УДК 517.9:519.46

©2013 р. М.І. Сєров, Т.О. Карпалюк, О.Г. Плюхін

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ–КОНВЕКЦІЇ–ДИФУЗІЇ, ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ

Із класу систем рівнянь реакції–конвекції–дифузії для двовимірного векторного поля у випадку однієї просторової змінної виділено ті системи, які інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень.

We distinguish the systems invariant with respect to Galilei's algebra and its extensions by operators of scale and projective transformations, from the class of reaction-convection-diffusion systems of equations for two-dimensional vector field in the case of one spatial variable.

1. Вступ. Розглянемо систему рівнянь реакції–конвекції–дифузії

$$U_0 = \partial_1 \left[F(U)U_1\right] + G(U)U_1 + H(U), \qquad (1)$$

де $U=\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $u^k = u^k(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $F(U) = (f^{ab}(u))$, $G(U) = (g^{ab}(u))$ — довільні функціональні матриці розмірності 2×2, $H(U) = (h^a(u))$ — довільна функціональна матриця розмірності 2×1, $k \in \{1; 2\}$, індекси внизу означають диференціювання за відповідною змінною. Система (1) при конкретних значеннях нелінійностей $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$ застосовується при моделюванні різних процесів фізики, хімії, біології, екології. Так модифікації системи (1) застосовуються при описі процесів переносу в організмі, наприклад, при моделюванні переносу кисню в кровоносній системі, для моделювання росту тромбу в пристінковому потоці. Одним із застосувань системи (1) в екології є дослідження процесів розповсюдження речовини, яка забруднює водойми. Гідродинамічна нестійкість, яка виникає поблизу поверхні розподілу двох рідин, що не змішуються, зустрічається в таких галузях, як нафтопереробка, процеси горіння, сепарація руд і т. п. Математична модель цього явища включає в себе систему рівнянь реакції–конвекції–дифузії.

З математичної точки зору система (1) за рахунок наявності десяти довільних функцій описує фактично не одну, а цілий клас систем. Тому дуже важливою є задача вибору з цього класу саме тих систем, які б претендували на опис реальних явищ природи. Потужним методом відбору таких систем є симетрійний метод, за допомогою якого з класу систем відбираються ті, які володіють широкими симетрійними властивостями, тобто задовольняють тому чи іншому принципу відносності, а, отже, можуть претендувати на опис реальних фізичних процесів.

Слід зазначити, що дослідженням симетрійних властивостей системи (1) займалось багато авторів. Так, у роботі [19] досліджується ліївська симетрія рівняння реакції–конвекції–дифузії, робота [6] присвячена дослідженню інваріантності системи (1) відносно алгебри Галілея з оператором маси та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень. Зазначимо, що при $G = 0$ із системи (1) одержуємо систему рівнянь реакції дифузії, дослідженню симетрійних властивостей якої теж присвячено чимало робіт. Так при різних виглядах сталої матриці дифузії $F = \Lambda$ були отримані вагомі результати у роботах [25], [26] та [13]-[16], при довільних матрицях F і H галілеївську інваріантність системи реакції дифузії досліджено в роботі [5], при введенні певних обмежень на матрицю F та $G = 0$ одержимо систему рівнянь хемотаксису, дослідженню симетрійних властивостей якої присвячена публікація [9]. Також із системи (1) можна отримати систему конвекції дифузії (при $H = 0$). Дослідженню ліївської та Q–

умовної симетрії двовимірної системи такого типу присвячено роботи [17], [18], при $F = E$ проведено дослідження інваріантності тривимірної системи рівнянь конвекції дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея (роботи [2], [8]), при $F = \Lambda$ аналогічні дослідження виконані для двовимірної системи в роботі [7].

2. Постановка задачі та позначення. Добре відомо (див., наприклад [20]), що лінійне рівняння теплопровідності

$$u_0 = u_{11} \tag{2}$$

інваріантне відносно наступної алгебри операторів

$$\partial_0,\ \partial_1,\ G = x_0\partial_1 + x_1Q_1,\ Q_1 = -\frac{1}{2}u\partial_u, \tag{3}$$

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2, \tag{4}$$

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_2 + \frac{x_1^2}{2}Q_1, \tag{5}$$

де $Q_2 = -Q_1$.

Ще одним рівнянням, яке інваріантне відносно подібної алгебри, є рівняння Бюргерса

$$u_0 + uu_1 = u_{11}, \tag{6}$$

максимальною алгеброю інваріантності якого (див., наприклад, [11], [23]) є алгебра з базовими генераторами

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + Q_1, \tag{7}$$

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2, \tag{8}$$

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_2 + x_1Q_1, \tag{9}$$

де $Q_1 = \partial_u, \quad Q_2 = -u\partial_u$.

Оскільки оператори G, задані формулами (3) або (7), породжують перетворення Галілея

$$x_0' = x_0,\ x_1' = x_1 + \theta x_0 \tag{10}$$

простору (x_0, x_1), то оператори такого типу називаються операторами Галілея. Алгебру (3) називають алгеброю Галілея з оператором маси Q_1, а алгебру (7) — алгеброю Галілея без оператора маси. Алгебри (3)–(4) або (7)–(8) називають розширеними алгебрами Галілея, а алгебри операторів (3)–(5) або (7)–(9) — узагальненими алгебрами Галілея.

У роботі [6] розв'язана задача опису систем рівнянь класу (1), інваріантних відносно алгебри Галілея з оператором маси, доповненої операторами масштабних та проективних перетворень.

У даній роботі ми розв'яжемо аналогічну задачу для випадку алгебри Галілея без оператора маси. Тобто опишемо всі системи класу (1), інваріантні відносно алгебри Галілея без оператора маси, доповненої операторами масштабних та проективних перетворень.

Оператори алгебри (7)–(9) задовольняють наступні комутаційні співвідношення:

$$[\partial_0, \partial_1] = 0, [\partial_0, G] = \partial_1, [\partial_1, G] = 0, \tag{11}$$

$$[\partial_0, D] = 2\partial_0, [\partial_1, D] = \partial_1, [G, D] = -G, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &[\partial_0, \Pi] = D, [\partial_1, \Pi] = G, [G, \Pi] = 0,\\ &[D, \Pi] = 2\Pi. \end{aligned} \tag{13}$$

У зв'язку з цим тривимірну алгебру $< X_1, X_2, X_3 >$, оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення (11), будемо називати алгеброю Галілея без оператора маси і позначати $AG(1,1)$, чотиривимірну алгебру $< X_1, X_2, X_3, X_4 >$, оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення (11)–(12), будемо називати розширеною алгеброю Галілея і позначати $AG_1(1,1)$, а п'ятивимірну алгебру $< X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 >$, оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення (11),(12),(13), будемо називати узагальненою алгеброю Галілея і позначати $AG_2(1,1)$. Зауважимо, що цифри в дужках означають, що простір незалежних змінних диференціального рівняння складається з однієї часової змінної x_0 і однієї просторової змінної x_1.

