ІСТОРІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ОЗНАКИ ЄРМАКОВА

Н. В. Ічанська

[1]*Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна,*

natasha.ichanska@mail.ru

Історія математики завжди цікавить дослідників. Є ціла низка робіт, де описано історію математики в цілому з точки зору наукознавства, але не менш цікавими є праці, що присвячені окремим розділам математики. Одним з таких розділів є теорія числових рядів. Цей розділ викликає особливий інтерес завдяки тому, що має численні практичні застосування. Розглянемо один з аспектів історії розвитку теорії збіжності нескінченних додатних числових рядів, а саме історію дослідження ознаки Єрмакова.

Український математик Єрмаков Василь Петрович був професором кафедри чистої математики Київського університету, членом-кореспондентом Академії наук, заступником голови Київського фізико-математичного товариства. Професор В. П. Єрмаков сприяв організації та був засновником Київських вищих жіночих курсів (1889 р.), математичних бібліотек та математичних кабінетів, видання (у 1884—1886 рр.) «Журналу елементарної математики» — одного з кращих тогочасних друкованих математичних джерел в Україні (Добровольський (1981)).

У 1870 р. В. П. Єрмаков відкрив нову важливу ознаку збіжності нескінченних рядів (Ermakof, 1871; Ермаков, 1872).

У 1871 р. професор В. П. Єрмаков (1845—1922) у своїй доповіді на III з'їзді російських природознавців і лікарів зробив доповідь «Признак сходимости знакоположительных рядов», в якій сформулював своєрідну ознаку з тією ж областю застосування, що і інтегральна ознака Коші. Формулювання не містить в собі понять інтегрального числення.

Повідомлення В. П. Єрмакова зацікавило присутніх на з'їзді математиків. Найвидатніші математики колишньої Росії тих часів, серед них П. Л. Чебишев, О. М. Коркін, Є. І. Золотарьов, М. В. Бугайов (див. Бугаев (1889)), поставилися з великим інтересом до праці молодого автора, визнали її за подію в науковому світі; вперше київська математика звернула на себе увагу наукових авторитетів.

Теорема Єрмакова (Ермаков, 1872)) в загальному вигляді може бути сформульована так: якщо $f(k) \geq 0$, $f(k) \geq f(k+1)$, то ряд $f(0)+f(1)+f(2)+\ldots$ збіжний або розбіжний в залежності від того до якої границі — менше чи більше одиниці — прямує відношення $\dfrac{\varphi'(x)\cdot f[\varphi(x)]}{f(x)}$, при $x \to \infty$. Тут $\varphi(x)$ — додатна, неперервна і диференційовна фукнція, причому $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) > x$, починаючи з деякого x.

Функція $\varphi(x)$ може бути замінена іншою додатною неперервною монотонно зростаючою і неперервно диференційовною функцією, що задовольняє перерахованим умовам. Отже, використовуючи теорему Єрмакова, можна отримати цілу низку нових ознак з тією ж областю застосування.

Досліджуючи це питання, В. П. Єрмаков намагався знайти більш чутливу і разом з тим простішу ознаку. Припустивши, що $\varphi(x) = e^x$, він отримав ознаку, що може бути якісним прикладом простої та чутливої ознаки і формулював її так (див. Ермаковъ (1872)):

Визначений інтеграл, а також ряд $f(0) + f(1) + f(2) + \dots$ будуть збіжними, якщо відношення $\dfrac{e^x \cdot f(e^x)}{f(x)}$ із зростанням x до ∞ прямує до границі меншої за одиницю та розбіжними, якщо це відношення для величин x, що більші деякої постійної величини більше або рівне одиниці. Сумнівний випадок отримується тоді, коли це відношення менше одиниці і прямує до одиниці, коли $x \to \infty$.

Ознака Єрмакова в такому формулюванні за думкою О. М. Коркіна та Є.І. Золотарєва є більш чутливою ніж інші ознаки (див. Korkin (1871)).

У сучасній математичній літературі ознаку Єрмакова формулюють так (Фихтенгольц, 1966):

Нехай ряд можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

де $f(x)$ *— неперервна додатна і монотонно спадна функція для* $x \geq 1$. *Тоді, якщо для достатньо великих* $x\ (x \geq x_0)$ *буде виконуватись нерівність* $\dfrac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \leq q$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *буде збігатися при* $q < 1$ *і розбігається при* $q \geq 1$.

Або в граничній формі: якщо існує границя $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} = q$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *буде збігатися при* $q < 1$ *і розбігається при* $q \geq 1$.

Деякі вчені (і сам Єрмаков був такої думки) вважали якийсь час, що на практиці навряд чи знайдеться випадок, коли ознака Єрмакова не буде ефективною, адже ознака Єрмакова є, до певної міри, в застосуванні до монотонних рядів, цілком загальна, тобто виключає сумнівні випадки, що фігурують в усіх ознаках збіжності, крім достатньої і необхідної ознаки Больцано — Коші.

