МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА

М.І. Сєров, І.В. Рассоха

СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Монографія

Полтава – 2013

УДК 517.958
ББК 22.311
С32

РЕЦЕНЗЕНТИ:

В.В. Маринець — д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики Ужгородського національного університету

І.Д. Пукальський — д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

О.М. Станжицький — д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. кафедри прикладної загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

СЄРОВ М.І., РАССОХА І.В.

С32 **Симетрійні властивості рівнянь реакції-конвекції-дифузії**: монографія / М.І. Сєров, І.В. Рассоха. — Полтава: ПолтНТУ, 2013. – 168 с.

ISBN 978-966-616-118-8

Монографію присвячено дослідженню симетрійних властивостей нелінійних диференціальних рівнянь та систем параболічного типу. Книга буде корисна студентам механіко-математичних спеціальностей, аспірантам, викладачам ВНЗ.

УДК 517.958
ББК 22.311

Рекомендовано до друку Вченою радою Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

(*протокол № 15 від 4 липня 2013 року*)

ISBN 978-966-616-097-6

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

У формулах індекси, позначені латинськими літерами, змінюються від 1 до n, грецькими — від 0 до n. За індексами, що повторюються, йде сумування. Нижні індекси функцій позначають диференціювання за відповідними змінними.

$\mathbb{R}^n$ — арифметичний дійсний n-вимірний простір.

MAI — максимальна алгебра інваріантності.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множини натуральних, дійсних та комплексних чисел відповідно.

$\widetilde{X}$ — продовження інфінітезимального оператора X.

$\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}$ — оператори диференціювання за змінними x_μ та u.

δ_{ab} — символ Кронекера.

$u_{(n)}$ — сукупність всіх похідних функції u за змінною x_1 до порядку n.

ВСТУП

Дослідження багатьох фізичних, біохімічних, екологічних, економічних та інших процесів потребує побудови математичних моделей. У багатьох випадках такими моделями є диференціальні рівняння. Найчастіше математичні моделі є наслідком загальних законів або специфічних властивостей, що притаманні даному процесу.

Математичні моделі у фізиці почали інтенсивно розроблятися в працях І. Ньютона по створенню основ класичної механіки, всесвітнього тяжіння, теорії світла. Їх подальше застосування до величезного кола різних фізичних явищ пов'язані з іменами Ж. Лагранжа, Л. Ейлера, П. Лапласа, Ж. Фур'є, Д. Гауса, Б. Рімана, М. В. Остроградського і багатьох інших учених. Значний внесок у розвиток методів математичних моделей у фізиці внесли А. М. Ляпунов. В. А. Стеклов, С. Лі та багато інших провідних вчених світової науки. Диференціальні рівняння стали ефективним засобом моделювання моделей фізичних явищ, пов'язаних з різними фізичними полями і хвильовими функціями в електродинаміці, акустиці, теорії пружності, гідро- і аеродинаміці і ряду інших напрямів дослідження фізичних явищ в суцільних середовищах, інших задач науки та техніки.

Це дало поштовх до розвитку різноманітних методів інтегрування диференціальних рівнянь: метод відокремлення змінних, метод спеціальних підстановок, метод варіації, метод Ейлера, метод Даламбера, метод характеристик (Монжа), метод каскадів (Лапласа), метод Пуасона, метод розвинення в ряди Фур'є, метод спуску Адамара та інші. Одним з таких методів є метод оберненої задачі розсіяння (та ряд споріднених з ними методів), який було розроблено у 1967 році в спільній роботі К. Гарднера (C. Gardner), Дж. Гріна (J. Green), М. Крускала (M. Kruskal) і Р. Міури (R. Miura) [?] на прикладі нелінійного рівняння Кортевега–де Фріза. Важливу роль в розвитку методів оберненої задачі розсіяння та спорідненим з ним підходів до розв'язання багатьох нелінійних диференціальних рівнянь відіграли праці українських математиків, зокрема, Ю.М. Березанського [?]-[?], В.А. Марченка [?], Л.П. Нижника [?, ?], Є.Д. Білоколоса, [?, ?], Є.Я. Хруслова [?].

Серед методів, які з'явилися в останній час, слід відзначити асимптотичний та чисельно-аналітичний методи дослідження нових класів диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, що були розроблені в роботах А.М. Самойленка та Ю.А. Митропольського ([?], [?], [?], [?]), А.М. Самойленка та Р.І. Петришина ([?], [?], [?]), А.М. Самойленка та Н.І. Ронто ([?]); варіаційні методи розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач гідродинаміки, розроблені І.О. Луковським ([?], [?], [?], [?]); алгоритми наближеного розв'язку широкого класу диференціальних рівнянь з імпульсною дією, розроблені М.О. Перестюком ([?], [?], [?]); асимптотичні методи аналізу стохастичних диференціальних рівнянь, розвинуті М.І. Портенком ([?], [?], [?]); чисельно-аналітичний метод для знаходження розв'язку задачі Коші для абстрактних диференціальних рівнянь першого та другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами, розроблений В.Л. Макаровим ([?], [?]) та інші.

Поширеним методом розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод Софуса Лі ([?], [?], [?], [?], [?], [?]), в основі якого лежить принцип симетрії. Відкриття С. Лі полягало в тому, що складні нелінійні умови інваріантності диференціального рівняння відносно групи перетворень можна замінити у випадку неперервної групи більш простими лінійними умовами інфінітезимальної інваріантності відносно твірних групи. Цей результат має велике значення для задач групової класифікації, оскільки дозволяє шукати замість перетворень з групи симетрій базисні оператори з відповідної алгебри ліївської інваріантності рівняння. С. Лі першим застосував алгебру інваріантності диференціального рівняння для теоретико-групової редукції та знаходження його точних розв'язків. В подальшому ці методи одержали розвиток в роботах багатьох видатних вчених. Так в 1905 році Пуанкаре застосував ідеї Лі до системи рівнянь Максвела, а в 1909 році Г. Бейтман опублікував свою роботу [?], де одержав точні розв'язки лінійного хвильового ріняння за допомогою методів симетрійного аналізу, Г. Біркгоф наголосив на можливості застосування теорії груп у механіці [?].

Новий етап розвитоку метод С. Лі одержав у роботах Л.В. Овсяннікова [?, ?, ?] і його школи, якими була створена теорія інваріантних і частково-інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь. Значну роль в популяризації ідей С. Лі відіграла монографія [?].

Важливі результати в області теоретико-групового аналізу були одержані Дж. Блуменом та І.Д. Коулом [?, ?], У. Міллером [?], П. Олвером [?, ?, ?, ?], Н.Х. Ібрагімовим [?, ?], П. Вінтерніцем [?, ?, ?]. В Україні перші роботи з цієї тематики були опубліковані В.Г. Костенком наприкінці 50-их років [?].

В середині семидесятих років минулого століття була створена Київська школа математиків, яку очолив В.І. Фущич. Науковцями цієї школи було зроблено суттєвий вклад в розвиток як класичних, так і нових методів дослідження диференціальних рівнянь. Серед основних її досягнень необхідно відзначити розроблений В.І. Фущичем та А. Г. Нікітіним [?, ?, ?, ?, ?] новий метод дослідження симетрійних властивостей рівнянь, особливість якого полягає в тому, що базисними елементами алгебри інваріантності є інтегродиференціальні оператори. Такий підхід дозволив знайти нові симетрії багатьох добре відомих рівнянь квантової механіки: Максвела [?], Ламе [?] тощо.

Продовжуючи розвиток ідей Дж. Блумена, І.Д. Коула [?], Олвера та Розенау [?, ?], В.І. Фущич та його учні [?, ?, ?, ?, ?] ввели поняття умовної симетрії та розробили методи її дослідження. Результати досліджень умовної симетрії багатьох конкретних рівнянь [?, ?, ?, ?, ?] дали можливість побудови принципово нових анзаців, на основі яких були знайдені точні розв'язки, що не можуть бути отримані стандартним алгоритмом Лі.

Відомо, що усі фізичні закони і явища природи підпорядковуються певним законам симетрії. Наприклад, однорідність простору і часу обумовлює інваріантність відносно перенесення, ізотропія простору — інваріантність відносно поворотів, рівнозначність усіх інерціальних систем відліку – інваріантність відносно перетворень Галілея та інші. Таким чином, симетрія у найбільш широкому значенні — це інваріантність явища чи об'єкта відносно деяких його перетворень. Існує тісний зв'язок між симетрією і законами збереження у природі. У 1918 Е. Нетер сформулювала теорему, згідно з якою, якщо властивості системи не змінюються від деякого перетворення, то цьому відповідає певний закон збереження. Наявність симетрії в системі обумовлює існування для неї фізичної величини, що зберігається. Наприклад, закон збереження імпульсу є наслідком однорідності простору, а закон збереження енергії — наслідком однорідності часу. Отже, симетрія завжди пов'язана із збереженням і виділяє в навколишньому світі різні інваріанти.

В.І. Фущич зазначав, що по відношенню до диференціальних рівнянь, симетрію можна розглядати як принцип, за допомогою якого із найрізноманітніших логічно допустимих моделей (рівнянь, співвідношень) відбираються тільки ті, котрі володіють широкою симетрією. Адже, серед усієї множини диференціальних рівнянь існує порівняно небагато тих, що описують природні явища. Виникає питання: в чому їх особливість? Так усі основні рівняння математичної фізики (рівняння Ньютона, Лапласа, д'Аламбера, Шредінгера, Ліувілля, Дірака, Максвела і т.д.) інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень. Саме ця властивість виділяє їх із множини інших диференціальних рівнянь.

Принципи симетрії виражають найбільш загальні властивості природи. Тому пошук нових симетрій складає одну з найбільш важливих задач фізики взагалі. Пізнання властивостей симетрії, як писав Е. Вігнер, "полягає в наділюванні структурою законів природи або встановленні між ними внутрішніх зв'язків, так само, як закони встановлюють структуру або взаємозв'язок у світі явищ". Таким чином, якщо закони керують явищами, то принципи симетрії – це закони фізичних законів. Тому одним із застосувань апарату групового аналізу є знаходження законів збереження. Отже, побудова конструктивного математичного апарату, здатного виявляти різні типи симетрій, — одна з найважливіших задач якісної теорії диференціальних рівнянь.

Існує багато областей застосування методів групового аналізу диференціальних рівнянь. Так знання груп симетрії даного рівняння дозволяє генерувати нові розв'язки з відомих. Відшукання групи перетворень еквівалентності даного рівняння дає можливіть записати його у найбільш простій для дослідження формі.

Оскільки теоретико-групові методи дають можливість інтегрування диференціальних рівнянь, які мають нетривіальні групи інваріантності, то актуальною є задача повної групової класифікації диференціальних рівянь, яка дозволяє їз заданого класу рівнянь виділити ті, які володіють широкими симетрійними властивостями.

Ще однією з найбільш важливих задач є задача виділення з заданого класу рівнянь таких, які допускають в якості групи інваріантності деяку відому групу.

Таким чином, розвиток методів групового аналізу є актуальним і набуває особливого значення при розв'язанні тих диференціальних рівнянь, для яких інші методи є неефективними. Розв'язанню таких актуальних задач і присвячена дана монографія. Коротко сформулюємо основні поняття та визначення, що використовуються в ній.

Розглядаємо клас систем диференціальних рівнянь з частинними похідними m – го порядку

$$S(x, u_{(m)}, F_{(s)}) = 0, \tag{0.1}$$

де $S \in R^k$, $x = (x_0, \overrightarrow{x}) \in R^{1+n}$, $u = u(x) \in R^k$, $F = F(x, u_{(r)}) \in R^l$ — довільні гладкі функції, $u_{(r)} = (u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u})$, $\underset{r}{u}$, — сукупність всеможливих похідних r-го порядку функцій u за змінними x, $F_{(s)} =$

$(F, \underset{1}{F}, \ldots, \underset{s}{F})$, $\underset{s}{F}$ — сукупність всеможливих похідних s – го порядку функцій F за змінними $y = (x, u_{(r)})$.

Наведемо основні поняття методу С. Лі згідно [?].

Означення 0.1. *Група Лі локальних перетворень вигляду*

$$\widetilde{x} = f(x, u, \theta), \quad \widetilde{u} = g(x, u, \theta), \tag{0.2}$$

де θ — довільні параметри, $\theta \in R^l$, називається l-параметричною групою точкових симетрій рівняння (??), якщо множина розв'язків (??) інваріантна відносно перетворень (??).

Означення 0.2. *Алгеброю Лі групи (??) називається лінійний векторний простір, базисом якого є диференціальні оператори першого порядку*

$$X_b = \xi^b(x, u)\partial_x + \eta^b(x, u)\partial_u, \tag{0.3}$$

де

$$\xi^b = \frac{\partial f^b}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0}, \eta^b = \frac{\partial g^b}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0}, \tag{0.4}$$

зі стандартною операцією комутування.

Між групами Лі перетворень (??) і алгебрами Лі існує взаємнооднозначна відповідність (перша теорема Лі). Якщо відомі перетворення (??), то координати інфінітезімальних операторів (??) знаходяться з умов (??). Щоб відновити групу Лі по її алгебрі Лі, необхідно розв'язати наступну задачу Коші (систему рівнянь Лі):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \theta} = \xi(f, g), \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \eta(f, g), \\ &f\bigg|_{\theta=0} = x, \qquad g\bigg|_{\theta=0} = u. \end{aligned} \tag{0.5}$$

Сформулюємо алгоритм Лі знаходження алгебри інваріантності системи рівнянь (??).

Теорема 0.1. *Диференціальний оператор*

$$X = \xi(x, u)\partial_x + \eta(x, u)\partial_u \tag{0.6}$$

*є оператором інваріантності системи (**??**) тоді і тільки тоді, коли*

$$\widetilde{X}S(x,u_{(m)})\Big|_{S=0} \equiv 0, \tag{0.7}$$

де

$$\widetilde{X} = X + \underset{1}{\eta}\partial_{\underset{1}{u}} + \underset{2}{\eta}\partial_{\underset{2}{u}} + \ldots + \underset{k}{\eta}\partial_{\underset{k}{u}} + \ldots, \tag{0.8}$$

причому

$$\underset{k}{\eta} = D\underset{k-1}{\eta} - \underset{k}{u}D\xi,$$

$$D = \partial_x + \underset{1}{u}\partial_u + \underset{2}{u}\partial_{\underset{1}{u}} + \ldots + \underset{k}{u}\partial_{\underset{k-1}{u}} + \ldots.$$

Записавши (**??**) в розгорнутому вигляді, після розщеплення по похідних, отримуємо систему лінійних рівнянь з частинними похідними відносно координат ξ, η оператора X (систему визначальних рівнянь), загальний розв'язок якої визначає максимальну в розумінні Лі алгебру інваріантності рівнянь (**??**). Використовуючи формули (**??**), можна визначити локальні групи Лі, що відповідають даній алгебрі.

Означення 0.3. *Перетворення вигляду*

$$\widetilde{x} = f(x,u,\theta), \quad \widetilde{u} = g(x,u,\theta), \quad \widetilde{F} = \Phi(x,u,F,\theta), \tag{0.9}$$

*де θ — довільні параметри, $\theta \in R^l$, називаються перетвореннями еквівалентності системи (**??**), якщо дія перетворень (**??**) перетворює систему (**??**) в іншу систему S', яка належить до того ж класу систем, що й система (**??**).*

Нехай, функції F задовольняють деякі додаткові умови

$$Q(x,u_{(m)},F_{(q)}(x,u_{(m)})) = 0, \quad Q \in R^r. \tag{0.10}$$

Ці умови складаються з r диференціальних рівнянь для функцій F, де $F_{(q)}(x,u_{(m)})$ — множина всіх частинних похідних функцій F порядку не вище q.

Позначимо кожний клас систем рівнянь вигляду (??), в якому функції F задовольняють умові (??), як $S|_Q$.

Кожній однопараметричній групі локальних точкових перетворень, що залишає систему $S|_Q$ інваріантною, відповідає інфінітезимальний оператор (??). Повний набір таких груп генерує **максимальну групу** $G^{max} = G^{max}(S|_Q)$ з відповідною алгеброю Лі $A^{max} = A^{max}(S|_Q)$ інфінітезимальних операторів системи $S|_Q$.

Основною групою інваріантності системи (??) назвемо групу:

$$G^{bas} = G^{bas}(S|_Q) = \bigcap_{Q=0} G^{max}(S|_Q)$$

з відповідною алгеброю Лі

$$A^{bas} = A^{bas}(S|_Q) = \bigcap_{Q=0} A^{max}(S|_Q).$$

Групу перетворень вигляду (??) системи (??) позначимо

$$G^{equiv} = G^{equiv}(S|_Q).$$

Тоді задача групової класифікації системи (??) полягає у знаходженні всіх нееквівалентних випадків розширення A^{bas}, тобто у знаходженні всіх G^{equiv} - нееквівалентних виглядів функцій F, які задовольняють рівняння (??) і умову $A^{max}(S|_Q) \neq A^{bas}$.

Повна група еквівалентності G^{equiv} класу систем $S|_Q$ складається з групи неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont} та з групи точкових перетворень екввалентності G^{equiv}_{point}.

Детальніше зупинимося на відшуканні групи неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont}.

Для відшукання G^{equiv}_{cont} можна застосувати інфінітезимальний підхід, згідно якого G^{equiv}_{cont} породжується інфінітезимальним оперетором еквівалентності, який шукатимемо у вигляді

$$E = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u + \zeta(x,u_{(m)},F)\partial_F. \qquad (0.11)$$

Умову еквівалентності системи $S|_Q$ відносно перетворень, породжених оператором еквівалентності E, можна записати у вигляді

$$\widetilde{E}S\Big|_{\substack{S=0,\\ Q=0}} = 0, \quad \widetilde{E}Q\Big|_{\substack{S=0,\\ Q=0}} = 0, \tag{0.12}$$

де $\widetilde{E}$ — продовження оператора E, яке визначається за правилом:

$$\widetilde{E} = E + \underset{1}{\eta}\partial_{\underset{1}{u}} + \underset{1}{\zeta}\partial_{\underset{1}{F}} + \underset{2}{\eta}\partial_{\underset{2}{u}} + \underset{2}{\zeta}\partial_{\underset{2}{F}} + \ldots + \underset{k}{\eta}\partial_{\underset{k}{u}} + \underset{k}{\zeta}\partial_{\underset{k}{F}} + \ldots, \tag{0.13}$$

$$\begin{aligned}
&\underset{k}{\zeta} = \mathcal{D}\underset{k-1}{\zeta} - \underset{k}{F}\mathcal{D}\chi,\\
&\mathcal{D} = \partial_y + \underset{1}{F}\partial_F + \underset{2}{F}\partial_{\underset{1}{F}} + \ldots + \underset{k}{F}\partial_{\underset{k-1}{F}} + \ldots,\\
&y = (x, u_{(m)}), \qquad \chi = (\xi, \eta_{(m)}), \qquad \eta_{(m)} = (\eta, \underset{1}{\eta}, \underset{2}{\eta}, \ldots, \underset{m}{\eta}).
\end{aligned}$$

Розщепивши по похідних функцій u та F умови еквівалентності (**??**), одержуємо систему визначальних рівнянь, загальний розв'язок якої визначає координати оператора евівалентності E.

Коли координати оператора E встановлені, перетворення еквівалентності можна визначити, розв'язавши наступну задачу Коші (систему рівнянь типу Лі):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial\theta} = \xi(f,g), \quad \frac{\partial g}{\partial\theta} = \eta(f,g), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \zeta(f,g,\Phi),\\
&f\Big|_{\theta=0} = x, \qquad g\Big|_{\theta=0} = u, \qquad \Phi\Big|_{\theta=0} = F.
\end{aligned} \tag{0.14}$$

На алгоритм Лі та алгоритм знаходження перетворень еквівалентності, описаних вище, спирається доведення ряду основних результатів даної книги.

У першому розділі проведено повну групову класифікацію скалярного рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$u_0 = \partial_1[f^1(u)u_1] + f^2(u)u_1 + f^3(u). \tag{0.15}$$

Задача групової класифікації даного рівняння розв'язувалася за наступною схемою.

1. На основі алгоритму, описаного вище, знайдено основну групу перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont}.

2. Використавши прямий метод, знайдено всеможливі локальні перетворення, які зводять довільне рівняння даного класу до рівняння цього ж класу.

3. На основі алгоритму Лі [?] з умови інваріантності (**??**) одержали систему визначальних рівнянь на координати оператора (**??**). Після розв'язання тих рівнянь з визначальної системи, які не містили довільних функцій f^a та їх похідних, вигляд координат оператора (**??**) дещо уточнився.

4. Рівняння, що містять довільні функції f^a або їх похідні, назвемо **класифікаційними**. Вважаючи в класифікаційних рівняннях функції f^a довільними, після розщеплення цих рівнянь за всіма незв'язаними похідними довільних функцій f^a, отримали систему диференціальних рівнянь з частинними похідними на координати інфінітезимального оператора (**??**). В результаті розв'язання останньої системи одержали алгебру A^{bas}.

5. Враховуючи співвідношення функцій f^a та їх похідних, по вигляду класифікаційних рівнянь записали і розв'язали "структурні рівняння". В результаті одержали необідні умови розширення алгебри A^{bas}. Зображення одержаних нелінійностей f^a дещо спростили за допомогою неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont}.

6. Розв'язавши класифікаційні рівняння відносно координат оператора (**??**), для кожного з нееквівалентних виглядів функцій f^a, що допускають розширення A^{bas}, побудовано максимальну алгебру інваріантності $A^{max}(S|_Q)$.

7. За допомогою додаткових перетворень еквівалентності частину одержаних рівнянь зведено до інших, еквівалентних рівнянь, які також допускають розширення A^{bas}. Таким чином, одержали нееквівалентні зображення нелінійностей f^a та відповідних максимальних

алгебр інваріантності рівняння (??) в найбільш спрощеному вигляді.

8. Для деяких рівнянь класу (??) прямим методом знайдено дискретні перетворення інваріантності, які не можуть бути одержані за методом Лі, та побудовано формули розмноження розв'язків.

В другому розділі введено поняття Q-умовної еквівалентності. Вказана додаткова умова, яка разом з умовою еквівалентності дозволяє повністю розв'язати задачу групової класифікації. Вказано алгоритм відшукання операторів Q-умовної еквівалентності та проілюстровано його застосування для проведення повної групової класифікації на прикладах нелінійного рівняння теплопровідності та еволюційного рівняння другого порядку

У третьому розділі розглянуто систему нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії

$$U_0 = \partial_1[F(U)U_1] + G(U)U_1 + H(U). \tag{0.16}$$

Для системи (??) поставлена та розв'язана задача побудови найбільш загального її вигляду, що допускає інваріантність відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень.

У першому підрозділі цього розділу досліджено групу неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont} системи (??), що дало можливість в подальшому максимально спростити одержані нелінійності.

В другому підрозділі даного розділу на основі алгоритму Лі [?] з умови інваріантності (??) одержано систему визначальних рівнянь на координати оператора (??) та становлено вигляд основної алгебри інваріантності A^{bas} системи (??).

В третьому підрозділі доведено, що єдиноможливою реалізацією алгебри AG(1,1) є реалізація вигляду

$$< \partial_0, \partial_1, G = x\partial_0\partial_1 + x_1Q_1 + Q_2, Q_1 >, \tag{0.17}$$

де оператори Q_1 і Q_2 мають вигляд $Q_i = (\alpha^i_{ab}u^b + \beta^i_a)\partial_{u^a}$, причому α^i_{ab}, β^i_a — const, $i = 1; 2$, та задовольняють умову $[Q_1, Q_2] = 0$.

В четвертому підрозділі з точністю до перетворень еквівалентності G_{cont}^{equiv} встановлено вигляд нелінійностей, при яких система (??) інваріантна відносно алгебри Галілея (??).

В п'ятому та шостому підрозділах відповідно вказано зображення розширеної алгебри Галілея для системи (??) та з точністю до перетворень еквівалентності G_{cont}^{equiv} знайдено нелінійності, при яких дана система інваріантна відносно цієї алгебри.

В сьомому підрозділі знайдено єдиноможливу реалізацію узагальненої алгебри Галілея для системи (??).

Серед результатів дослідження варто наголосити на одержаних у восьмому підрозділі, де з точністю до перетворень еквівалентнгості G_{cont}^{equiv} виписано всі можливі вигляди нелінійностей, при яких система (??) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея. Слід зазначити, що шість з таких систем є узагальненням результатів, одержаних в роботах [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?].

Також серед систем класу (??) одержано систему, яка не є узагальненням раніше відомих галілеївськи інваріантних систем даного класу.

Центральними задачами математичної фізики є побудова математичних моделей фізичних явищ, їх дослідження та розв'язування.

Дослідження моделей фізичних процесів є досить складною задачею, оскільки модельні диференціальні рівняння, як правило, містять функціональні параметри. Використання результатів симетрійного аналізу диференціальних рівнянь може її суттєво полегшити. В зв'язку з цим актуальною є задача групової класифікації диференціальних рівнянь, розв'язання якої дозволяє виділити із даного класу рівнянь ті, що мають відповідні симетрійні властивості.

Початок розв'язування задачі групової класифікації було покладено в роботах С. Лі, де він здійснив групову класифікацію лінійних (1+1)-вимірних рівнянь другого порядку параболічного типу [?]. Сучасну постановку задачі групової класифікації було здійснено Л.В. Овсянніковим , який в роботі [?] вперше провів повну групову класифікацію нелінійного (1+1) – вимірного рівняння теплопровідності

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x). \tag{0.18}$$

В наступних дослідженнях симетрійних властивостей об'єктом розгляду стали узагальнення рівняння (**??**). Так, зокрема, класифікацію рівняння:

$$u_t + u_{xx} = \partial_x(k(u)u_x) \tag{0.19}$$

проводив у своїх дослідженнях В.Л. Катков. Результати цих досліджень відображені у роботі [**?**].

В роботі [**?**] В.А.Тичиніним досліджено симметрію и знайдено точні розв'язки рівняння

$$u_t = h(u)u_{xx}.$$

Повну групову класифікацію рівняння теплопровідності з джерелом (стоком), яке використовується при моделюванні біологічних та фізико-хімічних процесів

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + g(u) \tag{0.20}$$

та його узагальнень на дво- та тривимірний випадок провів В.А. Дородніцин у роботах (1982,[**?**]), (1983,[**?**]). Зауважимо, що це було зроблено значно пізніше після роботи Л. Овсяннікова, що пов'язано зі складністю реалізації алгоритму Лі для розв'язання таких задач у випадку, коли рівняння містить дві і більше довільні функції. Продовжили роботу в цьому напрямі А. Орон, П. Розено (1986, [**?**]), С.М. Юнг, К. Вербург, П. Бавеє (1994, [**?**]), та М.П. Едвардс (1994,[**?**]), які працювали над дослідженням симетрійних властивостей рівнянь дифузії–конвекції

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x. \tag{0.21}$$

Вагомий внесок в цьому напрямку було зроблено І. Ахатовим, Р. Газізовим і Н. Ібрагімовим, які у 1987 році опублікували роботу [**?**], де провели класифікацію симетрійних властивостей рівняння

$$u_t = G(u_x)u_{xx}. \tag{0.22}$$

У роботах [?], [?], [?] з точністю до перетворень еквівалентності проведений вичерпний аналіз симетрій Лі нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x + g(u) \tag{0.23}$$

при умові, що $f(u) \neq 0$.

Р.О. Попович, та Н.М. Іванова в роботі [?] провели повну групову класифікацію та дослідили перетворення еквівалентності рівнянь вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)a(u)u_x)_x + b(u)u_x. \tag{0.24}$$

В роботах [?], [?] А.М. Самойленко та В.І. Лагно; у роботі [?] В.І. Лагно, С.В. Спічак та В.І. Стогній; а також Р.З. Жданов [?], [?] та П. Бесараб-Горват [?] провели повну групову класифікацію найбільш загальних квазілінійних рівнянь еволюційного типу

$$u_t = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x). \tag{0.25}$$

У роботах С.В. Спічака, В.І. Стогнія [?], [?] знайдені максимальні групи перетворень та побудовані деякі класи точних розв'язків для одновимірного рівняння Фокера-Планка (ФП) з довільними достатньо гладкими функціями $A(t,x), B(t,x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(t,x)u] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t,x)u]. \tag{0.26}$$

Таким чином, протягом останніх 20–30 років приділялось багато уваги дослідженню класичних симетрій рівняння реакції-конвекції-дифузії, оскільки рівняння цього класу займають вагоме місце серед рівнянь математичної фізики. Вони використовуються для моделювання процесів переносу енергії в плазмі, розподілу розчинів у грунті, рух рідин в пористому середовищі, процеси хемотаксису та інші фізичні та біохімічні процеси.

Зважаючи на її актуальність, однією з задач, що визначили напрямок проведених у дисертації досліджень, стала задача *групової класифікації нелінійних рівнянь та систем рівнянь параболічного типу.* Зокрема,в другому розділі розв'язана задача повної групової класифікації скалярного рівняння реакції-конвекції-дифузії, яке узагальнює рівняння (??), (??), (??).

В даному випадку задача групової класифікації формулюється наступним чином: дослідити симетрійні властивості рівняння вигляду (??) при довільних нелінійностях $D(u), f(u), g(u)$. Дана задача розв'язана з точністю до перетворень еквівалентності. Очевидно, що знання перетворень еквівалентності значно полегшує задачу групової класифікації диференціальних рівнянь. Вагомий внесок у розроблення методів побудови груп перетворень еквіваленності було внесено І. Ахатовим, Р. Газізовим та Н. Ібрагімовим. Подальший розвиток ці ідеї одержали в роботах В.І. Лагна, С.В. Спічака та В.І. Стогнія, де описано новий підход до розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь, який є синтезом методу Лі-Овсяннікова, результатом класифікації абстрактних скінченновимірних дійсних алгебр Лі та техніки використання перетворень еквівалентності.

Р.О. Поповичем у роботі [?] модифіковано концепцію групової класифікації і поширено до класифікації допустимих перетворень у класах диференціальних рівнянь. Ним переглянуто існуючі поняття групового аналізу, описано поняття умовної групи еквівалентності, нормалізований клас диференціальних рівнянь та досліджено їх властивості.

В другому розділі даної роботи продовжено розвиток методу застосування перетворень еквівалентності для групової класифікації диференціальних рівнянь шляхом введення поняття Q-умовної еквівалентності та проілюстровано його застосування до класифікації деяких еволюційних рівнянь.

Узагальненням рівняння реакції-конвекції-дифузії є система рівнянь реакції-конвекції-дифузії. В цьому класі містяться такі системи, які широко застосовуються в теорії процесів тепломасопереносу, дифузії, описують еволюцію температури u^1 та густини u^2 у термоядерній плазмі [?], [?] та багатьох інших.

До класу систем (??) належать системи, які описують різні фізичні та біохімічні процеси. Наприклад, система (??) є моделлю еволюції температури та густини у термоядерній плазмі. В біології система рівнянь реакції-адвекції-дифузії описує модель спільноти хижак-жертва, переміщення в колоніях бактерій під дією різних чинників та ін. Одним з прикладань системи (??) в екології є дослідження процесів розповсюдження забруднювальних речовин у водоймах або атмосфері. В медицині за допомогою систем класу (??) моделюється процес згортання крові. Також система (??) моделює гідродінамічну нестійкість, що виникає поблизу розділу двох незмішуваних рідин, що зустрічаються в процесах нафтоперегонки, горіння, сепарації та інших. При переході у системі (??) до комплексої змінної можна одержати моделі, що описують рух квантової частинки (рівняння Шредінгера), стан надпровідника в зовнішньому магнітному полі (рівняння Гінзбурга-Ландау) та магнітогідродинамічні хвилі в плазмі.

Однією з систем типу (??) є відома дифузійна система Лотки-Вольтера

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + u(a_1 + b_1 u + c_1 v), \\ v_t &= d_2 v_{xx} + v(a_2 + b_2 u + c_2 v) \end{aligned}$$

запропонована незалежно Лоткою і Вольтером, як математична модель конкретних процесів. Перший з них показав, що ця модель буде описувати експерементально зафіксовану періодичну зміну концентрацій двох хімічних речовин, які реагують, другий — що такі рівняння моделюють процес боротьби між двома популяціями тварин, одна з яких репрезентує хижаків, а друга — їхніх жертв.

У роботах [?, ?] зроблено вичерпний опис симетрій Лі для багатовимірних систем диференціальних рівнянь реакції дифузії зі сталими коефіцієнтами дифузії вигляду

$$u_t = \Delta u + F(u, v),$$
$$v_t = \Delta v + G(u, v),$$

де $u = u(t, \overrightarrow{x}), v = v(t, \overrightarrow{x}),\ \overrightarrow{x} \epsilon \mathbf{R}^n$, $\triangle$ – оператор Лапласа.

