# **НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ**

### **ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

#### РАССОХА Інна Володимирівна

##### УДК 517.95

**ДОСЛІДЖЕННЯ СИМЕТРІЙНИХ**

**ВЛАСТИВОСТЕЙ HЕЛІHІЙHИХ СИСТЕМ**

**ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ**

**01.01.02 – диференціальні рівняння**

**Автореферат**

###### дисертації на здобуття наукового ступеня

**кандидата фізико-математичних наук**

Київ – 2012

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Полтавському національному технічному

університеті імені Юрія Кондратюка

Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

**Науковий кері****вник:**

доктор фізико-математичних наук,

професор

**СЄРОВ Микола** **Іванович,**

Полтавський національний

технічний університет

імені Юрія Кондратюка,

завідувач кафедри вищої математики

**Офіційні опоненти:**

доктор фізико-математичнихнаук,

професор

**Петришин Роман Іванович**,

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича,

перший проректор;

кандидат фізико-математичних наук,

**Спічак Станіслав Вікторович,**

Інститут математики НАН України,

старший науковий співробітник

відділу прикладних досліджень

Захист відбудеться “*\_11\_*” грудня 2012 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інститутуматематики НАН України.

Авторефератрозісланий “\_\_9*\_\_*” листопада 2012 p.

Вченийсекретар

спеціалізованоївченої ради Г.П. ПЕЛЮХ

# **Загальна характеристика роботи**

**Актуальність теми.** Як відомо, починаючи з другої половини XIX століття диференціальні рівняння стали ефективним засобом моделювання та дослідження різноманітних задач науки та техніки. Найчастіше математичні моделі, які є наслідком загальних законів або специфічних властивостей, що притаманні даному процесу, є диференціальними рівнян-нями.

Це дало поштовх до розвитку різноманітних методів інтегрування диференціальних рівнянь: метод відокремлення змінних, метод спеціальних підстановок, метод варіації, метод Ейлера, метод Даламбера, метод характеристик (Монжа), метод каскадів (Лапласа), метод Пуассона, метод розвинення в ряди Фур'є, метод спуску Адамара тощо.

Одним з таких методів є метод оберненої задачі розсіяння (та ряд споріднених з ним методів), який було розроблено у 1967 році в спільній роботі K. Гарднера (C. Gardner), Дж. Гріна (J. Green), M. Крускала (M. Kru-skal) і P. Міури (R. Miura). Важливу роль в розвитку методів оберненої задачі розсіяння та споріднених з ним підходів до розв'язання багатьох нелінійних диференціальних рівнянь відіграли праці українських математиків, зокрема, Ю.М. Березанського, В.А. Марченка, Л.П. Нижника, Є.Д. Білоколоса, Є.Я. Хруслова.

Серед методів, які з'явилися в останній час, слід відзначити асимптотичний та чисельно-аналітичний методи дослідження нових класів диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь, в розробку яких вагомий вклад внесли А.М. Самойленко, Ю.А. Митропольський,

Р.І. Петришин та інші; варіаційні методи розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач гідродинаміки, розроблені І.О. Луковським; алгоритми наближеного розв'язку широкого класу диференціальних рівнянь з імпульсною дією, розроблені М.О. Перестюком; асимптотичні методи аналізу стохастичних диференціальних рівнянь, розвинуті М.І. Портенком; чисельно-аналітичний метод для знаходження розв'язку задачі Коші для абстрактних диференціальних рівнянь першого та другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами, розроблений В.Л. Макаровим, та інші.

Поширеним методом розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод Софуса Лі, в основі його лежить принцип симетрії. Відкриття С. Лі полягало в тому, що складні нелінійні умови інваріантності диференціального рівняння відносно групи перетворень можна замінити у випадку неперервної групи більш простими лінійними умовами інфінітезімальної інваріантності відносно твірних групи. С. Лі першим застосував алгебру інваріантності диференціального рівняння для теоретико-групової редукції та знаходження його точних розв'язків. В подальшому ці методи одержали розвиток в роботах багатьох видатних вчених. Так, в 1905 році Пуанкаре застосував ідеї Лі до системи рівнянь Максвелла, а в 1909 році Г. Бейтман одержав точні розв'язки лінійного хвильового рівняння за допомогою методів симетрійного аналізу,

Г. Біркгоф наголосив на можливостях застосування теорії груп у механіці.

