графа [7].

Отже, задача формування спільного портфеля зводиться до пофарбування n-дольного графа у *q* кольорів.

Капітал, виділений кожним учасником для формування спільного портфеля, у цьому разі дорівнює

 (16)

Таким чином, задача формування спільного портфеля відповідає моделі (6) – (9), (10).

Якщо прийняти, що  є множина ефективностей цінних паперів, а  відображує частки капіталів *n* інвесторів, то отримуємо інформаційно-графову структуру

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (17) |

яка показує зв’язки між капіталовкладеннями та ефективностями придбаних паперів. Якщо паттерн  є оптимальним спільним портфелем, то його можна розкласти  на шари , що відповідають індивідуальним портфелям кожного з інвесторів.

Отже, формально формування спільного портфеля приводить до такого розподілення цінних паперів за індивідуальними портфелями, при якому ризик усіх учасників є однаковим і залежить лише від ризику спільного портфеля. При цьому умова перевірки правильності побудови паттерна у випадку формування спільного портфеля набуває вигляду

 (18)

Паттерн  формується таким чином, щоб його елементами були значення ризиків  цінних паперів.

**Приклад 15**. Нехай на ринку обертається 5 видів цінних паперів , , , , , що мають за чотири періоди випадкову ефективність , , , ,  (табл. 9). Орган самоврядування та два інших інвестори сформували власні портфелі цінних паперів незалежно один від одного та спільний портфель. Так портфель органу самоврядування складають цінні папери *1*-го, *3*-го, *4*-го видів, другого інвестора – *2*-го, *3*-го, *5*-го видів, а третього – *1*-го, *3*-го, *4*-го, *5*-го видів.

Для формування спільного портфеля кожний із учасників може виділити певну частку від власного капіталу: перший − не більше *0,2*, другий − не більше *0,2*, третій − не більше *0,1*.

На спільні кошти передбачено купівлю та розподіл цінних паперів між учасниками, але таких паперів, що вже складають їх власні портфелі. Визначити найменший ризик спільного портфеля та частки капіталу, які виділить кожний інвестор на придбання певних видів паперів для його формування при такому ризику. Побудувати паттерн, перевірити правильність його побудови.

Таблиця 9‒ Таблиця ефективності цінних паперів за чотири періоди

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Види паперів | Випадкова ефективність | 1 період | 2 період | 3 період | 4 період | Середнє значення ефективності,  | Відхилення від середнього значення |
|  |  | 1,10 | 1,30 | 0,90 | 1,20 | 1,13 | 0,125 |
|  |  | 0,78 | 0,94 | 1,10 | 1,30 | 1,03 | 0,170 |
|  |  | 0,96 | 0,89 | 1,12 | 1,30 | 1,07 | 0,1425 |
|  |  | 0,86 | 0,83 | 1,12 | 1,15 | 0,99 | 0,145 |
|  |  | 1,20 | 1,30 | 1,60 | 1,40 | 1,38 | 0,125 |

**Розв’язок**. Розподіл капіталу між учасниками можна представити у вигляді графової моделі . Спільний портфель, сформований трьома інвесторами, є графом , причому . Визначимо найменший ризик спільного портфеля для кожного з учасників.

Моделлю власних портфелів кожного з учасників є підграфи графа , тобто , , . Вони являють собою структури у вигляді зірок, що знаходяться у кожній вершині графа . Для першого інвестора – це підграф , що складається з трьох вершин, з відповідними видами цінних паперів , ,  (табл. 10).

Таблиця 10‒ Таблиця ефективності цінних паперів органу самоврядування

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Види паперів | Випадкова ефективність | 1 період | 2 період | 3 період | 4 період | Середнє значення ефективності,  | Відхилення від середнього значення |
|  |  | 1,10 | 1,30 | 0,90 | 1,20 | 1,13 | 0,125 |
|  |  | 0,96 | 0,89 | 1,12 | 1,30 | 1,07 | 0,1425 |
|  |  | 0,86 | 0,83 | 1,12 | 1,15 | 0,99 | 0,145 |

Коваріаційна матриця цінних паперів обчислена за допомогою (4) і наведена в таблиці 11.