В роботах [?], [?], [?] побудовані класи нелінійних систем двох рівнянь параболічного типу, інваріантних відносно алгебри Галілея та її розширень. При конкретних виглядах функцій $F(U)$ симетрійні властивості системи рівнянь

$$U_t = \partial_x [F(U) U_x], \tag{0.27}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t, x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$ — довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1, 2}$ досліджені в роботах [?], [?], [?] і методами лiївської та умовної симетрії знайдено деякі точні розв'язки цих систем.

У роботі [?] досліджено конформну інваріантність системи (??), при наступному вигляді матриці F:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 u^{\alpha_1} & \lambda_2 \dfrac{u^{\alpha_1 + 1}}{v} \\ \lambda_3 u^{\alpha_2 - 1} v & \lambda_4 u^{\alpha_2} \end{pmatrix}, \text{ де } u = u^1,\ v = u^2.$$

Система (??) досліджувалась також і в роботі А.В. Гладкова, В.А. Байкова [?], де виявлені два зображення алгебри конформного типу.

У роботі [?] розв'язана задача дослідження конформної інваріантності системи (??) відносно алгебри

$$AC_1(1) = \langle \partial_0,\ \ \partial_1,\ \ D = 2x_1 \partial_1 + Q,\ \ K = x_1^2 \partial_1 + x_1 Q \rangle, \tag{0.28}$$

де $Q = (m_{ab} u^b + n_a) \partial_{u^a}$, m_{ab}, n_a — довільні сталі, $a, b = 1, 2$.

Так, розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль описується математичними моделями, основаними на рівняннях Келлера-Сегеля [?]

$$\begin{aligned} S_t &= D_S S_{xx} + k_1 g(S) b, \\ b_t &= -\nu \partial_x [b \chi(S) S_x] + D_b b_{xx} + k_2 g(S) b, \end{aligned} \tag{0.29}$$

де $S_t = \frac{\partial S}{\partial t}$, $S_x = \frac{\partial S}{\partial x}$, $b_t = \frac{\partial b}{\partial t}$, $S_{xx} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $b_{xx} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, причому $S(t,x)$ — концентрація субстрату-аттрактанту, який споживається бактеріями, $b(t,x)$ — щільність бактерій, $g(S)$ — питома швидкість росту бактерій, $\chi(S)$ — функція хемотаксисної відповіді, D_S та D_b — коефіцієнти дифузії субстрату та бактерій відповідно; ν, k_1 k_2 — сталі; t,x — часова та просторова змінні відповідно. Моделлю Келлера – Сегеля та її деякими модифікаціями описується також формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера [?] та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії [?].

Кооперативна поведінка найпростіших мікроорганізмів також описується системою вигляду

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + G(U), \tag{0.30}$$

де $G = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $g^a = g^a(U)$ — довільні гладкі функції, $a = \overline{1,2}$, яка є узагальненням системи (??). Наприклад, математична модель , що описує процес агрегації міксоміцстів має вигляд, подібний до моделі Келлера – Сегеля:

$$\begin{aligned} &\rho_t = \nabla(D_\rho \nabla\rho) + f(\rho,a) - k(\rho,a), \\ &a_t = \nabla(D_a \nabla a - D_c \nabla\rho), \end{aligned} \tag{0.31}$$

де $a(r,t)$ та $\rho(r,t)$ — концентрація амеб і молекул аттрактанта цАМФ (циклічна аденозинмонофосфорна кислота) відповідно, D_a та D_ρ — коефіцієнти дифузії, а D_c характеризує силу хемотаксисної відповіді окремих клітин; f — швидкість синтезу цАМФ, k — швидкість розпаду цАМФ.

Формування безперетинних структур при сповільненому поширенні популяційних хвиль бактерій описується модифікованою системою Лапідуса – Шиллера:

$$\begin{aligned} &S_t = D_S S_{xx} - \lambda(S)b, \\ &b_t = -V\partial_x[bf_x(S)] + D_b b_{xx} + R(S)b, \end{aligned} \tag{0.32}$$

де $S(t,x)$ — густина субстрату-аттрактанту, $b(t,x)$ — концентрація бактерій, $\lambda(S) = \alpha R(S), \alpha - const(\alpha \leq 1)$, $R(S)$ — швидкість розмноження бактерій, $f(S)$ — функція чуттєвості бактерій до субстрату-аттрактанту, причому R, f задаються рівностями $R(S) = R_0 S(S + S_k)^{-1}, f(s) = S(S + S_k)^{-1}$, R_0, S_k, D_S, D_b, V — сталі.

В роботі [?] проведена повна групова класифікація системи

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1) & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x \right] + G(U), \tag{0.33}$$

яка є узагальненням систем (??), (??).

І.В. Князева та М.Д. Попов в роботі [?] виконали групову класифікацію системи нелінійних рівнянь дифузії вигляду

$$u_t - (f(u,v)u_x)_x = 0, \quad v_t - (g(u,v)v_x)_x = 0.$$

Узагальненням вище наведених систем є система вигляду (??). Дослідженню симетрійних властивостей систем класу (??) приділяло увагу багато відомих науковців. При різних виглядах сталої матриці дифузії $F = \Lambda$ та $G(U) = 0$ одержали вагомі результати А.Г. Нікітін та Р. Вилтшир (див. наприклад [?], [?], [?], [?], [?]). Р.М. Черніга та Дж. Кінг [?], [?], [?], що були одержані у роботах по дослідження інваріантності системи реакції дифузії. До цього ж класу систем належить і нелінійна система рівнянь конвекції-дифузії, симетрійні властивості якої вивчені в роботі [?].

До систем класу (??) належить також система

$$u_t = (1 + im_0)u + (1 + im_1)u_{xx} - (1 + im_2)u^2 v,$$
$$v_t = (1 - im_0)v + (1 - im_1)v_{xx} - (1 - im_2)v^2 u,$$

яка еквівалентна рівнянню

$$w_t = (1 + im_0)w + (1 + im_1)w_{xx} - (1 + im_2)|w|^2 w, \tag{0.34}$$

де m_0, m_1, m_2 – сталі дійсні числа, $w = u + iv$, $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ – дійсні функції. Рівняння (??) є відомим як рівняння Гінзбурга-Ландау або Курамото-Цузукі [?]. Воно є основним інструментом для інтерпритації експерементальних даних в області фізики нерівноважних середовищ, лазерів , хімічній кінетиці та ін. і лежать в основі багатьох технічних застосувань [?], [?], [?]. Симетрійні властивості рівняння Гінзбурга-Ландау вивчались, наприклад в роботах А.Г. Нікітіна [?] та В.С. Бермана і Ю.А. Данілова [?].

Аналогічно до рівняння Гінзбурга-Ландау при переході у рівняння Шредінгера до системи можна одержати систему класу (??). Нелінійні рівняння Шредінгера відіграють виключно важливу роль в теорії розвитку слабо змінних хвильових шлейфів в стійких слабо нелінійних системах і зустрічаються в цілому ряді галузей фізики, включаючи фізику плазми і нелінійну оптику. Вони використовуються в геометричній оптиці, нелінійній квантовій механіці і теорії конденсації Бозе-Ейнштейна. Симетрійні властивості рівняння Шредінгера вивчались багатьма авторами (див., наприклад, [?], [?], [?]).

Але повну групову класифікацію нелінійних систем класу (??) досі не проведено. В зв'язку з цим дослідженню системи (??) приділено увагу у третьому розділі.

Одним з важливих напрямків групового аналізу є побудова найбільш загального диференціального рівняння з частинними похідними, яка допускає в якості групи інваріантності деяку відому групу локальних перетворень.

Ще Якобі запропонував вивід законів збереження у класичній мехініці на основі принципів симетрії. Пізніше Клейн проаналізував з цієї точки зору рівняння загальної теорії відносності і підкреслив важливість вивчення теоретико-групової природи законів збереження для диференціальних рівнянь. Об'єднавши методи формального варіаційного числення і теорії груп Лі, Е. Нетер у 1918 сформулювала теорему, згідно з якою, якщо властивості системи не змінюються від деякого перетворення, то цьому відповідає певний закон збереження. Тому симетрійні властивоті є потужним інструментом для виділення з певного класу рівнянь чи систем, які в більшій мірі, ніж інші логічно допустимі моделі, претендують на описання реальних фізичних процесів. З іншого боку відомо, що лінійна система дифузії інваріантна відносно алгебри Галілея та її розширень операторами маштабних та проективних перетворень. Логічно допустити, що її узагальнення системою рівнянь реакції-конвекції-дифузії володіє подібними симетрійними властивостями.

Тому у третьому розділі поставлена і розв'язана задача *серед систем класу (**??**) за допомогою симетрійних методів виділити ті системи, які є інваріантними відносно алгебри Галілея та її розширень операторами маштабних та проективних перетворень*. Тобто розглянута задача встановлення вигляду нелінійностей $F(U), G(U), H(U)$, при яких система (**??**) інваріантна відносно алгебр Галілея. В наслідок досліджень, проведених в даному розділі, запропоновані галілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії, які в силу своїх симетрійних властивостей претендують на описання фізичних процесів, що задовольняють принципу відносності Галілея.

Таким чином, отримані результати можуть бути використані при розв'язуванні ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики.

РОЗДІЛ 1

КЛАСИФІКАЦІЯ СИМЕТРІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Нелінійне рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$u_0 = \partial_1[f^1(u)u_1] + f^2(u)u_1 + f^3(u), \tag{1.1}$$

де $u = u(x_0, x_1), f^a(u)$ — довільні гладкі функції, $a = \overline{1,3}$, описує багато конкретних фізичних процесів. Воно використовується для моделювання переносу енергії в плазмі, розподілу розчинів у грунті, руху рідин в пористому середовищі, процеси хемотаксису та інші фізичні та біохімічні процеси. До класу рівнянь (**??**) входять такі відомі рівняння, як рівняння теплопровідності, Бюргерса та інші.

Симетрійні властивості рівняння (**??**) при різних значеннях нелінійностей f^a досліджувались багатьма авторами. Ще С. Лі в роботі [**?**] дослідив симетрійні властивості рівняння (**??**) при $f^1 = 1, f^2 = f^3 = 0$. В роботі [**?**] Л.В. Овсянніков прокласифікував симетрійні властивості рівняння (**??**) при $f^2 = f^3 = 0$ та довільному f^1. В. А. Дородніцин у роботі [**?**], методами [**?**], [**?**] прокласифікував симетрійні властивості рівняння (**??**) при $f^2 = 0$ та довільних функціях f^1, f^3. В роботі [**?**] прокласифіковано симетрійні властивості рівняння (**??**) при $\forall f^1, f^3$ та $f^2 \neq 0$.

В даному розділі знайдено неперервні та дискретні перетворення еквівалентності даного рівняння, які застосовано для виділення нееквівалентних підкласів рівняння (**??**), проведено повну групову класифікацію рівняння (**??**) при довільних функціях f^1, f^2, f^3.

1.1. Основна група перетворень еквівалентності

При дослідженні симетрійних властивостей певного класу рівнянь важливе значення має знання перетворень еквівалентності даного класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів канонічні рівняння. Достатньо дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь даного класу.

Дослідимо групу неперервних перетворень еквівалентності рівняння (**??**), застосувавши метод, запропонований в роботах [**?**], [**?**]

Теорема 1.1. *Групою неперервних перетворень еквівалентності рівняння (**??**) є група, координати інфінітезімального оператора*

$$E = \xi^{\mu}(x_0, x_1, u)\partial_{\mu} + \eta(x_0, x_1, u)\partial_u + \tag{1.2}$$

$$+\zeta^{a}(x_0, x_1, u, f^1, f^2, f^3)\partial_{f^a} \tag{1.3}$$

якої задаються формулами

$$\xi^0 = æ_0 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = æ_1 x_1 + g x_0 + d_1, \quad \eta = æ_2 u + d_2,$$

$$\zeta^1 = (2æ_1 - æ_0)f^1, \zeta^2 = (æ_1 - æ_0)f^2 - g, \zeta^3 = (æ_2 - æ_0)f^3, \tag{1.4}$$

де $æ_{\mu}, d_{\mu}, g$ *— групові параметри,* $\mu = 0; 1; 2, a = 1; 2; 3.$

Доведення. З умови еквівалентності рівняння (**??**) відносно оператора (**??**)

$$\tilde{E}S \mid_{\substack{S=0 \\ S^{\alpha}=0}} = 0, \quad \tilde{E}S^{\alpha} \mid_{\substack{S=0 \\ S^{\alpha}=0}} = 0,$$

де $\alpha = \overline{1;12}, S = -u_0 + \partial_1(f^1 u_1) + f^2 u_1 + f^3, S^1 = f^1_0, S^2 = f^1_1, S^3 = f^2_0, S^4 = f^2_1, S^5 = f^3_0, S^6 = f^3_1, S^7 = f^1_{u_0}, S^8 = f^1_{u_1}, S^9 = f^2_{u_0}, S^{10} = f^2_{u_1}, S^{11} = f^3_{u_0}, S^{12} = f^3_{u_1}, \tilde{E}$ – продовження оператора E, одержимо систему рівнянь для визначення функцій ξ^{μ}, η, ζ^a:

$$\xi^0_1 = \xi^{\mu}_u = \eta_{\mu} = \eta_{uu} = \zeta^a_{\mu} = 0, \tag{1.5}$$

$$\zeta^1 = (2\xi^1_1 - \xi^0_0)f^1, \tag{1.6}$$

$$\zeta^2 = (\xi^1_1 - \xi^0_0)f^2 + \xi^1_{11}f^1 - \xi^1_0, \tag{1.7}$$

$$\zeta^3 = (\eta_u - \xi^0_0)f^3. \tag{1.8}$$

Продиференціювавши рівняння (**??**)–(**??**) по змінній u , та врахувавши (**??**), знаходимо

$$\zeta^a_u = 0. \tag{1.9}$$

Використавши диференціальні наслідки рівнянь (**??**)–(**??**) по змінних x_1 і x_0 та рівняння (**??**), одержимо

$$\xi^0_{00} = \xi^1_{00} = \xi^1_{11} = \xi^1_{01} = 0. \tag{1.10}$$

З систем (**??**)–(**??**) випливає, що функції ξ^μ, η, ζ^a мають вигляд (**??**).

Теорема доведена.

Зазначимо, що всі подальші міркування проведено з точнісю до перетворень еквівалентності, породженими оператором (**??**) з координатами (**??**)

$$x_0^{'} = a_0x_0 + b_0, x_1^{'} = a_1x_1 + cx_0 + b_1, u^{'} = ku + m, \tag{1.11}$$

де a_μ, b_μ, k, m, c — довільні сталі, $\mu\epsilon\{0, 1\}$.

Зауваження 1.1. Перетворення, одержані в теоремі 2.1, є тільки групою неперервних перетворень еквівалентності. Надалі цю групу будемо називати основною групою перетворень еквівалентності (BGE). Всі інші перетворення еквівалентності, які не входять до BGE, будемо називати додатковими.

1.2. Додаткові перетворення еквівалентності

Крім перетворень BGE клас рівнянь (**??**) володіє й додатковими перетвореннями еквівалентності. Добре відомо, що рівняння

$$u_0 = u_{11} + \lambda_1 u + \lambda_2$$

при $\lambda_1 \neq 0$ заміною

$$x_0 = t, \quad x_1 = x, \quad u = we^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

а при $\lambda_1 = 0$ заміною

$$x_0 = t, \quad x_1 = x, \quad u = w + \lambda_2 t,$$

зводиться до рівняння

$$w_t = w_{xx}.$$

Крім того, як показано в роботі [?], перетворення $t = x_0, \quad x = \varphi(x_1), w = \psi^3(x_1)u$, де φ і ψ — розв'язки системи $\ddot{\psi} = \frac{\lambda}{3}\psi, \dot{\varphi} = \psi^{-2}$, зводить рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^{-\frac{4}{3}}u_1) + \lambda u^{-\frac{1}{3}}$$

до рівняння

$$w_t = \partial_x(w^{-\frac{4}{3}}w_x);$$

перетворення

$$t = \frac{e^{k\lambda_1 x_0}}{k\lambda_1}, \quad x = x_1, \quad w = ue^{-\lambda_1 x_0}$$

зводять рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + (\lambda_1 + \lambda_2 u^k)u, \quad \lambda_1 k \neq 0;$$

до рівняння

$$w_t = \partial_x(w^k w_x) + \lambda_2 w^{k+1};$$

а перетворення

$$t = \frac{e^{k\lambda_1 x_0}}{k\lambda_1}, \quad x = x_1, \quad w = k(u - \lambda_1 x_0)$$

при $\lambda_1 k \neq 0$ зводить рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^{ku}u_1) + \lambda_1 + \lambda_2 e^{ku},$$

до вигляду

$$w_t = \partial_x(e^w w_x) + \lambda_2 e^w.$$

В роботі [?] вказана заміна

$$t = x_0, \quad x = x_1 + \frac{\lambda}{2}x_0^2, \quad w = u - \lambda x_0,$$

яка зводить рівняння

$$u_0 = u_{11} + uu_1 + \lambda \tag{1.12}$$

до рівняння Бюргерса

$$w_t = w_{xx} + ww_x. \tag{1.13}$$

Очевидно, що наведені вище перетворення не входять до класу (**??**). Тому поставимо задачу знайти всеможливі невироджені локальні перетворення вигляду

$$t = a(x_0, x_1, u), \quad x = b(x_0, x_1, u), \quad w = c(x_0, x_1, u), \tag{1.14}$$

які довільне рівняння класу (**??**) зводять до рівняння того ж класу

$$w_t = \partial_x[F^1(w)w_x] + F^2(w)w_x + F^3(w), \tag{1.15}$$

де $w = w(t, x), F^a = F^a(w)$ — довільні гладкі функції.

Теорема 2.2. *Будь-яке рівняння (**??**) зводиться до рівняння (**??**) за допомогою невиродженої локальної підстановки (**??**) тоді і тільки тоді, коли дана підстановка має вигляд*

$$t = a(x_0), \quad x = b(x_0, x_1), \quad w = \alpha(x_0, x_1)u + \beta(x_0, x_1), \tag{1.16}$$

причому функції $a, b, \alpha, \beta, f^a, F^a$ задовольняють наступним умовам

$$a_0 b_1 \alpha \neq 0, \tag{1.17}$$

$$b_1^2 f^1(u) = a_0 F^1(w), \tag{1.18}$$

$$-2\frac{b_1\alpha_1}{\alpha}(uf^1(u))' - 2\frac{b_1\beta_1}{\alpha}\dot{f}^1(u) + b_{11}f^1(u) + b_1 f^2(u) = a_0 F^2(w) + b_0, \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{\alpha_1^2}{\alpha}(u^2 f^1(u))' + 2\tfrac{\alpha_1\beta_1}{\alpha}(uf^1(u))' + \tfrac{\beta_1^2}{\alpha}\dot{f}^1(u) - (\alpha_{11}u + \beta_{11})f^1(u) - \\ &-(\alpha_1 u + \beta_1)f^2(u) + \alpha f^3(u) + \alpha_0 u + \beta_0 = a_0 F^3(w).\end{aligned} \tag{1.20}$$

Доведення. Для того, щоб перетворення (**??**) були невиродженими, якобіан цих перетворень має бути відмінним від нуля:

$$\jmath = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_u \\ b_0 & b_1 & b_u \\ c_0 & c_1 & c_u \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.21}$$

Перетворення (**??**) встановлюють зв'язок як між змінними (x_0, x_1, u) та (t, x, w), так і між похідними функцій u та w. Цей зв'язок задається наступними формулами

$$\begin{aligned} &u_0 = -\tfrac{w_t a_0 + w_x b_0 - c_0}{w_t a_u + w_x b_u - c_u}, \quad u_1 = -\tfrac{w_t a_1 + w_x b_1 - c_1}{w_t a_u + w_x b_u - c_u}, \\ &u_{11} = \tfrac{w_{tt}(a_1 + a_u u_1)^2 + 2w_{tx}(a_1 + a_u u_1)(b_1 + b_u u_1)}{w_t a_u + w_x b_u - c_u} + \\ &+ \tfrac{w_{xx}(b_1 + b_u u_1)^2 - w_t(a_{11} + 2a_{1u} u_1 + a_{uu} u_1^2)}{w_t a_u + w_x b_u - c_u} + \\ &+ \tfrac{w_x(b_{11} + 2b_{1u} u_1 + b_{uu} u_1^2) - (c_{11} + 2c_{1u} u_1 + c_{uu} u_1^2)}{w_t a_u + w_x b_u - c_u}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Якщо порівняти коефіцієнти біля старших похідних в рівняннях (**??**) і (**??**), попередньо підставивши в нього (**??**), то одержимо

$$a_u = b_u = 0, \quad a_1 c_u = 0, \tag{1.23}$$

$$b_1^2 f^1(u) = a_0 F^1(w). \tag{1.24}$$

З умов (**??**) та (**??**)випливає, що

$$a_1 = 0. \tag{1.25}$$

Умова (**??**) з урахуванням (**??**) та (**??**) має вигляд

$$a_0 b_1 c_u \neq 0. \tag{1.26}$$

Формули (**??**) при умовах (**??**), (**??**) перепишуться наступним чином

$$\begin{aligned} &u_0 = \tfrac{w_t a_0 + w_x b_0 - c_0}{c_u}, \quad u_1 = \tfrac{w_x b_1 - c_1}{c_u}, \\ &u_{11} = \tfrac{w_{xx} b_1^2 + w_x b_{11} - c_{11}}{c_u} - 2\tfrac{c_{1u}}{c_u^2}(w_x b_1 - c_1) - \\ &- \tfrac{c_{uu}}{c_u^3}(w_x b_1 - c_1)^2. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Після підстановки (**??**) у рівняння (**??**) одержимо

$$\begin{aligned} &w_t a_0 + w_x b_0 - c_0 = f^1(u)[w_{xx} b_1^2 + w_x b_{11} - c_{11} - \\ &-2\tfrac{c_{1u}}{c_u^2}(w_x b_1 - c_1) - \tfrac{c_{uu}}{c_u^3}(w_x b_1 - c_1)^2] + \\ &+ \dot{f}^1(u)\tfrac{1}{c_u}(w_x b_1 - c_1)^2 + f^2(u)(w_x b_1 - c_1) + f^3(u) c_u. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Порівнявши коефіцієнти біля відповідних похідних функції w в рівняннях (??) і (??), приходимо до наступних співвідношень

$$-f^1(u)\frac{c_{uu}}{c_u^2}b_1^2 + \dot{f}^1(u)\frac{b_1^2}{c_u} = a_0\dot{F}^1(w), \tag{1.29}$$

$$\begin{gathered} -b_0 + f^1(u)(b_{11} - 2\tfrac{c_{1u}}{c_u}b_1) - 2\dot{f}^1(u)\tfrac{b_1c_1}{c_u} + \\ +f^2(u)b_1 = a_0F^2(w), \end{gathered} \tag{1.30}$$

$$\begin{gathered} c_0 - f^1(u)(c_{11} - 2\tfrac{c_{1u}}{c_u}c_1) + \dot{f}^1(u)\tfrac{c_1^2}{c_u} - \\ -f^2(u)c_1 + f^3(u)c_u = a_0F^3(w). \end{gathered} \tag{1.31}$$

Якщо умову (??) продиференціювати по u і підставити у (??), то з урахуванням (??) одержимо

$$c_{uu} = 0.$$

Звідки отримаємо

$$c = \alpha(x_0, x_1)u + \beta(x_0, x_1). \tag{1.32}$$

Таким чином, при довільних значеннях функцій $f^1(u), f^2(u), f^3(u), F^1(w), F^2(w), F^3(w)$ з формул (??), (??), (??) маємо (??), причому умова (??) матиме вигляд (??).

Подальше уточнення функцій $a(x_0), b(x_0, x_1), \alpha(x_0, x_1), \beta(x_0, x_1)$ здійснюється за допомогою рівностей (??), (??), (??), які з урахуванням формул (??) мають вигляд (??), (??), (??).

Теорема доведена.

1.3. Основна алгебра інваріантності

Визначимо основну алгебру інваріантності рівняння (??), тобто знайдемо максимальну алгебру інваріантності рівняння (??) при довільних функціях f^a.

Теорема 2.3. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (??) при довільних гладких функціях f^a є алгебра*

$$A^{bas} = <\partial_0, \partial_1> . \tag{1.33}$$

Доведення. Для доведення теореми використаємо алгоритм Лі.

З умови

$$\tilde{X}S\mid_{S=0}=0, \tag{1.34}$$

де $\tilde{X}$ — продовження інфінітезімального оператора

$$X=\xi^0(x_0,x_1,u)\partial_0+\xi^1(x_0,x_1,u)\partial_1+\eta(x_0,x_1,u)\partial_u, \tag{1.35}$$

$$S=u_0-\partial_1[f^1(u)u_1]-f^2(u)u_1-f^3(u),$$

одержуємо систему визначальних рівнянь для визначення координат оператора X та функцій f^a:

$$\xi^0_1=\xi^0_u=\xi^1_u=\eta_{uu}=0; \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned} &\eta\dot{f}^1=(2\xi^1_1-\xi^0_0)f^1,\\ &\eta\dot{f}^2=(\xi^1_1-\xi^0_0)f^2-2\eta_1\dot{f}^1+(\xi^1_{11}-2\eta_{1u})f^1-\xi^1_0,\\ &\eta\dot{f}^3=(\eta_u-\xi^0_0)f^3-\eta_{11}f^1-\eta_1+\eta_0. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Розв'язуючи систему (**??**), бачимо, що

$$\xi^0=\xi^0(x_0),\quad \xi^1=\xi^1(x_0,x_1),\quad \eta=\alpha(x_0,x_1)u+\beta(x_0,x_1), \tag{1.38}$$

де $\xi^0(x_0),\xi^1(x_0,x_1),\alpha(x_0,x_1)$ і $\beta(x_0,x_1)$ — довільні гладкі функції. Тоді система (**??**) набуде вигляду

$$(\alpha u+\beta)\dot{f}^1=(2\ \xi^1_1-\xi^0_0)f^1, \tag{1.39}$$

$$(\alpha u+\beta)\dot{f}^2=(\xi^1_1-\xi^0_0)f^2-2(\alpha_1u+\beta_1)\dot{f}^1+(\xi^1_{11}-2\alpha_1)f^1-\xi^1_0, \tag{1.40}$$

$$(\alpha u+\beta)\dot{f}^3=(\alpha-\xi^0_0)f^3-(\alpha_{11}u+\beta_{11})f^1-(\alpha_1u+\beta_1)f^2+\alpha_0u+\beta_0. \tag{1.41}$$

Так як функції f^a довільні, то розщепивши рівняння системи (**??**)–(**??**) по f^a та $\dot{f}^a$, одержимо наступні рівності:

$$\alpha u+\beta=0, \tag{1.42}$$

$$\xi^0_0=\xi^1_1=\xi^1_0=0. \tag{1.43}$$

Врахувавши той факт, що α, β не залежать від змінної u, з (**??**) можна зробити висновок, що

$$\alpha = \beta = 0. \tag{1.44}$$

З систем (**??**), (**??**), (**??**) випливає, що

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta = 0, \tag{1.45}$$

де d_0, d_1 – довільні параметри. Оператор X з координатами (**??**) породжує алгебру (**??**).

Теорему доведено.

1.4. Необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності

Дослідимо, при яких значеннях функцій f^1, f^2, f^3 можливі розширення основної алгебри інваріантності рівняння (**??**).

Теорема 2.4. *Якщо алгебра інваріантності рівняння (**??**) ширша, порівняно з алгеброю (**??**), то дане рівняння має один з наступних виглядів*

1. $u_0 = \partial_1[f^1(u)u_1]{+}\lambda_1 u_1$;

2. $u_0 = \lambda_0\partial_1(e^{ku}u_1){+}(\lambda_1{+}\lambda_2 e^{mu})u_1{+}\lambda_3 e^{(2m-k)u}$;

3. $u_0 = \lambda_0\partial_1(e^{ku}u_1){+}(\lambda_1{+}\lambda_2 u)u_1{+}\lambda_3 e^{-ku}$;

4. $u_0 = \lambda_0\partial_1(e^{ku}u_1){+}(\lambda_1{+}\lambda_2 e^{\frac{k}{2}u}{+}\lambda_3 e^{ku})u_1{+}\lambda_4{+}\lambda_5 e^{\frac{k}{2}u}{+}\lambda_6 e^{ku}, k \neq 0$;

5. $u_0 = \lambda_0\partial_1[(u{+}\theta)^k u_1]{+}[\lambda_1{+}\lambda_2(u{+}\theta)^m]u_1{+}\lambda_3(u{+}\theta)^{2m-k+1}$;

6. $u_0 = \lambda_0\partial_1[(u{+}\theta)^k u_1]{+}[\lambda_1{+}\lambda_2\ln(u{+}\theta)]u_1{+}\lambda_3(u{+}\theta)^{-k+1}$, $k \neq 0$;

7.$u_0 = \lambda_0\partial_1[(u{+}\theta)^k u_1]{+}[\lambda_1{+}\lambda_2(u{+}\theta)^{\frac{k}{2}}{+}\lambda_3(u{+}\theta)^k]u_1{+}[\lambda_4{+}\lambda_5(u{+}\theta)^{\frac{k}{2}}{+} {+}\lambda_6(u{+}\theta)^k](u{+}\theta)$, $k \neq 0$;

8. $u_0 = \lambda_0 u_{11}{+}(\lambda_1{+}\lambda_2 u)u_1{+}\lambda_3{+}\lambda_4 u,$;

9. $u_0 = \lambda_0 u_{11}{+}[\lambda_1{+}\lambda_2\ln(u{+}\theta)]u_1{+}[\lambda_3{+}\lambda_4\ln(u{+}\theta){+}\lambda_5\ln^2(u{+}\theta)](u{+}\theta)$,

де m, k, θ, λ_i *— довільні сталі,* $i = \overline{0,6}$.

Доведення. Як показано в теоремі 2, рівняння (**??**) інваріантне відносно оператора X тоді і тільки тоді, коли функції ξ^0, ξ^1, η, f^a є розв'язками системи визначальних рівнянь (**??**),(**??**) або з врахуванням (**??**), — системи (**??**)–(**??**). Розв'язання даної системи залежить від значень функцій α і β та виразу $2\xi_1^1 - \xi_0^0$. Можливі наступні нееквівалентні випадки:

1) $\alpha = 0, \beta = 0, 2\xi_1^1 - \xi_0^0 = 0$. В даному випадку система (**??**)–(**??**) має вигляд

$$\xi_1^1 f^2 + \xi_0^1 = 0, \quad \xi_0^0 f^3 = 0.$$

Розв'язавши останню систему, приходимо до висновку, що розширення алгебри (**??**) відбувається лише у випадку, коли рівняння (**??**) набуває вигляду

$$u_0 = \partial_1(f^1(u)u_1) + \lambda_1 u_1,$$

де $f^1(u)$ — довільна гладка функція, λ_1 — довільна стала, що співпадає з першим пунктом даної теореми.

2) $\alpha = 0, \beta \neq 0, 2\xi_1^1 - \xi_0^0 \neq 0$. В цьому випадку система (**??**)–(**??**) запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} \dot{f}^1 &= \tfrac{2\xi_1^1 - \xi_0^0}{\beta} f^1, \\ \dot{f}^2 &= \tfrac{\xi_1^1 - \xi_0^0}{\beta} f^2 - 2\tfrac{\beta_1}{\beta}\dot{f}^1 + \tfrac{\xi_{11}^1}{\beta} f^1 - \tfrac{\xi_0^1}{\beta}, \\ \dot{f}^3 &= -\tfrac{\xi_0^0}{\beta} f^3 - \tfrac{\beta_{11}}{\beta} f^1 - \tfrac{\beta_1}{\beta} f^2 + \tfrac{\beta_0}{\beta}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Оскільки функції f^1, f^2, f^3 не залежать від змінних x, то система рівнянь (**??**) має найбільш широкий клас розв'язків при умовах

$$\frac{2\xi_1^1 - \xi_0^0}{\beta} = k, \tag{1.47}$$

$$\frac{\xi_1^1 - \xi_0^0}{\beta} = m, \tag{1.48}$$

$$-\frac{\xi_0^1}{\beta} = m_2, \tag{1.49}$$

$$\frac{\beta_0}{\beta} = m_4, \quad -\frac{\beta_1}{\beta} = m_1, \quad -\frac{\beta_{11}}{\beta} = m_3, \tag{1.50}$$

де k, m, m_1, m_2, m_3, m_4 — довільні сталі, які назвемо структурними константами.