Новий етап розвитоку метод С. Лі одержав у роботах Л.В. Овсяннікова і його школи, якими була створена теорія інваріантних і частково-інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь.

Важливі результати в області теоретико-групового аналізу були одержані Дж. Блуменом та І.Д. Коулом, У. Міллером, П. Олвером, Н.Х. Іб-рагімовим, П. Вінтерніцем. В Україні перші роботи з цієї тематики були опубліковані В.Г. Костенком наприкінці 50-их років. В середині семидеся-тих років минулого століття була створена Київська школа математиків, яку очолив В.І. Фущич. Науковцями цієї школи було зроблено істотний внесок у розвиток, як класичних, так і нових методів дослідження диференціальних рівнянь. Серед основних її досягнень необхідно відзначити розроблений

В.І. Фущичем та А.Г. Нікітіним новий метод дослідження симетрійних властивостей рівнянь, особливість якого полягає в тому, що базисними елементами алгебри інваріантності є інтегро-диференціальні оператори. Такий підхід дозволив знайти нові симетрії багатьох добре відомих рівнянь квантової механіки: Дірака, Максвелла, Ламе тощо.

Новим етапом розвитку симетрійних методів стало введення В.І. Фу-щичем, В.І. Чопиком, І.М. Цифрою та М.І. Сєровим поняття умовної симетрії, що дало можливість побудови принципово нових анзаців, на основі яких було знайдено точні розв'язки, які не можуть бути отримані стандартним алгоритмом Лі.

Відомо, що всі фізичні закони і явища природи підпорядковуються певним законам симетрії. Наприклад, однорідність простору і часу обумовлює інваріантність відносно перенесення, ізотропія простору —інваріантність відносно поворотів, рівнозначність усіх інерціальних систем відліку — інваріантність відносно перетворень Галілея та інші. Таким чином, симетрія у найбільш широкому значенні — це інваріантність явища чи об'єкта відносно деяких його перетворень. Існує тісний зв'язок між симетрією і законами збереження у природі. У 1918 Е. Нетер сформулювала теорему, згідно з якою, якщо властивості системи не змінюються від деякого перетворення, то цьому відповідає певний закон збереження. Наявність симетрії в системі обумовлює існування для неї фізичної величини, що зберігається. Наприклад, закон збереження імпульсу є наслідком однорідності простору, а закон збереження енергії — наслідком однорідності часу. Отже, симетрія завжди пов'язана зі збереженням і виділяє в навколишньому світі різні інваріанти.

В.І. Фущич зазначав, що по відношенню до диференціальних рівнянь, симетрію можна розглядати як принцип, за допомогою якого із найрізноманітніших логічно допустимих моделей (рівнянь, співвідношень) відбираються тільки ті, які володіють широкою симетрією. Адже, серед усієї множини диференціальних рівнянь існує порівняно небагато тих, що описують природні явища. Виникає питання: в чому їх особливість? Так усі основні рівняння математичної фізики (рівняння Ньютона, Лапласа, д'Аламбера, Шредінгера, Ліувілля, Дірака, Максвелла і т.д.) інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень. Саме ця властивість виділяє їх із множини інших диференціальних рівнянь.

Принципи симетрії виражають найбільш загальні властивості природи. Отже, побудова конструктивного математичного апарату, здатного виявляти різні типи симетрій, — одна з найважливіших задач якісної теорії диференціальних рівнянь.

Існує багато областей застосування методів групового аналізу дифе-ренціальних рівнянь. Так, знання груп симетрії даного рівняння дозволяє генерувати нові розв'язки з відомих. Відшукання групи перетворень екві-валентності даного рівняння дає можливість записати його у найбільш простій для дослідження формі.

Оскільки теоретико-групові методи дають можливість інтегрування диференціальних рівнянь, які мають нетривіальні групи інваріантності, то актуальною є задача повної групової класифікації диференціальних рівнянь, яка дозволяє із заданого класу рівнянь виділити ті, які володіють широкими симетрійними властивостями.

Ще однією з найбільш важливих задач є задача виділення з заданого класу рівнянь таких, які допускають в якості групи інваріантності деяку відому групу.

Розв’язанню таких задач стосовно нелінійних рівнянь параболічного типу і присвячена дана робота.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота проводилась згідно із загальним планом досліджень кафедри вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка.

**Мета і завдання дослідження.** *Метою* дисертаційної роботи є застосування ліївського методу до повної групової класифікації нелінійного рівняння реакції-конвекції-дифузії та виділення з класу систем реакції-конвекції-дифузії таких, що допускають інваріантність відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень.