3. Система визначальних рівнянь. Перетворення еквівалентності системи (1)**.** Використовуючи інфінітезимальний метод С. Лі, знайдемо систему визначальних рівнянь для нелінійностей $F(U)$,

$G(U)$, $H(U)$ та координат інфінітезимального оператора групи симетрії системи (1).

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. *Система (1) інваріантна відносно інфінітезимального оператора*

$$X = \xi^{\mu}(x,u)\partial_{\mu} + \eta^{a}(x,u)\partial_{u^a} \tag{14}$$

тоді і тільки тоді, коли функції ξ^{μ}, η^{a} задовольняють наступну систему визначальних рівнянь

$$\xi_1^0 = \xi_{u^a}^{\mu} = 0, \tag{15}$$

$$f^{db}\eta_{u^c u^d}^{a} + f^{dc}\eta_{u^b u^d}^{a} = 0, \tag{16}$$

$$\eta^c f_{u^c}^{ab} + (\xi_0^0 - 2\xi_1^1) f^{ab} + \eta_{u^b}^{c} f^{ac} - \eta_{u^c}^{a} f^{cb} = 0, \tag{17}$$

$$\eta^c g_{u^c}^{ab} + (\xi_0^0 - \xi_1^1) g^{ab} + \eta_{u^b}^{c} g^{ac} - \eta_{u^c}^{a} g^{cb} + \delta_{ab}\xi_0^1 + $$
$$+ \eta_1^c (f_{u^c}^{ab} + f_{u^b}^{ac}) + 2\eta_{1u^b}^{c} f^{ac} - \xi_{11}^1 f^{ab} = 0, \tag{18}$$

$$\eta^c h_{u^c}^{a} + \xi_0^0 h^a - \eta_{u^c}^{a} h^c + \eta_{11}^{b} f^{ab} +$$
$$+ \eta_1^b g^{ab} - \eta_0^a = 0, \tag{19}$$

де f^{ab}, g^{ab}, h^{a} – компоненти, відповідно, функціональних матриць $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$, $a,b,c,d \in \{1,2\}$, $\mu \in \{0,1\}$, δ_{ab} – символ Кронекера, індекси внизу біля функцій означають диференціювання за відповідною змінною.

Лема 1 доводиться стандартним методом С. Лі (див., наприклад, [4], [24], [27]).

Як наслідок леми 1 справедливе наступне твердження.

Лема 2. *Основною алгеброю інваріантності системи (1), тобто максимальною алгеброю інваріантності даної системи при довільних нелінійностях $F(U), G(U), H(U)$ є алгебра*

$$A^{bas} = < \partial_0, \partial_1 > . \tag{20}$$

Доведення. Якщо систему визначальних рівнянь (15)–(19) розчепити за довільними елементами f^{ab}, g^{ab}, h^{a} та їх похідними, то ми одержимо

$$\xi_{\nu}^{\mu} = \xi_{u}^{\mu} = \eta = 0,$$

звідки

$$\xi^0 = c_0,\ \xi^1 = c_1,\ \eta^a = 0, \tag{21}$$

де c_0, c_1 – довільні сталі. Оператор (14) з координатами (21) породжує алгебру (20).

Лема 2 доведена.

Важливу роль при груповій класифікації класу диференціальних рівнянь відіграють перетворення еквівалентності даного класу. Перетворення еквівалентності — це такі перетворення залежних і незалежних змінних, які довільне рівняння (систему рівнянь) з даного класу диференціальних рівнянь зводять до диференціальних рівнянь (системи рівнянь) з цього ж класу. Знання перетворень еквівалентності дозволяє поділити клас диференціальних рівнянь на нееквівалентні підкласи, виділити в кожному підкласі канонічного представника, дослідити його симетрійні властивості та за допомогою даних перетворень поширити одержаний результат на всі рівняння даного підкласу.

Зазначимо, що групу неперервних перетворень еквівалентності системи рівнянь (1), було знайдено в роботі [6]. Ми ж лише наведемо цей результат.

Лема 3. *Групою неперервних перетворень еквівалентності системи (1) є група вигляду*

$$x_0^{'} = a_0 x_0 + b_0,\ x_1^{'} = a_1 x_1 + g x_0 + b_1,$$
$$u^{a'} = \alpha_{ab} u^b + \beta_a, \tag{22}$$

де $a_{\mu}, b_{\mu}, \alpha_{ab}, \beta_a, g$ – довільні сталі, $\mu \in \{0;1\}$, $a,b \in \{1;2\}$.

Доведення леми 3 проводиться методом, описаним в роботах [3], [12].

Зауважимо, що всі подальші міркування проведено з точністю до перетворень еквівалентності (22).

4. Зображення алгебри Галілея та її розширень. Встановимо вигляд операторів алгебр Галілея, відносно яких може бути інваріантна система (1). Уточнимо загальний вигляд інфінітезимального оператора (14) для системи (1), задовольнивши рівняння (15), (16). Із системи рівнянь (15) випливає, що

$$\xi^0 = A(x_0),\ \xi^1 = B(x_0, x_1), \tag{23}$$

де $A(x_0), B(x_0, x_1)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів. Подивимось на систему рівнянь (16), як на лінійну алгебраїчну систему відносно невідомих $\eta^a_{u^b u^c}$. Визначник даної системи має вигляд

$$\Delta = <1> \cdot <2>,$$

де вирази

$$<1> = f^{11} + f^{22}, <2> = \begin{vmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{vmatrix}, \quad (24)$$

є шпурами матриці $F = (f^{ab})$ відповідно 1-го і 2-го порядку.

Оскільки при $<2> = 0$ система (1) описує процеси, пов'язані з поведінкою двофазної рідини, а при $<1> = 0$ система (1) є рівнянням шредінгерівського типу для комплексної функції $\psi = u^1 + iu^2$, то будемо вважати, що

$$\Delta \neq 0. \quad (25)$$

Лінійна однорідна відносно змінних $\eta^a_{u^b u^c}$ система (16) при умові (25) має лише тривіальний розв'язок

$$\eta^a_{u^b u^c} = 0. \quad (26)$$

Загальним розв'язком системи рівнянь (26) є функції

$$\eta^a = \alpha^{ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^a(x_0, x_1), \quad (27)$$

де $\alpha^{ab}(x_0, x_1), \beta^a(x_0, x_1)$ – довільні гладкі функції своїх аргументів.