Тоді система (**??**) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{f}^1 = kf^1, \\ &\dot{f}^2 = mf^2 + m_1(2\dot{f}^1 - \tfrac{k}{2}f^1) + m_2, \\ &\dot{f}^3 = (2m-k)f^3 + m_3f^1 + m_1f^2 + m_4. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Систему (**??**) назвемо структурною для функцій f^1, f^2, f^3. Проаналізуємо умови сумісності системи (**??**)–(**??**). Виключивши з (**??**) і (**??**) функцію β, отримаємо

$$(2m-k)\xi^1_1 = (m-k)\xi^0_0, \tag{1.52}$$

звідки випливає, що

$$(2m-k)\xi^1_{11} = 0. \tag{1.53}$$

З диференціального наслідку рівняння (**??**) по x_1, та умови (**??**) отримаємо

$$(2m-k)m\beta_1 = 0. \tag{1.54}$$

З диференціальних наслідків рівнянь (**??**), (**??**) по x_0 та рівняння (**??**) по x_1, одержимо

$$m(2m-k)(m-k)\beta_0 = 0. \tag{1.55}$$

З умов (**??**)–(**??**) випливає, що при розв'язуванні системи (**??**) можливі наступні нееквівалентні випадки:

2а) $m \neq 0; \frac{k}{2}; k$. З умов (**??**)–(**??**) та (**??**) одержуємо, що $m_1 = m_3 = m_4 = 0$. Загальним розв'язком системи (**??**) будуть функції

$$f^1 = \lambda_0 e^{ku}, \quad f^2 = \lambda_1 + \lambda_2 e^{mu}, \quad f^3 = \lambda_3 e^{(2m-k)u},$$

де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — довільні сталі. В даному випадку рівняння (1) набуває вигляду

$$u_0 = \lambda_0 \partial_1(e^{ku}u_1) + (\lambda_1 + \lambda_2 e^{mu})u_1 + \lambda_3 e^{(2m-k)u}, \quad k \neq 0,$$

що міститься в другому пункті даної теореми.

2б) $m = 0$. Проаналізувавши умови (??)–(??) та зв'язки (??)–(??), одержуємо $m_1 = m_3 = m_4 = 0$. Тому загальний розв'язок системи (??) має вигляд

$$f^1 = \lambda_0 e^{ku}, \quad f^2 = \lambda_1 + \lambda_2 u, \quad f^3 = \lambda_3 e^{-ku},$$

де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — довільні сталі, а рівняння (??) запишеться наступним чином

$$u_0 = \lambda_0 \partial_1 (e^{ku} u_1) + (\lambda_1 + \lambda_2 u) u_1 + \lambda_3 e^{-ku},$$

що співпадає з третім пунктом даної теореми.

2в) $m = \frac{k}{2}$. Загальний розв'язок системи (??) має вигляд

$$f^1 = \lambda_0 e^{ku}, \quad f^2 = \lambda_1 + \lambda_2 e^{\frac{k}{2}u} + \lambda_3 e^{ku}, \quad f^3 = \lambda_4 + \lambda_5 e^{\frac{k}{2}u} + \lambda_6 e^{ku},$$

де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ — довільні сталі, а рівняння (??) запишеться нас-тупним чином

$$u_0 = \lambda_0 \partial_1 (e^{ku} u_1) + (\lambda_1 + \lambda_2 e^{\frac{k}{2}u} + \lambda_3 e^{ku}) u_1 + \lambda_4 + \lambda_5 e^{\frac{k}{2}u} + \lambda_6 e^{ku},$$

при $k \neq 0$,що співпадає з четвертим пунктом даної теореми.

2г) $m = k$. З умов (??)–(??) випливає, що $m_1 = m_3 = 0$. Загальним розв'язком системи (??) будуть функції

$$f^1 = \lambda_0 e^{ku}, \quad f^2 = \lambda_1 + \lambda_2 e^{ku}, \quad f^3 = \lambda_3 + \lambda_4 e^{ku},$$

де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — довільні сталі, а рівняння (??) набуде вигляду

$$u_0 = \lambda_0 \partial_1 (e^{ku} u_1) + (\lambda_1 + \lambda_2 e^{ku}) u_1 + \lambda_3 + \lambda_4 e^{ku}, \quad k \neq 0.$$

Зауважимо, що останнє рівняння є частинним випадком рівняння з пункту 2в.

3) $\alpha \neq 0, 2\xi_1^1 - \xi_0^0 \neq 0$. Система (??)–(??) набуває вигляду

$$\begin{array}{l} (u + \frac{\beta}{\alpha}) \dot{f}^1 = \frac{2\xi_1^1 - \xi_0^0}{\alpha} f^1, \\ (u + \frac{\beta}{\alpha}) \dot{f}^2 = \frac{\xi_1^1 - \xi_0^0}{\alpha} f^2 - 2(\frac{\alpha_1}{\alpha} u + \frac{\beta_1}{\alpha}) \dot{f}^1 + \frac{\xi_{11}^1 - 2\alpha_1}{\alpha} f^1 - \frac{\xi_0^1}{\alpha}, \\ (u + \frac{\beta}{\alpha}) \dot{f}^3 = (1 - \frac{\xi_0^0}{\alpha}) f^3 - (\frac{\alpha_{11}}{\alpha} u + \frac{\beta_{11}}{\alpha}) f^1 - (\frac{\alpha_1}{\alpha} u + \frac{\beta_1}{\alpha}) f^2 + \frac{\alpha_0}{\alpha} u + \frac{\beta_0}{\alpha}. \end{array} \tag{1.56}$$

Введемо структурні константи

$$\frac{2\xi_1^1 - \xi_0^0}{\alpha} = k, \tag{1.57}$$

$$\frac{\xi_1^1 - \xi_0^0}{\alpha} = m, \tag{1.58}$$

$$-\frac{\xi_0^1}{\alpha} = m_2, \tag{1.59}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \theta, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha} = m_4, \quad -\frac{\alpha_1}{\alpha} = m_1, \quad -\frac{\alpha_{11}}{\alpha} = m_3. \tag{1.60}$$

З урахуванням (??)–(??) система (??) перепишеться наступним чином

$$\begin{array}{l} (u+\theta)\dot{f}^1 = kf^1, \\ (u+\theta)\dot{f}^2 = mf^2 + m_1(2(u+\theta)\dot{f}^1 + (2-\frac{k}{2})f^1) + m_2, \\ (u+\theta)\dot{f}^3 = (2m-k+1)f^3 + m_3(u+\theta)f^1 + \\ +m_1(u+\theta)f^2 + m_4(u+\theta). \end{array} \tag{1.61}$$

Проаналізуємо умови сумісності системи (??)–(??). Виключивши з рівнянь (??) і (??) функцію α, маємо

$$(2m-k)\xi_1^1 = (m-k)\xi_0^0.$$

Продиференціювавши останню рівність по змінній x_1, одержимо

$$(2m-k)\xi_{11}^1 = 0. \tag{1.62}$$

З диференціального наслідку рівняння (??) по x_1 та умови (??) , отримаємо

$$(2m-k)m\alpha_1 = 0. \tag{1.63}$$

Продиференціювавши (??), (??) по x_0 та (??) по x_1, отримуємо

$$(2m-k)(k-m)m\alpha_0 = 0. \tag{1.64}$$

Отже, як випливає з умов (??)–(??), при розв'язуванні системи (??) необхідно розрізняти наступні випадки:

3а) $m \neq 0; \frac{k}{2}; k$. З умов сумісності (??), (??)–(??) в даному випадку маємо $m_1 = m_3 = m_4 = 0$. З урахуванням останньої рівності загальний розв'язок системи (??) можна записати у вигляді

$$f^1 = \lambda_0(u+\theta)^k, \quad f^2 = \lambda_1 + \lambda_2(u+\theta)^m, \quad f^3 = \lambda_3(u+\theta)^{2m-k+1},$$

а рівняння (**??**) перепишеться наступним чином

$$u_0 = \lambda_0 \partial_1[(u+\theta)^k u_1] + [\lambda_1 + \lambda_2(u+\theta)^m]u_1 + \lambda_3(u+\theta)^{2m-k+1},$$

де $k \neq 0$, що міститься в п'ятому пункті даної теореми.

3б) $m = 0$. Проаналізувавши систему (**??**)–(**??**) та зв'язки (**??**)–(**??**), одержуємо $m_1 = m_3 = m_4 = 0$.

Загальним розв'язком системи (**??**) будуть функції

$$f^1 = \lambda_0(u+\theta)^k, \quad f^2 = \lambda_1 + \lambda_2 \ln(u+\theta), \quad f^3 = \lambda_3(u+\theta)^{-k+1}.$$

В даному випадку рівняння (**??**) набуває вигляду

$$u_0 = \lambda_0 \partial_1[(u+\theta)^k u_1] + [\lambda_1 + \lambda_2 \ln(u+\theta)]u_1 + \lambda_3(u+\theta)^{-k+1},$$

де $k \neq 0$, що співпадає з шостим пунктом даної теореми.

3в) $m = \frac{k}{2}$. Загальний розв'язок системи (**??**) має вигляд

$$f^1 = \lambda_0(u+\theta)^k, f^2 = \lambda_1 + \lambda_2(u+\theta)^{\frac{k}{2}} + \lambda_3(u+\theta)^k,$$
$$f^3 = [\lambda_4 + \lambda_5(u+\theta)^{\frac{k}{2}} + \lambda_6(u+\theta)^k](u+\theta),$$

тому одержуємо рівняння

$$u_0 = \lambda_0 \partial_1[(u+\theta)^k u_1] + [\lambda_1 + \lambda_2(u+\theta)^{\frac{k}{2}} + \lambda_3(u+\theta)^k]u_1 +$$
$$+ [\lambda_4 + \lambda_5(u+\theta)^{\frac{k}{2}} + \lambda_6(u+\theta)^k](u+\theta),$$

де $k \neq 0$, що є частинним випадком сьомого пункту даної теореми.

3г) $m = k$. З умов (**??**)–(**??**) випливає, що $m_1 = m_3 = 0$. При цьому загальним розв'язком системи (**??**) будуть функції

$$f^1 = \lambda_0(u+\theta)^k, \quad f^2 = \lambda_1 + \lambda_2(u+\theta)^k, \quad f^3 = [\lambda_3 + \lambda_4(u+\theta)^k](u+\theta).$$

В результаті одержимо рівняння

$$u_0 = \lambda_0 \partial_1[(u+\theta)^k u_1] + [\lambda_1 + \lambda_2(u+\theta)^k]u_1 + [\lambda_3 + \lambda_4(u+\theta)^k](u+\theta),$$

де $k \neq 0$, яке є частинним випадком рівняння пункту 3в.

4) $\alpha = 0, \beta \neq 0, 2\xi_1^1 - \xi_0^0 = 0$. В даному випадку система (**??**)–(**??**) має вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{f}^1 = 0, \\ &\dot{f}^2 = -\frac{\xi_0^0}{2\beta} f^2 - \frac{\xi_0^1}{\beta}, \\ &\dot{f}^3 = -\frac{\xi_0^0}{\beta} f^3 - \frac{\beta_{11}}{\beta} f^1 - \frac{\beta_1}{\beta} f^2 + \frac{\beta_0}{\beta}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Введемо структурні константи

$$-\frac{\xi_0^0}{2\beta} = m, \qquad (1.66)$$

$$-\frac{\xi_0^1}{\beta} = m_1, \qquad (1.67)$$

$$\frac{\beta_0}{\beta} = m_3, \quad -\frac{\beta_1}{\beta} = m_2, \quad -\frac{\beta_{11}}{\beta} = m_4. \qquad (1.68)$$

З урахуванням (??)–(??) система (??) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{f}^1 = 0, \\ &\dot{f}^2 = mf^2 + m_1, \\ &\dot{f}^3 = 2mf^3 + m_4 f^1 + m_2 f^2 + m_3. \end{aligned} \qquad (1.69)$$

Продиференціювавши рівняння (??) по змінній x_1, маємо

$$m\beta_1 = 0. \qquad (1.70)$$

Продиференціювавши рівняння (??) по x_0, а рівняння (??) по x_1 та використавши умову $\xi_0^0 = 2\xi_1^1$, одержуємо

$$m\beta_0 = 0. \qquad (1.71)$$

З умов (??)–(??) маємо наступні суттєво різні випадки:

4a) $m \neq 0$. Аналогічно, як і в попередніх випадках, з умов (??), (??), (??) одержимо, що $m_2 = m_3 = m_4 = 0$. В даному випадку загальним розв'язком системи (??) будуть функції

$$f^1 = \lambda_0, \quad f^2 = \lambda_1 + \lambda_2 e^{mu}, \quad f^3 = \lambda_3 e^{2mu},$$

а рівняння (??) набуває вигляду

$$u_0 = \lambda_0 u_{11} + (\lambda_1 + \lambda_2 e^{mu})u_1 + \lambda_3 e^{2mu}.$$

Зауважимо, що, якщо об'єднати випадки 2a) і 4a), то одержимо рівняння

$$u_0 = \lambda_0 \partial_1(e^{ku}u_1) + (\lambda_1 + \lambda_2 e^{mu})u_1 + \lambda_3 e^{(2m-k)u}$$

при довільному k, що співпадає з другим пунктом даної теореми.

4б) $m=0$. Загальним розв'язком системи (**??**) будуть функції

$$f^1=\lambda_0,\quad f^2=\lambda_1+\lambda_2 u,\quad f^3=\lambda_3+\lambda_4 u,$$

які задають рівняння

$$u_0=\lambda_0 u_{11}+(\lambda_1+\lambda_2 u)u_1+\lambda_3+\lambda_4 u,$$

тобто має місце восьмий пункт даної теореми.

5) $\alpha\neq 0, 2\xi_1^1-\xi_0^0=0$. Система (**??**)–(**??**) має вигляд

$$\begin{aligned}
&\dot f^1=0,\\
&(u+\tfrac{\beta}{\alpha})\dot f^2=-\tfrac{\xi_0^0}{2\alpha}f^2-2\tfrac{\alpha_1}{\alpha}f^1-\tfrac{\xi_0^1}{\alpha},\\
&(u+\tfrac{\beta}{\alpha})\dot f^3=(1-\tfrac{\xi_0^0}{\alpha})f^3-(\tfrac{\alpha_{11}}{\alpha}u+\tfrac{\beta_{11}}{\alpha})f^1-(\tfrac{\alpha_1}{\alpha}u+\tfrac{\beta_1}{\alpha})f^2+\tfrac{\alpha_0}{\alpha}u+\tfrac{\beta_0}{\alpha}.
\end{aligned}\tag{1.72}$$

Введемо структурні константи

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{\xi_0^0}{2\alpha}=m,\quad \tfrac{\beta}{\alpha}=\theta,\quad -\tfrac{\alpha_1}{\alpha}=m_1,\\
&-\tfrac{\xi_0^1}{\alpha}=m_2,\quad -\tfrac{\alpha_{11}}{\alpha}=m_3,\quad \tfrac{\alpha_0}{\alpha}=m_4.
\end{aligned}\tag{1.73}$$

Після підстановки (**??**) у (**??**) одержуємо систему

$$\begin{aligned}
&\dot f^1=0,\\
&(u+\theta)\dot f^2=mf^2+2m_1f^1+m_2,\\
&(u+\theta)\dot f^3=(1+2m)f^3+m_3(u+\theta)f^1+m_1(u+\theta)f^2+m_4(u+\theta).
\end{aligned}\tag{1.74}$$

Аналогічно до попереднього випадку, проаналізувавши систему (**??**), отримаємо умови

$$m\alpha_1=0,\quad m\alpha_0=0.\tag{1.75}$$

З умов (**??**) випливає, що при розв'язуванні системи (**??**) отримаємо два суттєво різні випадки:

5а) $m\neq 0$. В цьому випадку із сумісності системи (**??**) випливає, що ($m_1=m_3=m_4=0$). Розв'язавши систему (**??**), одержимо функції

$$f^1=\lambda_0,\quad f^2=\lambda_1+\lambda_2(u+\theta)^m,\quad f^3=\lambda_3(u+\theta)^{2m+1}$$

та відповідне рівняння (**??**)

$$u_0=\lambda_0 u_{11}+[\lambda_1+\lambda_2(u+\theta)^m]u_1+\lambda_3(u+\theta)^{2m+1}.$$

Зауважимо, що, об'єднавши випадки 3а) і 5а), одержуємо рівняння

$$u_0 = \lambda_0 \partial_1[(u+\theta)^k u_1] + [\lambda_1 + \lambda_2 (u+\theta)^m] u_1 + \lambda_3 (u+\theta)^{2m-k+1}$$

при довільному k, що співпадає з п'ятим випадком даної теореми.

5б) $m = 0$. Загальним розв'язком системи (**??**) в даному випадку будуть функції

$$f^1 = \lambda_0, \quad f^2 = \lambda_1 + \lambda_2 \ln(u+\theta),$$
$$f^3 = [\lambda_3 + \lambda_4 \ln(u+\theta) + \lambda_5 \ln^2(u+\theta)](u+\theta).$$

Рівняння (**??**) набуде вигляду

$$u_0 = \lambda_0 u_{11} + [\lambda_1 + \lambda_2 \ln(u+\theta)] u_1 + [\lambda_3 + \lambda_4 \ln(u+\theta) + \\ + \lambda_5 \ln^2(u+\theta)](u+\theta),$$

що співпадає з дев'ятим випадком даної теореми.

Теорема доведена.

Якщо використати результати теореми 2.1, то вигляд рівнянь, одержаних в теоремі 4, можна дещо спростити. Результати спрощення наведені в другій та третій колонках таблиці 1.

Таблиця 1. Спрощення рівняння (1) за допомогою основної групи перетворень еквівалентності

№	Вигляд рівняння до спрощення	Зв'язок	Вигляд рівняння після спрощення
1	$u_0=\partial_1[f^1(u)u_1]+\lambda_1 u_1$	$t=x_0$, $x=x_1+\lambda_1 x_0$, $w=u$	$w_t=\partial_x[f^1(w)w_x]$
2	$u_0=\lambda_0\partial_1(e^{ku}u_1)+(\lambda_1+\lambda_2 e^{mu})u_1+$ $+\lambda_3 e^{(2m-k)u}$	$t=\lambda_0 x_0$, $x=x_1+\lambda_1 x_0$, $w=ku, k\neq 0$,	$w_t=\partial_x(e^{æw}w_x)+\tilde{\lambda}_2 e^{mw}w_x+$ $+\tilde{\lambda}_3 e^{(2m-æ)w}$
3	$u_0=\lambda_0\partial_1(e^{ku}u_1)+(\lambda_1+\lambda_2 e^{\frac{k}{2}u}+\lambda_3 e^{ku})u_1+$ $+\lambda_4+\lambda_5 e^{\frac{k}{2}u}+\lambda_6 e^{ku}$	$t=\lambda_0 x_0$, $x=x_1+\lambda_1 x_0$, $w=ku$	$w_t=\partial_x(e^{w}w_x)+(\tilde{\lambda}_2 e^{\frac{1}{2}w}+$ $+\tilde{\lambda}_3 e^{w})w_x+\tilde{\lambda}_4+\tilde{\lambda}_5 e^{\frac{1}{2}w}+\tilde{\lambda}_6 e^{w}$
4	$u_0=\lambda_0\partial_1(e^{ku}u_1)+(\lambda_1+\lambda_2 u)u_1+\lambda_3 e^{-ku}$	$t=\lambda_0 x_0$, $x=x_1+\lambda_1 x_0$, $w=ku$	$w_t=\partial_x(e^{æw}w_x)+$ $+\tilde{\lambda}_2 ww_x+\tilde{\lambda}_3 e^{-æw}$
5	$u_0=\lambda_0\partial_1[(u+\theta)^k u_1]+[\lambda_1+\lambda_2(u+\theta)^m]u_1+$ $+\lambda_3(u+\theta)^{2m-k+1}$	$t=\lambda_0 x_0$, $x=x_1+\lambda_1 x_0$, $w=u+\theta$	$w_t=\partial_x(w^k w_x)+$ $+\tilde{\lambda}_2 w^m w_x+\tilde{\lambda}_3 w^{2m-k+1}$
6	$u_0=\lambda_0\partial_1[(u+\theta)^k u_1]+[\lambda_1+\lambda_2(u+\theta)^{\frac{k}{2}}+$ $+\lambda_3(u+\theta)^k]u_1+[\lambda_4+\lambda_5(u+\theta)^{\frac{k}{2}}+$ $+\lambda_6(u+\theta)^k](u+\theta)$	$t=\lambda_0 x_0$, $x=x_1+\lambda_1 x_0$, $w=u+\theta$	$w_t=\partial_x(w^k w_x)+$ $+(\tilde{\lambda}_2 w^{\frac{k}{2}}+\tilde{\lambda}_3 w^k)w_x+$ $+(\tilde{\lambda}_4+\tilde{\lambda}_5 w^{\frac{k}{2}}+\tilde{\lambda}_6 w^k)w$
7	$u_0=\lambda_0\partial_1[(u+\theta)^k u_1]+[\lambda_1+\lambda_2\ln(u+\theta)]u_1+$ $+\lambda_3(u+\theta)^{-k+1}$	$t=\lambda_0 x_0$, $x=x_1+\lambda_1 x_0$, $w=u+\theta$	$w_t=\partial_x(w^k w_x)+$ $+\tilde{\lambda}_2\ln w w_x+\tilde{\lambda}_3 w^{-k+1}$
8	$u_0=\lambda_0 u_{11}+(\lambda_1+\lambda_2 u)u_1+\lambda_3+\lambda_4 u$, $\lambda_4\neq 0$	$t=\lambda_0 x_0$, $x=x_1+$ $+\frac{\lambda_1\lambda_4-\lambda_2\lambda_3}{\lambda_4}x_0$, $w=u+\frac{\lambda_3}{\lambda_4}$	$w_t=w_{xx}+\tilde{\lambda}_2 ww_x+\tilde{\lambda}_4 w$
9	$u_0=\lambda_0 u_{11}+[\lambda_1+\lambda_2\ln(u+\theta)]u_1+$ $+[\lambda_3+\lambda_4\ln(u+\theta)+\lambda_5\ln^2(u+\theta)](u+\theta)$	$t=\lambda_0 x_0$, $x=x_1+\lambda_1 x_0$, $w=u+\theta$	$w_t=w_{xx}+\tilde{\lambda}_2\ln w w_x+$ $+(\tilde{\lambda}_3+\tilde{\lambda}_4\ln w+\tilde{\lambda}_5\ln^2 w)w$

В таблиці 1 $\lambda_s, \tilde{\lambda}_i, m, k, \theta$ — довільні сталі, f^1 — довільна гладка функція, $\lambda_0\neq 0$, $s=\overline{0,6}$, $i=\overline{2,6}$.

1.5. Достатні умови розширення основної алгебри інваріантності

В теоремі 2.4 сформульовані лише необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності рівння (??). Наведемо достатні умови її розширення та відповідні МАІ.

Теорема 2.5. *Для того, щоб МАІ рівняння (??) була ширшою порівняно з алгеброю (??) необхідно і достатньо, щоб рівняння (??) мало один з нееквіалентних відносно перетворень (??) виглядів, записаних у першій колонці таблиці 2, при цьому відповідні МАІ наведено в другій колонці даної таблиці .*

Таблиця 2. Повна групова класифікація рівняння (1)

№	Рівняння	МАІ	Умови
1	$u_0 = u_{11}$	$< \partial_0, \partial_1, G_M,$ $M, D, \Pi_M, Q_\infty >$	
2	$u_0 = \partial_1[f(u)u_1]$	$< \partial_0, \partial_1, D >$	
3	$u_0 = \partial_1(e^u u_1)$	$< \partial_0, \partial_1, D, \mathcal{D}_1 >$	
4	$u_0 = \partial_1(u^k u_1)$	$< \partial_0, \partial_1, D, D_1 >$	
5	$u_0 = \partial_1(u^{-\frac{4}{3}} u_1)$	$< \partial_0, \partial_1, D, D_1, K >$	$k = -\frac{4}{3}$
6	$u_0 = u_{11} \pm u \ln u$	$< \partial_0, \partial_1, H_M, e^{\pm x_0} M >$	
7	$u_0 = u_{11} + uu_1$	$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{G}, D - u\partial_u, \Pi >$	
8	$u_0 = u_{11} + uu_1 + \lambda_3 u$	$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{H} >$	$\lambda_3 \neq 0$
9	$u_0 = u_{11} + \ln uu_1 +$ $+(\lambda_3 + \lambda_4 \ln u)u$	$< \partial_0, \partial_1, H >$	$\lambda_4 \neq 0$
10	$u_0 = u_{11} + \ln uu_1 + \lambda_3 u$	$< \partial_0, \partial_1, G >$	
11	$u_0 = u_{11} + \ln uu_1 + (\lambda_3 +$ $+\lambda_4 lnu + \frac{1}{4} \ln^2 u)u$	$< \partial_0, \partial_1, Q >$	
12	$u_0 = \partial_1(e^{æu} u_1) + \lambda_2 e^{mu} u_1 +$ $+\lambda_3 e^{(2m - æ)u}$	$< \partial_0, \partial_1, (æ - 2m)D + \mathcal{D}_1 >$	$æ \epsilon \{0, 1\}$

продовження таблиці 2

№	Рівняння	MAI	Умови
13	$u_0 = \partial_1(u^k u_1) +$ $+\lambda_2 u^m u_1 + \lambda_3 u^{2m-k+1}$	$< \partial_0, \partial_1, (k-2m)D + D_1 >$	
14	$u_0 = \partial_1(e^u u_1) +$ $+u u_1 + \lambda_3 e^{-u}$	$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{Y} >$	
15	$u_0 = \partial_1(u^k u_1) +$ $+\ln u u_1 + \lambda_3 u^{-k+1}$	$< \partial_0, \partial_1, Y >$	$k \neq 0$,
16	$u_0 = u_{11} + \lambda_3$	$< \partial_0, \partial_1, G_M + \frac{\lambda_3}{2} x_0 x_1 \partial_u,$ $M - \lambda_3 x_0 \partial_u, D + 2\lambda_3 x_0 \partial_u,$ $\Pi_M + \frac{\lambda_3}{4} x_0 (x_1^2 +$ $+6x_0)\partial_u, Q_\infty >$	$\lambda_3 \neq 0$
17	$u_0 = u_{11} + \lambda_3 u$	$< \partial_0, \partial_1, G_M, M,$ $D + 2\lambda_3 x_0 u \partial_u,$ $\Pi_M + \lambda_3 x_0^2 u \partial_u, \widetilde{Q}_\infty >$	$\lambda_3 \neq 0$
18	$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + \lambda_4$	$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{T}, \mathcal{D}_1 >$	$\lambda_4 \neq 0$
19	$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_4 u$	$< \partial_0, \partial_1, T, D_1 >$	$\lambda_3 \neq 0$
20	$u_0 = \partial_1(u^{-\frac{4}{3}} u_1) + \lambda_6 u^{-\frac{1}{3}}$	$< \partial_0, \partial_1, D_0, Z^a >$	$k = -\frac{4}{3}$, $\lambda_6 \neq 0$
21	$u_0 = \partial_1(u^{-\frac{4}{3}} u_1) +$ $+(\lambda_4 + \lambda_6 u^{-\frac{4}{3}})u$	$< \partial_0, \partial_1, T, Z^a >$	$\lambda_4, \lambda_6 \neq 0$, $k = -\frac{4}{3}$
22	$u_0 = u_{11} + u u_1 + \lambda_3$	$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{G}, D - u\partial_u -$ $-\frac{3}{2}\lambda_3 x_0 (x_0 \partial_1 - 2\partial_u),$ $\Pi - \frac{\lambda_3 x_0^2}{2} (x_0 \partial_1 - 3\partial_u) >$	$\lambda_3 \neq 0$

продовження таблиці 2

№	Рівняння	МАІ	Умови
23	$u_0=\partial_1(e^u u_1)+\lambda_3 e^u u_1+$ $+\lambda_4+\lambda_6 e^u$	$<\partial_0,\partial_1,\mathcal{T}>$	$\lambda_4\neq 0$, $\lambda_6\neq\frac{2}{9k}\lambda_3^2$
24	$u_0=\partial_1(u^k u_1)+\lambda_3 u^k u_1+$ $+(\lambda_4+\lambda_6 u^k)u$	$<\partial_0,\partial_1,T>$	$k\neq 0$, $\lambda_4\neq 0$
25	$u_0=\partial_1(e^u u_1)+(\lambda_2 e^{\frac{1}{2}u}+$ $+e^u)u_1+\lambda_4+$ $+\frac{2\lambda_2}{3k}e^{\frac{1}{2}u}+\frac{2}{9k}e^u$	$<\partial_0,\partial_1,\mathcal{X}>$	$k\neq 0$
26	$u_0=\partial_1(u^k u_1)+(\lambda_2 u^{\frac{k}{2}}+$ $+u^k)u_1+(\lambda_4+\frac{2\lambda_2}{3k+4}u^{\frac{k}{2}}+$ $+\frac{2(k+2)}{(3k+4)^2}u^k)u$	$<\partial_0,\partial_1,X>$	$k\neq 0,-\frac{4}{3}$;
27	$u_0=\partial_1(e^u u_1)+$ $+e^u u_1+\frac{2}{9}e^u$	$<\partial_0,\partial_1,\mathcal{D}_0,\mathcal{X}>$	
28	$u_0=\partial_1(u^k u_1)+u^k u_1+$ $+\frac{2(k+2)}{(3k+4)^2}u^{k+1}$	$<\partial_0,\partial_1,D_0,X>$	$k\neq 0,-\frac{4}{3}$;
29	$u_0=\partial_1(e^u u_1)+e^u u_1+$ $+\lambda_4+\frac{2}{9}e^u$	$<\partial_0,\partial_1,\mathcal{T},\mathcal{X}>$	$\lambda_4\neq 0$
30	$u_0=\partial_1(u^k u_1)+u^k u_1+$ $+(\lambda_4+\frac{2(k+2)}{(3k+4)^2}u^k)u$	$<\partial_0,\partial_1,T,X>$	$k\neq 0,-\frac{4}{3}$, $\lambda_4\neq 0$

В таблиці 2 введені наступні позначення

$\mathcal{Y}=x_0\partial_0+x_1\partial_1-x_0\partial_1+\partial_u, Y=k(x_0\partial_0+x_1\partial_1)-x_0\partial_1+u\partial_u,$

$\mathcal{X}=e^{-\frac{1}{3}x_1}(\partial_1-\frac{2}{3k}\partial_u), X=e^{-\frac{k}{3k+4}x_1}(\partial_1-\frac{2}{3k+4}u\partial_u),$

$\mathcal{T}=e^{-\lambda_4 x_0}(\partial_0+\lambda_4\partial_u), T=e^{-k\lambda_4 x_0}(\partial_0+\lambda_4 u\partial_u),$

$\mathcal{H}=e^{\lambda_3 x_0}(\partial_1-\lambda_3\partial_u), H=e^{\lambda_4 x_0}(\partial_1-\lambda_4 u\partial_u),$

$H_M=e^{\pm x_0}(\partial_1\mp\frac{1}{2}x_1 u\partial_u),$

$Z^a = \varphi^a(x_1)\partial_1 - \dot{\varphi}^a u\partial_u$, де $\varphi^a = \varphi^a(x_1)$ – два лінійно незалежні розв'язки рівняння $\ddot{\varphi} = \lambda_6\varphi, a = 1; 2$,
$\mathcal{G} = x_0\partial_1 - \partial_u, G = x_0\partial_1 - u\partial_u$,
$G_M = x_0\partial_1 - \frac{1}{2}x_1u\partial_u, M = u\partial_u$,
$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1$,
$\mathcal{D}_0 = x_0\partial_0 - \partial_u, D_0 = kx_0\partial_0 - u\partial_u$,
$\mathcal{D}_1 = x_1\partial_1 + 2\partial_u, D_1 = kx_1\partial_1 + 2u\partial_u$,
$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - (x_1 + x_0u)\partial_u$,
$\Pi_M = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - \frac{1}{2}(\frac{x_1^2}{2} + x_0)u\partial_u$,
$Q = e^{(\lambda_4+\frac{1}{4})x_0-\frac{1}{2}x_1}u\partial_u$,
$Q_\infty = \beta(x_0, x_1)\partial_u$, $\beta(x_0, x_1)$ — довільний розв'язок рівняння $\beta_0 = \beta_{11}$,
$\widetilde{Q}_\infty = b(x_0, x_1)\partial_u$, $b(x_0, x_1)$ — довільний розв'язок рівняння $b_0 = b_{11} + \lambda_3 b$,
$K = x_1^2\partial_1 - 3x_1u\partial_u, k, m, \lambda_i$ – довільні сталі.

Доведення.

Будемо досліджувати рівняння третьої колонки таблиці 1 записані в термінах x_0, x_1, u.