*Об'єктом дослідження* є скалярне нелінійне рівняння реакції-конвекції-дифузії та система рівнянь реакції-конвекції-дифузії.

*Предметом дослідження* є класифікація ліївських симетрій нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії .

*Методи дослідження.* Для виконання групової класифiкацiї використано класичний метод Лі. Основні перетворення еквівалентності знайдено з використанням інфінітезімального підходу, запропонованого в роботах І.С. Ахатова, Р.К. Газізова, Н.Х. Ібрагімова та В.І. Лагна, С.В. Спі-чака, В.І. Стогнія, а додаткові перетворення — прямим методом.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Основними результатами, які визначають наукову новизну дисертації, виносяться на захист та отримані вперше, є такі:

1. Встановлено основні та додаткові перетворення еквівалентності рівняння реакції-конвекції-дифузії.

2. З точністю до перетворень еквівалентності проведено повну групову класифікацію рівняння реакції-конвекції-дифузії.

3. Знайдено дискретні перетворення інваріантності та побудовано формули розмноження розв'язків деяких рівнянь класу реакції-конвекції-дифузії.

4. Введено поняття *Q*-умовної еквівалентності.

5. Вказано алгоритм відшукання групи *Q*-умовної еквівалентності та про-ілюстровано його застосування до розв'язання задачі групової класифікації на прикладах дослідження нелінійного рівняння теплопровідності та еволю-ційного рівняння другого порядку.

6. Встановлено групу неперервних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії.

7. З точністю до неперервних перетворень еквівалентності встановлено виг-ляд систем нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії, інваріантних від-носно алгебри Галілея розширеної алгебри Галілея  та узагальненої алгебри Галілея .

**Практичне значення отриманих результатів.** Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані при розв'язуванні ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь, теорії теплопровідності, дифузії, хемотаксису та деяких інших.

**Особистий внесок здобувача.** Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику — М.І. Сєрову. Доведення результатів дисертації проведено особисто автором.

В роботах, які опубліковано разом з іншими авторами і включено до автореферату, особистий внесок дисертанта такий. У роботі [1] М.І. Сєрову належить загальна постановка задачі та аналіз одержаних результатів, Карпалюк Т.О. — розробка алгоритму дослідження *Q*-умовної еквіва-лентності, дисертанту — дослідження *Q*-умовної еквівалентності та її застосування до задачі групової класифікації. У статті [2] М.І. Сєрову на-лежить постановка задачі та розробка методів дослідження, Р.М. Чернізі — проведений в роботі аналіз зв'язку з іншими дослідженнями та знаходження точних розв'язків, дисертанту — доведення всіх теорем. У роботах [5, 6] та [8] М.І. Сєрову належить постановка задачі та аналіз одержаних результатів. У роботах [6, 8] М.М. Сєровій належить уточнення формулювань теорем та аналіз зв'язку результатів з дослідженнями, проведеними іншими авторами. У роботах [5, 6] та [8] дисертанту належить формулювання та доведення всіх теорем.

**Апробацiя результатів дисертації.** Результати дисертацiйної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах кафедри вищої математики ПолтНТУ імені Юрія Кондратюка, на семінарах відділу прикладних дослід-жень і відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань ІМ НАН Укра-їни, на Всеукраїнському науковому семінарі пам'яті В.І. Фущича (м. Київ, 2006 р.), на ІІ Міжнародній конференції молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського (м. Донецьк, 2008 р.), на Всеукраїнському науковому семінарі "Українська школа групового аналізу: здобутки і перспективи" (до 75-річчя з дня народження В.І. Фущича) (м. Полтава, 2011р.), на Міжнародному семінарі до 75-річчя від дня народження Вільгельма Ілліча Фущича "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики" (м. Київ, 2011р.), на Всеукраїнській науковій кон-ференції "Диференціальні рівняння та їх застосування у прикладній мате-матиці" (м. Чернівці, 2012 р.).

**Публiкації.** Основнi результати дисертації відображені у 8 публікаціях: 3 статтi [1−3] — в провiдних наукових фахових виданнях, які відповiдають вимогам МОНмолодьспорту України, 1 стаття [5] — в матеріалах всеукраїнського семінару, 4 тези доповідей на конференціях та семінарах [4,6−8].