Таблиця 11‒ Коваріаційна матриця цінних паперів органу самоврядування

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0,021875 | -0,00569 | -0,0105 |
|  | -0,00569 | 0,024969 | 0,0216 |
|  | -0,0105 | 0,0216 | 0,02125 |

Для другого інвестора – це підграф , що складається з трьох вершин, з відповідними видами цінних паперів , ,  (табл. 12). Коваріаційна матриця цінних паперів обчислена за допомогою (4) і наведена в таблиці 13.

Таблиця 12‒ Таблиця ефективності цінних паперів другого інвестора

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Види паперів | Випадкова ефективність | 1 період | 2 період | 3 період | 4 період | Середнє значення ефективності,  | Відхилення від середнього значення |
|  |  | 0,78 | 0,94 | 1,10 | 1,30 | 1,03 | 0,17 |
|  |  | 0,96 | 0,89 | 1,12 | 1,30 | 1,07 | 0,1425 |
|  |  | 1,20 | 1,30 | 1,60 | 1,40 | 1,38 | 0,125 |

Таблиця 13 ‒ Коваріаційна матриця цінних паперів другого інвестора

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0,0371 | 0,027325 | 0,01825 |
|  | 0,027325 | 0,024969 | 0,012438 |
|  | 0,01825 | 0,012438 | 0,021875 |

Для третього інвестора – це підграф , що складається з чотирьох вершин, з відповідними видами цінних паперів , , ,  (табл. 14).

Таблиця 14 ‒ Таблиця ефективності цінних паперів третього інвестора

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Види паперів | Випадкова ефективність | 1 період | 2 період | 3 період | 4 період | Середнє значення ефективності,  | Відхилення від середнього значення |
|  |  | *1,10* | *1,30* | *0,90* | *1,20* | *1,13* | *0,125* |
|  |  | *0,96* | *0,89* | *1,12* | *1,30* | *1,07* | *0,1425* |
|  |  | *0,86* | *0,83* | *1,12* | *1,15* | *0,99* | *0,145* |
|  |  | *1,20* | *1,30* | *1,60* | *140* | *1,38* | *0,125* |

Коваріаційна матриця цінних паперів обчислена за допомогою (3) і наведена в таблиці 15.

Таблиця 15 ‒ Коваріаційна матриця цінних паперів третього інвестора

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | *0,021875* | *-0,00569* | *-0,0105* | *-0,01438* |
|  | *-0,00569* | *0,024969* | *0,0216* | *0,012438* |
|  | *-0,0105* | *0,0216* | *0,02125* | *0,017* |
|  | *-0,01438* | *0,012438* | *0,017* | *0,021875* |

Оскільки орган самоврядування вклав свої кошти у 3 види цінних паперів, то пофарбування графової структури, що відповідає його портфелю задається вектором .

Пофарбування графової структури, що відповідає другому портфелю – вектором , графової структури, що відповідає третьому портфелю – вектором .

Визначимо частки капіталу, вкладені у кожний вид цінних паперів кожним із трьох інвесторів відповідно їх власних портфелів. Для цього використаємо рівняння:

 (19)

 (20)

 (21)

У результаті маємо, що орган самоврядування повинен вкласти капітал у цінні папери власного портфеля у таких частках: , , . При цьому коваріація портфеля органу самоврядування дорівнює , а ризик дорівнює .

Другий учасник повинен вкласти капітал у цінні папери власного портфеля у таких частках: , , . Коваріація портфеля другого інвестора дорівнює , а ризик дорівнює .

Третій учасник – у частках , , , . Коваріація портфеля третього інвестора дорівнює , а ризик дорівнює .

Відповідно до цього розв’язку визначаємо ризик спільного портфеля цінних паперів , коваріація спільного портфеля дорівнює .

Знаючи найменший ризик спільного портфеля, потрібно визначити який вид цінних паперів із 5-и видів буде придбаний кожним учасником для формування спільного портфеля (при цьому враховується склад кожного власного портфеля) і яку частку свого капіталу вони для цього виділять. Граф  потрібно пофарбувати у кольори з множини фарб .

Оскільки спільний портфель формується з п’яти видів цінних паперів, то коваріаційна матриця, обчислена за допомогою (4), має наступний вид (табл. 16).