Симетрійні властивості рівняння

$$u_0 = \partial_1(f(u)u_1)$$

вивчені в роботі [?], де показано, що МАІ при довільних функціях $f(u)$ даного рівняння має вигляд

$$< \partial_0, \partial_1, D > .$$

Розглянемо рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^{æu}u_1)+\lambda_2e^{mu}u_1+\lambda_3e^{(2m-æ)u}. \tag{1.76}$$

При підстановці значень функцій f^1, f^2, f^3 у систему (??)–(??) одержуємо наступні рівняння

$$æ(\alpha u + \beta)e^{æu} = (2\xi^1_1 - \xi^0_0)e^{æu}, \tag{1.77}$$

$$\lambda_2(\alpha u+\beta)me^{mu}=(\xi^1_1-\xi^0_0)\lambda_2e^{mu}-2æ(\alpha_1u+\beta_1)e^{æu}+ \\ +(\xi^1_{11}-2\alpha_1)e^{æu}-\xi^1_0, \tag{1.78}$$

$$\lambda_3(2m-æ)(\alpha u+\beta)e^{(2m-æ)u}=\lambda_3(\alpha-\xi^0_0)e^{(2m-æ)u}- \\ -(\alpha_{11}u+\beta_{11})e^{æu}-\lambda_2(\alpha_1u+\beta_1)e^{mu}+\alpha_0u+\beta_0. \tag{1.79}$$

При розв'язуванні рівняння (**??**) виникає два випадки:

1) $æ=1$. З рівняння (**??**) випливає, що

$$\alpha=0, \tag{1.80}$$

$$\beta=2\xi^1_1-\xi^0_0. \tag{1.81}$$

Розщепивши рівняння (**??**) та (**??**) за функціями e^u, e^{mu} та $e^{(2m-1)u}$, одержимо наступну систему

$$\xi^1_0=0, \tag{1.82}$$

$$\xi^1_{11}=0, \tag{1.83}$$

$$\beta_0=\beta_1=0, \tag{1.84}$$

$$\lambda_2((2m-1)\xi^1_1+(1-m)\xi^0_0)=0, \tag{1.85}$$

$$\lambda_3(2m\beta+\xi^0_0)=0. \tag{1.86}$$

З диференціального наслідку рівняння (**??**) за змінною x_0 та рівнянь (**??**), (**??**) одержуємо, що

$$\xi^0_{00}=0. \tag{1.87}$$

При розв'язуванні рівнянь (**??**) та (**??**) виникають два суттєво різні випадки:

а) $\lambda_2=\lambda_3=0$. Даний випадок розглянуто у роботі [**?**], де встановлено, що MAI рівняння

$$u_0=\partial_1(e^uu_1)$$

має вигляд

$$<\partial_0,\partial_1,D,\mathcal{D}_1>,$$

що співпадає з третім випадком таблиці 2.

б)$|\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0$. З рівнянь (**??**) та (**??**)–(**??**) випливає, що координати оператора X мають вигляд

$$\xi^0 = (2m-1)c_1x_0 + c_2, \xi^1 = (m-1)c_1x_1 + c_4, \eta = -c_1. \tag{1.88}$$

Таким чином рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + \lambda_2 e^{mu} u_1 + \lambda_3 e^{(2m-)u}, \tag{1.89}$$

де $k \neq 0$ має наступну МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, (1-2m)D + \mathcal{D}_1 >, \tag{1.90}$$

що співпадає з дванадцятим випадком таблиці 2 при æ $= 1$.

2) æ $= 0$. З рівняння (**??**) випливає, що

$$\xi^0_0 = 2\xi^1_1. \tag{1.91}$$

Продифеоенціювавши (**??**) по змінній x_1 та врахувавши (**??**), одержимо

$$\xi^1_{11} = 0. \tag{1.92}$$

Розщепивши (**??**) та (**??**) по різних степенях експоненти та врахувавши (**??**), після незначних спрощень одержимо наступну систему

$$\begin{aligned} &\lambda_2\alpha = 0, \lambda_3\alpha = 0, \\ &\lambda_2(2m\beta + \xi^0_0) = 0, \lambda_3(2m\beta + \xi^0_0) = 0, \\ &\alpha_{11} - \alpha_0 = 0, \beta_{11} - \beta_0 = 0. \end{aligned} \tag{1.93}$$

Можливо два суттєво різні випадки:

а) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Одержуємо рівняння теплопровідності

$$u_0 = u_{11}, \tag{1.94}$$

симетрійні властивості якого добре відомі, тобто його МАІ має вигляд

$$< \partial_0, \partial_1, G_M, M, D, \Pi_M, Q_\infty > .$$

б) $|\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0$. З системи рівнянь (**??**) очевидно, що

$$\alpha = \beta_0 = \beta_1 = \xi^0_{00} = 0. \tag{1.95}$$

Таким чином з рівнянь (**??**), (**??**), (**??**), (**??**) та (**??**) випливає, що координати оператора X для даного рівняння мають вигляд

$$\xi^0 = -2mc_1x_0 + c_2, \xi^1_1 = -c_1x_1 + c_3, \eta = c_1. \tag{1.96}$$

Такий оператор породжує для рівняння

$$u_0 = u_{11} + \lambda_2 e^{mu}u_1 + \lambda_3 e^{2mu} \tag{1.97}$$

наступну MAI

$$< \partial_0, \partial_1, -2mD + \mathcal{D}_1 >, \tag{1.98}$$

що співпадає з дванадцятим випадком таблиці при æ $= 0$.

Розглянемо рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + (\lambda_2 e^{\frac{1}{2}u} + \lambda_3 e^u)u_1 + \lambda_4 + \lambda_5 e^{\frac{1}{2}u} + \lambda_6 e^u. \tag{1.99}$$

При підстановці значень функцій f^1, f^2, f^3 з рівняння (**??**) у систему (**??**)–(**??**), розщепивши за функціями $e^{ku}, e^{\frac{k}{2}u}$ та u, після незначних перетворень одержимо

$$\alpha = \xi^1_0 = 0, \tag{1.100}$$

$$\lambda_2\xi^0_0 = 0, \tag{1.101}$$

$$\beta = 2\xi^1_1 - \xi^0_0, \tag{1.102}$$

$$\xi^1_{11} - \lambda_3\xi^1_1 = 2\beta_1, \tag{1.103}$$

$$\beta_0 = \lambda_4\xi^0_0, \tag{1.104}$$

$$\lambda_5(\frac{1}{2}\beta + \xi^0_0) + \lambda_2\beta_1 = 0, \tag{1.105}$$

$$\lambda_6(\beta + \xi^0_0) + \beta_{11} + \lambda_3\beta_1 = 0. \tag{1.106}$$

При роз'язуванні рівняння (**??**) можливі наступні суттєво різні випадки:

1) $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$. Очевидно, що рівняння (**??**) та (**??**) набудуть вигляду

$$\xi^0_0 = 0, \tag{1.107}$$

$$\beta = 2\xi_1^1. \tag{1.108}$$

З врахуванням (??) рівняння (??) перепишеться у вигляді

$$\xi_{11}^1 - \frac{\lambda_3}{3}\xi_1^1 = 0. \tag{1.109}$$

Розв'язком останнього рівняння з врахуванням (??) буде функція

$$\xi^1 = c_1 e^{-\frac{\lambda_3}{3}x_1} + c_2. \tag{1.110}$$

З рівнянь (??), (??) та (??) випливає, що

$$\beta = \frac{2\lambda_3}{3} c_1 e^{-\frac{\lambda_3}{3}x_1}. \tag{1.111}$$

За умов (??) та (??) уточнюються зв'язки між коефіцієнтами в рівняннях (??) та (??)

$$\lambda_5 = \frac{2\lambda_2\lambda_3}{3}, \lambda_6 = \frac{2}{9}\lambda_3^2. \tag{1.112}$$

Таким чином, рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + (\lambda_2 e^{\frac{1}{2}u} + \lambda_3 e^u)u_1 + \lambda_4 + \frac{2\lambda_2\lambda_3}{k}e^{\frac{1}{2}u} + \frac{2}{9}\lambda_3^2 e^u, \tag{1.113}$$

де $\lambda_2 \neq 0$, має МАІ, яка генерується операторами

$$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{X} = e^{-\frac{\lambda_3}{3}x_1}(\partial_1 - \frac{2\lambda_3}{3}\partial_u) >, \tag{1.114}$$

що з точністю до перетворень еквівалентності (??) співпадає з двадцять п'ятим випадком таблиці 2.

2) $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Розв'язком рівняння (??) буде функція

$$\xi_1 = c_1 x_1 + c_2, \tag{1.115}$$

а з рівнянь (??), (??) та (??) випливає, що

$$\beta = 2c_1. \tag{1.116}$$

Підставивши (??) та (??) у рівняння (??) та (??), одержимо, що $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$. Отже, рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + \lambda_2 e^{\frac{1}{2}u} u_1 + \lambda_4 \tag{1.117}$$

має МАІ, що породжується операторами

$$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{D}_1 = x_1 + 2\partial_u > . \tag{1.118}$$

Зауважимо, що рівняння (**??**) доповнює тринадцятий випадок таблиці 2 при $m = \frac{1}{2}$.

3) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Цей випадок розглянуто у роботі [**?**], де показано, що рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + \lambda_4 + \lambda_5 e^{\frac{1}{2}u} + \lambda_6 e^u, \tag{1.119}$$

має наступну МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{T} >,$$

що є частинним випадком пункту 18 таблиці 2.

При $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$ рівняння (**??**) має МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{T}, \mathcal{D}_1 >,$$

що співпадає з вісімнадцятим випадком таблиці 2.

Як показано у [**?**], при $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$ рівняння (**??**) має МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, D, \mathcal{D}_1 >,$$

що співпадає із третім випадком таблиці 2.

При $\lambda_4 = \lambda_6 = 0$ одержимо рівняння, симетрійні властивості якого вивчені в роботі [**?**], де встановлено, що його МАІ генерується наступними операторами

$$< \partial_0, \partial_1, D - 2\mathcal{D}_1 >,$$

що є частинним випадком дванадцятого пункту таблиці 2 при $m = \frac{1}{2}$.

4) $\lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$. Рівняння (**??**) набуває вигляду

$$\lambda_5(\frac{1}{2}\beta + \xi_0^0) = 0. \tag{1.120}$$

При $\lambda_5 \neq 0$ з рівняння (**??**) та диференціального наслідку рівняння (**??**) по змінній x_1 випливає, що

$$\beta_1 = 0. \tag{1.121}$$

Продиференціювавши рівняння (**??**) по змінній x_1, одержимо

$$\xi^1_{11} = 0. \tag{1.122}$$

З рівнянь (**??**), (**??**) при умові (**??**) та (**??**) можна зробити висновок, що

$$\lambda_3 \xi^1_1 = 0, \lambda_6 \xi^1_1 = 0. \tag{1.123}$$

З рівнянь (**??**) та (**??**) одержимо

$$\beta = 4\xi^1_1. \tag{1.124}$$

Продиференціювавши останнє рівняння по змінній x_0 та врахувавши (**??**), одержимо умову

$$\beta_0 = 0. \tag{1.125}$$

Тоді рівняння (**??**) при умові (**??**) набуде вигляду

$$\lambda_4 \xi^0_0 = 0. \tag{1.126}$$

З рівняння (**??**) випливає, що

$$\xi^0_0 = -\frac{1}{2}\beta. \tag{1.127}$$

З диференціального наслідку рівняння (**??**) за змінною x_0 при умові (**??**) одержимо

$$\xi^0_{00} = 0. \tag{1.128}$$

Отже,

$$\xi^0 = c_1 x_0 + c_2. \tag{1.129}$$

З умови (**??**) одержимо

$$\beta = -2c_1. \tag{1.130}$$

З рівняння (**??**) та рівняння (**??**) випливає

$$\xi^1 = -\frac{c_1}{2} x_1 + c_3. \tag{1.131}$$

З умов (**??**), (**??**), (**??**) та рівностей (**??**), (**??**), (**??**) можна зробити висновок, що розширення основної алгебри не відбувається.

При $\lambda_5 = 0$ рівняння (**??**) набуде вигляду

$$\xi^1_{11} - \frac{\lambda_3}{3}\xi^1_1 = 0. \tag{1.132}$$

З рівняння (**??**) та диференціального наслідку рівняння (**??**) за змінною x_0 одержимо

$$\xi^0_{00} - \lambda_4\xi^0_0 = 0. \tag{1.133}$$

При розв'язуванні системи рівнянь (**??**), (**??**) можливі наступні нееквівалентні випадки:

а) $\lambda_4 \neq 0$. Тоді розв'язком системи будуть функції

$$\xi^0 = c_1 e^{-\lambda_4 x_0} + c_2, \tag{1.134}$$

$$\xi^1 = c_3 e^{-\frac{\lambda_3}{3}x_1} + c_4. \tag{1.135}$$

З рівняння (**??**) одержуємо

$$\beta = \lambda_4 c_1 e^{-\lambda_4 x_0} - \frac{2\lambda_3}{3}c_3 e^{-\frac{\lambda_3}{3}x_1}. \tag{1.136}$$

Підставивши (**??**)–(**??**) у рівняння (**??**), робимо висновок, що $\lambda_6 = \frac{2}{9}\lambda_3^2$. Таким чином, рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + \lambda_3 e^u u_1 + \lambda_4 + \frac{2}{9}\lambda_3^2 e^u \tag{1.137}$$

має МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{T}, \mathcal{X} >, \tag{1.138}$$

що з точністю до перетворень еквівалентносі (**??**)співпадає з двадцять дев'ятим випадком таблиці 2.

б) $\lambda_4 = 0$. Розв'язок системи рівнянь (**??**), (**??**) має вигляд

$$\xi^0 = c_1 x_0 + c_2, \tag{1.139}$$

$$\xi^1 = c_3 e^{-\frac{\lambda_3}{3}x_1} + c_4. \tag{1.140}$$

Підставивши (**??**) та (**??**) у рівняння (**??**), одержимо

$$\beta = -\frac{2\lambda_3}{3}c_3 e^{-\frac{\lambda_3}{3}x_1} - c_1. \tag{1.141}$$

З рівняння (**??**) за умов (**??**)-(**??**) випливає, що $\lambda_6 = \frac{2}{9}\lambda_3^2$. Отже, рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + \lambda_3 e^u u_1 + \frac{2}{9}\lambda_3^2 e^u \tag{1.142}$$

має МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{D}, \mathcal{X} >, \tag{1.143}$$

що співпадає з двадцять сьомим випадком таблиці 2.

Розглянемо рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^{æu} u_1) + \lambda_2 u u_1 + \lambda_3 e^{-æu}. \tag{1.144}$$

Симетрійні властивості даного рівняння при $\lambda_2 = 0$ вивчені у роботі [**?**], де показано, що таке рівняння має при $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ наступну МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, D, \mathcal{D}_1 >,$$

що співпадає з третім випадком таблиці 2, а при $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$

$$< \partial_0, \partial_1, kD + \mathcal{D}_1 >,$$

що є частинним випадком дванадцятого пункту таблиці 2 при $m = 0$.

Дослідимо симетрійні властивості рівняння (**??**) при $\lambda_2 \neq 0$. При підстановці функцій f^1, f^2, f^3 із рівняння (**??**) у систему (**??**)–(**??**) одержимо наступну систему рівнянь

$$æ(\alpha u + \beta)e^{æu} = (2\xi_1^1 - \xi_0^0)e^{æu}, \tag{1.145}$$

$$\begin{gathered} \lambda_2(\alpha u + \beta) = \lambda_2(\xi_1^1 - \xi_0^0)u - 2æ(\alpha_1 u + \beta_1)e^{æu} + \\ +(\xi_{11}^1 - 2\alpha_1)e^{æu} - \xi_0^1, \end{gathered} \tag{1.146}$$

$$\begin{gathered} -æ\lambda_3(\alpha u + \beta)e^{æu} = \lambda_3(\alpha - \xi_0^0) - (\alpha_{11} u + \beta_{11})e^{æu} - \\ -\lambda_2(\alpha_1 u + \beta_1)u + \alpha_0 u + \beta_0. \end{gathered} \tag{1.147}$$

Розщепивши систему (**??**)-(**??**) за степенями u, одержимо

$$æ\alpha = 0, \tag{1.148}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 0, \quad æ\beta = 2\xi^1_1 - \xi^0_0, \quad \alpha - \xi^1_1 + \xi^0_0 = 0,\\
&\lambda_2\beta = (-2æ\beta_1 + \xi^1_{11})e^{æu} - \xi^1_0, \quad \lambda_3 æ\alpha e^{æu} = \lambda_2\beta_1 + \alpha_0,\\
&\lambda_3(\alpha - \xi^0_0 + æ\beta)e^{æu} = \beta_{11}e^{æu} - \beta_0.
\end{aligned} \tag{1.149}$$

При розв'язуванні рівняння (**??**) виникають два суттєво різні випадки

1) $æ = 1$. Тоді система рівнянь (**??**), (**??**) перепишеться наступним чином

$$\begin{aligned}
&\xi^1_1 = \xi^0_0, \quad \alpha = 0, \quad \beta_0 = \beta_1 = 0, \beta = 2\xi^1_1 - \xi^0_0,\\
&\lambda_2\beta = -\xi^1_0, \quad \lambda_3(\xi^0_0 - \beta) = 0.
\end{aligned} \tag{1.150}$$

Розв'язком системи (**??**) є функції

$$\xi^0 = c_1x_0 + c_2, \quad \xi^1 = c_1x_1 - \lambda_2c_1x_0 + c_3, \quad \beta = c_1 \tag{1.151}$$

Отже, рівняння (**??**) при $\lambda_2 \neq 0, \quad æ = 1$ має наступну МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, Y = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \lambda_2x_0\partial_1 + \partial_u >, \tag{1.152}$$

що з точністю до перетворень еквівалентності (**??**) співпадає з чотирнадцятим випадком таблиці 2.

2) $æ = 0$. Система (**??**), (**??**) набуде вигляду

$$\xi^0_0 = 2\xi^1_1, \alpha = -\xi^1_1, \beta = -\tfrac{1}{\lambda_2}\xi^1_0, \tag{1.153}$$

$$\beta_0 = 3\lambda_3\xi^1_1, \alpha_0 = \lambda_2\beta_1. \tag{1.154}$$

Із системи (**??**) одержимо

$$\begin{aligned}
&\xi^0_0 = 2a(x_0), \xi^1 = a(x_0)x_1 + b(x_0),\\
&\alpha = -a(x_0), \beta = -\tfrac{1}{\lambda_2}(\dot a(x_0)x_1 + \dot b(x_0)).
\end{aligned} \tag{1.155}$$

Підставивши (**??**) у (**??**), знаходимо

$$-\tfrac{1}{\lambda_2}(\ddot a(x_0)x_1 + \ddot b(x_0)) = 3\lambda_3a(x_0). \tag{1.156}$$

При розв'язуванні (**??**) можливі наступні суттєво різні випадки а) $\lambda_3 \neq 0$, тоді роз'язком системи (**??**), (**??**) будуть функції

$$\begin{aligned}&\xi^0 = c_1 x_0^2 + 2c_2 x_0 + c_5,\\ &\xi^1 = (c_1 x_0 + c_2)x_1 - 3\lambda_2\lambda_3(\tfrac{c_1}{6}x_0^3 + \tfrac{c_2}{2}x_0^2 + c_3 x_0) + c_4,\\ &\alpha = -(c_1 x_0 + c_2), \beta = -\tfrac{c_1}{\lambda_2}x_1 + 3\lambda_3(\tfrac{c_1}{2}x_0^2 + c_2 x_0 + c_3),\end{aligned} \tag{1.157}$$

які для рівняння

$$u_0 = u_{11} + \lambda_2 u u_1 + \lambda_3 \tag{1.158}$$

визначають наступну МАІ

$$\begin{aligned}&< \partial_0, \partial_1, \mathcal{G}, D - u\partial_u - \tfrac{3}{2}\lambda_3 x_0(\lambda_2 x_0 \partial_1 - 2\partial_u),\\ &\Pi - \tfrac{\lambda_3 x_0^2}{2}(\lambda_2 x_0 \partial_1 - 3\partial_u) >,\end{aligned} \tag{1.159}$$

що з точністю до перетворень еквівалентності (**??**) співпадає з двадцять другим випадком таблиці 2 .

б) $\lambda_3 = 0$. Симетрійні властивості такого рівняння досліджено у роботі [**?**], де показано, що рівняння

$$u_0 = u_{11} + \lambda_2 u u_1 \tag{1.160}$$

має МАІ, яка генерується наступними операторами

$$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{G}, D - u\partial_u, \Pi >, \tag{1.161}$$

що з точністю до перетворень еквівалентності (**??**) співпадає з сьомим випадком таблиці 2 .

Дослідимо симетрійні властивості рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_2 u^m u_1 + \lambda_3 u^{2m-k+1}, \tag{1.162}$$

де $m \neq 0; \frac{k}{2}; k$.

Випадок при $\lambda_2 = 0$ розглянуто у [**?**], де показано, що МАІ такого рівняння має вигляд

$$< \partial_0, \partial_1, (k - 2m)D + D_1 > .$$

Дослідимо симетрійні властивості рівняння при $\lambda_2 \neq 0$. З точністю до перетворень еквівалентності (**??**) можна вважати $\lambda_2 = 1$.

Підставивши функції f^1, f^2, f^3 із рівняння (??) у систему (??)–(??) одержимо

$$k(\alpha u+\beta)u^{k-1}=(2\xi_1^1-\xi_0^0)u^k, \tag{1.163}$$

$$\begin{aligned} &m(\alpha u+\beta)=(\xi_1^1-\xi_0^0)u^m-2k(\alpha_1 u+\beta_1)u^{k-1}+\\ &+(\xi_{11}^1-2\alpha_1)u^k-\xi_0^1, \end{aligned} \tag{1.164}$$

$$\begin{aligned} &(2m-k+1)\lambda_3(\alpha u+\beta)u^{2m-k}=\lambda_3(\alpha-\xi_0^0)u^{2m-k+1}-\\ &-(\alpha_{11}u+\beta_{11})u^k-(\alpha_1 u+\beta_1)u^m+\alpha_0 u+\beta_0. \end{aligned} \tag{1.165}$$

Розщепивши систему (??)–(??) за різними степенями u та виконавши незначні перетворення , одержимо

$$\begin{aligned} &\xi_0^1=0, \alpha_0=\alpha_1=\beta=0,\\ &k\alpha=2\xi_1^1-\xi_0^0, m\alpha=\xi_1^1-\xi_0^0,\\ &\lambda_3[\xi_0^0+(2m-k)\alpha]=0. \end{aligned} \tag{1.166}$$

Розв'язок системи (??) має вигляд

$$\begin{aligned} &\xi^0=(2m-k)c_1x_0+c_2, \xi^1=(m-k)c_1x_1+c_3,\\ &\alpha=-c_1, \beta=0. \end{aligned} \tag{1.167}$$

Отже, рівняння (??) має МАІ, яка генерується наступними операторами

$$<\partial_0, \partial_1, (k-2m)D+D_1>, \tag{1.168}$$

що міститься у тринадцятому випадку таблиці 2.

Розглянемо рівняння

$$u_0=\partial_1(u^k u_1)+(\lambda_2 u^{\frac{k}{2}}+\lambda_3 u^k)u_1+(\lambda_4+\lambda_5 u^{\frac{k}{2}}+\lambda_6 u^k)u. \tag{1.169}$$

При $|\lambda_2|+|\lambda_3|=0$, як показано у [?], можливі наступні випадки, при яких відбувається розширення основної алгебри інваріантності: 1) $k=0$. Рівняння (??) набуває вигляду

$$u_0=u_{11}+\widetilde{\lambda}_3 u \tag{1.170}$$

і має МАІ

$$<\partial_0, \partial_1, G_M, M, D+2\widetilde{\lambda}_3 x_0 u\partial_u, \Pi_M+\widetilde{\lambda}_3 x_0^2 u\partial_u, \widetilde{Q}_\infty>,$$

що співпадає з сімнадцятим випадком таблиці 2.

2)При $k \neq 0$ одержано наступний результат. а) Якщо $\lambda_5 = 0$, то рівняння (**??**) має МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, T >,$$

що співпадає з двадцять четвертим випадком таблиці 2.

б)$\lambda_5 = 0, k = -\frac{4}{3}$, МАІ рівняння (**??**) має вигляд

$$< \partial_0, \partial_1, T, Z^a >,$$

що співпадає з двадцять першим випадком таблиці 2.

в) $\lambda_4 = \lambda_5 = 0, k \neq -\frac{4}{3}$, в цьому випадку рівняння (**??**) має МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, kD - D_1 >,$$

що міститься у тринадцятому випадку таблиці 2 при $m = k$.

г) $\lambda_4 = \lambda_5 = 0, k = -\frac{4}{3}$, тоді рівняння (**??**) має МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, D_0, Z^a >,$$

що співпадає з двадцятим випадком таблиці 2.

д) $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$, МАІ такого рівняння генерується операторами

$$< \partial_0, \partial_1, T, D_1 >,$$

що співпадає з дев'ятнадцятим випадком таблиці 2.

е) $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0, k \neq -\frac{4}{3}$, в цьому випадку рівняння (**??**) має МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, D, D_1 >,$$

що співпадає з четвертим випадком таблиці 2 .

ж)$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0, k = -\frac{4}{3}$, тоді рівняння (**??**) має МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, D, D_1, K >,$$

що співпадає з п'ятим випадком таблиці 2 .

Дослідимо симетрійні властивості рівняння (**??**) при наступних умовах $|\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0, k \neq 0$.

Підставимо значення функцій f^1, f^2, f^3 із рівняння (**??**) у систему (**??**)-(**??**)

$$k(\alpha + \frac{\beta}{u}) = 2\xi_1^1 - \xi_0^0, \tag{1.171}$$

$$\begin{aligned} &k\alpha(\tfrac{\lambda_2}{2}u^{\frac{k}{2}} + \lambda_3 u^k) = (\xi_1^1 - \xi_0^0)(\lambda_2 u^{\frac{k}{2}} + \lambda_3 u^k) - \\ &-2\alpha_1 k u^k + (\xi_{11}^1 - 2\alpha_1)u^k - \xi_0^1, \end{aligned} \tag{1.172}$$

$$\begin{aligned} &\alpha(\lambda_5(\tfrac{k}{2}+1)u^{\frac{k}{2}} + \lambda_6(k+1) + \lambda_4) = (\alpha - \xi_0^0)(\lambda_4 + \lambda_5 u^{\frac{k}{2}} + \\ &+\lambda_6 u^k) - \alpha_{11}u^k - \alpha_1(\lambda_2 u^{\frac{k}{2}} + \lambda_3 u^k) + \alpha_0. \end{aligned} \tag{1.173}$$

Розщепивши систему рівнянь (**??**)-(**??**) за різними степенями u, одержимо

$$\xi_0^1 = \beta = 0, \tag{1.174}$$

$$\lambda_2 \xi_0^0 = 0, \tag{1.175}$$

$$\alpha = \frac{1}{k}(2\xi_1^1 - \xi_0^0), \tag{1.176}$$

$$\xi_{00}^0 + k\lambda_4 \xi_0^0 = 0, \tag{1.177}$$

$$(3k+4)\xi_{11}^1 + k\lambda_3 \xi_1^1 = 0, \tag{1.178}$$

$$\xi_{111}^1 + \lambda_3 \xi_{11}^1 + k\lambda_6 \xi_1^1 = 0, \tag{1.179}$$

$$4\lambda_2 \xi_{11}^1 + k\lambda_5(\xi_0^0 + 2\xi_1^1) = 0. \tag{1.180}$$

Розв'язок системи рівнянь (**??**)-(**??**) залежить від значень λ_2 та λ_5.

1) $\lambda_2 \neq 0, \lambda_5 \neq 0$. З рівнянь (**??**), (**??**) та (**??**) випливає

$$\xi^0 = c_1, \tag{1.181}$$

$$\xi^1 = c_2 e^{-\frac{k}{2}\frac{\lambda_5}{\lambda_2}x_1} + c_3. \tag{1.182}$$

Підставивши (**??**) у рівняння (**??**) та (**??**), із умов сумісності та вимог розширення основної алгебри інваріантності одержимо

$$\lambda_5 = \frac{2\lambda_2\lambda_3}{3k+4}, \lambda_6 = \frac{2(k+2)}{(3k+4)^2}\lambda_3^2,$$

де $k \neq -\frac{4}{3}$. З рівняннь (**??**), (**??**) та (**??**) знаходимо, що

$$\alpha = -c_2 \frac{2\lambda_3}{3k+4} e^{-\frac{\lambda_3 k}{3k+4}x_1}. \tag{1.183}$$

Рівності (??), (??), (??) та (??) визначають координати оператора (??), який для рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + (\lambda_2 u^{\frac{k}{2}} + \lambda_3 u^k)u_1 + (\lambda_4 + \frac{2\lambda_2\lambda_3}{3k+4}u^{\frac{k}{2}} + \frac{2(k+2)}{(3k+4)^2}\lambda_3^2 u^k)u,$$

де $k \neq 0, -\frac{4}{3}, \lambda_3 \neq 0$, генерує MAI

$$< \partial_0, \partial_1, X = e^{-\frac{\lambda_3 k}{3k+4}x_1}(\partial_1 - \frac{2\lambda_3}{3k+4}u\partial_u) >,$$

що з точністю до перетворень еквівалентності (??) співпадає з двадцять шостим випадком таблиці 2.

2) $\lambda_2 \neq 0, \lambda_5 = 0$. З рівнянь (??), (??) та (??) одержуємо

$$\xi^0 = c_1, \xi^1 = c_2 x_1 + c_3, \alpha = \frac{2}{k}c_2. \tag{1.184}$$

Підставивши (??) у (??), (??), вимагаючи розширення основної алгебри (??), одержимо

$$\lambda_3 = \lambda_6 = 0.$$

Таким чином, рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_2 u^{\frac{k}{2}} u_1 + \lambda_4 u$$

має MAI

$$< \partial_0, \partial_1, D_1 = kx_1 + 2u\partial_u >,$$

що доповнює випадок тринадцять таблиці 2 при $m = \frac{k}{2}$.

3) $\lambda_2 = 0, \lambda_5 \neq 0$. Рівняння (??) набуде вигляду

$$\xi^0_0 = 2\xi^1_1. \tag{1.185}$$

З диференціального наслідку (??) по змінній x_1, враховуючи (??), одержимо

$$2\xi^1_{11} = 0. \tag{1.186}$$

Підставивши (??) у рівняння (??), приходимо до висновку, що при $\lambda_3 = 0$, симетрійні властивості відповідного рівняння розглянуто вище.

4) $\lambda_2 = \lambda_5 = 0$. З умов сумісності рівнянь (??)-(??) одержуємо

$$[(3k+4)^2\lambda_6 - 2(k+2)\lambda_3^2]\xi_1^1 = 0.$$

Тоді при розв'язуванні системи рівнянь (??)–(??) можливі наступні випадки:

а)$\lambda_4 \neq 0, (3k+4)^2\lambda_6 - 2(k+2)\lambda_3^2 \neq 0$. При цьому розв'язком рівнянь (??), (??), (??) будуть функції

$$\xi^0 = c_1 e^{-k\lambda_4 x_0} + c_2, \xi^1 = c_3. \tag{1.187}$$

Рівняння (??) при умові (??) набуває вигляду

$$\alpha = c_1\lambda_4 e^{-k\lambda_4 x_0}. \tag{1.188}$$

Координати (??), (??) оператора (??) визначають для рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_3 u^k u_1 + (\lambda_4 + \lambda_6 u^k)u,$$

де $\lambda_4 \neq 0, (3k+4)^2 - 2(k+2)\lambda_3^2 \neq 0$ МАІ, яка має вигляд

$$< \partial_0, \partial_1, T = e^{-k\lambda_4 x_0}(\partial_0 + \lambda_4 u\partial_u) >,$$

що міститься у двадцять четвертому випадку таблиці 2.

б)$\lambda_4 \neq 0, (3k+4)^2\lambda_6 - 2(k+2)\lambda_3^2 = 0$. Тоді розв'язком рівняннь (??), (??), (??) будуть функції

$$\xi^0 = c_1 e^{-k\lambda_4 x_0} + c_2, \xi^1 = c_3 e^{-\frac{k\lambda_3}{3k+4}x_1} + c_4. \tag{1.189}$$

Можна зробити висновок, що при $k \neq -\frac{4}{3}$

$$\lambda_6 = \frac{2(k+2)}{(3k+4)^2}\lambda_3^2.$$

Рівняння (??) при умові (??) набуває вигляду

$$\alpha = -2_3\frac{\lambda_3}{3k+4}e^{-\frac{k\lambda_3}{3k+4}x_1} + c_1\lambda_4 e^{-k\lambda_4 x_0}. \tag{1.190}$$

Тому оператор (??) з координатами (??), (??) визначає для рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_3 u^k u_1 + (\lambda_4 + \frac{2(k+2)}{(3k+4)^2}\lambda_3^2 u^k)u$$

де $\lambda_4 \neq 0, k \neq -\frac{4}{3}$ МАІ наступного вигляду

$$< \partial_0, \partial_1, T = e^{-k\lambda_4 x_0}(\partial_0 + \lambda_4 u\partial_u), X = e^{-\frac{\lambda_3 k}{3k+4}x_1}(\partial_1 - \frac{2\lambda_3}{3k+4}u\partial_u) >,$$

що з точністю до перетворень еквівалентності (??) співпадає з тридцятим випадком таблиці 2.