**Структура дисертацiї.** Робота викладена на 145 сторінках друкованого тексту, складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури, що містить 160 найменувань, та додатку.

**Основний зміст роботи.**

У **вступі** обгрунтовано актуальнiсть теми, проаналiзовано сучасний стан розглянутих проблем, сформульовано задачi дослiдження та коротко викладено основнi результати роботи.

У  **першому розділі** обгрунтовано вибір напрямку досліджень і здійснено постановку задач, які розв'язано в дисертації. Також описано основні етапи розвитку наукової думки щодо групового аналізу диференціальних рівнянь та подано огляд праць, які стосуються цієї проблеми.

**Другий роздiл**  присвячено повнiй груповiй класифiкацii скалярного рівняння реакції-конвекції-дифузії

 (1)

де  —довільні гладкі функції, , яке описує багато фізичних процесів. Воно використовується для моделювання переносу енергії в плазмі, розподілу розчинів у грунті, руху рідин в пористому середовищі та інших фізичних та біохімічних процесів. До класу рівнянь (1) входять такі відомі рівняння, як рівняння теплопровідності, Бюргерса тощо.

У першому підрозділі даного розділу, застосувавши метод, запропо-нований в роботах І.С. Ахатова, Р.К. Газізова, Н.Х. Ібрагімова та В.І. Лагно, С.В. Спічака, В.І. Стогнія, досліджено групу неперервних перетворень екві-валентності рівняння (1) та встановлено, що максимальна група локальних неперервних перетворень еквівалентності (BEG) рівняння (1) має вигляд

   (2)

де  — довільні сталі, .

Локальні перетворення еквівалентності, які не є непервними, будемо називати додатковими. Деякі з таких перетворень для рівняння (1) були вказані в роботах В.А. Дородніцина і М.І. Сєрова та Р.М. Черніги.

У зв'язку з цим у другому підрозділі даного розділу поставлено і розв'язано задачу знаходження всеможливих невироджених локальних перетворень вигляду

 (3)

які довільне рівняння класу (1) зводять до рівняння того ж класу

 (4)

де  — довільні гладкі функції.

Результатом таких досліджень є наступна теорема.

**Теорема 1.**  *Будь-яке рівняння* (1) *зводиться до рівняння* (4) *за допомогою невиродженої локальної підстановки* (3) *тоді і тільки тоді, коли дана підстановка має вигляд*

 (5)

причому функції  задовольняють такі умови:

 (6)

 (7)

 (8)

  (9)

В третьому підрозділі даного розділу встановлено основну алгебру інваріантності рівняння (1), тобто максимальну алгебру інваріантності (МАІ)рівняння (1) при довільних функціях .

**Теорема 2.** *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння* (1) *при довільних гладких функціях*  *є алгебра*

 (10)

В четвертому підрозділі даного розділу досліджено, при яких значеннях функцій  можливі розширення основної алгебри інваріантності рівняння (1). Результати дослiджень викладено у наступнiй теоремi.

**Теорема 3.** *Якщо алгебра інваріантності рівняння* (1) *ширша, у порівнянні з алгеброю* (10)*, то дане рівняння має один з виглядів*

1. ;

2.;

3. ;

4. , ;

5. ;

6. , ;

7. , ;

8. ;

9. 

,

де  — довільні сталі, .

Вигляд одержаних рівнянь дещо спрощено за допомогою неперервних перетворень еквівалентності.

В теоремі 3 сформульовано лише необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності рівняння (1). Достатні умови її розширення та відповідні МАІ наведено в п'ятому підрозділі даного розділу.

В шостому підрозділі даного розділу за допомогою теореми 1 частина рівнянь, одержаних в попередньому пiдроздiлi, зведена до інших рівнянь, що допускають розширення МАІ, i одержано повну групову класифікацію локально нееквівалентних рівнянь класу (1). Результати наведено у вигляді наступної таблиці.

**Таблиця.** Повна групова класифікація рівняння (1).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №  з/п | Рівняння | МАІ | Умови |
| 1. |  |  |  |
| 2. |  |  |  |
| 3. |  |  |  |
| 4. |  |  |  |
| 5. |  |  |  |
| 6. |  |  |  |
| 7. |  |  |  |
| 8. |  |  |  |
| 9. |  |  |  |
| 10. |  |  |  |
| 11. |  |  |  |
| 12. |  |  |  |
| 13. |  |  |  |
| 14. |  |  |  |
| 15. |  |  |  |

У таблиці , причому при , а при  , , причому при , а при  ; .