Таким чином ми встановили наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо система (1) при умові (25) інваріантна відносно оператора (14), то даний оператор має вигляд*

$$\begin{aligned} X = {} & A(x_0)\partial_0 + B(x_0, x_1)\partial_1 + \\ & [\alpha^{ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^a(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \end{aligned} \quad (28)$$

де A, B, α^{ab}, β^a — довільні гладкі функції своїх аргументів, $a, b \in \{1, 2\}$.

Оскільки система (1) при довільних нелінійностях F, G, H інваріантна відносно алгебри (20), то в якості двох операторів алгебри Галілея візьмемо оператори $X_1 = \partial_0$ і $X_2 = \partial_1$, а третій оператор даної алгебри будемо шукати, як випливає з теореми 1, у вигляді (28), де $A(x_0)$, $B(x_0, x_1)$, $\alpha^{ab}(x_0, x_1)$, $\beta^a(x_0, x_1)$ – шукані функції.

Вимагаючи виконання умов комутування (11), одержимо

$$\dot{A} = B_1 = 0, B_0 = 1, \alpha^{ab}_0 = \alpha^{ab}_1 = \beta^a_0 = \beta^a_1 = 0. \quad (29)$$

Розв'язавши рівняння (29), отримуємо, що оператор X_3 має вигляд

$$X_3 = c_0\partial_0 + (x_0 + c_1)\partial_1 + [\alpha_{1ab}u^b + \beta_{1a}]\partial_{u^a}, \quad (30)$$

де $c_0, c_1, \alpha_{1ab}, \beta_{1a}$ – сталі інтегрування, $a, b \in \{1; 2\}$. Таким чином, поклавши

$$G = X_3 - c_0\partial_0 - c_1\partial_1, \quad (31)$$

одержуємо реалізацію алгебри (11) для системи (1):

$$AG(1,1) = <\partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + Q_1>, \quad (32)$$

де

$$Q_1 = (\alpha_{1ab}u^b + \beta_{1a})\partial_{u^a}. \quad (33)$$

Аналогічно, використавши комутаційні співвідношення (11)–(13), приходимо до висновку, що базові генератори розширеної і узагальненої алгебр Галілея, відносно яких може бути інваріантна система (1), мають вигляд

$$\begin{aligned} & AG_1(1,1) = <\partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + Q_1, \\ & D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2>, \quad (34) \\ & AG_2(1,1) = <\partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + Q_1, \\ & D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2, \\ & \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1Q_1 + x_0Q_2 + Q_3>, \quad (35) \end{aligned}$$

де

$$Q_k = (\alpha_{kab}u^b + \beta_{ka})\partial_{u^a}, \quad (36)$$

α_{kab}, β_{ka} – const, $k = \overline{1;3}$, $a, b \in \{1, 2\}$, причому оператори Q_k повинні задовольняти умови

$$[Q_1, Q_2] = -Q_1, [Q_1, Q_3] = 0, [Q_2, Q_3] = 2Q_3. \quad (37)$$

5. Інваріантність системи (1) відносно алгебри Галілея. Дослідимо, при яких значеннях нелінійностей F, G, H система (1) буде інваріантною відносно алгебри Галілея.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Система (1) інваріантна відносно алгебри Галілея (32) тоді і тільки тоді, коли нелінійності $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$ набувають вигляду*

1. $F(U) = D(u^1,\ \varphi) =$
$$\begin{pmatrix} \varphi^{11}-\varphi^{12}æu^1 & \varphi^{12} \\ \varphi^{21}+(\varphi^{11}-\varphi^{22})æu^1-\varphi^{12}(æu^1)^2 & \varphi^{22}+\varphi^{12}æu^1 \end{pmatrix},$$
$G(U) = D(u^1,\ \psi) - u^1E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 + \chi^1æu^1 \end{pmatrix}, \omega = u^2 - æ\frac{(u^1)^2}{2}$
при $Q_1 = \partial_{u^1} + æu^1\partial_{u^2}$;

2. $F(U) = D(u^2,\ \varphi) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \frac{\varphi^{12}}{u^2} \\ \varphi^{21}u^2 & \varphi^{22} \end{pmatrix},$
$G(U) = D(u^2,\ \psi) - u^1E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2u^2 \end{pmatrix},\ \omega = u^2e^{-u^1}$
при $Q_1 = \partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$;

3. $F(U) = D\left(\frac{u^2}{u^1}, \varphi\right) =$
$$\begin{pmatrix} \varphi^{11} - \varphi^{12}\frac{u^2}{u^1} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21}+(\varphi^{11}-\varphi^{22})\frac{u^2}{u^1}-\varphi^{12}(\frac{u^2}{u^1})^2 & \varphi^{22}+\varphi^{12}\frac{u^2}{u^1} \end{pmatrix},$$
$G(U) = D\left(\frac{u^2}{u^1}, \psi\right) - \frac{u^2}{u^1}E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} \chi^1u^1 \\ \chi^1u^2 + \chi^2u^1 \end{pmatrix},\ \omega = u^1e^{-k\frac{u^2}{u^1}}$
при $Q_1 = kI + u^1\partial_{u^2}$;

4. $F(U) = D\left(\frac{u^2}{u^1}, \varphi\right) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12}\frac{u^1}{u^2} \\ \varphi^{21}\frac{u^2}{u^1} & \varphi^{22} \end{pmatrix},$
$G(U) = D\left(\frac{u^2}{u^1}, \psi\right) - \ln u^1E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} \chi^1u^1 \\ \chi^2u^2 \end{pmatrix},\ \omega = \frac{(u^1)^{k+1}}{u^2}$
при $Q_1 = I + ku^2\partial_{u^2}$;

5. $F(U) = D(u^1, u^2, \varphi) =$
$$\begin{pmatrix} \varphi^3 - \frac{2u^1}{\vec{u}^2}\varepsilon_{ab}\varphi^au^b & -\varphi^4 - \frac{2u^2}{\vec{u}^2}\varepsilon_{ab}\varphi^au^b \\ \varphi^4 - \frac{2u^1}{\vec{u}^2}\delta_{ab}\varphi^au^b & \varphi^3 - \frac{2u^2}{\vec{u}^2}\delta_{ab}\varphi^au^b \end{pmatrix},$$
$G(U) = D(u^1, u^2, \psi) - \arctan\frac{u^1}{u^2}E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} \delta_{ab}\chi^au^b \\ -\varepsilon_{ab}\chi^au^b \end{pmatrix}, \omega = \vec{u}^2e^{2k\arctan\frac{u_1}{u_2}}$
при $Q_1 = kI + J$,

де $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$, $J = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$; $\varphi^{ab}{=}\varphi^{ab}(\omega)$, $\psi^{ab}{=}\psi^{ab}(\omega)$, $\chi^a{=}\chi^a(\omega)$, $\varphi^c{=}\varphi^c(\omega)$, $\psi^c{=}\psi^c(\omega)$ *— довільні гладкі функції аргумента* ω, *вигляд якого наведено в кожному пункті,* E *— одинична матриця розмірності* 2×2, $\vec{u} = (u^1, u^2)$, $\varepsilon = (\varepsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, δ_{ab} *– символ Кронекера,* $a, b \in \{1, 2\}$, $c = \overline{1, 4}$, $æ \in \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{R}$.