в)$\lambda_4 = 0$, $(3k+4)^2\lambda_6 - 2(k+2)\lambda_3^2 = 0$. Тоді розв'язок рівнянь (??), (??), (??) має вигляд

$$\xi^0 = c_1 x_0 + c_2, \xi^1 = c_3 e^{-\frac{k\lambda_3}{3k+4}x_1} + c_4. \tag{1.191}$$

З (??) та (??) одержимо

$$\alpha = -\frac{2\lambda_3}{3k+4}c_3 e^{-\frac{k\lambda_3}{3k+4}x_1} - \frac{c_1}{k}. \tag{1.192}$$

Тому рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_3 u^k u_1 + \frac{2(k+2)}{(3k+4)^2}\lambda_3^2 u^{k+1},$$

де $k \neq 0; -\frac{4}{3}$ має МАІ наступного вигляду

$$< \partial_0, \partial_1, D_0 = kx_0\partial_0 - u\partial_u, X = e^{-\frac{\lambda_3 k}{3k+4}x_1}(\partial_1 - \frac{2\lambda_3}{3k+4}u\partial_u) >,$$

що з точністю до перетворень еквівалентності (??) співпадає з двадцять восьмим випадком таблиці 2.

г)$\lambda_4 = 0, [(3k+4)^2\lambda_6 - 2(k+2)\lambda_3^2] \neq 0$.В даному випадку розв'язок рівнянь (??), (??), (??) має вигляд

$$\xi^0 = c_1 x_0 + c_2, \xi^1 = c_3. \tag{1.193}$$

З умови (??) та (??) одержимо

$$\alpha = -\frac{c_1}{k}. \tag{1.194}$$

Координати (??), (??) оператора (??) визначають для рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_3 u^k u_1 + \lambda_6 u^{k+1}$$

МАІ, яка має вигляд

$$< \partial_0, \partial_1, D_0 = kx_0\partial_0 - u\partial_u >,$$

що співпадає з тринадцятим випадком таблиці 2 при $m = k$.

Розглянемо рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_2 \ln u u_1 + \lambda_3 u^{-k+1}, \tag{1.195}$$

де $k \neq 0$. Підставимо одержані значення функцій f^1, f^2, f^3 у систему (??)–(??), врахувавши при цьому (??). Одержимо систему рівнянь для визначення функцій $\xi^0, \xi^1, \alpha, \beta$:

$$\begin{aligned} &\lambda_2(\xi^1_1 - \xi^0_0) = \lambda_3(\xi^1_1 - \xi^0_0) = 0, \quad \lambda_2\xi^1_{11} = 0, \quad \xi^1_{111} = 0,\\ &(3k+4)\xi^1_{11} = 0, \lambda_2(2\xi^1_1 - \xi^0_0) + k\xi^1_0 = 0,\\ &\alpha = \tfrac{1}{k}(2\xi^1_1 - \xi^0_0), \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta = 0. \end{aligned} \tag{1.196}$$

При розв'язуванні системи (??) можливі два суттєво різних випадки:

1) $\lambda_2 \neq 0$. Система (??) набуває вигляду

$$\xi^1_1 = \xi^0_0, \quad \xi^0_{00} = 0, \quad \xi^1_0 = -\tfrac{\lambda_2}{k}\xi^0_0, \quad \alpha = \tfrac{1}{k}\xi^0_0, \quad \beta = 0.$$

Знайшовши загальний розв'язок останньої системи, одержимо

$$\xi^0 = kc_1x_0 + c_2, \quad \xi^1 = -\lambda_2 c_1 x_0 + c_1 x_1 + c_3, \quad \eta = c_1 u,$$

де c_1, c_2, c_3—сталі інтегрування.

Таким чином, МАІ рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_2 \ln u u_1 + \lambda_3 u^{-k+1},$$

де $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$ є алгебра

$$< \partial_0, Y = \partial_1, k(x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - \lambda_2 x_0 \partial_1 + u\partial_u >,$$

що з точністю до перетворень еквівалентності (??) співпадає з п'ятнадцятим випадком таблиці 2.

2) $\lambda_2 = 0$. Рівняння досліджено у роботі [?], де показано,що його МАІ має вигляд

$$< \partial_0, \partial_1, kD + D_1 >,$$

що є частинним випадком тринадцятого пункту таблиці 2.

Прокласифікуємо симетрійні властивості рівняння

$$u_0 = u_{11} + \lambda_2 u u_1 + \lambda_3 u. \tag{1.197}$$

Випадок при $\lambda_2 = 0$ розглянуто у [?], де показано, що рівняння

$$u_0 = u_{11} + \lambda_3 u$$

володіє наступною МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, G_M, M, D + 2\lambda_3 x_0 u\partial_u, \Pi_M + \lambda_3 x_0^2 u\partial_u, \widetilde{Q}_\infty >,$$

де $\lambda_3 \neq 0$, що співпадає з сімнадцятим пунктом таблиці 2. При $\lambda_3 = 0$ одержимо рівняння теплопровідності (??), симетрійні властивості якого розглянуті вище.

У випадку $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$ одержуємо рівняння Бюргерса, МАІ якого, як добре відомо, задається наступними операторами

$$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{G}, D - u\partial_u, \Pi >,$$

що співпадає з сьомим випадком таблиці 2.

Розглянемо випадок $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$. Підставимо функції f^1, f^2, f^3 із рівняння (??) у систему (??)–(??)

$$\xi^0_0 = 2\xi^1_1, \tag{1.198}$$

$$\lambda_2[(\alpha + \xi^1_1)u + \beta] = -2\alpha_1 - \xi^1_0, \tag{1.199}$$

$$\lambda_3(\xi^0_0 u + \beta) = -\alpha_{11}u - \beta_{11} - \lambda_2(\alpha_1 u + \beta_1)u + \alpha_0 u + \beta_0. \tag{1.200}$$

Розщепимо систему (??)–(??) за степенями u

$$\begin{aligned} &\xi^0_0 = 2\xi^1_1, \alpha = -\xi^1_1, \\ &\lambda_2\beta = -\xi^1_0, \lambda_3\beta = \beta_0, \lambda_3\xi^0_0 = \alpha_0 - \lambda_2\beta. \end{aligned} \tag{1.201}$$

Розв'язавши систему (??), одержимо

$$\xi^0 = c_1, \xi^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0} + c_3, \alpha = 0, \beta = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} c_2 e^{\lambda_3 x_0}. \tag{1.202}$$

Система (??) визначає МАІ рівняння (??)

$$< \partial_0, \partial_1, \mathcal{H} >, \tag{1.203}$$

що співпадає з восьмим випадком таблиці 2.

Дослідимо симетрійні властивоситі рівняння

$$u_0 = u_{11} + \lambda_2 lnuu_1 + (\lambda_3 + \lambda_4 lnu + \lambda_5 ln^2 u)u, \tag{1.204}$$

При $\lambda_2 = \lambda_5 = 0$ одержимо рівняння, симетрійні властивості якого вивчені у роботі [?], де доведено, що MAI такого рівняння має вигляд

$$< \partial_0, \partial_1, H >,$$

що співпадає з дев'ятим випадком таблиці 2.

Для рівняння (??), у якого $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ симетрійні властивості досліджено у роботі [?], де вказано, що його MAI має вигляд

$$< \partial_0, \partial_1, G_M, M, \Pi_M + \lambda_3 x_0^2 u\partial_u, \widetilde{Q}_\infty >,$$

що співпадає з сімнадцятим випадком таблиці 2.

При $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ одержимо лінійне рівняння теплопровідності (??) MAI якого наведена вище.

Дослідимо симетрійні властивості рівняння (??) за умови, що $\lambda_2 \neq 0$. Не втрачаючи загальності, з точністю до перетворень еквівалентності (??), можна вважати $\lambda_2 = 1$. При підстановці функцій f^1, f^2, f^3 із рівняння (??) у систему (??)–(??) одержимо

$$\begin{array}{l} \xi^0_0 = 2\xi^1_1, \\ \alpha + \frac{\beta}{u} = \xi^1_1 - \xi^0_0 - 2\alpha_1 - \xi^1_0, \\ (\lambda_3 + \lambda_4 + (2\lambda_5 + \lambda_4)lnu + \lambda_5 ln^2 u)(\alpha u + \beta) = \\ = (\alpha - \xi^0_0)(\lambda_3 + \lambda_4 lnu + ln^2 u)u - (\alpha_{11} + \beta_{11})lnu + \alpha_0 u + \beta_0. \end{array} \tag{1.205}$$

При розщепленні рівнянь (??) за різними функціями, залежними від u, одержимо наступну систему

$$\xi^0_0 = \xi^1_1 = 0, \tag{1.206}$$

$$\beta = 0, \tag{1.207}$$

$$\alpha_1 = -2\lambda_5\alpha, \quad \lambda_4 = \alpha_0 - \alpha_{11}, \tag{1.208}$$

$$\xi^1_0 = -\alpha - 2\alpha_1. \tag{1.209}$$

З рівняння (**??**) з врахуванням (**??**) одержимо, що

$$\xi^0 = c_1. \tag{1.210}$$

Розв'язком системи (**??**) є функція

$$\alpha = c_2 e^{(\lambda_4 + 4\lambda_5^2)x_0 - 2\lambda_5 x_1}. \tag{1.211}$$

З останнього рівняння, диференціального наслідку системи (**??**) по змінній x_1 та рівності (**??**) випливає

$$2\lambda_5(1 - 4\lambda_5)c_2 e^{(\lambda_4 + 4\lambda_5^2)x_0 - 2\lambda_5 x_1} = 0. \tag{1.212}$$

При розв'язуванні рівняння (**??**) виникають два суттєво різні випадки:

1) $\lambda_5 = 0$. Тоді з рівнянь (**??**) та (**??**) одержимо

$$\xi_0^1 = c_2 e^{\lambda_4 x_0}. \tag{1.213}$$

а) при $\lambda_4 \neq 0$ розв'язок системи (**??**)–(**??**) має вигляд

$$\xi^0 = c_1, \xi^1 = -\frac{c_2}{\lambda_4} e^{\lambda_4 x_0} + c_3, \alpha = c_2 e^{\lambda_4 x_0}, \beta = 0. \tag{1.214}$$

Тому рівняння

$$u_0 = u_{11} + \ln u u_1 + (\lambda_3 + \lambda_4 \ln u)u \tag{1.215}$$

має наступну МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, e^{\lambda_4 x_0}(\partial_1 - \lambda_4 u \partial_u) >, \tag{1.216}$$

що співпадає з дев'ятим випадком таблиці 2.

б)при $\lambda_4 = 0$ система (**??**)–(**??**) має розв'язок

$$\xi^0 = c_1, \xi^1 = -c_2\lambda_2 x_0 + c_3, \alpha = c_2, \beta = 0.$$

Отже, МАІ рівняння

$$u_0 = u_{11} + \ln u u_1 + \lambda_3 u.$$

має вигляд

$$< \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_0 - u\partial_u >,$$

що співпадає з десятим випадком таблиці 2.

2) $\lambda_5 = \frac{1}{4}$. В цьому випадку з рівняння (**??**) одержимо

$$\xi_0^1 = 0. \tag{1.217}$$

Тоді система (**??**)–(**??**) має розв'язок

$$\xi^0 = c_1, \xi^1 = c_3, \alpha = c_2 e^{\lambda_4 x_0}, \beta = 0, \tag{1.218}$$

який для рівняння

$$u_0 = u_{11} + \ln u u_1 + (\lambda_3 + \lambda_4 lnu + \frac{1}{4} \ln^2 u)u \tag{1.219}$$

визначає наступну МАІ

$$< \partial_0, \partial_1, Q > . \tag{1.220}$$

Отже, одержимо одинадцятий випадок таблиці 2.

Теорема доведена.

1.6. Застосування додаткових перетворень еквівалентності для спрощення рівнянь

Застосуємо результати теореми 2.3 для знаходження перетворень, які зводять рівняння з таблиці 2 до інших рівнянь з даної таблиці. Справедливе наступне твердження

Теорема 2.6. *Всі рівняння таблиці 2, які за допомогою локальних перетворень можуть бути зведені до інших рівнянь цієї ж таблиці, наведені в таблиці 3*

Таблиця 3. Спрощення рівняння (1) за допомогою додаткових перетворень еквівалентності

№	Вигляд рівняння до спрощення	Зв'язок	Вигляд рівняння після спрощення
1	$u_0 = u_{11} + \lambda_3$	$t = x_0,$ $x = x_1,$ $w = u - \lambda_3 x_0$	$w_t = w_{xx}$
2	$u_0 = u_{11} + \lambda_3 u$	$t = x_0,$ $x = x_1,$ $w = ue^{\lambda_3 x_0}$	$w_t = w_{xx}$
3	$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + \lambda_4,$	$t = \frac{e^{\lambda_4 x_0}}{\lambda_4},$ $x = x_1,$ $w = u - \lambda_4 x_0$	$w_t = \partial_x(e^w w_x)$
4	$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_4 u,$ $k \neq 0$	$t = \frac{e^{k\lambda_4 x_0}}{k\lambda_4},$ $x = x_1,$ $w = ue^{-\lambda_4 x_0}$	$w_t = \partial_x(w^k w_x)$

продовження таблиці 3

№	Вигляд рівняння до спрощення	Зв'язок	Вигляд рівняння після спрощення
5	$u_0 = \partial_1(u^{-\frac{4}{3}}u_1)+$ $+\lambda_6 u^{-\frac{1}{3}}$	$t = x_0, ,$ $x = \varphi(x_1)$ $w = \psi^3(x_1)u,$ $\ddot{\psi} = \frac{\lambda_6}{3}\psi, \dot{\varphi} = \psi^{-2}$	$w_t = \partial_x(w^{-\frac{4}{3}}w_x)$
6	$u_0 = \partial_1(u^{-\frac{4}{3}}u_1)+$ $+\lambda_4 u + \lambda_6 u^{-\frac{1}{3}}$	$t = \frac{-3}{4\lambda_4}e^{-\frac{4\lambda_4}{3}x_0},$ $x = \varphi(x_1),$ $w = ue^{-\lambda_4 x_0}\psi^3(x_1),$ $\ddot{\psi} = \frac{\lambda_6}{3}\psi, \dot{\varphi} = \psi^{-2}$	$w_t = \partial_x(w^{-\frac{4}{3}}w_x)$
7	$u_0 = u_{11} + uu_1 + \lambda_3$	$t = x_0,$ $x = x_1 + \frac{\lambda_3}{2}x_0^2,$ $w = u - \lambda_3 x_0$	$w_t = w_{xx} + ww_x$
8	$u_0 = \partial_1(e^u u_1)+$ $+\lambda_3 e^u u_1 + \lambda_4+$ $+\lambda_6 e^u$	$t = \frac{e^{\lambda_4 x_0}}{\lambda_4},$ $x = x_1,$ $w = u - \lambda_4 x_0$	$w_t = \partial_x(e^w w_x)+$ $+\tilde{\lambda}_3 e^w w_x + \tilde{\lambda}_6 e^w$
9	$u_0 = \partial_1(u^k u_1)+$ $+\lambda_3 u^k u_1 + (\lambda_4+$ $+\lambda_6 u^k)u, k \neq 0$	$t = \frac{e^{k\lambda_4 x_0}}{k\lambda_4},$ $x = x_1,$ $w = ue^{-\lambda_4 x_0}$	$w_t = \partial_x(w^k w_x)+$ $+\tilde{\lambda}_3 w^k w_x + \tilde{\lambda}_6 w^{k+1}$
10	$u_0 = \partial_1(e^u u_1)+$ $+(\lambda_2 e^{\frac{1}{2}u}+e^u)u_1+$ $+\lambda_4 + \frac{2\lambda_2}{3}e^{\frac{1}{2}u}+$ $+\frac{2}{9}e^u$	$t = x_0,$ $x = 3e^{\frac{1}{3}x_1},$ $w = u + \frac{2}{3}x_1$	$w_t = \partial_x(e^w w_x)+$ $+\tilde{\lambda}_2 e^{\frac{1}{2}w}w_x + \tilde{\lambda}_4$

продовження таблиці 3

№	Вигляд рівняння до спрощення	Зв'язок	Вигляд рівняння після спрощення
11	$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + $ $+(\lambda_2 u^{\frac{k}{2}} + u^k)u_1 +$ $+(\lambda_4 + \frac{2\lambda_2}{(3k+4)} u^{\frac{k}{2}} +$ $+\frac{2(k+2)}{(3k+4)^2} u^k)u,$ $k \neq 0; -\frac{4}{3}$	$t = x_0, x = \frac{e^{\theta x_1}}{\theta},$ $w = u e^{\frac{2\theta}{k} x_1},$ $\theta = \frac{k}{3k+4}$	$w_t = \partial_x(w^k w_x) +$ $+\tilde{\lambda}_2 w^{\frac{k}{2}} w_x + \tilde{\lambda}_4 w$
12	$u_0 = \partial_1(e^u u_1) +$ $+e^u u_1 + \frac{2}{9} e^u,$	$t = x_0,$ $x = 3e^{\frac{1}{3} x_1},$ $w = u + \frac{2}{3} x_1$	$w_t = \partial_x(e^w w_x)$
13	$u_0 = \partial_1(u^k u_1) +$ $+u^k u_1 +$ $+\frac{2(k+2)}{(3k+4)^2} u^{k+1},$ $k \neq 0; -\frac{4}{3}$	$t = x_0, x = \frac{e^{\theta x_1}}{\theta},$ $w = u e^{\frac{2\theta}{k} x_1},$ $\theta = \frac{k}{3k+4}$	$w_t = \partial_x(w^k w_x)$
14	$u_0 = \partial_1(e^u u_1) +$ $+e^u u_1 + \lambda_4 +$ $+\frac{2}{9} e^u$	$t = \frac{e^{\lambda_4 x_0}}{\lambda_4},$ $x = 3e^{\frac{1}{3} x_1},$ $w = u - \lambda_4 x_0 +$ $+\frac{2}{3} x_1$	$w_t = \partial_x(e^w w_x)$
15	$u_0 = \partial_1(u^k u_1) +$ $+u^k u_1 + (\lambda_4 +$ $+\frac{2(k+2)}{(3k+4)^2} u^k)u,$ $k \neq 0; -\frac{4}{3}$	$t = \frac{e^{k\lambda_4 x_0}}{k\lambda_4},$ $x = \frac{e^{\theta x_1}}{\theta},$ $w = u e^{-\lambda_4 x_0 + \frac{2\theta}{k} x_1},$ $\theta = \frac{k}{3k+4}$	$w_t = \partial_x(w^k w_x)$

Доведення. Очевидно, що рівняння з першої колонки таблиці 3 можуть бути зведені до рівнянь з другої колонки таблиці 3 при умові, що їх МАІ мають однакову розмірність та функції f^1, F^1 належать до одного класу, що продиктовано умовою (**??**). Як було зазначено у вступі, рівняння з першої колонки пунктів 1–8 даної таблиці володіють додатковими перетвореннями еквівалентності та зводяться до вигляду з другої колонки. Знайдемо додаткові перетвореннння, що зводять рівняння з першої колонки пунктів 8–15 до рівнянь третьої колонки таблиці 3. Наведемо детально доведення теореми для пункту 15 таблиці 3. Встановимо додаткові перетворення еквівалентності,які зводять рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1)+u^k u_1 + \left(\lambda_4 + \frac{2(k+2)}{(3k+4)^2}u^k\right)u, \quad k \neq 0; -\frac{4}{3} \tag{1.221}$$

до рівняння

$$w_t = \partial_x(w^k w_x). \tag{1.222}$$

В даному випадку рівняння (**??**) набуває вигляду

$$b_1^2 u^k = a_0(\alpha u + \beta)^k. \tag{1.223}$$

Очевидно, що з (**??**) при врахуванні (**??**) одержимо

$$b_1^2 = a_0\alpha^k, \quad \beta = 0. \tag{1.224}$$

Тому рівняння (**??**) і (**??**)запишуться у вигляді

$$-2\frac{b_1\alpha_1}{\alpha}(k+1)u^k + b_{11}u^k + b_1u^k = b_0, \tag{1.225}$$

$$[\frac{\alpha_1^2}{\alpha}(k+2) - \alpha_1 + \frac{2\alpha(k+2)}{(3k+4)^2}]u^{k+1} + (\lambda_4\alpha + \alpha_0)u = \alpha_{11}u^{k+1}. \tag{1.226}$$

Оскільки функції α, b не залежать від u та, враховуючи, що $k \neq 0$, із (**??**) та (**??**) одержимо

$$-2\frac{b_1\alpha_1}{\alpha}(k+1) + b_{11} + b_1 = 0, \tag{1.227}$$

$$(\frac{\alpha_1}{\alpha})^2(k+2) - \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{2(k+2)}{(3k+4)^2} = \alpha_{11}, \tag{1.228}$$

$$\alpha_0 + \lambda_4\alpha = 0, \tag{1.229}$$

$$b_0 = 0, \tag{1.230}$$

З рівняння (**??**), знаходимо

$$\alpha = \gamma(x_1)e^{-\lambda_4 x_0}. \tag{1.231}$$

Позначимо

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \varsigma(x_1). \tag{1.232}$$

Тоді рівняння (**??**) перепишеться наступним чином

$$(k+1)\varsigma^2 - \varsigma + \frac{2(k+2)}{(3k+4)^2} = \dot{\varsigma}. \tag{1.233}$$

Один з його розв'язків має вигляд

$$\varsigma = \frac{2}{3k+4}. \tag{1.234}$$

Тому

$$\alpha = e^{-\lambda_4 x_0 + \frac{2}{3k+4}x_1} \tag{1.235}$$

Підставивши (**??**) у (**??**) та розв'язавши одержане рівняння, маємо

$$b = c_2 e^{\frac{k}{3k+4}x_1}, \tag{1.236}$$

де c_2 — стала інтегрування. Враховуючи (**??**), (**??**), із (**??**) одержимо

$$a_0 = \frac{k^2 c_2^2}{(3k+4)^2} e^{k\lambda_4 x_0}.$$

Якщо для зручності покласти $c_2 = \frac{3k+4}{k}$, то маємо

$$a = \frac{e^{k\lambda_4 x_0}}{k\lambda_4}. \tag{1.237}$$

При цьому

$$b = \frac{3k+4}{k} e^{\frac{k}{3k+4}x_1}, \quad \alpha = e^{-\lambda_4 x_0 + \frac{2}{3k+4}x_1} \tag{1.238}$$

Отже,

$$t = \frac{e^{k\lambda_4 x_0}}{k\lambda_4}, \quad x = \frac{e^{\theta x_1}}{\theta}, \quad w = u e^{-\lambda_4 x_0 + \frac{2\theta}{k}x_1}, \tag{1.239}$$

де $\theta = \frac{k}{3k+4}$. Співвідношення (??) задає локальну підстановку, що зводить рівняння (??) до рівняння (??).

Аналогічні міркування можна провести для всіх рівнянь 16-30 з таблиці 2.

Встановимо підстановку, яка зводить рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + \lambda_3 e^u u_1 + \lambda_4 + \lambda_6 e^u \tag{1.240}$$

до рівняння

$$w_t = \partial_x(e^w w_x) + \lambda_3 e^w w_x + \tilde{\lambda_6} e^w \tag{1.241}$$

Підставивши значення функцій f^a, F^a з рівнянь (??), (??)у систему (??)–(??), та врахувавши при цьому (??), після розщеплення за різними показниковими функціями одержимо систему

$$\begin{aligned} &b_0 = 0, \alpha = 1, \beta_0 = -\lambda_4, b_1^2 = a_0 e^\beta, \\ &b_{11} + (\lambda_3(1 - b_1) - 2\beta_1)b_1 = 0, \\ &\beta_{11} - (\beta_1 + \lambda_3)\beta_1 + \tilde{\lambda_6} b_1^2 + \lambda_6 = 0. \end{aligned} \tag{1.242}$$

Неважко впевнитись, що одним з розв'язків системи (??) є функції

$$\alpha = \frac{e^{\lambda_4 x_0}}{\lambda_4}, b = \frac{3}{\lambda_3} e^{\frac{\lambda_3}{3} x_1}, \alpha = 1, \beta = -\lambda_4 x_0 + 2\frac{\lambda_3}{3} x_1,$$

які визначають перетворення

$$t = \frac{e^{\lambda_4 x_0}}{\lambda_4}, \quad x = \frac{3}{\lambda_3} e^{\frac{\lambda_3}{3} x_1}, \quad w = u - \lambda_4 x_0 + 2\frac{\lambda_3}{3} x_1,$$

що зводять рівняння (??) до рівняння (??). Одержаний результат співпадає з восьмим випадком таблиці 3.

Знайдемо вигляд підстановки, яка зводить рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \lambda_3 u^k u_1 + (\lambda_4 + \lambda_6 u^k)u, \quad k \neq 0, \tag{1.243}$$

до рівняння

$$w_t = \partial_x(w^k w_x) w_x + \lambda_3 w^k + \lambda_6 w^{k+1}. \tag{1.244}$$

Система (**??**)–(**??**)при підстановці значень функцій f^a, F^a з рівнянь (**??**), (**??**) та врахуванні (**??**) після розщеплення за різними степеневими функціями набуде вигляду

$$\begin{aligned} &b_0 = 0, \quad \beta = 0\alpha_0 + \lambda_4, \quad \alpha = 0, b_1^2 = a_0\alpha^k, \\ &b_{11} - b_1(\lambda_3(b_1 - 1) + 2(k+1)\tfrac{\alpha_1}{\alpha})b_1 = 0, \\ &\alpha_{11} - ((k+2)\tfrac{\alpha_1}{\alpha} - \lambda_3)\alpha_1 + \lambda_6(a_0\alpha^k - 1)\alpha = 0. \end{aligned} \tag{1.245}$$

Одним з розв'язків системи (**??**) є функції

$$a = \frac{e^{k\lambda_4 x_0}}{k\lambda_4}, \quad b = x_1, \quad \alpha = e^{-\lambda_4 x_0}, \quad \beta = 0,$$

які визначають перетворення, що зводять рівняння (**??**) до рівняння (**??**):

$$t = \frac{e^{k\lambda_4 x_0}}{k\lambda_4}, \quad x = x_1, \quad w = ue^{-\lambda_4 x_0},$$

що співпадає з дев'ятим випадком таблиці 3.

З'ясуємо вигляд підстановки, яка зводить рівняння

$$\begin{aligned} &u_0 = \partial_1(e^u u_1) + (\lambda_2 e^{\frac{1}{2}u} + e^u)u_1 + \lambda_4 + \tfrac{2\lambda_2}{3}e^{\frac{1}{2}u} + \tfrac{2}{9k}e^u, \\ &\lambda_2 \neq 0 \end{aligned} \tag{1.246}$$

до рівняння

$$w_t = \partial_x(e^w w_x) + \tilde{\lambda}_2 e^{\frac{1}{2}w} w_x + \tilde{\lambda}_4, \tilde{\lambda}_2 \neq 0. \tag{1.247}$$

Підставимо значення функцій f^a, F^a з рівнянь (**??**), (**??**)у систему (**??**)–(**??**), врахувавши при цьому (**??**). Після розщеплення за різними показниковими функціями та незначних перетворень одержимо систему

$$\alpha = 1, \tag{1.248}$$

$$a_0 = 1, \tag{1.249}$$

$$b_1 = e^{\frac{\beta}{2}}, \tag{1.250}$$

$$\beta_1 = \frac{2}{3}, \tag{1.251}$$

$$b_{11} - \frac{b_1}{3} = 0. \tag{1.252}$$

Одним з розв'язків рівняння (??) є функція

$$\beta = \frac{2}{3}x_1. \tag{1.253}$$

З рівняння (??), врахувавши (??), одержимо, наприклад , наступний розв'язок (??)

$$b = 3e^{\frac{1}{3}x_1}. \tag{1.254}$$

Підставивши (??) у (??), одержимо правильну тотожність. З рівняння (??) випливає, наприклад, що

$$a = x_0. \tag{1.255}$$

Рівності (??), (??),(??) та (??) визначають перетворення, які зводять рівняння (??) до рівняння (??):

$$t = x_0, \quad x = 3e^{\frac{1}{3}x_1}, \quad w = u + \frac{2}{3}x_1,$$

що співпадає з десятим випадком таблиці 3.

Знайдемо підстановку, яка зводить рівняння

$$\begin{aligned} &u_0 = \partial_1(u^k u_1) + (\lambda_2 u^{\frac{k}{2}} + u^k)u_1 + \\ &+(\lambda_4 + \tfrac{2\lambda_2}{3k+4}u^{\frac{k}{2}} + \tfrac{2(k+2)}{(3k+4)^2}u^k)u, \quad k \neq 0 \end{aligned} \tag{1.256}$$

до рівняння

$$w_t = \partial_x(w^k w_x) + \lambda_2 w^{\frac{k}{2}} + \lambda_4 w. \tag{1.257}$$

Підставимо значення функцій f^a, F^a з рівнянь (??), (??) у систему (??)–(??), врахувавши при цьому (??). Після розщеплення за різними степеневими функціями та незначних перетворень одержимо систему

$$\begin{aligned} &\beta = 0, b_0 = 0, \quad \alpha_0 + \lambda_4(1 - a_0)\alpha = 0, \\ &\lambda_2(\alpha_1 - \tfrac{2}{3k+4}\alpha) = 0, \quad b_1^2 = a_0\alpha^k, \\ &b_{11} + (1 - 2(k+1)\tfrac{\alpha_1}{\alpha})b_1 = 0, \\ &\alpha_{11} + (1 - (k+2)\tfrac{\alpha_1}{\alpha})\alpha_1 - 2\tfrac{k+2}{(3k+4)^2}\alpha = 0. \end{aligned} \tag{1.258}$$

Одним з розв'язків системи (**??**) є функції

$$a = x_0, \quad b = \frac{3k+4}{k} e^{\frac{k}{3k+4} x_1}, \quad \alpha = e^{\frac{2}{3k+4} x_1}, \quad \beta = 0,$$

які визначають перетворення, що зводять рівняння (**??**) до рівняння (**??**):

$$t = x_0, \quad x = \frac{3k+4}{k} e^{\frac{k}{3k+4} x_1}, \quad w = u e^{\frac{2}{3k+4} x_1},$$

що співпадає з одинадцятим випадком таблиці 3.

Встановимо вигляд підстановки, яка зводить рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + e^u u_1 + \tfrac{2}{9} e^u \tag{1.259}$$

до рівняння

$$w_t = \partial_x(e^w w_x). \tag{1.260}$$

Підставимо значення функцій f^a, F^a з рівнянь (**??**), (**??**) у систему (**??**)–(**??**), врахувавши при цьому (**??**). Після розщеплення за різними показниковими функціями та незначних перетворень одержимо систему

$$\begin{gathered} b_0 = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta_0 = 0, \quad b_1^2 = a_0 e^{\beta}, \\ b_{11} + (1 - 2\beta_1) b_1 = 0, \quad \beta_{11} + (1 - \beta_1)\beta_1 - \tfrac{2}{9} = 0. \end{gathered} \tag{1.261}$$

Одним з розв'язків системи (**??**) є функції

$$a = x_0, \quad b = 3e^{\frac{1}{3} x_1}, \quad \alpha = 1, \quad \beta = \frac{2}{3} x_1,$$

які визначають перетворення, що зводять рівняння (**??**) до рівняння (**??**):

$$t = x_0, \quad x = 3e^{\frac{1}{3} x_1}, \quad w = u + \frac{2}{3} x_1,$$

що співпадає з дванадцятим випадком таблиці 3.

Знайдемо підстановку, яка зводить рівняння

$$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + u^k u_1 + \tfrac{2(k+2)}{(3k+4)^2} u^{k+1}, \quad k \neq 0; -\tfrac{4}{3} \tag{1.262}$$

до рівняння

$$w_t = \partial_x(w^k w_x). \tag{1.263}$$

Після підстановки значень функцій f^a, F^a з рівнянь (??), (??) у систему (??)–(??) з врахуванням (??), розщепивши одержані рівняння за різними степеневими функціями та виконавши незначні перетворення маємо систему

$$\begin{aligned} &\beta = 0, \quad b_0 = 0, \quad \alpha_0 = 0, \quad b_1^2 = a_0\alpha^k, \\ &b_{11} + (1 - 2(k+1)\tfrac{\alpha_1}{\alpha})b_1 = 0, \\ &\alpha_{11} + (1 - (k+2)\tfrac{\alpha_1}{\alpha})\alpha_1 - 2\tfrac{k+2}{(3k+4)^2}\alpha = 0. \end{aligned} \tag{1.264}$$

Одним з розв'язків системи (??) є функції

$$a = x_0, \quad b = \frac{3k+4}{k}e^{\frac{k}{3k+4}x_1}, \quad \alpha = e^{\frac{2}{3k+4}x_1}, \quad \beta = 0,$$

які визначають перетворення, що зводять рівняння (??) до рівняння (??):

$$t = x_0, \quad x = \frac{3k+4}{k}e^{\frac{k}{3k+4}x_1}, \quad w = ue^{\frac{2}{3k+4}x_1},$$

що співпадає з тринадцятим випадком таблиці 3.