В сьомому підрозділі за допомогою результатів теореми 1 знайдено дискретні перетворення інваріантності та формули розмноження розв'язків деяких рівнянь класу (1).

Отже, основним результатом другого розділу роботи є повна групова класифікація рівняння (1), що проведена з точністю до всеможливих локальних перетворень еквівалентності.

У **третьому розділі** дисертаційної роботи нами продовжено розвиток методу застосування перетворень еквівалентності для групової класифікації диференціальних рівнянь.

У першому підрозділі даного розділу розглянуто нелінійне рівняння теплопровідності

 (11)

де , , , ,  — довільна гладка функція.

Добре відомі результати групової класифікації рівняння (11), одержані в рамках методу С.Лі. Порiвнявши його з результатами, одержаними за допомогою методу, який базується на знаходженні групи еквівалентності даного рівняння, ми бачимо, що до класу рівнянь, які допускають розши-рення основної алгебри інваріантності, не входить рівняння

 (12)

Крім того, рівняння (12) за допомогою локальної підстановки не може бути зведеним до якогось іншого рівняння, що допускає розширення основної алгебри інваріантності рівняння (11), оскільки розмірність його МАІ не співпадає з розмірністю інших алгебр, одержаних за допомогою методу, який базується на знаходженні групи еквівалентності.

У другому підрозділі даного розділу введено поняття *Q*-умовної еквівалентності диференціальних рівнянь, яке є аналогом *Q*-умовної інварі-антності і дозволяє позбутися недоліку, вказаного в попередньому підрозділі.

**Означення 1.**  *Оператор*

 *(13)*

*назвемо оператором Q-умовної еквівалентності системи рівнянь*

* (14)*

*якщо він породжується групою перетворень еквівалентності даної системи при умові*

 *(15)*

*тобто*

* (16)*

*де*

* — продовження -го порядку функції , , , , — довільні гладкі функції;  — сукупність всеможливих похідних відповідно порядку  від функцій  та порядку  від функції F; — деякі функції.*

Таким чином, досліджуючи *Q*-умовну еквівалентність, ми серед рівнянь класу (14) виділяємо підклас, який може мати іншу групу перетворень еквівалентності, порівняно з BEG.

Використання введеного поняття *Q*-умовної еквівалентності для повної групової класифікації рівняння (11) дозволяє одержати результати, що співпадають з результатами, до яких приводить метод С. Лі.

У третьому підрозділі проілюстровано застосування даного поняття для проведення повної групової класифікації еволюційного рівняння

 (17)

де , ,  — довільна гладка функція, та показано, що да-ний метод приводить до результатів, які співпадають з результатами, одержаними за методом С. Лі.

Отже, в третьому розділі роботи введено поняття *Q*-умовної екві-валентності та вказано алгоритм відшукання групи *Q*-умовної еквівалент-ності. На прикладах дослідження нелінійного рівняння теплопровідності та еволюційного рівняння другого порядку показано застосування *Q*-умовної еквівалентності до розв'язання задачі групової класифікації.

При описі різних явищ природи часто приходять до математичних моделей у вигляді систем диференціальних рівнянь. Більшість таких систем, як правило, містять одну чи кілька довільних функцій і тому вони утворюють певні класи систем диференціальних рівнянь. Актуальною є задача відбору з деякого класу систем таких, які найбільш точно описують досліджувані процеси. Оскільки більшість основних фізичних процесів задовольняють принцип відносності Галілея чи Пуанкаре – Енштейна, то і рівняння, які їх описують, повинні також бути інваріантні відносно алгебри Галілея чи алгебри Пуанкаре. Тому вимога інваріантності диференціальних рівнянь відносно тієї чи іншої групи перетворень може служити критерієм відбору його в якості математичної моделі опису конкретного фізичного процесу. У зв'язку з цим актуальною є задача: по заданій групі перетворень побудувати математичну модель (систему рівнянь), яка володіє зазначеною симетрією.

У **четвертому розділі** нами розв'язано таку задачу по відношенню до системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії

 (18)

де ,

,

 — довільні гладкі функції, , , ,

 — часова,  — просторова змінні. Система (18) є узагальненням ска-лярного рівняння реакції-конвекції-дифузії, дослідженого нами в другому розділі.