Доведення. Знайдемо функціональні матриці $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$, при яких система (1) інваріантна відносно алгебри Галілея (32). Для цього використаємо класифікацію зображень алгебри (32), виконану в роботі [1]. У ній показано, що існує 5 нееквівалентних з точністю до перетворень (22) зображень оператора Q_1. Ці нееквівалентні зображення мають вигляд:

1. $Q_1 = \partial_{u^1} + æu^1\partial_{u^2}$,
2. $Q_1 = \partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$,
3. $Q_1 = kI + u^1\partial_{u^2}$,
4. $Q_1 = I + ku^2\partial_{u^2}$,
5. $Q_1 = kI + J$,

де $æ \in \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{R}$, $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$, $J = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$.

Для того, щоб знайти функції f^{ab}, g^{ab}, h^a, при яких система (1) інваріантна відносно алгебри (32), необхідно підставити відповідні ξ^μ, η^a ($\mu = 0, 1$, $a = 1, 2$), одержані із зображень операторів алгебри (32), у систему визначальних рівнянь (15)–(19), одержану в лемі 1, і розв'язати її для кожного з п'яти пунктів класифікації. Та оскільки формула (28) уточнює вигляд інфінітезимального оператора (14), задовольнивши рівняння (15), (16) визначальної системи, то підставлятимемо відповідні ξ^μ, η^a вже тільки в рівняння (17)–(19) визначальної системи.

Проілюструємо доведення теореми на прикладі операторів з першого пункту. Зображення оператора Q_1, записаного в цьому пункті, визначає базисні оператори алгебри Галілея:

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1} + æu^1\partial_{u^2}, \qquad (38)$$

де $æ \in \{0, 1\}$, та координати оператора X:

$$\xi^0 = d_0, \xi^1 = gx_0 + d_1, \eta^1 = g, \eta^2 = g\text{æ}u^1, \quad (39)$$

де g, d_μ — довільні сталі. Підставивши (39) у систему (17)–(19) бачимо, що вона зводиться до наступної системи для знаходження функцій f^{ab}, g^{ab}, h^a та уточнення координат інфінітезимального оператора:

$$\left(\delta_{c1}+\delta_{c2}\text{æ}u^1\right) f^{ab}_{u^c}+\text{æ}(\delta_{b1}f^{a2}-\delta_{a2}f^{1b})=0, \quad (40)$$

$$\left(\delta_{c1} + \delta_{c2}\text{æ}u^1\right) g^{ab}_{u^c} + \text{æ}(\delta_{b1}g^{a2} - \delta_{a2}g^{1b})+ + \delta_{ab} = 0, \quad (41)$$

$$\left(\delta_{c1} + \delta_{c2}\text{æ}u^1\right) h^a_{u^c} - \delta_{a2}\text{æ}h^1 = 0. \quad (42)$$

Загальним розв'язком системи (40)–(42), є функції

$$\begin{aligned}
&f^{11} = \varphi^{11}-\varphi^{12}\text{æ}u^1, f^{12} = \varphi^{12},\\
&f^{21} = \varphi^{21}+ \left(\varphi^{11}-\varphi^{22}\right) \text{æ}u^1-\varphi^{12}(\text{æ}u^1)^2,\\
&f^{22} = \varphi^{22}+\varphi^{12}\text{æ}u^1,\\
&g^{11} = \psi^{11}-(1 + \text{æ}\psi^{12})u^1, g^{12} = \psi^{12},\\
&g^{21} = \psi^{21}+ \left(\psi^{11}-\psi^{22}\right) \text{æ}u^1-\psi^{12}(\text{æ}u^1)^2,\\
&g^{22} = \psi^{22}-(1 - \text{æ}\psi^{12})u^1,\\
&h^1 = \chi^1, h^2 = \chi^2 + \chi^1\text{æ}u^1,
\end{aligned}$$

при яких система (1) інваріантна відносно алгебри Галілея. Тут $\varphi^{ab}=\varphi^{ab}(\omega)$, $\psi^{ab}=\psi^{ab}(\omega)$, $\chi^a=\chi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції, $\omega = u^2 - \text{æ}\frac{(u^1)^2}{2}$, що співпадає з першим пунктом теореми 2.

Аналогічно розв'язавши систему визначальних рівнянь для всіх зображень оператора Q_1, отримуємо решту пунктів теореми 2.

Теорему доведено.

6. Інваріантність системи (1) відносно розширеної алгебри Галілея. Дослідимо, при яких значеннях нелінійностей F, G, H система (1) буде інваріантною відносно розширеної алгебри Галілея.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3. *Система (1) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея* (34) *тоді і тільки тоді, коли нелінійності F, G, H набувають вигляду*

1. $F(U) = D(u^2, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12}(u^2)^{m-1} \\ \lambda_{21}(u^2)^{1-m} & \lambda_{22} \end{pmatrix},$
$G(U) = D(u^2, \mu)(u^2)^m - u^1E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1(u^2)^{3m} \\ \nu_2(u^2)^{2m+1} \end{pmatrix},$
при $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{m}u^2\partial_{u^2};$

2. $F(U) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u^2) & 0 \\ 0 & \varphi^2(u^2) \end{pmatrix},$
$G(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \psi(u^2) & 0 \end{pmatrix} - u^1E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$
при $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = -u^1\partial_{u^1};$

3. $F(U) = D(u^2, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}-\lambda_{21}\ln u^2 & \lambda_{12}+(\lambda_{11}-\lambda_{22})\ln u^2-\lambda_{21}\ln^2 u^2 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} + \lambda_{21}\ln u^2 \end{pmatrix},$
$G(U) = D(u^2, \mu)u^2 - (u^1 + u^2\ln u^2)E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 - \nu_2\ln u^2 \\ \nu_2 \end{pmatrix}(u^2)^3,$
при $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = -I + u^2\partial_{u^1};$