Знайдемо підстановку, яка зводить рівняння

$$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + e^u u_1 + \lambda_4 + \tfrac{2}{9}e^u \tag{1.265}$$

до рівняння

$$w_t = \partial_x(e^w w_x). \tag{1.266}$$

Підставимо значення функцій f^a, F^a з рівнянь (??), (??) у систему (??)–(??), врахувавши при цьому (??). Після розщеплення за різними показниковими функціями та незначних перетворень одержимо систему

$$\begin{aligned} &b_0 = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta_0 = -\lambda_4, \quad b_1^2 = a_0 e^{\beta}, \\ &b_{11} + (1 - 2\beta_1)b_1 = 0, \quad \beta_{11} + (1 - \tfrac{\beta_1}{\alpha})\beta_1 - \tfrac{2}{9} = 0. \end{aligned} \tag{1.267}$$

Одним з розв'язків системи (??) є функції

$$a = \frac{e^{\lambda_4 x_0}}{\lambda_4}, \quad b = 3e^{\frac{1}{3}x_1}, \quad \alpha = 1, \quad \beta = -\lambda_4 x_0 + \frac{2}{3}x_1,$$

які визначають перетворення, що зводять рівняння (**??**) до рівняння (**??**):

$$t = \frac{e^{\lambda_4 x_0}}{\lambda_4}, \quad x = 3e^{\frac{1}{3}x_1}, \quad w = u - \lambda_4 x_0 + \frac{2}{3}x_1,$$

що співпадає з чотирнадцятим випадком таблиці 3.

Зауважимо, що рівняння 1-15 з таблиці 1 не можуть бути зведеними одне до одного за допомогою локальних перетворень, оскільки їх нелінійності не задовольняють достатнім умовам теореми 2.2.

Теорема доведена.

Таким чином, з урахуванням результатів таблиці 3 одержуємо, що групова класифікація локально нееквівалентних рівнянь (**??**) може бути наведена у вигляді наступної таблиці.

Таблиця 4. Групова класифікація локально нееквівалентних рівнянь (**??**)

№	Рівняння	МАІ	Умови
1	$u_0 = u_{11}$	$\langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 - \frac{1}{2}x_1 u\partial_u,$ $I = u\partial_u,\ D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1,$ $\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 -$ $-\frac{1}{2}(\frac{x_1^2}{2} + x_0)u\partial_u,$ $Q_1^\infty = \beta^1(x_0, x_1)\partial_u \rangle$	$\beta_0^1 = \beta_{11}^1$
2	$u_0 = u_{11} + uu_1$	$\langle \partial_0, \partial_1,\ G_0 = x_0\partial_1 - \partial_u,$ $D - u\partial_u,$ $\Pi_0 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 -$ $-(x_1 + x_0u)\partial_u \rangle$	
3	$u_0 = \partial_1(u^{-\frac{4}{3}}u_1)$	$\langle \partial_0, \partial_1, D, D_1 = kx_1\partial_1 + 2u\partial_u,$ $K = x_1^2\partial_1 - 3x_1u\partial_u \rangle$	$k = -\frac{4}{3}$
4	$u_0 = \partial_1(u^k u_1)$	$\langle \partial_0, \partial_1, D, D_1 \rangle$	$k \neq 0; -\frac{4}{3}$

продовження таблиці 4

№	Рівняння	МАІ	Умови
5	$u_0 = \partial_1(e^u u_1)$	$\langle \partial_0, \partial_1, D, D_2 = x_1\partial_1 + 2\partial_u \rangle$	
6	$u_0 = u_{11} \pm u \ln u$	$\langle \partial_0, \partial_1, \mathcal{G} = e^{x_0}(\partial_1 - -\frac{1}{2}x_1 u \partial_u),\ e^{x_0} u \partial_u \rangle$	
7	$u_0 = \partial_1(f(u)u_1)$	$\langle \partial_0, \partial_1, D \rangle$	$f(u) \neq u^k; e^u$
8	$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + æ_1 u^m u_1 + r_1 u^{2m-k+1}$	$\langle \partial_0, \partial_1, (k-2m)D + D_1 \rangle$	
9	$u_0 = \partial_1(e^{æ u} u_1) + æ_1 e^{ru} u_1 + r_1 e^{(2r-æ)u}$	$\langle \partial_0, \partial_1, (æ - 2r)D + D_2 \rangle$	
10	$u_0 = u_{11} + \ln u u_1$	$\langle \partial_0,\ \partial_1, G_1 = x_0\partial_1 - u\partial_u \rangle$	
11	$u_0 = \partial_1(u^k u_1) + \ln u u_1 + r_2 u^{1-k}$	$\langle \partial_0,\ \partial_1,\ Y = k(x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - -x_0\partial_1 + u\partial_u \rangle$	$k \neq 0$
12	$u_0 = \partial_1(e^u u_1) + u u_1 + r_2 e^{-u}$	$\langle \partial_0, \partial_1, \mathcal{Y} = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - -x_0\partial_1 + \partial_u \rangle$	
13	$u_0 = u_{11} + \ln u u_1 + r_2 u l n u$	$\langle \partial_0, \partial_1, \mathcal{G}_2 = e^{r_2 x_0}(\partial_1 - r_2 u \partial_u) \rangle$	
14	$u_0 = u_{11} + u u_1 \pm u$	$\langle \partial_0, \partial_1, \mathcal{G}_1 = e^{\pm x_0}(\partial_1 \mp \partial_u) \rangle$	
15	$u_0 = u_{11} + l n u u_1 + u(\frac{1}{4} l n^2 u + r_2)$	$\langle \partial_0, \partial_1, Q = e^{\frac{1}{4}x_0 - \frac{1}{2}x_1} u \partial_u \rangle$	

У випадках 8 і 9 таблиці 4 $æ \epsilon \{0, 1\}$, причому при $æ = 0, \quad r = 1$, а при $æ = 1, \quad r \epsilon \mathbb{R}$; $æ_1 \epsilon \{0, 1\}$, причому при $æ_1 = 0, \quad r_1 = \pm 1$, а при $æ_1 = 1, \quad r_1 \epsilon \mathbb{R}$; $r_2 \epsilon \mathbb{R}$.

1.7. Дискретні перетворення інваріантності та формули розмноження розв'язків деяких рівнянь класу

Відомо, що неперервні перетворення інваріантності рівняння Бюргерса

$$u_0 = u_{11} + u u_1 \tag{1.268}$$

мають наступний вигляд:

1. для суперпозиції операторів $\langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 - \partial_u, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u \rangle$

$$t = \theta_3^2 x_0 + \theta_0, x = \theta_3 x_1 + \theta_2\theta_3^2 x_0 + \theta_1, w = \tfrac{1}{\theta_3}u - \theta_2,\\ \theta_3 \neq 0; \tag{1.269}$$

2. для оператора $\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - (x_1 + x_0u)\partial_u$

$$t = \tfrac{x_0}{1-\theta_4 x_0}, x = \tfrac{x_1}{1-\theta_4 x_0}, w = (1 - \theta_4 x_0)u - \theta_4 x_1. \tag{1.270}$$

Використавши необхідну й достатню умови еквівалентності рівнянь реакції-конвекції-дифузії, зводимо рівняння (**??**) до рівняння

$$w_t = w_{xx} + ww_x. \tag{1.271}$$

Достатні умови набувають відповідно вигляду

$$b_1^2 = a_0. \tag{1.272}$$

$$-2\tfrac{b_1\alpha_1}{\alpha} + b_{11} + b_1 u = a_0(\alpha u + \beta) + b_0. \tag{1.273}$$

$$2\frac{\alpha_1^2}{\alpha}u + 2\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha} - (\alpha_{11}u + \beta_{11}) - (\alpha_1 u + \beta_1)u + \alpha_0 u + \beta_0 = 0. \tag{1.274}$$

Прирівнявши у лівій і правій частині рівнянні (**??**) коефіцієнти біля змінної u^2 , робимо висновок, що $\alpha_1 = 0$. Розщепивши рівняння (**??**), (**??**), (**??**) за степенями змінної u та врахувавши

$$\alpha_1 = 0, a_0 = b_1^2, b_1 = a_0\alpha, b_{11} = a_0\beta + b_0,\\ \alpha_0 = \beta_1, \beta_0 = \beta_{11}, a_0 b_1 \alpha \neq 0. \tag{1.275}$$

Розв'язок системи (**??**) має вигляд:

1. при $\beta_1 = 0$

$$t = c_1^2 x_0 + c_2, x = c_1 x_1 + c_3 c_1^2 x_0 + c_4, w = \tfrac{1}{c_1}u - c_3, \quad c_1 \neq 0. \tag{1.276}$$

2. при $\beta_1 \neq 0$

$$t = \tfrac{-c_2^2 c_3 x_0 + c_1 c_2 c_3 + 1}{c_2(c_1 - c_2 x_0)}, x = \tfrac{c_2 x_1 - c_4}{c_2(c_1 - c_2 x_0)} + c_5,\\ w = (c_1 - c_2 x_0)u - c_2 x_1 + c_4, \qquad c_2 \neq 0. \tag{1.277}$$

Очевидно, що перетворення (**??**) та (**??**) співпадають, а перетворення (**??**) та (**??**) є тотожними при $c_1 = 1, c_2 = \theta_4, c_3 = -\frac{1}{\theta_4}, c_4 = c_5 = 0$. При інших значеннях параметрів c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 перетворення є дискретними та не можуть бути одержані методом С. Лі.

Так, наприклад, при $c_1 = c_3 = c_4 = c_5 = 0, c_2 = -1$ одержимо наступні дискретні перетворення інваріантності

$$t = -\tfrac{1}{x_0}, x = \tfrac{x_1}{x_0}, w = x_0 u + x_1 \tag{1.278}$$

рівняння Бюргерса (**??**).

Таким чином, формули (**??**) та (**??**) визначають всеможливі перетворення інваріантності рівняння (**??**).

Дані перетворення дозволяють встановити формули розмноження розв'язків. Нехай $u = f(x_0, x_1)$ — відомий розв'язок, тоді нові розв'язки записуються наступним чином

$$u = c_1 f(c_1^2 x_0 + c_2, c_1 x_1 + c_1 c_3^2 x_0 + c_4) + c_3$$

або

$$u = \frac{1}{c_1 - c_2 x_0}\left[f\left(\frac{-c_2^2 c_3 x_0 + c_1 c_2 c_3 + 1}{c_2(c_1 - c_2 x_0)}, \frac{c_2 x_1 - c_4}{c_2(c_1 - c_2 x_0)}\right) + c_2 x_1 - c_4\right].$$

Наведемо ще один приклад знаходження додаткових перетворень інваріантності.

Розглянемо рівняння

$$u_0 = u_{11} + u^{2k+1}. \tag{1.279}$$

де $k \epsilon \mathbf{Z}$.

Алгебра інваріантності рівняння (**??**) має вигляд $\langle \partial_0, \partial_1, D = k(2x_0\partial_0 + +x_1\partial_1) - u\partial_u \rangle$ і задає наступні перетворення

$$t = \theta_1^{2k} x_0 + \theta_2, x = \theta_1^{-k} x_1 + \theta_3, w = \theta_1 u. \tag{1.280}$$

Зведемо рівняння (**??**) до інваріантного рівняння

$$w_t = w_{xx} + w^{2k+1}, \tag{1.281}$$

де $k \epsilon \mathbf{Z}$.

Система рівнянь

$$b_1^2 = a_0, \tag{1.282}$$

$$-2\frac{b_1\alpha_1}{\alpha} + b_{11} = b_0, \tag{1.283}$$

$$\begin{aligned} &2\frac{\alpha_1^2}{\alpha}u + 2\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha} - (\alpha_{11}u + \beta_{11}) + \alpha u^{2k+1} + \alpha_0 u + \beta_0 = \\ &= a_0(\alpha u + \beta)^{2k+1}. \end{aligned} \tag{1.284}$$

Продиференціювавши рівняння (**??**) по x_1 та врахувавши (**??**), (**??**), одержуємо

$$b_{11} = 0, \tag{1.285}$$

Прирівнявши коефіцієнти біля змінної u^{2k+1} у лівій і правій частинах рівняння (**??**), робимо висновок, що

$$a_0 = \frac{1}{\alpha^{2k}}, \tag{1.286}$$

$$\alpha_1 = 0. \tag{1.287}$$

Рівняння (**??**) та (**??**) набувають вигляду

$$b_0 = 0, \tag{1.288}$$

$$\beta_{11} + \alpha u^{2k+1} + \alpha_0 u + \beta_0 = a_0(\alpha u + \beta)^{2k+1}. \tag{1.289}$$

Прирівнявши коефіцієнти у лівій і правій частині рівняння (**??**) біля змінної u^{2k+1} та u і врахувавши (**??**), маємо

$$\beta = 0, \alpha_0 = 0. \tag{1.290}$$

З рівнянь (**??**), (**??**) , (**??**), (**??**), (**??**) одержуємо, що максимальна група перетворень інваріантності рівняння (**??**) задається наступними формулами:

$$t = A_1^{-2k}x_0 + A_2, x = A_1^{-k}x_1 + A_3, w = \pm A_1 u. \tag{1.291}$$

Таким чином , порівнявши перетворення отримані методом С. Лі (**??**) з перетвореннями (**??**), приходимо до висновку, що відбувається розширення неперервних перетворень дискретними перетвореннями $u \to -u$.

Співвідношення (??) дають можливість побудувати формули розмноження розв'язків рівняння (??)

$$u = \pm c_1 f\left(c_1^{2k} x_0 + c_2, c_1^k x_1 + c_3\right),$$

де $f(x_0, x_1)$ — відомий розв'язок.

Розглянемо рівняння

$$u_0 = (u^{-\frac{4}{3}} u_1)_1. \qquad (1.292)$$

1. Для операторів $\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u,$
$D_1 = -\frac{2}{3}x_1\partial_1 + u\partial_u \rangle$ суперпозиція скінчених перетворень інваріантності має вигляд

$$t = \theta_1^2 x_0 + \theta_0, x = \frac{\theta_1}{\theta_2^2} x_1 + \theta_3, w = \theta_2^3 u. \qquad (1.293)$$

2. Для оператора $K = x_1^2\partial_1 - 3x_1 u\partial_u$

$$t = x_0, x = \frac{x_1}{\theta x_1 + 1}, w = (\theta x_1 + 1)^3 u. \qquad (1.294)$$

Використавши необхідну й достатню умови еквівалентності рівнянь реакції-конвекції-дифузії, зведемо рівняння (??) до рівняння

$$w_t = (w^{-\frac{4}{3}} w_x)_x. \qquad (1.295)$$

Провівши міркування аналогічно до попереднього, одержимо наступні перетворення інваріантності:

1.

$$t = c_1^2 x_0 + c_0, x = \frac{c_1}{c_2^2} x_1 + c_3, w = c_2^3 u, c_1 c_2 \neq 0; \qquad (1.296)$$

2.

$$t = c_1^2 x_0 + c_0, x = -\frac{c_1}{c_2(c_2 x_1 + c_4)} + c_3, w = (c_2 x_1 + c_4)^3 u. \qquad (1.297)$$

Очевидно, що перетворення (**??**) та (**??**) тотожні, а перетворення (**??**) та (**??**) співпадають при $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = \theta, c_3 = \frac{1}{\theta}, c_4 = 1$. При інших значення параметрів c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 перетворення інваріантності є дискретними. Зауважимо, що при $-c_1 = c_2 = 1, c_0 = c_3 = c_4 = 0$ з формули (**??**) одержані перетворення інверсії

$$t = x_0, x = \frac{1}{x_1}, w = x_1^3 u, \tag{1.298}$$

знайдені також і в роботі [**?**].

Одержані дискретні перетворення дають можливість побудувати наступні формули розмноження розв'язків:

$$u = c_2^{-3} f(c_1^2 x_0 + c_0, \frac{c_1}{c_2^2} x_1 + c_3) \tag{1.299}$$

або

$$u = (c_2 x_1 + c_4)^{-3} f(c_1^2 x_0 + c_0, -\frac{c_1}{c_2(c_2 x_1 + c_4)} + c_3). \tag{1.300}$$

Таким чином, використавши дискретні перетворення еквівалентності класу рівнянь (**??**), ми отримали дискретні перетворення інваріантності кількох рівнянь з даного класу, що неможливо зробити в рамках алгоритму Лі.

РОЗДІЛ 2

Q — УМОВНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Більшість диференціальних рівнянь, які описують конкретні фізичні процеси, як правило, містять одну чи кілька довільних функцій і тому описують цілі класи диференціальних рівнянь. Виникає запитання: яке рівняння з деякого класу найбільш точно та досконало описує явище, що досліджується. Часто таке рівняння підбирається емпіричними методами. Але, як відомо, рівняння, що описують реальні процеси, володіють широкими симетрійними властивостями. Тому наявність широкої симетрії рівняння може служити критерієм відбору його в якості математичної моделі опису того чи іншого процесу.

У зв'язку з цим досить актуальною є задача вибору з певного класу тих рівнянь, які володіють самою широкою симетрією. Ця задача носить назву задачі групової класифікації диференціальних рівнянь. Її розв'язанню приділяли увагу багато авторів. Так у роботах [?], [?] з цією метою застосовується метод С.Лі, роботи [?], [?] дещо модифікують цей метод, використовуючи перетворення еквівалентності рівнянь та результати теорії абстрактних алгебр Лі.

У даному розділі введено поняття Q-умовної еквівалентності та проілюстровано його застосування для групової класифікації на прикладі нелінійного рівняння теплопровідності та еволюційного рівняння другого порядку .

2.1. Про класифікацію симетрійних властивостей

Розглянемо нелінійне рівняння теплопровідності

$$u_0 = u_{11} + F(u), \tag{2.1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_0 = \frac{\partial u}{\partial x_0}$, $u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $F(u)$ — довільна гладка функція. Добре відомі результати групової класифікації рівняння (**??**), одержані в рамках методу С.Лі. Якщо застосувати даний метод для дослідження симетрійних властивостей рівняння (**??**), то одержимо систему визначальних рівнянь:

$$\xi^0_1 = \xi^0_u = \xi^1_u = 0, \quad \xi^0_0 = 2\xi^1_1, \quad \xi^1_0 + 2\eta_{1u} = 0, \quad \eta_{uu} = 0, \tag{2.2}$$

$$\eta\dot{F} = (\eta_u - 2\xi^1_1)F + \eta_0 - \eta_{11}. \tag{2.3}$$

Проаналізувавши всеможливі розв'язки даної системи, одержимо вигляд функцій $F(u)$ та максимальну алгебру інваріантності (МАІ) рівняння (**??**), які відповідають одержаним функціям $F(u)$. Результати даної класифікації симетрій наведено у вигляді таблиці 5.

Таблиця 5. **Класифікація симетрійних властивостей рівняння (??).**

№	Рівняння	МАІ
1	$u_0 = u_{11} + f(u)$	∂_0, ∂_1
2	$u_0 = u_{11} \pm e^u$	$\partial_0, \partial_1, D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - 2\partial_u$
3	$u_0 = u_{11} \pm u^k$	$\partial_0, \partial_1, D_2 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + \frac{2}{1-k}u\partial_u$
4	$u_0 = u_{11} \pm u \ln u$	$\partial_0, \partial_1, \mathcal{G}= e^{\pm x_0}(\partial_1 \mp \frac{1}{2}x_1 u\partial_u)$, $\mathcal{M}=e^{\pm x_0}u\partial_u$
5	$u_0 = u_{11} \pm u$	$\partial_0, \partial_1, G_1 = x_0\partial_1 - \frac{1}{2}x_1 u\partial_u, M_1 = u\partial_u$, $D_3 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 \pm 2x_0 u\partial_u$, $\Pi_1 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_1^2 + x_0)u\partial_u \pm$ $\pm x_0^2 u\partial_u, X_1 = \gamma(x_0, x_1)\partial_u$
6	$u_0 = u_{11} \pm 1$	$\partial_0, \partial_1, M_2 = (u \mp x_0)\partial_u$, $G_2 = x_0\partial_1 - \frac{1}{2}x_1(u \mp x_0)\partial_u$, $D_4 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 \pm 2x_0\partial_u$, $\Pi_2 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_1^2 + x_0)u\partial_u \pm$ $\pm\frac{1}{4}x_0(x_1^2 + 6x_0)\partial_u, X_2 = \sigma(x_0, x_1)\partial_u$

У таблиці 5 λ_i, $k \neq 0; 1$ — довільні сталі, $f(u)$ — довільна гладка функція, $i = \overline{1, 5}$, $\gamma(x_0, x_1)$ — розв'язок рівняння $\gamma_0 = \gamma_{11} \pm \gamma$, $\sigma(x_0, x_1)$ — розв'язок рівняння $\sigma_0 = \sigma_{11}$.

У роботах [?], [?] запропонований інший метод симетрійної класифікації диференціальних рівнянь, який базується на знаходженні групи еквівалентності даного рівняння. Згідно цього методу для класифікації симетрійних властивостей диференціального рівняння використовується умова

$$\tilde{E}\Phi(y, F) \mid_{\Phi=0} = 0, \tag{2.4}$$

де $\tilde{E}$ — продовження інфінітезимального оператора групи еквівалентності

$$E = \xi^0(x, u)\partial_0 + \xi^1(x, u)\partial_1 + \eta(x, u)\partial_u + \zeta(y, F)\partial_F, \tag{2.5}$$

y — сукупність усіх змінних, від яких може залежати довільний елемент F, що входить у рівняння, Φ — довільна гладка функція.

Дослідимо згідно даного алгоритму групу еквівалентності рівняння (**??**). Справедливе наступне твердження.

Лема 3.1. Максимальною групою неперервних перетворень еквівалентності рівняння (**??**) є група, координати інфінітезимального оператора якої мають вигляд

$$\begin{aligned} &\xi^0 = 2æ_1 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = æ_1 x_1 + d_1, \\ &\eta = æ_2 u + d_2, \quad \zeta = (æ_2 - 2æ_1)F, \end{aligned} \tag{2.6}$$

де $æ_a, d_\mu$ — групові параметри.

Доведення. Оператор еквівалентності E шукаємо у вигляді (**??**), координати якого знаходимо, використовуючи інфінітезимальний метод. Подіявши на рівняння (**??**) продовженням оператора E, перейшовши на многовид:

$$u_0 = u_{11} + F(u), \quad F_\mu = 0, \quad F_{u_\mu} = 0$$

та розчепивши одержані рівняння по похідних функцій u та F маємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &\xi^0_1 = \xi^0_u = \xi^1_u = 0, \quad \xi^0_0 = 2\xi^1_1, \quad \xi^1_0 + 2\eta_{1u} = 0, \quad \eta_{uu} = 0, \\ &\zeta = (\eta_u - 2\xi^1_1)F + \eta_0 - \eta_{11}, \quad \zeta_\mu = 0, \quad \zeta_{u_\mu} = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

розв'язком якої і є функції (**??**).

Лему доведено.

Застосуємо умову (**??**) для класифікації симетрійних властивостей рівняння (**??**). Оскільки $\Phi = \Phi(u, F)$, то дана умова має вигляд

$$\eta\Phi_u + \zeta\Phi_F = 0. \tag{2.8}$$

Загальний розв'язок рівняння (**??**) є першим інтегралом звичайного диференціального рівняння

$$\tfrac{du}{\eta} = \tfrac{dF}{\zeta}$$

або, враховуючи формули (**??**),

$$\tfrac{du}{æ_2 u + d_2} = \tfrac{dF}{(æ_2 - 2æ_1)F}. \tag{2.9}$$

Перший інтеграл рівняння (**??**) залежить від значень сталих $æ_1$, $æ_2$, d_2. Можливі три нееквівалентні випадки:

1. $æ_1 = æ_2 = d_2 = 0$. У цьому випадку рівняння (**??**) має вигляд

$$u_0 = u_{11} + f(u), \tag{2.10}$$

де $f(u)$ — довільна гладка функція.

2. $æ_2 = 0, d_2 \neq 0$. Проінтегрувавши рівняння (**??**), одержимо

$$F = \lambda_1 e^{ku}, \tag{2.11}$$

де $k = -\frac{2æ_1}{d_2}$, λ_1 — стала інтегрування.

Зауваження 3.1. Рівняння

$$u_0 = u_{11} + \lambda e^{ku}, \quad \lambda \neq 0 \tag{2.12}$$

за допомогою перетворення еквівалентності

$$x_0 = \frac{k}{\lambda} t, \quad x_1 = \sqrt{|\tfrac{k}{\lambda}|} x, \quad w = ku, \tag{2.13}$$

одержаного з результатів леми 1 зводиться до рівняння вигляду

$$w_t = w_{xx} \pm e^w. \tag{2.14}$$

Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати $k = 1$, $\lambda = \pm 1$.

3. $æ_2 \neq 0$. Загальний розв'язок рівняння (**??**) має вигляд

$$F = \lambda_2 (u + \theta)^k, \tag{2.15}$$

де $\theta = \frac{d_2}{æ_2}$, $k = 1 - \frac{2æ_1}{æ_2}$, λ_2 — стала інтегрування. Рівняння (**??**) у даному випадку має вигляд

$$u_0 = u_{11} + \lambda_2 (u + \theta)^k. \tag{2.16}$$

За аналогією з рівнянням (**??**), не втрачаючи загальності, можна вважати $\theta = 0$, $\lambda_2 = \pm 1$ тобто одержимо рівняння

$$u_0 = u_{11} \pm u^k. \tag{2.17}$$

Порівнюючи одержані результати з результатами таблиці 5, ми бачимо, що до класу рівнянь (??), (??), (??) не входить рівняння

$$u_0 = u_{11} \pm u \ln u. \tag{2.18}$$

Крім того, рівняння (??) за допомогою локальної підстановки не може бути зведеним до якогось іншого рівняння таблиці 5, оскільки розмірність його МАІ не співпадає з розмірністю МАІ інших рівнянь, наведених у даній таблиці.

2.2. Означення Q-умовної еквівалентністі

Позбутися недоліку, вказаного в попередньому пункті, можна, ввівши поняття Q-умовної еквівалентності диференціальних рівнянь, яке є аналогом Q-умовної інваріантності (див.[?]).

Означення 3.1. Оператор

$$Q = A\partial_x + B\partial_u + C\partial_F \tag{2.19}$$

назвемо оператором Q-умовної еквівалентності системи рівнянь

$$S\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{p}{u}, F, \underset{1}{F}, \underset{2}{F}, \ldots, \underset{k}{F}\right) = 0, \tag{2.20}$$

якщо він породжується групою перетворень еквівалентності даної системи при умові

$$\tilde{Q}F = 0, \tag{2.21}$$

тобто

$$\tilde{Q}S = f^0 S + f^1(\tilde{Q}F), \tag{2.22}$$

де

$$\tilde{Q}F = \chi F_y - C,$$
$$\chi = \left(A, B, C, \underset{1}{C}, \underset{2}{C}, \ldots, \underset{k}{C}\right),$$

$\underset{s}{C}$ — продовження s-го порядку функцій C, $u = u(x)$, $x\epsilon R^n$, $u\epsilon R^m$, $F = F\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{m}{u}\right)\epsilon R^l$ — довільні гладкі функції; $\underset{\alpha}{u}, \underset{\beta}{F}$ — сукупність всеможливих похідних відповідно порядку α від функцій u та порядку β від функцій F; f^0, f^1 — деякі функції.

Зауваження 3.2. У зв'язку з введенням поняття Q-умовної еквівалентності групу еквівалентності, одержану за допомогою методу, запропонованого в [?], будемо називати основною групою перетворень еквівалентності диференціального рівняння і позначати (BGE).

Таким чином, досліджуючи Q-умовну еквівалентність, ми серед рівнянь класу (**??**) виділяємо підклас, який може мати іншу групу перетворень еквівалентності, порівняно з BGE.

2.3. Симетрійні властивості рівняння теплопровідності

Дослідими Q-умовну еквівалентність рівняння (**??**). Подіявши оператором (**??**) при умові (**??**), одержимо наступну систему для визначення координат оператора Q та зображень F:

$$\begin{aligned} &A^0_1 = A^0_u = A^1_u = 0, \quad A^0_0 = 2A^1_1,\\ &A^1_0 + 2B_{1u} = 0, \quad B_{uu} = 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$C = (B_u - 2A^1_1)F + B_0 - B_{11}, \tag{2.24}$$

$$BC_\mu = CB_\mu, \qquad C_{u_\mu} = 0. \tag{2.25}$$

Загальним розв'язком системи рівнянь (**??**) є функції

$$\begin{aligned} &A^0 = 2\alpha(x_0), A^1 = \alpha(\dot{x}_0)x_1 + \beta(x_0),\\ &C = -\tfrac{1}{2}(\alpha(\ddot{x}_0)\tfrac{x_1^2}{2} + \beta(\dot{x}_0)x_1 + \gamma(x_0))u + \varphi(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Підставивши (**??**)та (**??**) у рівняння (**??**), одержимо два суттєво різні випадки: 1) $\dot{\alpha} \neq 0$; 2) $\dot{\alpha} = 0$.

У першому випадку одержимо оператор Q-умовної еквівалентності , який повністю співпадає з оператором групи неперервних перетворень еквівалентності BGE.

У другому випадку одержимо два вигляди оператора Q- умовної еквівалентності: для лінійної функції $F(u)$ (при цьому рівняння (**??**) за допомогою перетворень еквівалентності, наведених у таблиці 3 попереднього розділу, може бути зведено до однорідного), та оператор, який має відповідно координати (??) та з точністю до неперевних перетворень еквівалентності визначає функцію $F(u)$ вигляді, що відповідає рівнянню (??).

На основі наведених вище міркувань можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 3.1. Рівняння (??) допускає групу неперервних перетворень Q-умовної еквівалентності, відмінних від BEG, якщо координати оператора (??)мають вигляд

$$\begin{aligned} &A^0 = c_1, A^1 = c_2 e^{\pm x_0} + c_3, B = -\tfrac{1}{2}(\pm c_2 x_1 + c_5) e^{\pm x_0}(u + c_6), \\ &C = -\tfrac{1}{2}(\pm c_2 x_1 + c_5) e^{\pm x_0}(F \pm (u + c_6)). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Доповнивши лему 3.1. теоремою 3.1, одержимо повний перелік нелінійностей рівняння (??), наведених в таблиці 5.

2.4. Еволюційне рівняння другого порядку

Розглянемо еволюційне рівняння

$$w_0 = w f(w_{11} w^3), \tag{2.28}$$

де $w = w(x)$, $x = (x_0, x_1)$, f — довільна гладка функція.

Рівняння (??) було використано в роботі [?], як ілюстрацію до теореми про те, що алгебра інваріантності еволюційного рівняння складається не більше, ніж з $n + 5$ операторів, де n — порядок рівняння. Рівняння (??) одержане також у роботі [?], як один з класів еволюційних рівнянь, інваріантних відносно конформної алгебри. Застосуємо введене нами поняття Q-умовної еквівалентності для класифікації симетрійних властивостей рівняння (??).

Для зручності дослідження за допомогою заміни

$$w = e^u \tag{2.29}$$

перейдемо до еквівалентного рівняння вигляду

$$u_{11} + u_1^2 = e^{-4u} F(u_0), \tag{2.30}$$

де F — довільна гладка функція.

При класифікації симетрійних властивостей рівняння (**??**) за методом С. Лі [**?**] приходимо до розв'язування наступної системи визначальних рівнянь:

$$\begin{gathered}\xi^0_1 = \xi^0_u = 0, \xi^1_{uu} - \xi^1_u = 0, \eta_{uu} - \eta_u - 2\xi^1_{1u} = 0,\\ (\xi^1_u u_0 + \xi^1_0)\dot{F} - 3\xi^1_u F + (2\eta_{1u} + 2\eta_1 - \xi^1_{11})e^{4u} = 0,\\ [(\eta_u - \xi^0_0)u_0 + \eta_0]\dot{F} - (\eta_u + 4\eta - 2\xi^1_1)F + \eta_{11}e^{4u} = 0.\end{gathered} \tag{2.31}$$

Розв'язавши систему (**??**), одержимо вигляд функцій ξ^0, ξ^1, η, F. Відповідний вигляд рівняння та його МАІ наведено в таблиці 7.