До класу систем (18) належать системи, які описують різні фізичні та біохімічні процеси. Наприклад, система (18) є моделлю еволюції температури та густини у термоядерній плазмі. В біології система рівнянь реакції-адвекції-дифузії описує модель спільноти хижак–жертва, переміщення в колоніях бактерій під дією різних чинників тощо. Одним із застосувань системи (18) в екології є дослідження процесів розповсюдження забруднювальних речовин у водоймах або атмосфері. В медицині за допомогою систем класу (18) моделюється процес згортання крові. Також система (18) моделює гідродинамічну нестійкість, що виникає поблизу розділу двох рідин, які не змішуються, що зустрічається в процесах горіння, сепарації та інших. При переході у системі (18) до комплексної змінної можна одержати моделі, які описують рух квантової частинки (рівняння Шре-дінгера), стан надпровідника в зовнішньому магнітному полі (рівняння Гінзбурга–Ландау) та магнітогідродинамічні хвилі в плазмі.

Симетрійні властивості систем класу (18) вивчались багатьма авторами. Серед найвагоміших результатів з цього питання можна виділити роботи А.Г. Нікітіна та Р. Вілтшира, Р.М.Черніги та Дж. Кінга. Але повну групову класифікацію нелінійних систем класу (18) досі не проведено.

У першому підрозділі цього розділу показано, що максимальна група локальних неперервних перетворень еквівалентності системи (18) має такий вигляд:

   (19)

де  — довільні сталі, , .

У другому підрозділі даного розділу на основі алгоритму Лі одержано систему визначальних рівнянь на координати інфінітезімального оператора та встановлено вигляд основної алгебри інваріантності  системи (18).

**Теорема 4.** *Основною алгеброю інваріантності системи* (18) *є алгебра*

 (20)

В третьому підрозділі доведено, що із врахуванням комутаційних співвідношень

  

   (21)

єдино можливою реалізацією алгебри *AG(1,1)* для системи (18) є реалізація вигляду

 (22)

де оператори  і  мають вигляд , при цьому

 — const, , та задовольняють умову

 (23)

У четвертому підрозділі з точністю до перетворень еквівалентності (19) встановлено 13 можливих нееквівалентних виглядів нелінійностей *F, G, H*, при яких система (18) інваріантна відносно алгебри Галілея (22).

У п'ятому підрозділі знайдено зображення розширеної алгебри Галілея для системи (18)

, (24)

де оператори  задовольняють умову (23) та умови

  (25)

У шостому підрозділі, з точністю до перетворень еквівалентності (19) вказано 8 можливих нееквівалентних виглядів нелінійностей *F, G, H*, при яких дана система інваріантна відносно алгебри (24).

В сьомому підрозділі знайдено єдино можливу реалізацію узагальненої алгебри Галілея для системи (18), яка має вигляд

  (26)

де оператори  задовольняють умови (23), (25) та наступні комутаціййні співвідношення

   (27)

Серед результатів дослідження варто виділити одержані у восьмому підрозділі, де з точністю до перетворень еквівалентності (19) виписано всі можливі вигляди нелінійностей, при яких система (18) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (26).

**Теорема 5.** *Система рівнянь* (18) *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея* (26) *тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень еквівалентності* (19) *має один з таких виглядів:*

 (28)

при цьому , ,, ;

 (29)

при цьому   , ;

(30)

при цьому  , , ;

 (31)

при цьому   , , , ;

 (32)

при цьому    , ;



 (33)

при цьому    , ;



 (34)

при цьому    ,     .

Зауважимо, що частинним випадком системи (29) є система рівнянь хемотаксису, яка описує формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії.

Якщо у системі (34) перейти до функції комплексної змінної, то одержимо узагальнення рівняння Гінзбурга–Ландау, яке є основним нелінійним рівнянням фізики нерівноважних середовищ і виникає при описі дифузного хаосу і дисипативних структур в гідродинаміці, фізиці лазерів та хімічний кінетиці

 (35)

де  . Симетрійні властивості рівняння Гінзбурга–Ландау без деривативного члена вивчались А.Г. Нікітіним.

При  з рівняння (35) можна одержати узагальнення рівняння Шредінгера з деривативною нелінійністю

 (36)

де .

Рівняння (36) належить до класу рівнянь



 (37)

які використовуються для моделювання хвильових процесів в різних розділах фізики, наприклад таких, як нелінійна оптика. Зокрема, воно описує альвеновські хвилі з круговою поляризацією — магнітогідро-динамічні хвилі, що розповсюджуються в плазмі в магнітному полі, хвилі Стокса у рідині скінченної глибини тощо.