4. $F(U) = D(u^2, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12}e^{-u^2} \\ \lambda_{21}e^{u^2} & \lambda_{22} \end{pmatrix},$
$G(U) = D(u^2, \mu)e^{-u^2} - u^1E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1e^{-3u^2} \\ \nu_2e^{-2u^2} \end{pmatrix},$
при $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2};$

5. $F(U) = D(u^1, \omega, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}-\lambda_{12}\frac{u^1}{\sqrt{\omega}} & \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\omega}} \\ \lambda_{21}\sqrt{\omega}+(\lambda_{11}-\lambda_{22})u^1-\lambda_{12}\frac{(u^1)^2}{\sqrt{\omega}} & \lambda_{22}+\lambda_{12}\frac{u^1}{\sqrt{\omega}} \end{pmatrix},$
$G(U) = D(u^1, \omega, \mu)\sqrt{\omega} - u^1E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_1u^1 + \nu_2\sqrt{\omega} \end{pmatrix}\omega^{\frac{3}{2}}, \omega = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2},$
при $Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = -I - u^2\partial_{u^2};$

6. $F(U) = D(u^1, u^2, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}-\lambda_{12}\frac{u^2}{(u^1)^{m+1}} & \lambda_{12}(u^1)^{-m} \\ \lambda_{21}(u^1)^m+(\lambda_{11}-\lambda_{22})\frac{u^2}{u^1}-\lambda_{12}\frac{(u^2)^2}{(u^1)^{m+2}} & \lambda_{22}+\lambda_{12}\frac{u^2}{(u^1)^{m+1}} \end{pmatrix},$
$G(U) = D(u^1, u^2, \mu)(u^1)^m - \frac{u^2}{u^1}E,$
$H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1u^1 \\ \nu_2(u^1)^{m+1} + \nu_1u^2 \end{pmatrix}(u^1)^{2m},$
при $Q_1 = u^1\partial_{u^2}, Q_2 = u^1\partial_{u^1} - \frac{m+1}{m}I;$

7. $F(U) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u^1) & 0 \\ (\varphi^1(u^1) - \varphi^2(u^1))\frac{u^2}{u^1} & \varphi^2(u^1) \end{pmatrix}$,

$G(U) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{u^1}{u^2} \\ -\frac{u^2}{u^1} & 1 \end{pmatrix} \frac{u^2}{u^1}\psi(u^1) - \frac{u^2}{u^1}E,$

$H(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

при $Q_1 = u^1\partial_{u^2}, Q_2 = -u^2\partial_{u^2}$;

8. $F(U) = D(u^1, u^2, \lambda) =$
$\begin{pmatrix} \lambda_{11} - \lambda_{12}\left(u^2 - \ln u^1\right) & \lambda_{12}u^1 \\ \frac{\lambda_{21}+(\lambda_{11}-\lambda_{22})\left(u^2-\ln u^1\right)-\lambda_{12}\left(u^2-\ln u^1\right)^2}{u^1} & \lambda_{22}+\lambda_{12}\left(u^2-\ln u^1\right) \end{pmatrix},$

$G(U) = D(u^1, u^2, \mu)\frac{1}{u^1} - \frac{u^2 - \ln u^1}{u^1}E,$

$H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 u^1 \\ \nu_2 + \nu_1\left(u^2 - \ln u^1\right) \end{pmatrix}(u^1)^{-2},$

при $Q_1 = u^1\partial_{u^2}, Q_2 = u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$,

де φ^a, ψ *– довільні гладкі функції своїх аргументів,* λ_{ab}, μ_{ab}, ν_a, m *– довільні сталі,* $a, b \in \{1; 2\}$.

Доведення. Знайдемо функціональні матриці $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$, при яких система (1) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея (34). Для цього використаємо класифікацію зображень алгебри (34), виконану в роботі [7]. У ній показано, що існує 6 нееквівалентних з точністю до перетворень (22) зображень розширеної алгебри Галілея в залежності від вигляду операторів Q_1, Q_2. Ці нееквівалентні зображення операторів Q_1, Q_2 (тобто фактично нееквівалентні зображення розширеної алгебри Галілея) наведемо в таблиці 1:

Таблиця 1

Нееквівалентні зображення розширеної алгебри Галілея.

№	Q_1	Q_2
1.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}$
2.	∂_{u^1}	$-I + u^2\partial_{u^1}$
3.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$
4.	$\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$	$-I - u^2\partial_{u^2}$
5.	$u^1\partial_{u^2}$	$kI + u^1\partial_{u^1}$
6.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$

У таблиці 1 $k \in \mathbb{R}$.

Оскільки рівняння (15)–(16) визначальної системи вже розв'язані (див. теорему 1), то для знаходження функцій $f^{ab}(u)$, $g^{ab}(u)$, $h^a(u)$, при яких система рівнянь (1) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея, підставимо відповідні ξ^μ, η^a, одержані із зображень операторів алгебри (34), у рівняння (17)–(19) визначальної системи та розв'яжемо їх для кожного пункту таблиці 1.

Проілюструємо доведення теореми на прикладі зображення розширеної алгебри Галілея, отриманого з першого пункту таблиці 1. Зображення операторів Q_1, Q_2, записаних у цьому пункті, визначає базові генератори розширеної алгебри Галілея:

$$\begin{aligned} &\partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \\ &D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2} \end{aligned} \tag{43}$$

та координати оператора X:

$$\begin{aligned} &\xi^0 = 2cx_0 + d_0, \xi^1 = cx_1 + gx_0 + d_1, \\ &\eta^1 = -cu^1 + g, \eta^2 = cku^2, \end{aligned} \tag{44}$$

де c, g, d_μ — групові параметри, $\mu \in \{0, 1\}$.

Підставивши (44) у визначальну систему (17)–(19) та враховуючи формули (40)–(42) при æ $= 0$, бачимо, що вона зводиться до наступної системи для знаходження функціональних матриць $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$:

$$\begin{aligned} &-u^1 f^{ab}_{u^1} + ku^2 f^{ab}_{u^2} + \delta_{a1}f^{1b} - \delta_{b1}f^{a1} + \\ &+ k(\delta_{b2}f^{a2} - \delta_{a2}f^{2b}) = 0, \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} &-u^1 g^{ab}_{u^1} + ku^2 g^{ab}_{u^2} + \delta_{a1}g^{1b} - \delta_{b1}g^{a1} + \\ &+ k(\delta_{b2}g^{a2} - \delta_{a2}g^{2b}) + g^{ab} = 0, \end{aligned} \tag{46}$$

$$-u^1 h^a_{u^1} + ku^2 h^a_{u^2} + \delta_{a1}h^1 - \delta_{a2}kh^2 + 2h^a = 0. \tag{47}$$