Таблиця 16 ‒ Коваріаційна матриця цінних паперів для спільного портфеля

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | *0,021875* | *-0,00125* | *-0,00569* | *-0,0105* | *-0,01438* |
|  | *-0,00125* | *0,0371* | *0,027325* | *0,0248* | *0,01825* |
|  | *-0,00569* | *0,027325* | *0,024969* | *0,0216* | *0,012438* |
|  | *-0,0105* | *0,0248* | *0,0216* | *0,02125* | *0,017* |
|  | *-0,01438* | *0,01825* | *0,012438* | *0,017* | *0,021875* |

Тоді задача знаходження оптимального портфеля полягає у пофарбуванні графа  у кольори з множини фарб  так, щоб . Мовою 0-1 програмування задача побудови гетерогенного паттерна формулюється таким чином:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (22) |
|  |  | (23) |
|  | ; ; ; ; . | (24) |

Отриманий розв’язок задачі за допомогою рівнянь (19 – 21) дорівнює , тобто, при найменшому ризику спільного портфеля орган самоврядування вкладе свою частку капіталу у 4-ий вид цінних паперів, другий інвестор – у 5-й, а третій – у 3-й.

Маємо перший варіант формування спільного портфеля . Відповідно на закупівлю цих паперів будуть виділені такі частки капіталів кожного інвестора: , , .

Розглянемо другий варіант формування спільного портфеля . У цьому разі , тобто орган самоврядування придбає для спільного портфеля 3-й вид цінних паперів, другий інвестор − 5-й вид, а третій – 4-й вид. Визначимо частки капіталів інвесторів. Отримуємо розв’язок: , , .

І нарешті, маємо третій варіант формування спільного портфеля . У цьому разі , тобто перший учасник придбає для спільного портфеля 4-й вид, другий − 3-й вид, а третій – 5-й вид цінних паперів. Аналогічно визначимо частки капіталів інвесторів. Отримуємо розв’язок: , , .

У результаті побудовано гетерогенний паттерн , його можна представити у вигляді таблиці (табл. 17).

Таблиця 17 ‒ Таблиця варіантів спільного портфеля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Учасники* | *Перший* | *Другий* | *Третій* | *Ризик* |
| *Варіант 1* | *4* | *5* | *3* | *0,042* |
| *Варіант 2* | *3* | *5* | *4* | *0,042* |
| *Варіант 3* | *4* | *3* | *5* | *0,042* |

На основі даної таблиці та відомостей про частки капіталу кожного із учасників, вкладених у спільний портфель, маємо таблицю 18.

Таблиця 18 ‒ Таблиця розподілу капіталовкладень

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Учасники* | *Перший* | *Другий* | *Третій* |
| *Варіант 1* | *0,09* | *0,25* | *0,08* |
| *Варіант 2* | *0,18* | *0,15* | *0,14* |
| *Варіант 3* | *0,14* | *0,18* | *0,15* |

Оскільки для формування спільного портфеля орган самоврядування може виділити не більше *0,2* частки від власного капіталу, другий інвестор − не більше *0,2*, третій − не більше *0,1*, то другий варіант розподілу капіталовкладень є найбільш прийнятним.

Перевіримо правильність побудови гетерогенного партерна  у випадку такого формування спільного портфеля, виходячи з умови (18). Оскільки спільний портфель сформований з паперів виду , , , що мають відповідно ефективність , , , а значить коваріаційна матриця цінних паперів, обчислена за допомогою (4), матиме вид (табл. 19).

Таблиця 19 ‒ Коваріаційна матриця цінних паперів спільного портфеля

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | *0,025* | *0,012* | *0,022* |
|  | *0,012* | *0,022* | *0,017* |
|  | *0,022* | *0,017* | *0,021* |

Обчислення за формулою (18) представлені у таблиці 20.

 .

Оскільки , то умова (18) виконується.

Таблиця 20 ‒ Таблиця перевірки побудови гетерогенного паттерна

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | *0,000114* | *0,0106964* |
|  |  |  |  | *0,000192* | *0,0138605* |
|  |  |  |  | *0,000178* | *0,013324* |

На рисунку 6 зображено графову модель сформованого оптимального портфеля, що відповідає другому варіанту розв’язку побудованого гетерогенного паттерна.