Таблиця 6. Класифікація симетрійних властивостей рівняння (??).

№	Рівняння	МАІ	Умови
1	$u_{11} + u_1^2 = \varphi(u_0)e^{-4u}$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_1\partial_1 + \partial_u,$	
		$K = x_1^2\partial_1 + x_1\partial_u$	
2	$u_{11} + u_1^2 = \lambda_1 e^{mu_0-4u}$	$\partial_0, \partial_1, D, K,$	
		$X_1 = e^{\frac{4}{m}x_0}\partial_u$	
3	$u_{11}+u_1^2=\lambda_2 e^{-4u}(u_0+\theta)^m$	$\partial_0, \partial_1, D, K,$	$m \neq 0$
		$X_2 = e^{\frac{4\theta}{m}x_0}(\partial_0 - \theta\partial_u))$	$m \neq \pm 3$
4	$u_{11} + u_1^2 = \lambda_3 e^{-4u}u_0^m$	$\partial_0, \partial_1, D, K,$	$m \neq 0$
		$D_0 = 2x_0\partial_0 + mx_1\partial_1$	$m \neq \pm 3$
5	$u_{11}+u_1^2=\lambda_4 e^{-4u}(u_0+\theta)^{-3}$	$\partial_0, \partial_1, D, K, D_0,$	$m = -3$
		$X_3 = x_1 e^{-\theta x_0 - u}\partial_u,$	
		$X_4 = e^{-\theta x_0 - u}\partial_u$	
6	$u_{11} + u_1^2 = \lambda_5 e^{-4u}u_0^{-3}$	$\partial_0, \partial_1, D, K,$	$m = -3$
		D_0, X_3, X_4	$\theta = 0$
7	$u_{11}+u_1^2=\lambda_6 e^{-4u}(u_0+\theta)^3$	$\partial_0, \partial_1, D, K, D_0,$	$m = 3$
		$X_5 = e^{\theta x_0 + u}\partial_1,$	
		$X_6 = e^{\theta x_0 + u}(x_1\partial_1 + \partial_u)$	
8	$u_{11} + u_1^2 = \lambda_7 e^{-4u}u_0^3$	$\partial_0, \partial_1, D, K, D_0, X_5, X_6$	$m = 3,$
			$\theta = 0$

У таблиці 7 $\varphi = \varphi(u_0)$ — довільна гладка функція, m, θ, λ_i — довільні сталі, $i = \overline{1,7}$.

Основною групою перетворень еквівалентності рівняння (**??**), як встановлено в [**?**], є група, координати інфінітезимального оператора якої задаються формулами

$$\xi^0{=}c_1x_0{+}c_2, \quad \xi^1{=}c_3x_1^2{+}(2c_4{+}c_5)x_1{+}c_6, \quad \eta = c_3x_1 + c_4, \tag{2.32}$$

$$\zeta = -2c_5F. \tag{2.33}$$

Прокласифікуємо вигляд нееквівалентних зображень функції F за допомогою основної групи перетворень еквівалентності.

Лема 3.2. Нееквівалентні рівняння вигляду (**??**) з точністю до перетворень основної групи еквівалентності мають вигляд

$$u_{11} + u_1^2 = \varphi(u_0)e^{-4u} \tag{2.34}$$

$$u_{11} + u_1^2 = \lambda e^{-4u}u_0^m, \tag{2.35}$$

де $\lambda \neq 0$, $m \neq 0$ — довільні сталі, $\varphi = \varphi(u_0)$ — довільна гладка функція.

Доведення. Подіявши оператором (**??**) на многовид

$$\Phi(u_0, F) = 0,$$

одержимо

$$^0\eta\Phi_{u_0} + \zeta\Phi_F = 0, \tag{2.36}$$

де $^0\eta$ — продовження функцій η за змінною x_0. Після підстановки (**??**) у (**??**) та врахувавши, що $^0\eta = -c_1u_0$, одержуємо

$$c_1u_0\Phi_{u_0} + 2c_5F\Phi_F = 0.$$

Можливі два різні випадки

1. $c_1 = c_5 = 0$. У цьому випадку

$$F = \varphi(u_0),$$

де $\varphi = \varphi(u_0)$ — довільна гладка функція, що приводить до рівняння (**??**).

2. $c_1 \neq 0, c_5$ — довільна стала. Розв'язавши останнє рівняння, одержуємо вигляд функції F:

$$F = \lambda u_0^m,$$

де $m = \frac{2c_5}{c_1}$, λ — стала інтегрування, та відповідне рівняння (**??**).

Лему доведено.

Порівнюючи результати леми 3.2 з результатами таблиці 6, приходимо до висновку, що, як і для рівняння (**??**), метод класифікації симетрійних властивостей рівняння (**??**) за допомогою перетворень BEG не приводить до всіх нееквівалентних випадків, одержаних за допомогою методу С.Лі.

Запишемо вигляд нееквівалентних представлень рівняння (**??**) та прокласифікуємо симетрійні властивості за допомогою поняття Q-умовної еквівалентності.

Теорема 3.2. Рівняння (**??**) Q-умовно еквівалентне відносно оператора (**??**), якщо воно має один з виглядів, наведених у другому стовпчику таблиці 7, причому координати відповідного оператора Q наведені в третьому стовпчику даної таблиці.

Доведення. З умови Q-умовної еквівалентності рівняння (**??**):

$$\tilde{Q}(u_{11} + u_1^2 - Fe^{-4u}) \mid_M = 0, \quad \tilde{Q}F_\mu \mid_M = 0,$$

$$\tilde{Q}F_u \mid_M = 0, \quad \tilde{Q}F_{u_1} \mid_M = 0, \quad \tilde{Q}F = 0$$

де M – многовид :

$$\begin{aligned} &u_{11} + u_1^2 = Fe^{-4u}, \\ &F_\mu = 0, F_u = 0, F_{u_1} = 0, \end{aligned} \tag{2.37}$$

$${}^0BF_{u_0} = C, \tag{2.38}$$

$\tilde{Q}$ – продовження оператора Q, одержимо систему рівнянь для визначення функцій A^0, A^1, B, C, F:

$$A_1^0 = A_u^0 = 0, \tag{2.39}$$

$$
\begin{aligned}
&C=(B_u+4B-2A_1^1-3A_u^1u_1)F+\\
&+[B_{11}+(2B_{1u}-A_{11}^1+2B_1)u_1+\\
&+(B_{uu}+B_u-2A_{1u}^1)u_1^2+(A_u^1-A_{uu}^1)u_1^3]e^{4u},
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

$$
BC_\mu=CB_\mu,\quad BC_u=CB_u,\quad BC_{u_1}=CB_{u_1}. \tag{2.41}
$$

Якщо (??) підставити в (??) та розчепити одержану рівність за різними степенями u_1, то одержимо систему рівнянь, яка співпаде з системою (??), тому їх розв'язки приводять до результатів, наведених в таблиці 7. Уточнивши вигляд функцій C із системи (??), одержимо результати подані у вигляді таблиці 7.

Теорему доведено.

Таблиця 7. **Q-умовна еквівалентність рівняння (??).**

№	Рівняння	Координати оператора Q
1	$u_{11}+u_1^2=\varphi(u_0)e^{-4u}$,	$A^0=c_1, A^1=c_2x_1^2+2c_3x_1+c_4$, $B=c_2x_1+c_3, C=0$
2	$u_{11}+u_1^2=\lambda_1e^{mu_0-4u}$, $m\neq 0$	$A^0=c_1, A^1=c_3x_1^2+2c_4x_1+c_2$, $B=c_3x_1+\frac{c_5}{m}e^{\frac{4}{m}x_0}+c_4$, $C=\frac{4\lambda_1c_5}{m}e^{\frac{4}{m}x_0+mx_0}$
3	$u_{11}+u_1^2=\lambda_2e^{-4u}(u_0+\theta)^m$ $m\neq 0,\pm 3$	$A^0=-\frac{c_4}{m}e^{4\frac{\theta}{m}x_0}+c_1$, $A^1=c_3x_1^2+2c_4x_1+c_2$, $B=c_3x_1+\frac{c_5\theta}{m}e^{\frac{4\theta}{m}x_0}+c_4$, $C=\frac{4\lambda_2\theta c_5}{m}e^{\frac{4\theta}{m}x_0}(u_0+\theta)^m$
4	$u_{11}+u_1^2=\lambda_3e^{-4u}u_0^m$ $m\neq 0,\pm 3$	$A^0=\frac{4}{m}c_5x_0+c_1$, $A^1=c_3x_1^2+(c_5+c_4)x_1+c_2$, $B=c_3x_1+c_4$, $C=2\lambda_3(c_4-c_5)u_0^m$
5	$u_{11}+u_1^2=\lambda_4e^{-4u}(u_0+\theta)^{-3}$	$A^0=c_4e^{-\frac{4}{3}\theta x_0}+c_7$, $A^1=c_3x_1^2+2c_5x_1+c_6$, $B=(c_1x_1+c_2)e^{-\theta x_0-u}+$ $+c_3x_1-\theta c_4e^{-\frac{4}{3}\theta x_0}+c_5$, $C=3\lambda_4e^{-\theta x_0}[(c_1x_1+c_2)e^{-u}-$ $-\frac{4}{3}\theta c_4e^{-\frac{\theta}{3}x_0}](u_0+\theta)^{-3}$

6	$u_{11}+u_1^2=\lambda_5 e^{-4u}u_0^{-3}$	$A^0=c_5x_0+c_6,$ $A^1=c_3x_1^2+2(c_4-\frac{3}{4}c_5)x_1+c_7,$ $B=(c_1x_1+c_2)e^{-u}+c_3x_1+c_4,$ $C=3\lambda_5[(c_1x_1+c_2)e^{-u}+c_5]u_0^{-3}$
7	$u_{11}+u_1^2=\lambda_6 e^{-4u}(u_0+\theta)^3$	$A^0=c_4e^{\frac{4}{3}\theta x_0}+c_1,$ $A^1=(c_5x_1+c_6)e^{\theta x_0+u}+$ $+c_3x_1^2+2c_7x_1+c_2,$ $B=c_5e^{\theta x_0+u}+c_3x_1-\theta c_4e^{\frac{4}{3}\theta x_0}+c_7,$ $C=3\lambda_6e^{\theta x_0}[(c_5-u_1(c_5x_1+c_6))e^u-$ $-\frac{4}{3}\theta c_4e^{\frac{\theta}{3}x_0}](u_0+\theta)^3$
8	$u_{11}+u_1^2=\lambda_7 e^{-4u}u_0^3$	$A^0=c_7x_0+c_1,$ $A^1=(c_5x_1+c_6)e^u+c_3x_1^2+$ $+2(\frac{3}{4}c_7+c_4)x_1+c_2,$ $B=c_5e^u+c_3x_1+c_4,$ $C=3\lambda_7[(c_5-u_1(c_5x_1+c_6))e^u-c_7]u_0^3$

Спростимо вигляд деяких рівнянь наведених у таблиці 7 за допомогою додаткових перетворень еквівалентності. Проаналізувавши результати таблиці 7, приходимо до висновку, що за допомогою заміни

$$t=-\frac{m}{4\theta}e^{-\frac{4\theta}{m}x_0},\quad x=x_1,\quad w=u+\theta x_0 \tag{2.42}$$

третє, п'яте і сьоме рівняння зводяться до четвертого, шостого та восьмого рівнянь відповідно. Врахувавши заміну (**??**), локально нееквівалентні рівняння (**??**) та їх МАІ подамо у вигляді таблиці 8.

Таблиця 8. Класифікація симетрійних властивостей локально нееквівалентних рівнянь (??).

№	Вигляд рівняння	МАІ	Умови
1	$w_0 = wf(w_{11}w^3)$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_1\partial_1 + w\partial_w,$ $K = x_1^2\partial_1 + x_1 w\partial_w$	
2	$w_0 = w(w_{11}w^3)^m$	$\partial_0, \partial_1, D, K,$ $D_0 = 4mx_0\partial_0 - w\partial_w$	$m \neq \pm\frac{1}{3}$
3	$w_0 = w(w_{11}w^3)^{-\frac{1}{3}}$	$\partial_0, \partial_1, D, K, D_0, x_0\partial_w, \partial_w$	$m = -\frac{1}{3}$
4	$w_0 = w(w_{11}w^3)^{\frac{1}{3}}$	$\partial_0, \partial_1, D, K, D_0, w\partial_1,$ $K_1 = x_1 w\partial_1 + w^2\partial_w$	$m = \frac{1}{3}$
5	$w_0 = w\ln(w_{11}w^3)$	$\partial_0, \partial_1, D, K, Y = e^{4x_0}w\partial_w$	

Підкреслимо, що для наведених рівнянь (**??**), (**??**) нееквівалентні зображення нелінійностей отримані стандартним методом Лі та за допомогою Q-умовної еквівалентності співпадають.

РОЗДІЛ 3

ІНВАРІАНТНІСТЬ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ ВІДНОСНО АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ

При описі різних явищ природи часто приходять до математичних моделей у вигляді систем диференціальних рівнянь. Більшість таких систем, як правило, містять одну чи кілька довільних функцій і тому вони утворюють певні класи систем диференціальних рівнянь. Актуальною є задача відбору з деякого класу систем тих, які найбільш точно описують процеси, що досліджуються. Якщо певний фізичний процес задовольняє принципу відносності Галілея чи Пуанкаре–Енштейна, то і рівняння, які його описують, повинні також бути інваріантні відносно алгебри Галілея чи алгебри Пуанкаре. Тому вимога інваріантності диференціальних рівнянь відносно тієї чи іншої групи перетворень, наявність широкої симетрії рівняння може служити критерієм відбору його в якості математичної моделі опису конкретного фізичного процесу. У зв'язку з цим актуальною є задача: по заданій групі перетворень побудувати математичну модель (систему рівнянь), що володіє зазначеною симетрією.

Розглянемо систему нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії

$$U_0 = \partial_1[F(U)U_1] + G(U)U_1 + H(U), \qquad (3.1)$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} f^{11}(U) & f^{12}(U) \\ f^{21}(U) & f^{22}(U) \end{pmatrix},$

$G(U) = \begin{pmatrix} g^{11}(U) & g^{12}(U) \\ g^{21}(U) & g^{22}(U) \end{pmatrix}, H\ (U) = \begin{pmatrix} h^1(U) \\ h^2(U) \end{pmatrix},$

$u^a = u^a(x_0, x_1)$ — довільні гладкі функції, $U_0 = \frac{\partial U}{\partial x_0}$, $U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, x_0 — часова, x_1 — просторова змінні, яка є узагальненням скалярного рівняння реакції-конвекції-дифузії, розглянутого нами в першому розділі.

В класі систем (**??**) містяться системи, які широко застосовуються в теорії процесів тепломасопереносу, дифузії, описують еволюцію температури та густини у термоядерній плазмі, інші фізичні та біохімічні процеси. Але симетрійні властивості цієї системи залишаються не дослідженими в повній мірі. Повну групову класифікацію нелінійних систем класу (**??**) досі не проведено.

Дослідженню симетрійних властивостей такого класу систем приділяло увагу багато авторів. При різних виглядах сталої матриці дифузії $F = \Lambda$ та $G = 0$ одержали вагомі результати В.І. Фущич та Р.М. Черніга [**?**], [**?**], А.Г. Нікітін та Р. Вилтшир [**?**]-[**?**], Р.М. Черніга та Дж. Кінг [**?**]-[**?**]. При $F = E, H = 0$ симетрійні властивості системи (**??**) вивчались в роботах [**?**] та [**?**], а при довільних матрицях F і H та $G = 0$ галілеївська інваріантність системи (**??**) досліджена в роботі [**?**].

Добре відомо, що лінійна система рівнянь дифузії

$$U_0 = \Lambda U_{11}, \tag{3.2}$$

де Λ — стала матриця, інваріантна відносно алгебри Галілея з базовими генераторами

$$AG(1,1) =< \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, G = x_0\partial_1 + x_1 Q_1, Q_1, >, \tag{3.3}$$

та її розширень операторам масштабних

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3 \tag{3.4}$$

та проективних перетворень

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + \frac{x^2}{2}Q_1 + x_0Q_3, \tag{3.5}$$

де $Q_c = \eta^{cb}(u)\partial_{u^b}$, $\eta^{ab}(u)$ — деякі задані функції, які залежать від вигляду матриці Λ.

Комутаційні співвідношення між операторами (??)–(??) мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&[\partial_0, \partial_1] = 0, \quad [\partial_0, G] = \partial_1, \ \ [\partial_0, Q_1] = 0, \\
&[\partial_1, G] = Q_1, \ \ [\partial_1, Q_1] = 0, \ \ [G, Q_1] = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

$$
[\partial_0, D] = 2\partial_0, \ \ [\partial_1, D] = \partial_1, \ \ [G, D] = -G, \ \ [Q_1, D] = 0. \tag{3.7}
$$

$$
[\partial_0, \Pi] = D, [\partial_1, \Pi] = G, [G, \Pi] = 0, [Q_1, \Pi] = 0, [D, \Pi] = 2\Pi. \tag{3.8}
$$

Алгебра $AG_2(1,1)$ операторів (??)–(??) є одномірною проекцією багатовимірної алгебри $AG_2(1,n)$:

$$
\begin{aligned}
&\partial_0 = \tfrac{\partial}{\partial x_0}, \partial_a = \tfrac{\partial}{\partial x_a}, J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \\
&G_a = x_0\partial_a + x_a Q_1, Q_1,
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

$$
D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a + Q_3 \tag{3.10}
$$

$$
\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + \frac{\overrightarrow{x}^2}{2}Q_1 + x_0Q_3. \tag{3.11}
$$

В свій час В.І. Фущич запропонував алгебру операторів (??) назвати алгеброю Галілея і позначати AG(1,n), алгебру (??), (??) — розширеною алгеброю Галілея $AG_1(1,n)$, алгебру (??), (??), (??) — узагальненою алгеброю Галілея $AG_2(1,n)$. Це пов'язано з тим, що оператори G_a породжують перетворення Галілея часової та просторових змінних

$$
x_0^{'} = x_0, x_a^{'} = x_a + v_a x_0, \tag{3.12}
$$

де v_a — const.

З алгебраїчної точки зору алгебру визначають не перетворення, які вона породжує, а комутаційні співвідношення між базовими генераторами даної алгебри.

Комутаційні співвідношення між операторами алгебри (??) мають вигляд (??).

Таким чином, алгеброю Галілея $AG(1,1)$ будемо називати одну з реалізацій чотиривимірної лінійної алгебри диференціальних операторів 1-го порядку

$$
A = \langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle, \tag{3.13}
$$

для якої виконуються наступні комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned} &[X_1, X_2] = 0, \quad &[X_1, X_3] = X_2, \quad &[X_1, X_4] = 0, \\ &[X_2, X_3] = X_4, \quad &[X_3, X_4] = 0, \quad &[X_2, X_4] = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Поставимо задачу: дослідити , при яких нелінійностях f^{ab}, g^{ab}, h^a система (**??**) інваріантна відносно алгебри Галілея та її розширень. При цьому алгеброю Галілея $AG(1,1)$ будемо називати одну з реалізацій чотиривимірної лінійної алгебри диференціальних операторів, для якої виконуються комутаційні співвідношення (**??**) (див., наприклад, [**?**]).

3.1. Основна група перетворень еквівалентності

Як ми вже зазначили у першому розділі, важливе значення при дослідженні симетрійних властивостей відіграють перетворення еквівалентності. Вони дозволяють поділити клас систем на нееквівалентні підкласи. Виділивши в кожному підкласі канонічний представник, достатньо дослідити тільки його симетрійні властивості, а потім поширити одержані результати на всі системи даного підкласу.

Дослідимо групу неперервних перетворень еквівалентності системи рівнянь (**??**), застосувавши метод, запропонований в роботах [**?**], [**?**].

Лема 4.1. *Максимальною групою неперервних перетворень еквівалентності системи (**??**) є група наступних перетворень*

$$x_0^{'} = a_0 x_0 + b_0, x_1^{'} = a_1 x_1 + c x_0 + b_1, u^{'a} = k_{ab} u^b + m_a, \tag{3.15}$$

де $a_\mu, b_\mu, c, k_{ab}, m_a$ — довільні сталі, $\mu \epsilon \{0,1\}$, $a, b \epsilon \{1,2\}$.

Доведення. З умови еквівалентності системи (**??**) відносно оператора

$$\begin{aligned} &E = \xi^\mu(x_0, x_1, U)\partial_\mu + \eta^a(x_0, x_1, U)\partial_{u^a} + \\ &+ \zeta^{ab}(x_0, x_1, U, F, G, H)\partial_{f^{ab}} + \\ &+ \sigma^{ab}(x_0, x_1, U, F, G, H)\partial_{g^{ab}} + \chi^a(x_0, x_1, U, F, G, H)\partial_{h^a} \end{aligned} \tag{3.16}$$

(див. [?]) одержимо систему рівнянь для визначення функцій $\xi^\mu, \eta^a, \zeta^{ab}, \sigma^{ab}, \chi^a$:

$$\xi^0_1 = \xi^\mu_{u^a} = \eta^a_\mu = \eta^a_{u^b u^c} = \zeta^{ab}_\mu = \sigma^{ab}_\mu = \chi^a_\mu = 0, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
&\zeta^{ab} = (2\xi^1_1 - \xi^0_0) f^{ab} + \eta^a_{u^c} f^{cb} - \eta^c_{u^b} f^{ac},\\
&\sigma^{ab} = (\xi^1_1 - \xi^0_0) g^{ab} + \eta^a_{u^c} g^{cb} - \eta^c_{u^b} g^{ac} + \delta_{ab}\xi^1_0,\\
&\chi^a = -\xi^0_0 h^a + \eta^a_{u^b} h^b.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Продиференціювавши рівняння (??) по змінній u^a , та врахувавши (??), знаходимо

$$\zeta^{ab}_{u^a} = \sigma^{ab}_{u^a} = \chi^b_{u^a} = 0. \tag{3.19}$$

Використавши диференціальні наслідки рівнянь (??) за змінними x_1 і x_0, одержимо

$$\xi^0_{00} = \xi^1_{00} = \xi^1_{11} = \xi^1_{01} = 0. \tag{3.20}$$

З систем (??)–(??) випливає, що функції $\xi^\mu, \eta^a, \zeta^{ab}, \sigma^{ab}, \chi^a$ мають вигляд

$$\xi^0 = æ_0 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = æ_1 x_1 + p x_0 + d_1, \tag{3.21}$$

$$\eta^a = \alpha_{ab} u^b + \beta_a, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
&\zeta^{ab} = (2æ_1 - æ_0) f^{ab} + \alpha_{ac} f^{cb} - \alpha_{cb} f^{ac},\\
&\sigma^{ab} = (æ_1 - æ_0) g^{ab} + \alpha_{ac} g^{cb} - \alpha_{cb} g^{ac} + \delta_{ab} p,\\
&\chi^a = -æ_0 h^a + \alpha_{ab} h^b,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

де $æ_\mu, d_\mu, p, \alpha_{ab}, \beta_a$ — групові параметри, $\mu = 0; 1, a, b, c = 1; 2$, а відповідні скінчені перетворення еквівалентності — (??).

Лема доведена.

Зауважимо, що всі подальші міркування проведено з точністю до перетворень еквівалентності (??).

3.2. Основна алгебра інваріантності. Система визначальних рівнянь

Означення 4.1. *Основною алгеброю інваріантності системи (??) назвемо алгебру, відносно якої дана система інваріантна при довільних нелінійностях F, G, H.*

Теорема 4.1. *Основною алгеброю інваріантності системи (??) є алгебра*

$$A^{bas} =< \partial_0, \partial_1 > . \tag{3.24}$$

Доведення. Доведення теореми проводимо на основі алгоритму Лі (див., наприклад, [?]).

Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (??) будемо шукати у вигляді

$$X = \xi^{\mu}(x_0, x_1, U)\partial_{\mu} + \eta^a(x_0, x_1, U)\partial_{u^a}. \tag{3.25}$$

З умови інваріантності системи (??) відносно оператора (??) одержуємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат інфінітезимального оператора (??) та функцій f^{ab}, g^{ab}, h^a:

$$\begin{gathered}\eta^c f^{ab}_{u^c} + (\xi^0_0 - 2\xi^1_1)f^{ab} + \eta^c_{u^b} f^{ac} - \eta^a_{u^c} f^{cb} = 0,\\ \eta^c g^{ab}_{u^c} + (\xi^0_0 - \xi^1_1)g^{ab} + \eta^c_{u^b} g^{ac} - \eta^a_{u^c} g^{cb} + \\ +\eta^c_1(f^{ab}_{u^c} + f^{ac}_{u^b}) + 2\eta^c_{1u^b} f^{ac} - \xi^1_{11} f^{ab} + \delta_{ab}\xi^1_0 = 0,\\ \eta^c h^a_{u^c} + \xi^0_0 h^a - \eta^a_{u^c} h^c + \eta^b_{11} f^{ab} + \eta^b_1 g^{ab} - \eta^a_0 = 0,\end{gathered} \tag{3.26}$$

$$\xi^0_{u^a} = \xi^1_{u^a} = \xi^0_1 = 0, \tag{3.27}$$

$$f^{db}\eta^a_{u^c u^d} + f^{dc}\eta^a_{u^b u^d} = 0. \tag{3.28}$$

Із системи (??) та (??) випливає, що для довільних значень функцій f^{ab}, g^{ab}, h^a координати оператора (??) мають вигляд

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta = 0, \tag{3.29}$$

де d_0, d_1 — довільні сталі.

Оператор (??) з координатами (??) породжує алгебру (??).

Теорема доведена.

3.3. Зображення алгебри Галілея

Встановимо зображення алгебри Галілея (??), відносно якої може бути інваріантна система (??).

Система (??) є лінійною однорідною алгебраїчною системою рівнянь відносно $\eta^a_{u^b u^c}$. Головний визначник даної системи має вигляд

$$\Delta = (f^{11} + f^{22})(f^{11}f^{22} - f^{12}f^{21}). \tag{3.30}$$

Оскільки матриця F складається з коефіцієнтів дифузії, то визначник (??) відмінний від нуля. Це означає, що система (??) має лише тривіальний розв'язок

$$\eta^a_{u^b u^c} = 0. \tag{3.31}$$

Таким чином, враховуючи рівняння (??), (??), приходимо до висновку, що найбільш загальний вигляд операторів інваріантності системи (??) наступний

$$X_i = A^i(x_0)\partial_0 + B^i(x_0, x_1)\partial_1 + [\alpha^{iab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{ia}(x_0, x_1)]\partial_{u^a} \tag{3.32}$$

де $A^i, B^i, \alpha^{iab}, \beta^{ia}$ — довільні гладкі функції відповідних аргументів.

Так як система (??) інваріантна відносно алгебри A_0, то в якості двох операторів алгебри $AG(1,1)$ візьмемо оператори ∂_0, ∂_1.

Оскільки $[\partial_0, \partial_1] = 0$, то з умов (??) випливають наступні можливості:

а) $(\partial_0, \partial_1) = (X_1, X_2)$, б) $(\partial_0, \partial_1) = (X_1, X_4)$,

в) $(\partial_0, \partial_1) = (X_3, X_4)$, г) $(\partial_0, \partial_1) = (X_2, X_4)$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

а) $(\partial_0, \partial_1) = (X_1, X_2)$. В ролі операторів X_3, X_4 візьмемо довільні оператори вигляду (??)

$$\begin{aligned} X_3 &= A^3(x_0)\partial_0 + B^3(x_0, x_1)\partial_1 + [\alpha^{3ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{3a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \\ X_4 &= A^4(x_0)\partial_0 + B^4(x_0, x_1)\partial_1 + [\alpha^{4ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{4a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

де $A^3, A^4, B^3, B^4, \alpha^{3ab}, \alpha^{4ab}, \beta^{3a}\beta^{4a}$ — довільні гладкі функції відповідних аргументів, які підлягають визначенню за формулами (**??**).

З комутаційних умов $[X_1, X_4] = 0$ та $[X_2, X_4] = 0$ одержуємо, що

$$A^4 = c_1, B^4 = c_2, \alpha^{4ab} = \alpha^1_{ab}, \beta^{4a} = \beta^1_a, \tag{3.34}$$

де $c_1, c_2, \alpha^1_{ab}, \beta^1_a$ — довільні сталі. Так як лінійна комбінація операторів алгебри є також оператором з даної алгебри, то, не втрачаючи довільності, можна вважати, що $c_1 = c_2 = 0$.

Отже,

$$X_4 = Q_1 = (\alpha^1_{ab}u^b + \beta^1_a)\partial_{u^a}. \tag{3.35}$$

З комутаційних співвідношень $[X_1, X_3] = X_2$ і $[X_2, X_3] = X_4$ маємо

$$\begin{aligned} &A^3 = c_3, B^3 = x_0 + c_4,\\ &\alpha^{3ab} = \alpha^1_{ab}x_1 + \alpha^1_{ab}, \beta^{3a} = \beta^1_a x_1 + \beta^1_a, \end{aligned} \tag{3.36}$$

де $c_3, c_4, \alpha^2_{ab}, \beta^2_a$ — довільні сталі. Аналогічно, як і у випадку оператора X_4, не втрачаючи загальності, можна вважати $c_3 = c_4 = 0$. Отже,

$$X_3 = x_0\partial_1 + x_1 Q_1 + Q_2, \tag{3.37}$$

де

$$Q_2 = (\alpha^2_{ab}u^b + \beta^2_a)\partial_{u^a}. \tag{3.38}$$

Із умови $[X_3, X_4] = 0$ маємо

$$[Q_1, Q_2] = 0. \tag{3.39}$$

В результаті одержуємо, що алгебра $AG(1,1)$ має реалізацію

$$AG(1,1) =< \partial_0, \partial_1, G = x\partial_0\partial_1 + x_1 Q_1 + Q_2, Q_1 >, \tag{3.40}$$

де оператори Q_1 і Q_2 задаються формулами (**??**), (**??**) та зодовольняють умову (**??**).

Розглянемо випадок б) $(\partial_0, \partial_1) = (X_1, X_4)$.

Аналогічно, як і у випадку а), в якості X_2, X_3 візьмемо наступні оператори

$$X_2 = A^2(x_0)\partial_0 + B^2(x_0, x_1)\partial_1 + [\alpha^{2ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{2a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a},$$
$$X_3 = C^3(x_0)\partial_0 + D^3(x_0, x_1)\partial_1 + [\gamma^{3ab}(x_0, x_1)u^b + \sigma^{3a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \tag{3.41}$$

де $A^2, B^2, C^3, D^3, \alpha^{2ab}, \beta^{2a}, \gamma^{3ab}, \sigma^{3a}$-довільні функції відповідних аргументів, які підлягають уточненню за формулами (**??**). З умов $[X_1, X_2] = 0$ та $[X_2, X_4] = 0$ аналогічно, як і у випадку а), одержуємо

$$A^2 = B^2 = 0, \alpha^{2ab} = \alpha^1_{ab}, \beta^{2a} = \beta^1_a, \tag{3.42}$$

де α^1_{ab}, β^1_a — довільні сталі. Отже,

$$X_2 = Q_1 = (\alpha^1_{ab}u^b + \beta^1_a)\partial_{u^a}. \tag{3.43}$$

З комутаційних співвідношень $[X_1, X_3] = X_2, [X_4, X_3] = 0$ знаходимо

$$C^3 = D^3 = 0, \gamma^{3ab} = x_0\alpha^1_{ab} + \gamma^2_{ab}, \beta^{3a} = x_0\beta^1_a + \beta^2_a, \tag{3.44}$$

де γ^2_{ab}, β^2_a - довільні сталі. Отже,

$$X_3 = x_0Q_1 + Q_2, \tag{3.45}$$

де

$$Q_2 = (\gamma^2_{ab}u^b + \beta^2_a)\partial_{u^a}. \tag{3.46}$$

З комутаційних співвідношень $[X_2, X_3] = X_4$ одержуємо

$$[Q_1, Q_2] = \partial_1,$$

що є неможливим.

Аналогічно показується, що випадки в) і г) також неможливі.

Зауважимо, що в роботі [**?**] з точністю до всеможливих локальних перетворень встановлені нееквівалентні реалізації алгебр розмірності до 4-х включно. Серед алгебр, наведених в цій роботі, є алгебра (**??**), але при умові, що $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = \partial_{u^2}$. Так як система (**??**) не допускає всеможливі перетворення еквівалентності, а тільки перетворення вигляду (??), то клас операторів Q_1, Q_2 є значно ширшим.

У роботі [?] встановлено, що існує 6 різних зображень оператора Q_1 вигляду (??), нееквівалентних відносно перетворень (??).