Серед одержаних нами систем, як частинні випадки, містяться також нелінійна система рівнянь конвекції-дифузії ( одержується з (30)), системи рівнянь реакції-дифузії ( частинні випадки (31)–(34)), що були одержані у роботах Р.М. Черніги та Дж. Кінга, А.Г. Нікітіна та Р. Вілтшира.

Поряд з цим встановлено систему (28), яка не може бути одержана узагальненням раніше відомих систем, інваріантних відносно алгебри Галілея.

Таким чином, в даному розділі в класі нелінійних систем реакції-конвекції-дифузії (18) виділено ті, які володіють симетрійними властивос-тями, характерними для рівнянь, що описують процеси, підпорядковані принципу відносності Галілея. Тому одержані системи можуть бути використані при моделюванні реальних фізичних процесів.

**ВИСНОВКИ**

Основні результати дисертації полягають в наступному:

1. Встановлено основні та додаткові перетворення еквівалентності рівняння реакції-конвекції-дифузії.

2. З точністю до локальних перетворень еквівалентності проведено повну групову класифікацію рівняння реакції-конвекції-дифузії.

3. Знайдено дискретні перетворення інваріантності та побудовано формули розмноження розв'язків деяких рівнянь класу реакції-конвекції-дифузії.

4. Введено поняття *Q*-умовної еквівалентності.

5. Вказано алгоритм відшукання групи *Q*-умовної еквівалентності та про-ілюстровано його застосування до розв'язання задачі групової класифікації на прикладах дослідження нелінійного рівняння теплопровідності та еволю-ційного рівняння другого порядку.

6. Встановлено групу неперервних перетворень еквівалентності системи не-лінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії.

7. З точністю до неперервних перетворень еквівалентності встановлено виг-ляд систем нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії, інваріантних від-носно алгебри Галілея , розширеної алгебри Галілея  та узагальненої алгебри Галілея .

**СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Сєров М.І. Класифікація симетрійних властивостей диференціальних рівнянь за допомогою перетворень *Q*-умовної еквівалентності / М.І. Сєров, І.В. Рассоха, Т.О. Карпалюк // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2007. — Т.4, №3. — С. 232–246.

2. Cherniha R. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations / R. Cherniha, M. Serov, I. Rassokha // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — Vol. 342. — P. 1363–1379.

3. Рассоха І.В. Дискретні перетворення інваріантності та формули розмно-ження розв'язків деяких рівнянь класу реакції-конвекції-дифузії / І.В. Рассо-ха // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. — 2009. — Випуск 1. — С. 44–47.

4. Рассоха І.В. Перетворення еквівалентності нелінійного рівняння реакції-конвекції-дифузії / І.В. Рассоха // Тези доповідей ІІ міжнародної конферен-ції молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського, 11–14 листопада 2008 р. — Донецьк, 2008. — С. 95–96.

5. Сєров М.І. Інваріантність системи реакції-конвекції-дифузії відносно ал-гебр Галілея / М.І. Сєров, І.В. Рассоха // Збірник праць ІІ Всеукраїнського наукового семінару "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи", 19-20 жовтня 2011р. — Полтава, 2012. —

С. 112–128.

6. Сєров М.І. Нелінійні системи рівнянь реакції-конвекції-дифузії інваріант-ні відносно алгебри Галілея та її розширень [Електронний ресурс] / М.І. Сє-ров, М.М. Сєрова, І.В. Рассоха // Міжнародний семінар до 75-річчя від дня народження Вільгельма Ілліча Фущича "Симетрія та інтегрованість рівнянь математичної фізики", 18–19 грудня 2011р. — Київ: Інститут математики НАН України, 2011. — Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/~appmath/ AbstractsWIF/SerovSerovaRassoha.pdf

7. Рассоха І. В. Інваріантність системи рівнянь реакції-конвекції-дифузії відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та про-ективних перетворень / І.В. Рассоха // Збірник тез 64-ї наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів уні-верситету, 17 квітня –11 травня 2012 р. — Полтава, 2012. — Т.1. — С. 215–216.