Ознака Єрмакова дійсно є досить сильною, проте В. П. Єрмаков переоцінив її силу, стверджуючи, що для його ознаки на практиці ніколи не зустрінеться сумнівного випадку. За його думкою: «Теоретично довести це важко і мабуть неможливо» (Задерей, Нефьодова (2015)). Але дуже швидко він виправив цю помилку — Єрмаков (Ермаков, 1874) подав приклад ряду, для якого його ознака не вирішує питання збіжності. Він пише: «Оставалось еще показать: существуют ли сомнительные ряды для моего признака или нет. Скоро по приезде в

Берлин я отыскал такой сомнительный ряд для моего признака. Ряд этот можно составить следующим образом. Пусть x произвольное положительное число, означим через ξ наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству: $\log\,\xi(x) \geq 1$, где логарифмы берутся по основании e.

Составим теперь функцию:

$$\theta(x) = \prod_{k=0}^{k=\xi} \frac{1}{\log^k(x)}.$$

Ряд $\theta(0) + \theta(1) + \theta(2) + \theta(3)\ldots$ даст сомнительный случай для моего признака, ибо функция $\theta(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$e^x\theta(e^x) = \theta(x)^n \text{»}.$$

Доведення ознаки Єрмакова були предметом глибокого дослідження як самого автора ознаки, так і інших вчених. Так в 1882 році О. М. Коркін присвячує цьому питанню свій лист до Ерміта (Korkin (1882)). Згодом оригінальне нове доведення ознаки Єрмакова було одержано А. Принсгеймом (Pringsheim (1890)). Цьому ж питанню присвячені роботи Д. М. Синцова (1899)), Б. Я. Букреєва (Букреев, 1930), А. М. Островського (Ostrowski, 1956).

Основну цінність дослідження Єрмакова складає не тільки практично зручна форми його ознаки, а і її загальне формулювання. Наприкінці 50-х років XX століття це питання було глибоко вивчене та досліджене В. А. Зморовичем. (1958). Видатний український математик, учень М. П. Кравчука, відомий фахівець у галузі теорії аналітичних функцій Валентин Анатолійович Зморович також багато уваги приділяв теорії збіжності знакододатних числових рядів та різним питанням аналізу і теорії класичних спеціальних функцій. В. А. Зморович провів доведення цієї ознаки ще в 1956 році. Він показав необхідність та достатність умов ознаки Єрмакова в загальній формі, а також і те, що ніякий із її варіантів не є універсальним. У цьому відношенні ознака Єрмакова нагадує відому ознаку Куммера, але має перед нею велику перевагу в тому сенсі, що, як показав Зморович, вона є одночасно необхідною та достатньою ознакою збіжності невласних визначених інтегралів 1-го роду від знакододатніх функцій.

Ознака Єрмакова була і є важливим елементом теорії збіжності нескінченних додатних числових рядів. Історія дослідження ознаки Єрмакова є одним із цікавих аспектів історії розвитку теорії збіжності рядів, історії розвитку математики.

Список літератури

Ermakof, V. (1871). Caractère de convergence des séries. *Bulletin des Sciences Mathématiques, 2,* 250–256.

Korkin, A. N. (1882). Sur un probleme d'interpolation. *Bulletin des Sciences Mathématiques, 6,* 228–242.

Korkin, A. N., Solotarjev (1871). *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik,* 100.

Ostrowski, A. (1956). Sur les criteres de convergence et divergence aus a V. Ermakof. *L'Enseignement Mathématique, 1*(4), 224–257.

Pringsheim, A. (1890). Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern. *Mathematische Annalen*, *35*, 297–394.

Бугаев, Н. В. (1889). К теории сходимости рядов. *Математический сборник*, *14*(2), 279—282.

Букреев, В. Я. (1930). Елементарна форма ознаки В. П. Ермакова. *Записки Київського інституту народної освіти*, (4), 182—186.

Добровольський, В. А.(1981). *Василий Петрович Ермаков (1845—1922).* Москва: Наука.

Ермаков, В. П. (1872а). Новый признак сходимости и расходимости знакопостоянных рядов. *Университетские известия,* (3), 1—20.

Ермаков, В. П. (1872б). Теория сходимости безконечных строк и определенных интегралов. *Математический сборник*, *6*(1), 39—76.

Ермаков, В. П. (1874). Отчет о заграничном путешествии кандидата В. П. Ермакова. *Университетские известия,* (1), 1—14.

Задерей, М., Нефьодова, Д. (2015). Василь Петрович Єрмаков (27.02.1845 — 16.03.1922) — фундатор математичної підготовки в Київському політехнічному інституті. *Математика в сучасному технічному університеті*, *1*(1), 164—171. Одержано з mmtu.in.ua/issues/1/MMTU_Iss1_17.pdf

Зморович, В. А. (1952). О признаке Н. И. Лобачевского сходимости знакоположительных числовых рядов и одном обобщении этого признака. *Успехи математических наук, 7*(1), 162—170.

Зморович, В. А. (1958). О некоторых вопросах теории сходимости знакоположительных рядов. *Известия высших учебных заведений. Математика*, (1), 60—79.

Синцов, Д. М. (1899). К вопросу о сходимости строк. *Математический сборник*, *20*(4), 616—619.

Фихтенгольц, Г. М. (1966). *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (Т. 2). Москва: Наука.