Очевидно, алгебру (43) отримано при доповненні оператором ділатації D алгебри (38) при æ $= 0$. Оскільки нелінійності, при яких система (1) інваріантна відносно алгебри Галілея для $Q_1 = \partial_{u^1}$, вже знайдено в теоремі 2, то використаємо їх при розв'язуванні отриманої системи (45)–(47). Підставимо значення нелінійностей з першого пункту теореми 2 при æ $= 0$:

$$F = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21} & \varphi^{22} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \psi^{11} & \psi^{12} \\ \psi^{21} & \psi^{22} \end{pmatrix} - u^1E,$$

$$H = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix}, \ \omega = u^2$$

в систему (45)–(47) та розв'яжемо її. Очевидно, розв'язок отриманої системи залежить від значень сталої k. Так, при $k \neq 0$ загальним розв'язком системи (45)–(47) є функції

$$
\begin{aligned}
&f^{11} = \lambda_{11}, && f^{12} = \lambda_{12}(u^2)^{-\frac{1}{k}-1},\\
&f^{21} = \lambda_{21}(u^2)^{\frac{1}{k}+1}, && f^{22} = \lambda_{22};\\
&g^{11} = \mu_{11}(u^2)^{-\frac{1}{k}} - u^1, && g^{12} = \mu_{12}(u^2)^{-\frac{2}{k}-1},\\
&g^{21} = \mu_{21}u^2, && g^{22} = \mu_{22}(u^2)^{-\frac{1}{k}} - u^1;\\
&h^1 = \nu_1(u^2)^{-\frac{3}{k}}, && h^2 = \nu_2(u^2)^{-\frac{2}{k}+1},
\end{aligned}
\tag{48}
$$

де λ_{ab}, μ_{ab}, ν_a – довільні сталі.

Таким чином, з нелінійностями (48) система (1) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея. Виконавши в отриманих функціях заміну $-\frac{1}{k} = m$ приходимо до нелінійностей, описаних у першому пункті теореми 3.

При $k = 0$ систему (45)–(47) задовольняють функції

$$
F(U) = \begin{pmatrix} \varphi^1 & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} -u^1 & 0 \\ \psi & -u^1 \end{pmatrix},
$$
$$
H(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{49}
$$

де $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$, $\psi = \psi(u^2)$ – довільні функції, $a = 1, 2$, що відповідає другому пункту теореми 3.

Аналогічно розв'язавши систему визначальних рівнянь для всіх зображень алгебри (34), отримуємо решту пунктів теореми 3.

Теорему доведено.

7. Інваріантність системи (1) відносно узагальненої алгебри Галілея. Дослідимо, при яких значеннях функціональних матриць F, G, H система (1) буде інваріантною відносно узагальненої алгебри Галілея (35).

Справедливе наступне твердження.

Теорема 4. *Система (1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея* (35) *тоді і тільки тоді, коли нелінійності F, G, H набувають вигляду*

1. $F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12}(u^2)^{m-1} \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$,

   $G(U) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_{12}(u^2)^{2m-1} \\ -\frac{u^2}{m} & \mu_{22}(u^2)^m \end{pmatrix} - u^1 E$,

   $H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1(u^2)^{3m} \\ \nu_2(u^2)^{2m+1} \end{pmatrix}$

   при $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{m}u^2\partial_{u^2}, Q_3 = 0$, $m \neq 0; 1$;

2. $F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$,

   $G(U) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_{12} \\ -1 & \mu_{22} \end{pmatrix} u^2 - u^1 E$,

   $H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} (u^2)^3$

   при $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = -I, Q_3 = 0$;

3. $F(U) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$, $G(U) = -u^1 E$,

   $H(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   при $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = -u^1\partial_{u^1}, Q_3 = 0$;

4. $F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} + (\lambda_{11} - \lambda_{22}) \ln u^2 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$,

   $G(U) = \begin{pmatrix} 1 & \mu_{12} + (1 - \mu_{22}) \ln u^2 + \ln^2 u^2 \\ -1 & \mu_{22} - 2\ln u^2 \end{pmatrix} u^2 - u^1 E$,

   $H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 - \nu_2 \ln u^2 \\ \nu_2 \end{pmatrix} (u^2)^3$

   при $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = -I + u^2\partial_{u^1}, Q_3 = 0$;

5. $F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} e^{-u^2} \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$,

   $G(U) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_{12} e^{-2u^2} \\ 1 & \mu_{22} e^{-u^2} \end{pmatrix} - u_1 E$,

   $H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 e^{-3u^2} \\ \nu_2 e^{-2u^2} \end{pmatrix}$

   при $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}, Q_3 = 0$;

6. $F(U) = \begin{pmatrix} -\lambda_{12}u^1 & \lambda_{12} \\ -\lambda_{12}(u^1)^2 - 2\lambda_{12}\omega - \lambda_{22}\sqrt{\omega}u^1 & \lambda_{22}\sqrt{\omega} + \lambda_{12}u^1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega}}$,

   $G(U) = \begin{pmatrix} -\mu_{12}u^1 & \mu_{12} \\ -\mu_{12}(u^1)^2 - 2\omega - \mu_{22}\sqrt{\omega}u^1 & \mu_{22}\sqrt{\omega} + \mu_{12}u^1 \end{pmatrix} - u^1 E$,

   $H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2\sqrt{\omega} + \nu_1 u^1 \end{pmatrix} \sqrt{\omega^3}$, $\omega = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$

   при $Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, Q_2 = -I - u^2\partial_{u^2}, Q_3 = 0$;

7. $F(U)=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$, $G(U)=\begin{pmatrix} 0 & \mu_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - u^1 E$,

$H(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(u^2)^2 \end{pmatrix}$

при $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = -I - u^2\partial_{u^2}, Q_3 = \partial_{u^2}$;

8. $F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ (\lambda_{11} - \lambda_{22})\, u^1 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$,

$G(U)=\begin{pmatrix} -\mu_{12}u^1 & \mu_{12} \\ -2\lambda_{11}\omega - \mu_{12}(u^1)^2 & \mu_{12}u^1 \end{pmatrix} - u^1 E$,

$H(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_{11} - 1)\,\omega^2 \end{pmatrix}$, $\omega = u^2 - \frac{\left(u^1\right)^2}{2}$

при $Q_1=\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}, Q_2=-I-u^2\partial_{u^2}, Q_3=\partial_{u^2}$;

9. $F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21}(u^1)^m + 2\lambda_{11}\frac{u^2}{u^1} & -\lambda_{11} \end{pmatrix}$,

$G(U)=\begin{pmatrix} \mu_{11}(u^1)^m + \frac{1}{m}\frac{u^2}{u^1} & -\frac{1}{m} \\ \mu_{21}(u^1)^{2m}+\mu_{11}(u^1)^m\frac{u^2}{u^1}+\frac{1}{m}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2 & -\frac{1}{m}\frac{u^2}{u^1} \end{pmatrix} - \frac{u^2}{u^1}E$,