Рис. 6. Модель сформованого спільного портфеля

Задача формування й оптимізації спільного інвестиційного портфеля цінних паперів розв’язана за допомогою нового підходу з використанням побудови n-мірного паттерна на основі пофарбування відповідної теоретико-графової моделі зі зваженими вершинами. Розв’язок задачі пофарбування зваженого n-дольного графа дає такий розподіл цінних паперів між частками капіталу, при якому ризик портфеля є мінімальним.

При вирішенні поставленої задачі у роботі застосовуються: методи 0-1 програмування та квадратичної оптимізації для побудови математичної моделі n-мірного паттерна; евристичний метод пофарбування теоретико-графової моделі; об’єктно-орієнтований метод до програмної реалізації алгоритмів пофарбування графів.

Результати, що характеризують наукову новизну дослідження, полягають у наступному: набули подальшого розвитку математичні моделі побудови n-мірних паттернів; вперше для побудови n-мірних паттернів запропоновано комбінований метод розв’язування задачі оптимізації квадратичної функції з лінійними обмеженнями та метод 0-1 програмування.

Створені комп’ютерні програми «Pattern Designer Toolbox», «Latin Square Designer», «Pattern».

Отримані алгоритми можуть бути використані органами місцевого самоврядування у сферах управління, планування ресурсів, соціології, логістиці, а також при проектуванні систем автоматизованого управління комунальними підприємствами, що сприятиме підвищенню ефективності документообігу, ведення бухгалтерського обліку.

Законодавчо надані повноваження органам місцевого самоврядування створюють сприятливі умови для гармонійного розвитку територіальних громад, підвищення економічних показників, активізації інвестиційної діяльності.

**Список використаних джерел**

1. Конституція України. Розділ IX, статті 140 ‒ 146.
2. Закон «Про місцеве самоврядування в Україні» №280/97-ВР від 21.05.1997 р.
3. Abramson D.A Simulated Annealing Code for General Integer Linear Programs / Abramson D., Randall M. // Annals of Operations Research. – 1999. – V. 86. – P. 3 – 24.
4. Boros E. Pseudo-Boolean optimization / E. Boros, P. Hammer // Discrete Applied Mathematics, 2002. – № 123. – P. 1 – 3.
5. Connolly D. General Purpose Simulated Annealing / David Connolly // The Journal of the Operational Research Society : Mathematical Programming in Honour of Ailsa Land, May 1992 : – 1992. – V. 43, № 5. – P. 495 – 505.
6. Вороновский Г.К. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности / Г.К. Вороновский, К.В. Махотило, С.М. Петрашов, С.А. Сергеев. – Х: Основа, 1997. – С. 107 – 112.
7. Дистель Р. Теория графов / Р. Дистель ; пер. с англ. О. В. Бородина. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. – 336 с.
8. Скрильник І. І. Побудова n-мірних паттернів як задача побудови тапофарбування n-дольних графів та їх мінорів / І. І. Скрильник // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» : (збірник наукових праць, тематичний випуск) : (Інформатика і моделювання). — Х.: НТУ “ХПІ”, 2008. – № 24. – С. 151– 160.
9. Скрильник І.І. Застосування теорії паттернів до оптимізації портфеля цінних паперів / І.І. Скрильник // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. – Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2011. – № 1. – С. 217 – 231.
10. Скрильник І. І. Алгоритм побудови n-мірних паттернів із накладеними обмеженнями / І. І. Скрильник// Вісник Запорізького національного університету : (Фізико-математичні науки. Біологічні науки) : наукові статті. — Запоріжжя: ЗНУ, 2006. – № 1. – С. 110 – 116.
11. Скрильник І.І.Розв’язання NP-складних задач як пофарбування теоретико-графових моделей за допомогою генетичного алгоритму / І.І. Скрильник // Вісник Тернопільського державного університету : (Фізико-математичні науки) : наукові статті. – Тернопіль: ТДТУ, 2007. – № 2. – С. 166 – 176.
12. Скрильник І.І.Пофарбування графів за допомогою генетичного алгоритму / І.І. Скрильник // Вісник Тернопільського державного університету : (Математичне моделювання. Математика. Фізика) : наукові статті. – Тернопіль: ТДТУ, 2010. – № 1. – С. 194 – 203.