8. Сєров М.І. Система рівнянь реакції-конвекції-дифузії. Принцип відносності Галілея / М.І. Сєров, М.М. Сєрова, І.В. Рассоха [Електронний ресурс] // Всеукраїнська наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці», 11–13 червня 2012 р. — Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, 2012. — Режим доступу: www.pmm50.org/templates/a/content/zbirn.pdf

**АНОТАЦІЇ**

**Рассоха І.В. «Дослідження симетрійних властивостей нелінійних систем параболічного типу».** — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-ма-тематичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Інститут математики НАН України, Київ, 2012.

Дисертація присвячена дослідженню симетрійних властивостей нелінійних рівнянь параболічного типу.

З точність до перетворень еквівалентності проведено повну групову класифікацію симетрійних властивостей рівняння реакції-конвекції-дифузії. Для деяких рівнянь даного класу знайдено дискретні симетрії та формули розмноження розв’язків. Введено поняття *Q*-умовної еквівалентності. Вказано та проілюстровано на прикладах алгоритм проведення повної групової класифікації з використанням даного поняття. Встановлено нелінійні системи рівнянь класу реакції-конвекції-дифузії, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень.

**Ключові слова:** симетрія, інваріантність, алгебра Лі, група еквівалентності, групова класифікація, система рівнянь реакції-конвекції-дифузії.

**Рассоха И. В. «Исследование симметрийных свойств нелинейных систем параболического типа».** —Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2012.

Диссертация посвящена исследованию симметрийных свойств нелинейных уравнений параболического типа.

Одним из современных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными является метод С. Ли. Он позволяет строить точные решения, генерировать новые решения из уже извест-ных, записывать уравнение в наиболее простой для исследования форме. Кроме того, одной из наиболее важных задач, которые позволяют применить данный метод, есть задача выделения из разнообразных допустимых моделей данного процесса тех, которые удовлетворяют тому или иному принципу относительности.

Второй раздел диссертации посвящён исследованию симметрийных свойств одномерного уравнения реакции-конвекции-диффузии. Для данного уравнения установлена основная группа инвариантности, указаны необхо-димые условия её расширения. Также найдена группа непрерывных преобразований эквивалентности и указаны всевозможные преобразования эквивалентности данного уравнения. С точностью до преобразований эквивалентности проведена полная групповая классификация уравнения реакции-конвекции-диффузии. Для некоторых уравнений данного класса найдены дискретные преобразования инвариантности и построены формулы размножения решений.

В третьем разделе диссертации продолжено развитие метода полной групповой классификации, который основывается на использовании преоб-разований эквивалентности. Введено понятие *Q*-условной эквивалентности, указан и проиллюстрирован на примерах алгоритм её нахождения.

Четвёртый раздел посвящен исследованию симметрийных свойств системы уравнений реакции-конвекции-диффузии. Указана группа непрерывных преобразований эквивалентности данной системы, а также её основная алгебра инвариантности. Определены нелинейные системы данного класса, инвариантные относительно алгебры Галилея. В классе нелинейных систем реакции-конвекции-диффузии, выделены системы, инвариантные относительно расширенной алгебры Галилея и обобщённой алгебры Галилея. В силу своих симметрийных свойств полученные системы могут быть использованы при моделировании реальных физических процессов.

**Ключевые слова:** симметрия, инвариантность, алгебра Ли, группа эквивалентности, групповая классификация, система уравнений реакции-конвекции-диффузии.

**Rassokha I.V. «Investigation of symmetry properties of nonlinear systems of parabolic type».** —Manuscript**.**

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.02 — differential equations. Institute of Mathematics of National Academy of Sciences, Kiev, 2012.

The dissertation is devoted to investigation of symmetry properties of nonlinear equations of parabolic type.

With accuracy of transformation of equivalence the full group classification of symmetry properties of reaction-convection-diffusion equation was made. For some equations of the given class the descrete symmetriеs and formulae of solutions were found. The conception of *Q*-conditional equivalence was introduced and the algorithm of finding of the *Q*-conditional equivalence group was worked out. The appearance of a Galilean algebra and it's extensions in respect to which the system of nonlinear reaction-convection-diffusion equations can be invariant is investigated. The kind of nonlinearities with which this system is invariant in respect to that algebra is determined within continuous equivalence transformations.

**Key words**: symmetry, invariance, Lie algebras, equivalence grope, group classification, the system of reaction-convection-diffusion equations.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Підп. до друку 30. 10. 2012 р. Формат 60 х 84/16. Папір друк. Офс. друк.

Фіз. друк. арк. 1,3. Ум. друк. арк. 1,2.

Тираж 100 прим. Замовлення .

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Інститут математики НАН України,

01601, Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.