$H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2(u^1)^m + \nu_1\frac{u^2}{u^1} \end{pmatrix}(u^1)^{2m+1}$

при $Q_1 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = -\frac{m+1}{m}I + u^1\partial_{u^1}$,

$Q_3 = 0$, $m \neq 0$;

10. $F(U)=\begin{pmatrix} \dot\theta & 0 \\ \frac{u^2}{u^1}\left(\frac{\theta}{u^1} + \dot\theta\right) & -\frac{\theta}{u^1} \end{pmatrix}$, $G(U)=-\frac{u^2}{u^1}E$,

$H(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

при $Q_1 = u^1\partial_{u^2}, Q_2 = -u^2\partial_{u^2}, Q_3 = 0$;

11. $F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \frac{\lambda_{21}+2\lambda_{11}\left(u^2-\ln u^1\right)}{u^1} & -\lambda_{11} \end{pmatrix}$,

$G(U)=\begin{pmatrix} \mu_{11} - 2\left(u^2 - \ln u^1\right) & u^1 \\ \mu_{21}+(\mu_{11}-1)\left(u^2-\ln u^1\right)-\left(u^2-\ln u^1\right)^2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{u^1}$,

$H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 u^1 \\ \nu_2 + \nu_1\left(u^2 - \ln u^1\right) \end{pmatrix}\frac{1}{(u^1)^2}$

при $Q_1 = u^1\partial_{u^2}, Q_2 = u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}, Q_3 = 0$,

де λ_{ab}, μ_{ab}, ν_a, m – *довільні сталі*, $\theta = \theta(u^1)$, $\varphi = \varphi\left(u^2\right)$ – *довільні гладкі функції своїх аргументів.*

Доведення. Знайдемо функціональні матриці $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$, при яких система (1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (35). Для цього використаємо класифікацію зображень алгебри (35), виконану в роботі [7]. У ній показано, що існує 8 нееквівалентних відносно перетворень (22) зображень узагальненої алебри Галілея в залежності від вигляду операторів Q_1, Q_2, Q_3. Ці нееквівалентні зображення операторів Q_1, Q_2, Q_3 (тобто фактично нееквівалентні зображення узагальненої алгебри Галілея) наведемо в таблиці 2:

Таблиця 2

Нееквівалентні зображення узагальненої алгебри Галілея.

№	Q_1	Q_2	Q_3	Умови
1.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}$	0	$k \neq -2$
2.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$	$u^2\partial_{u^1}$	
3.	∂_{u^1}	$-I + u^2\partial_{u^1}$	0	
4.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$	0	
5.	$\partial_{u^1}+æ_1 u^1\partial_{u^2}$	$-I - u^2\partial_{u^2}$	$æ_2\partial_{u^2}$	
6.	$u^1\partial_{u^2}$	$-I - u^2\partial_{u^2}$	∂_{u^2}	
7.	$u^1\partial_{u^2}$	$kI + u^1\partial_{u^1}$	0	
8.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$	0	

У таблиці 2: $(æ_1, æ_2) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}, k \in \mathbb{R}$.

Як і в попередній теоремі, для знаходження функції $f^{ab}(u)$, $g^{ab}(u)$, $h^a(u)$, при яких система рівнянь (1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, підставимо відповідні ξ^μ, η^a ($\mu = 0, 1$, $a = 1, 2$), одержані із зображень операторів алгебри (35), у рівняння (17)–(19) визначальної системи та розв'яжемо їх для кожного пункту таблиці 2.

Проілюструємо доведення теореми на прикладі зображення узагальненої алгебри Галілея, що отримується з першого пункту таблиці 2. Зображення операторів Q_1, Q_2, Q_3, записаних у цьому пункті, визначає базисні оператори узагальненої алгебри Галілея:

$$\begin{aligned} &\partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \\ &D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1\partial_{u^1} + \\ &\quad + x_0(-u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}), k \neq -2, \end{aligned} \qquad (50)$$

та координати оператора X:

$$\begin{aligned} &\xi^0 = ax_0^2 + 2cx_0 + d_0, \\ &\xi^1 = ax_0x_1 + cx_1 + gx_0 + d_1, \\ &\eta^1 = a(x_1 - x_0u^1) - cu^1 + g, \\ &\eta^2 = (ax_0 + c)ku^2, k \neq -2, \end{aligned} \qquad (51)$$

де a, c, g, d_μ — групові параметри, $\mu = 0,1$. Підставивши (51) у визначальну систему (17)–(19) та врахувавши формули (40)–(42) (при æ $= 0$) і (45)–(47), бачимо, що вона зводиться до наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b}=0,\\ &g^{a1}+\delta_{a1}u^1-\delta_{a2}ku^2=0. \end{aligned} \tag{52}$$

Очевидно, алгебру (50) отримано при доповненні оператором проективних перетворень П алгебри (43). Оскільки нелінійності, при яких система (1) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея для $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}$, вже знайдено в теоремі 3 (а саме, функції (48) при $k \neq 0$ та (49) при $k = 0$), то використаємо їх при розв'язуванні отриманої системи (52).

Розглянемо спочатку випадок $k \neq 0$. Підставивши функції (48), знайдені в теоремі 3, у систему (52), бачимо, що її розв'язок залежить від значень сталої k, а саме:

a) при $k \neq -1$ загальним розв'язком системи є функції

$$\begin{aligned} &f^{11} = \lambda_{11}, && f^{12} = \lambda_{12}(u^2)^{-\frac{1}{k}-1},\\ &f^{21} = 0, && f^{22} = \lambda_{22};\\ &g^{11} = -u^1, && g^{12}=\mu_{12}(u^2)^{-\frac{2}{k}-1},\\ &g^{21} = ku^2, && g^{22} = \mu_{22}(u^2)^{-\frac{1}{k}} - u^1;\\ &h^1 =\nu_1(u^2)^{-\frac{3}{k}}, && h^2 = \nu_2(u^2)^{-\frac{2}{k}+1}, \end{aligned} \tag{53}$$

де λ_{ab}, μ_{ab}, ν_a – довільні сталі. Виконавши в отриманих функціях заміну $-\frac{1}{k} = m$ приходимо до нелінійностей, описаних у пункті 1 теореми 4 при $m \neq 0, \frac{1}{2}, 1$. Зауважимо, що у першому пункті теореми 4 відсутня умова $m \neq \frac{1}{2}$. Її вдалося позбутися завдяки тому, що при розв'язуванні цієї ж задачі для пункту 5 таблиці 2 при $(æ_1, æ_2) = (0, 0)$ ми отримали систему з нелінійностями (53) при $k = -2$ ($m = \frac{1}{2}$) і приєднали її до системи з першого пункту теореми 4.

b) при $k = -1$ нелінійності, що задовольняють систему (52) мають вигляд

$$F=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}0 & \mu_{12}\\ -1 & \mu_{22}\end{pmatrix}u^2-u^1E,$$
$$H=\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}(u^2)^3,$$

де λ_{ab}, μ_{ab}, ν_a – довільні сталі, що відповідає другому пункту теореми 4.

Тепер розлянемо випадок $k = 0$. Підставивши функції (49), знайдені в теоремі 3, у систему (52) та розв'язавши її, бачимо, що при $k = 0$ систему задовольняють такі значення нелінійностей

$$F=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & 0\\ 0 & \varphi^{22}\end{pmatrix}, G=-u^1E, H=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ \omega = u^2,$$

де λ_{11} – довільна стала, φ^{22} – довільна гладка функція аргумента ω. Ці нелінійності співпадають з третім пунктом теореми 4 при введенні позначень $\lambda_{11} = \lambda$, $\varphi^{22} = \varphi$.

Аналогічно розв'язавши систему визначальних рівнянь для всіх нееквівалентних зображень алгебри (35), які визначені в таблиці 2, отримуємо решту пунктів теореми 4.

Теорему доведено.

8. Висновки. У даній роботі із класу систем (1) виділені ті системи, які інваріантні відносно алгебри Галілея без оператора маси та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень. Оскільки отримані системи задовольняють принцип відносності Галілея, то вони претендують на опис реальних фізичних процесів.

Так, наприклад, система

$$\begin{aligned} &u^1_0+u^1u^1_1=\lambda_{11}u^1_{11}+\mu_{12}u^2u^2_1,\\ &u^2_0+u^1u^2_1=\lambda_{22}u^2_{11}-u^2u^1_1, \end{aligned} \tag{54}$$

отримана в другому пункті теореми 4 (при $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\mu_{22} = 0$) є системою рівнянь рідини Ван–дер–Ваальса, яка ефективно застосовується при описі процесів молекулярно–кінетичної теорії газів та рідин [22]. Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь рідини Ван–дер–Ваальса описані в роботі [10], і (54) співпадає з однією з систем, отриманою авторами при дослідженні МАІ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Глеба А.В.* Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь: Дис... канд. ф.-м. наук: 01.01.03. – К., –2003. – 120с.

2. *Жадан Т.О.* Інваріантність системи рівнянь дифузії–конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея. // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. – 2004. – **12**. – С. 70-75.

3. *Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу . Праці Інституту математики НАН України: Мат-ка та її застосування. – К., 2002. – Т. 45. – 359 с.

4. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1978. – 400 с.

5. *Омелян О.М.* Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції дифузії // Тр. Ин-та ИПММ НАН Украины. Донецк. – 2009. – Т. 1. – С. 138-147.

6. *Рассоха І.В.* Дослідження симетрійних властивостей нелінійних систем параболічного типу: Дис... канд. ф.-м. наук: 01.01.02. – К., – 2012. – 189 с.

7. *Серов М.І., Жадан Т.О., Блажко Л.М.* Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 8. – С. 1128-1145.

8. *Серов М.І., Карпалюк Т.О.* Інваріантність системи рівнянь конвекції дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля // Математичний вісник НТШ. – 2010. – Т. 7. – С. 200-221.

9. *Серов М.І., Омелян О.М.* Класифікація симетрійних властивостей системи рівнянь хемотаксису // Український математичний вісник. – 2008. – Т. 5, № 4. – С. 536-562.

10. *Серов М.І., Омелян О.М.* Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь рідини Ван-дер-Ваальса // Праці Інституту математики НАН України. – 2000. – Т. 35. – С. 1-9.

11. *Серов М.І., Черніга Р.М.* Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь з конвективним членом.// Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, №9. – С. 1262-1270.

12. *Akhatov I.S., Gazizov R.K., Ibragimov N.H.* Nonlocal symmetries. Heuristic approach // J. Sov. Math. – 1991. – **55**. – P. 1401-1450.

13. *Cherniha R.M., King J.R.* Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction–diffusion systems: I // J. Phys. – 2000. – **33**. – P. 267-282.

14. *Cherniha R.M., King J.R.* Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction–diffusion systems: I. Addendum // J. Phys. – 2000. – **33**. – P. 7839-7841.

15. *Cherniha R.M., King J.R.* Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction–Diffusion Systems: II // J. Phys. A: Math.Gen. – 2003. – **36**. – P. 405-425.

16. *Cherniha R.M., King J.R.* Nonlinear Reaction–Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansätze and Exact Solutions // Math. Anal. Appl. – 2005. – **308**. – P. 11-35.

17. *Cherniha R.M., Serov M.I.* Nonlinear Diffusion-Convection Systems: Lie and Q-conditional Symmetries // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – **43**. – 2002. – P. 102-110

18. *Cherniha R.M., Serov M.I.* Nonlinear systems of the Byrgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, Ansätze and solutions // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – **282**. – P. 305-328.

19. *Cherniha R., Serov M., Rassokha I.* Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **342**. – P. 1363-1379.

20. *Dorodnitsyn V.A.* On invariant solutions of non–linear heat conduction with a source // USSR Comput. Math. and Math. Phys. – 1982. – **22.** – P. 115-122.

21. *Fushchych W., Shtelen W., Serov M.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 1993. – 436 p.

22. *Huai-Yu-Jian, Xiao-Ping Wang, Din-Yu Hsieh* The Global Attractor of a Dissipative Nonlinear Evolution System // Journal of Mathematical Analysys and Application. – 1999. – **238**. – P. 124-142.

23. *Katkov V.L.* The group classification of solutions of the Hopf equations // Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz. – 1965. – **6**. – P. 105-106.

24. *Lie S.* Über Integration durch bestimmente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen 6. – Leipzig: 1881. – P. 328-368.

25. *Nikitin A.G., Wiltshire R.J.* Symmetries of Systems of Nonlinear Reaction–Diffusion Equations in Symmetries in Nonlinear Mathematical Physics // Proc. of the Third Int. Conf. – Kiev, July 12-18. – 1999, Ed. A.M. Samoilenko (Inst. of Mathematics of Nat. Acad. Sci. of Ukraine). – P. 47-59.

26. *Nikitin A.G., Wiltshire R.J.* System of reaction–diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001. – **42**. – P. 1666-1688.

27. *Olver P.* Applications of Lie groups to differential equations // Berlin: Springer. – 1986. – 513 p.