А в роботі [?] показано, що з врахуванням (??) і з точністю до перетворень еквівалентності (??) можливі наступні нееквівалентні набори операторів Q_1, Q_2:

$$Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = k_2\partial_{u^2} + m_2u^2\partial_{u^1}, \tag{3.47}$$

$$Q_1 = k_1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}, Q_2 = k_2\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}, \tag{3.48}$$

$$Q_1 = k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, Q_2 = k_2\partial_{u^2} + m_2(k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}), \tag{3.49}$$

$$Q_1 = k_1u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}, Q_2 = k_2u^1\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}, \tag{3.50}$$

$$Q_1 = k_1I + m_1u^2\partial_{u^1}, Q_2 = k_2I + m_2u^2\partial_{u^1}, \tag{3.51}$$

$$Q_1 = k_1I - k_2J, Q_2 = m_1I - m_2J, \tag{3.52}$$

де $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, J = -u^2\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$, k_1, k_2, m_1, m_2 — довільні сталі, такі, щоб не було перетину між випадками (??)–(??).

Таким чином, єдино можливою реалізацією алгебри $AG(1,1)$ для системи (??) є алгебра (??), де опреатори Q_1, Q_2 мають вигляд одного з шести випадків, наведених вище.

3.4. Інваріантність системи (??) відносно алгебри Галілея

Знайдемо вигляд нелінійностей F, G, H, при яких система (??) інваріантна відносно алгебри Галілея (??) для кожного з шести вказаних випадків зображення Q_1, Q_2.

Теорема 4.2. *Система рівнянь (??) інваріантна відносно алгебри Галілея (??) при умові (??) тоді і тільки тоді, коли матриці F, G, H з точністю до перетворень еквівалентності (??) мають* *наступний вигляд*

$$F(U)=\begin{pmatrix} \lambda_{21}æu^2+\lambda_{11} & -\lambda_{21}(æu^2)^2-(\lambda_{11}-\lambda_{22})æu^2+\lambda_{12} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21}æu^2+\lambda_{22} \end{pmatrix},$$
$$G(U)=\begin{pmatrix} (æm_{21}-1)u^2+m_{11} & -m_{21}(æu^2)^2-(m_{11}-m_{22})æu^2+m_{12} \\ m_{21} & -(æm_{21}+1)u^2+m_{22} \end{pmatrix},$$
$$H(U)=\begin{pmatrix} (-æm_{21}+\frac{1}{2})(u^2)^2+(æn_2-m_{11})u^2+n_1 \\ -m_{21}u^2+n_2 \end{pmatrix}, \tag{3.53}$$

причому $Q_1=\partial_{u^1}, Q_2=æu^2\partial_{u^1}+\partial_{u^2}$, $\lambda_{ab}, m_{ab}, n_a$ *— довільні сталі,* $æ\epsilon\{0,1\}$.

Доведення. Для даного зображення оператора Галілея маємо

$$\xi^0=0, \xi^1=x_0, \eta^a=(x_1+m_2u^2)\delta_{a1}+k_2\delta_{a2}. \tag{3.54}$$

Підставивши (**??**) у (**??**) та розщепивши за степенями x_1, одержимо

$$f^{ab}_{u^1}=g^{ab}_{u^1}=h^a_{u^1}=0, \tag{3.55}$$

$$k_2f^{ab}_{u^2}=m_2(f^{2b}\delta_{a1}-f^{a1}\delta_{b2}), \tag{3.56}$$

$$k_2g^{ab}_{u^2}=m_2(g^{2b}\delta_{a1}-g^{a1}\delta_{b2})-f^{a1}_{u^b}-\delta_{ab}, \tag{3.57}$$

$$k_2h^a_{u^2}=m_2h^2\delta_{a1}-g^{a1}. \tag{3.58}$$

Так як при $k_2=0$ система (**??**)–(**??**) несумісна, то будемо вважати, що $k_2\neq 0$.

Якщо $m_2\neq 0$, то застосувавши перетворення

$$x_0\to k_2m_2x_0, \quad x_1\to m_2x_1, \quad u^1\to \frac{m_2}{k_2}u^1, \quad u^2\to u^2,$$

одержуємо

$$G=x_0\partial_1+x_1\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^1}+\partial_{u^2}.$$

Якщо $m_2=0$, то застосувавши перетворення

$$x_0\to k_2^2x_0, \quad x_1\to k_2x_1, \quad u^1\to u^1, \quad u^2\to u^2,$$

одержуємо

$$G=x_0\partial_1+x_1\partial_{u^1}+\partial_{u^2}.$$

Таким чином, не втрачаючи загальності, можна вважати, що

$$G = x_0\partial_1 + x_1\partial_{u^1} + æu^2\partial_{u^1} + \partial_{u^2}.$$

Загальним розв'язком системи (**??**)- (**??**) будуть функції

$$\begin{aligned} &f^{11} = \lambda_{21}æu^2 + \lambda_{11}, \quad f^{12} = -\lambda_{21}(æu^2)^2 - (\lambda_{11} - \lambda_{22})æu^2 + \lambda_{12}, \\ &f^{21} = \lambda_{21}, \quad f^{22} = -\lambda_{21}æu^2 + \lambda_{22}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Заміною $g^{ab} = \psi^{ab} - u^2\delta_{ab}$ система (**??**) зводиться до вигляду (**??**). Тому можна зробити висновок, що

$$\begin{aligned} &\psi^{11} = m_{21}æu^2 + m_{11}, \quad \psi^{12} = -m_{21}(æu^2)^2 - (m_{11} - m_{22})æu^2 + m_{12} \\ &\psi^{21} = m_{21}, \quad \psi^{22} = -m_{21}æu^2 + m_{22}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Виконавши обернену заміну, одержимо

$$\begin{aligned} &g^{11} = (æm_{21} - 1)u^2 + m_{11}, \\ &g^{12} = -m_{21}(æu^2)^2 - (m_{11} - m_{22})æu^2 + m_{12}, \\ &g^{21} = m_{21}, \quad g^{22} = -(æm_{21} + 1)u^2 + m_{22}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Підставивши (**??**) у систему рівнянь (**??**), маємо

$$\begin{aligned} &h^1 = (-æm_{21} + \tfrac{1}{2})(u^2)^2 + (æn_2 - m_{11})u^2 + n_1, \\ &h^2 = -m_{21}u^2 + n_2. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Теорема доведена.

Теорема 4.3 *Система рівнянь (**??**) інваріантна відносно алгебри Галілея (**??**)при умові (**??**) тоді і тільки тоді, коли матриці F, G, H з точністю до перетворень еквівалентності (**??**) мають наступний вигляд*

$$\begin{aligned} &F(U) = \begin{pmatrix} \varphi(u^1) & -\frac{u^1}{u^2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ &G(U) = \begin{pmatrix} \psi^1(u^1) & 0 \\ u^2\psi^2(u^1) & 0 \end{pmatrix}, \\ &H(U) = \begin{pmatrix} \chi^1(u^1) \\ u^2\chi^2(u^1) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.63}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}, Q_2 = 0$, φ, ψ^a, χ^a *— довільні гладкі функції відповідних аргументів;*

$$
\begin{aligned}
F(U) &= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \frac{\lambda_{12}}{u^2} \\ \lambda_{21}u^2 & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \\
G(U) &= \begin{pmatrix} -\omega + m_{11} & \frac{m_{12}}{u^2} \\ (-\lambda_{21}\omega + m_{21})u^2 & -(\lambda_{21}æ + 2\lambda_{22} + 1)\omega + m_{22} \end{pmatrix}, \\
H(U) &= \begin{pmatrix} \frac{æ}{2}\omega^2 - (æm_{11} + m_{12})\omega + n_1 \\ u^2[\frac{1}{2}(2æ\lambda_{21} + 2\lambda_{22} + 1)\omega^2 - (æm_{21} + m_{22})\omega + n_2] \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

причому $Q_1 = æ\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, Q_2 = \partial_{u^1}$, $\omega = u^1 - æ\ln u^2$, $æ\epsilon\{0;1\}$, $\lambda_{ab}, m_{ab}, n_a$ *— довільні сталі;*

$$
\begin{aligned}
F(U) &= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \frac{\lambda_{12}}{u^2} \\ \lambda_{21}u^2 & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \\
G(U) &= \begin{pmatrix} -\ln u^2 + m_{11} & \frac{m_{12}}{u^2} \\ m_{21}u^2 & -(\lambda_{21} + 1)\ln u^2 + m_{22} \end{pmatrix}, \\
H(U) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln^2 u^2 - m_{11}\ln u^2 + n_1 \\ u^2[-m_{21}\ln u^2 + n_2] \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = u^2\partial_{u^2}$.

Доведення. Координати оператора Галілея при умові (**??**) мають вигляд

$$
\xi^0 = 0, \quad \xi^1 = x_0, \quad \eta^a = (k_1x_1 + k_2)\delta_{a1} + (m_1x_1 + m_2)u^2\delta_{a2}. \tag{3.66}
$$

Підставимо (**??**) у перше рівняння (**??**) та розщепимо одержане рівняння за степенями x_1:

$$
\begin{aligned}
&Q_c(f^{ab}) = L_{abc}(f), \\
&Q_c(g^{ab}) = L_{abc}(g)- \\
&-\delta_{c2}[k_1(f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b}) + m_1u^2(f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + 2m_1\delta_{b2}f^{a2} + \delta_{ab}], \\
&Q_c(h^a) = m_c\delta_{a2}h^2 - \delta_{c2}(k_1g^{a1} + m_1u^2g^{a2}),
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

де $L_{abc}(f) = m_c(\delta_{a2}f^{2b} - \delta_{b2}f\lambda^{a2})$.

При розв'язуванні системи (**??**) виникають два суттєво різні випадки:

1) $m_1 \neq 0, k_2 = m_2 = 0.$

Система(**??**) набуде вигляду

$$k_1 f^{ab}_{u^1} + m_1 u^2 f^{ab}_{u^2} + m_1(\delta_{b2} f^{a2} - \delta_{a2} f^{2b}) = 0, \tag{3.68}$$

$$k_1 g^{ab}_{u^1} + m_1 u^2 g^{ab}_{u^2} + m_1(\delta_{b2} g^{a2} - \delta_{a2} g^{2b}) = 0, \tag{3.69}$$

$$k_1(f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b}) + m_1 u^2(f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + 2m_1\delta_{b2} f^{a2} + \delta_{ab} = 0, \tag{3.70}$$

$$k_1 h^a_{u^1} + m_1 u^2 h^a_{u^2} - m_1 \delta_{a2} h^2 = 0, \tag{3.71}$$

$$k_1 g^{a1} + m_1 u^2 g^{a2} = 0. \tag{3.72}$$

З системи (**??**) одержуємо

$$f^{11} = \varphi^{11}(\omega), \quad f^{12} = \tfrac{1}{u^2}\varphi^{12}(\omega), \quad f^{21} = u^2\varphi^{21}(\omega), \quad f^{22} = \varphi^{22}(\omega). \tag{3.73}$$

де $\omega = u^1 - \frac{k_1}{m_1} ln u^2.$

При $k_1 \neq 0$ враховуючи (**??**), одержимо, що система (**??**), (**??**) несумісна.

При $k_1 = 0$, застосувавши перетворення еквівалентності

$$x_0 \to m_1 x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u^1 \to u^1, \quad u^2 \to u^2,$$

одержимо

$$G = x_0\partial_1 + x_1 u^2 \partial_{u^2}.$$

Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати $m_1 = 1.$

Тоді система (**??**), (**??**) матиме наступний загальний розв'язок

$$\begin{gathered} f^{11} = \varphi^{11}(u^1), \quad f^{12} = -\tfrac{u^1}{u^2}, \quad f^{21} = 0, \quad f^{22} = -\tfrac{1}{2}, \\ g^{11} = \psi^1(u^1), \quad g^{12} = \tfrac{\psi^{12}(u^1)}{u^2}, \quad g^{21} = u^2\psi^{21}(u^1), \quad g^{22} = \psi^{22}(u^1). \end{gathered} \tag{3.74}$$

Підставивши (**??**) у систему (**??**), (**??**) та розв'язавши її, одержимо

$$\begin{gathered} g^{11} = \psi^1(u^1), \quad g^{12} = 0, \quad g^{21} = u^2\psi^2(u^1), \quad g^{22} = 0, \\ h^1 = \chi^1(u^1), \quad h^2 = u^2\chi^2(u^1). \end{gathered} \tag{3.75}$$

Рівності (??), (??) визначають нелінійності (??).

Перший пункт теореми доведено.

2) $m_1 \neq 0, k_2 \neq 0, m_2 = 0$.

При $k_1 \neq 0$ використавши перетворення еквівалентності

$$x_0 \to \frac{m_1 k_2^2}{k_1^2} x_0, \quad x_1 \to \frac{k_2}{k_1} x_1, \quad u^1 \to \frac{k_1}{m_1} u^1, \quad u^2 \to u^2,$$

а при $k_1 = 0$

$$x_0 \to \frac{x_0}{m_1}, \quad x_1 \to \frac{x_1}{m_1}, \quad u^1 \to k_2 u^1, \quad u^2 \to u^2,$$

одержимо

$$G = x_0 \partial_1 + x_1(æ\partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + \partial_{u^1}.$$

Отже, не втрачаючи загальності, можна вважати $k_1 = æ$, $k_2 = m_1 = = 1$.

Тоді система (??) набуде вигляду

$$æ f^{ab}_{u^1} + u^2 f^{ab}_{u^2} + \delta_{b2} f^{a2} - \delta_{a2} f^{2b} = 0, \tag{3.76}$$

$$f^{ab}_{u^1} = 0, \tag{3.77}$$

$$æ g^{ab}_{u^1} + u^2 g^{ab}_{u^2} + \delta_{b2} g^{a2} - \delta_{a2} g^{2b} = 0, \tag{3.78}$$

$$g^{ab}_{u^1} + æ(f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b}) + u^2(f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + 2\delta_{b2} f^{a2} + \delta_{ab} = 0, \tag{3.79}$$

$$h^a_{u^1} + u^2 h^a_{u^2} - \delta_{a2} h^2 = 0, \tag{3.80}$$

$$h^a_{u^1} + æ g^{a1} + u^2 g^{a2} = 0. \tag{3.81}$$

Система(??)–(??) має наступний загальний розв'язок

$$f^{11} = \lambda_{11}, \quad f^{12} = \tfrac{\lambda_{12}}{u^2}, \quad f^{21} = u^2 \lambda_{21}, \quad f^{22} = \lambda_{22}. \tag{3.82}$$

Розв'язавши рівняння (??)–(??) з врахуванням (??) , одержимо загальний розв'язок

$$\begin{aligned} &g^{11} = -\omega + m_{11}, \quad g^{12} = \tfrac{m_{12}}{u^2}, \\ &g^{21} = (-æ\lambda_{21}\omega + m_{21}) u^2, \quad g^{22} = -(æ\lambda_{21} + 2\lambda_{22} + 1)\omega + m_{22}, \end{aligned} \tag{3.83}$$

де $\omega = u^1 - æ ln u^2$, m_{ab} – довільні сталі. Загальний розв'язок системи рівнянь (??)–(??) з врахуванням (??) має вигляд

$$\begin{aligned} h^1 &= \tfrac{æ}{2}\omega^2 - (m_{11} + m_{12})\omega + n_1, \\ h^2 &= u^2[\tfrac{1}{2}(2æ\lambda_{21} + 2m_1\lambda_{22} + 1)\omega^2 - (æ m_{21} + m_{22})\omega + n_2]. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Рівності (??), (??), (??) визначають нелінійності (??).

Отже, другий пункт теореми доведено.

3) $m_1 = 0, k_2 = 0, m_2 \neq 0, k_1 \neq 0$.

Аналогічно до попередніх випадків перетворення еквівалентності

$$x_0 \to \frac{m_2^2}{k_1}x_0, \quad x_1 \to \frac{m_2}{k_1}x_1, \quad u^1 \to u^1, \quad u^2 \to u^2$$

зводить оператор Галілея до наступного вигляду

$$G = x_0\partial_1 + x_1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}.$$

Тому можна вважати, що $k_1 = m_2 = 1$.

Система (??) набуде вигляду

$$f^{ab}_{u^1} = 0, \tag{3.85}$$

$$u^2 f^{ab}_{u^2} + \delta_{b2}f^{a2} - \delta_{a2}f^{2b} = 0, \tag{3.86}$$

$$g^{ab}_{u^1} = 0, \tag{3.87}$$

$$u^2 g^{ab}_{u^2} + \delta_{b2}g^{a2} - \delta_{a2}g^{2b} + f^{a1}_{u^b} + \delta_{ab} = 0, \tag{3.88}$$

$$h^a_{u^1} = 0, \tag{3.89}$$

$$u^2 h^a_{u^2} - \delta_{a2}h^2 + g^{a1} = 0. \tag{3.90}$$

Загальним розв'язком системи (??)–(??) будуть функції

$$f^{11} = \lambda_{11}, \quad f^{12} = \tfrac{\lambda_{12}}{u^2}, \quad f^{21} = u^2\lambda_{21}, \quad f^{22} = \lambda_{22}. \tag{3.91}$$

Розв'язавши рівняння (??)–(??) з врахуванням (??), одержимо

$$\begin{aligned} &g^{11} = -ln u^2 + m_{11}, \quad g^{12} = \tfrac{m_{12}}{u^2}, \\ &g^{21} = m_{21}u^2, \quad g^{22} = -(\lambda_{21} + 1)\ln u^2 + m_{22}. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Роз'язавши (??)–(??), знаходимо

$$\begin{aligned} h^1 &= \tfrac{1}{2}\ln^2 u^2 - m_{11}\ln u^2 + n_1, \\ h^2 &= u^2[-m_{21}\ln u^2 + n_2]. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Рівності (??), (??), (??) визначають нелінійності (??), що і доводить третій пункт даної теореми.

Теорема доведена.

Теорема 4.4. *Система рівнянь (??) інваріантна відносно алгебри Галілея (??) при умові (??) тоді і тільки тоді, коли матриці F, G, H з точністю до перетворень еквівалентності (??) мають наступний вигляд*

$$\begin{aligned} F(U) &= \begin{pmatrix} \lambda_{11} - \lambda_{12}u^1 & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})u^1 - \lambda_{12}(u^1)^2 & \lambda_{22} + \lambda_{12}u^1 \end{pmatrix}, \\ G(U) &= \begin{pmatrix} m_{11} - m_{12}u^1 - \omega & m_{12} \\ m_{21} + (m_{11} - m_{22})u^1 - m_{12}(u^1)^2 - (2\lambda_{11} - \lambda_{12}u^1)\omega & m_{22} + m_{12}u^1 - (\lambda_{12} + 1)\omega \end{pmatrix} \\ H(U) &= \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{2} - m_{11}\omega + n_1 \\ (\frac{u^1}{2} + \lambda_{11})\omega^2 - (m_{11}u^1 + m_{21})\omega + n_1u^1 + n_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.94}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, Q_2 = \partial_{u^2}$, $\omega = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$, $\lambda_{ab}, m_{ab}, n_a$ *— довільні сталі, .*

Доведення. Оскільки лінійна комбінація операторів алгебри є також оператором алгебри, то, не втрачаючи загальності, можна вважати $m_2 = 0$. З умови (??) маємо

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^1 = x_0, \quad \eta^a = k_1x_1\delta_{a1} + (x_1u^1 + k_2)\delta_{a2}. \tag{3.95}$$

Підставивши (??) у (??) та розщепивши за степенями x_1, одержимо

$$\begin{aligned} &Q_c(f^{ab}) = \delta_{c1}L_{ab}(f), \\ &Q_c(g^{ab}) = \delta_{c1}L_{ab}(g) - \\ &-\delta_{c2}[k_1(f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b}) + u^1(f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + 2\delta_{b1}f^{a2} + \delta_{ab}], \\ &Q_c(h^a) = \delta_{c1}\delta_{a2}h^1 - \delta_{c2}[k_2h^a_{u^2} + k_1g^{a1} + u^1g^{a2}], \end{aligned} \tag{3.96}$$

де $L_{ab}(f) = \delta_{a2}f^{1b} - \delta_{b1}f^{a2}$.

При розв'язуванні системи (??) виникають наступні суттєво різні випадки:

1) $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$; 2) $k_1 \neq 0, k_2 = 0$; 3) $k_1 = 0, k_2 \neq 0$; 4) $k_1 = 0, k_2 = 0$.

1) При $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, застосувавши перетворення еквівалентності

$$x_0 \to k_1 k_2^2 x_0, \quad x_1 \to k_2 x_1, \quad u^1 \to u^1, \quad u^2 \to \frac{1}{k_1} u^2,$$

одержимо опертор Галілея наступного вигляду

$$G = x_0 \partial_1 + x_1 (\partial_{u^1} + u^1 \partial_{u^2}) + \partial_{u^2}. \tag{3.97}$$

Отже, не втрачаючи загальності, можна вважати $k_1 = k_2 = 1$.

Тоді система (**??**) набуде вигляду

$$f^{ab}_{u^1} + u^1 f^{ab}_{u^2} + \delta_{b1} f^{a2} - \delta_{a2} f^{1b} = 0, \tag{3.98}$$

$$f^{ab}_{u^2} = 0, \tag{3.99}$$

$$g^{ab}_{u^1} + u^1 g^{ab}_{u^2} + \delta_{b1} g^{a2} - \delta_{a2} g^{1b} = 0, \tag{3.100}$$

$$g^{ab}_{u^2} + (f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b}) + u^1 (f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + 2\delta_{b1} f^{a2} + \delta_{ab} = 0, \tag{3.101}$$

$$h^a_{u^1} + u^1 h^a_{u^2} - \delta_{a2} h^1 = 0, \tag{3.102}$$

$$h^a_{u^2} + g^{a1} + u^1 g^{a2} = 0. \tag{3.103}$$

Загальний розв'язок системи рівнянь (**??**)–(**??**) має вигляд

$$\begin{aligned} &f^{11} = \lambda_{11} - \lambda_{12} u^1, \quad f^{12} = \lambda_{12}, \\ &f^{21} = \lambda_{21} + (\lambda_{11} - \lambda_{22}) u^1 - \lambda_{12} (u^1)^2, \quad f^{22} = \lambda_{22} + \lambda_{12} u^1, \end{aligned} \tag{3.104}$$

Розв'язавши систему (**??**), одержимо

$$\begin{aligned} &g^{11} = \psi^{11} - \psi^{12} u^1, \quad g^{12} = \psi^{12}, \\ &g^{21} = \psi^{21} + (\psi^{11} - \psi^{22}) u^1 - \psi^{12} (u^1)^2, \quad g^{22} = \psi^{22} + \psi^{12} u^1, \end{aligned} \tag{3.105}$$

де $\psi^{ab} = \psi^{ab}(\omega)$-довільні гладкі функції, $\omega = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$. Підставивши (**??**) та (**??**) у систему (**??**) та розв'язавши одержані рівняння, маємо

$$\begin{aligned} &\psi^{11} = -\omega + m_{11}, \quad \psi^{12} = m_{12}, \\ &\psi^{21} = -2\lambda_{11}\omega + m_{21}, \quad \psi^{22} = -(\lambda_{12} + 1)\omega + m_{22}. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Таким чином, функціональна матриця G матиме вигляд (**??**).

Розв'язавши систему (??), одержимо

$$h^1 = \chi^1, \quad h^2 = u^1\chi^1 + \chi^2, \tag{3.107}$$

де $\chi^a = \chi^a(\omega)$-довільні гладкі функції. Підставивши (??) та (??) у систему (??) та розв'язавши її, маємо

$$\begin{aligned} h^1 &= \tfrac{\omega^2}{2} - m_{11}\omega + n_1, \\ h^2 &= (\tfrac{u^1}{2} + \lambda_{11})\omega^2 - (m_{11}u^1 + m_{21})\omega + n_1u^1 + n_2. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Враховуючи (??), (??), (??) та (??), нелінійності F, G, H набудуть вигляду (??).

Неважко переконатись, що система (??) у випадках 2)–4) є несумісною.

Теорема доведена.

Теорема 4.5. *Система рівнянь (??) інваріантна відносно алгебри Галілея (??) при умові (??) тоді і тільки тоді, коли матриці F, G, H з точністю до перетворень еквівалентності (??) мають наступний вигляд*

$$\begin{aligned} F(U) &= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12}\frac{u^1}{u^2} \\ \lambda_{21}\frac{u^2}{u^1} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \\ G(U) &= \begin{pmatrix} Aln\omega + m_{11} & (Bln\omega + m_{12})\frac{u^1}{u^2} \\ (Cln\omega + m_{21})\frac{u^2}{u^1} & Dln\omega + m_{22} \end{pmatrix}, \\ H(U) &= \begin{pmatrix} (-\frac{A+m_1B}{2m_2}ln^2\omega - \frac{m_{11}+m_1m_{12}}{m_2}ln\omega + n_1)u^1 \\ (-\frac{C+m_1D}{2m_2}ln^2\omega - \frac{m_{21}+m_1m_{22}}{m_2}ln\omega + n_2)u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.109}$$

причому $Q_1 = u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}, Q_2 = m_2u^2\partial_{u^2}$, $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^{m_1}}$, $m_2 \neq 0$, $A = -\frac{m_1\lambda_{12}+2\lambda_{11}+1}{m_2}$, $B = -\frac{\lambda_{12}}{m_2}, C = -\frac{m_1\lambda_{21}}{m_2}, D = -\frac{\lambda_{21}+2m_1\lambda_{22}+1}{m_2}$;

$$\begin{aligned} F(U) &= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12}\frac{u^1}{u^2} \\ \lambda_{21}\frac{u^2}{u^1} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \\ G(U) &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_{12}+1}{k_2}lnu^1 + m_{11} & m_{12}\frac{u^1}{u^2} \\ (-\frac{\lambda_{21}}{k_2}lnu^1 + m_{21})\frac{u^2}{u^1} & -\frac{2\lambda_{22}+1}{k_2}lnu^1 + m_{22} \end{pmatrix}, \\ H(U) &= \begin{pmatrix} (-\frac{m_{12}}{k_2}lnu^1 + n_1)u^1 \\ (\frac{2\lambda_{22}+1}{2k_2^2}ln^2u^1 - \frac{m_{22}}{k_2}lnu^1 + n_2)u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.110}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}, Q_2 = k_2 u^1\partial_{u^1},\ k_2 \neq 0;$

$$F(U) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2m_1} \end{pmatrix},$$
$$G(U) = \begin{pmatrix} -m_1\alpha(\omega) & \alpha(\omega)\frac{u^1}{u^2} \\ -m_1\beta(\omega)\frac{u^2}{u^1} & \beta(\omega) \end{pmatrix}, \tag{3.111}$$
$$H(U) = \begin{pmatrix} \chi^1(\omega)u^1 \\ \chi^2(\omega)u^2 \end{pmatrix}.$$

причому $Q_1 = u^1\partial_{u^1} + m_1 u^2\partial_{u^2}, Q_2 = 0,\ \omega = \frac{u^2}{(u^1)^{m_1}},\ m_1 \neq 0,\ \alpha, \beta, \chi^a$ *— довільні гладкі функції своїх аргументів.*

Доведення. Координати оператора Галілея при умові (**??**) в даному випадку мають вигляд

$$\xi^0 = 0, \xi^1 = x_0, \eta^a = (k_1x_1 + k_2)u^1\delta_{a1} + (m_1x_1 + m_2)u^2\delta_{a2}. \tag{3.112}$$

Підставимо (**??**) у перше рівняння (**??**) та розщепимо одержане рівняння за степенями x_1:

$$\begin{aligned} &Q_c(f^{ab}) = L_{abc}(f), \\ &Q_c(g^{ab}) = L_{abc}(g) - \\ &-\delta_{c2}[k_1u^1(f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b}) + m_1u^2(f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + 2k_1\delta_{b1}f^{a1} + \\ &+2m_1\delta_{b2}f^{a2} + \delta_{ab}], \\ &Q_c(h^a) = \alpha_{ca}(h) - \delta_{c2}(k_1u^1g^{a1} + m_1u^2g^{a2}). \end{aligned} \tag{3.113}$$

де $L_{abc}(f) = k_c(\delta_{a1}f^{1b} - \delta_{b1}f^{a1}) + m_c(\delta_{a2}f^{2b} - \delta_{b2}f^{a2})$, $\alpha_{ca}(h) = k_c\delta_{a1}h^1 + +m_c\delta_{a2}h^2$.

При розв'язуванні системи (**??**) виникають суттєво різні випадки:

1) $|k_2| + |m_2| \neq 0, k_1 \neq 0$, 2) $|k_2| + |m_2| \neq 0, k_1 = 0$, 3) $|k_2| + |m_2| = 0,\ k_1 \neq 0\ , m_1 \neq 0$.

Розглянемо вказані випадки детально.

1) При $|k_2| + |m_2| \neq 0, k_1 \neq 0$, використавши перетворення еквівалентності

$$x_0 \to k_1x_0, x_1 \to x_1, u^1 \to u^1, u^2 \to u^2$$

та властивість лінійної комбінації операторів алгебри, одержуємо

$$G = x_0\partial_1 + x_1(u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}) + m_2u^2\partial_{u^2}.$$

Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати $k_1 = 1, k_2 = 0$.

Система(**??**) набуде вигляду

$$u^1f^{ab}_{u^1} + m_1u^2f^{ab}_{u^2} + \delta_{b1}f^{a1} - \delta_{a1}f^{1b} + m_1(\delta_{b2}f^{a2} - \delta_{a2}f^{2b}) = 0, \quad (3.114)$$

$$u^2f^{ab}_{u^2} + \delta_{b2}f^{a2} - \delta_{a2}f^{2b} = 0, \quad (3.115)$$

$$u^1g^{ab}_{u^1} + m_1u^2g^{ab}_{u^2} + (1 - m_1)(\delta_{b1}g^{a1} - \delta_{a1}g^{1b}) = 0, \quad (3.116)$$

$$\begin{gathered} m_2u^2g^{ab}_{u^2} + m_2(\delta_{b2}g^{a2} - \delta_{a2}g^{2b}) + u^1(f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b}) + m_1u^2(f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + \\ +2\delta_{b1}f^{a1} + 2m_1\delta_{b2}f^{a2} + \delta_{ab} = 0, \end{gathered} \quad (3.117)$$

$$u^1h^a_{u^1} + m_1u^2h^a_{u^2} - \delta_{a1}h^1 - m_1\delta_{a2}h^2 = 0, \quad (3.118)$$

$$m_2u^2h^a_{u^2} - k_2\delta_{a1}h^1 - m_2\delta_{a2}h^2 + u^1g^{a1} + m_1u^2g^{a2} = 0. \quad (3.119)$$

Неважко впевнитись, що розв'язком системи рівнянь (**??**)-(**??**) будуть функції

$$f^{11} = \lambda_{11}, f^{12} = \lambda_{12}\tfrac{u^1}{u^2}, f^{21} = \lambda_{21}\tfrac{u^2}{u^1}, f^{22} = \lambda_{22}. \quad (3.120)$$

Загальниий розв'язок системи рівнянь (**??**) має вигляд

$$\begin{aligned} &g^{11} = \psi^{11}(\omega), g^{12} = \psi^{12}(\omega)(u^1)^{1-m_1}, \\ &g^{21} = \psi^{21}(\omega)(u^1)^{m_1-1}, g^{22} = \psi^{22}(\omega), \end{aligned} \quad (3.121)$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^{m_1}}$.

Підставивши (**??**) та (**??**) у (**??**) та розв'язавши одержану систему, маємо

$$\begin{aligned} &g^{11} = Aln\omega + m_{11}, g^{12} = (Bln\omega + m_{12})\tfrac{u^1}{u^2}, \\ &g^{21} = (Cln\omega + m_{21})\tfrac{u^2}{u^1}, g^{22} = Dln\omega + m_{22}, \end{aligned} \quad (3.122)$$

Загальним розв'язком системи (**??**) будуть функції

$$h^1 = \chi^1(\omega)u^1, h^2 = \chi^2(\omega)u^2. \quad (3.123)$$

Підставивши (**??**) у (**??**), одержимо

$$\begin{aligned} h^1 &= (-\tfrac{A+m_1B}{2m_2}ln^2\omega - \tfrac{m_{11}+m_1m_{12}}{m_2}ln\omega + n_1)u^1, \\ h^2 &= (-\tfrac{C+m_1D}{2m_2}ln^2\omega - \tfrac{m_{21}+m_1m_{22}}{m_2}ln\omega + n_2)u^2. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Рівності (**??**), (**??**) та (**??**) визначають нелінійності (**??**).

Таким чином, перший пункт теореми доведено.

2) $|k_2| + |m_2| \neq 0, k_1 = 0$, використавши перетворення еквівалентності

$$x_0 \to m_1x_0, x_1 \to x_1, u^1 \to u^1, u^2 \to u^2$$

та властивість лінійної комбінації операторів алгебри, одержуємо

$$G = x_0\partial_1 + x_1u^2\partial_{u^2} + k_2u^1\partial_{u^1}.$$

Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати $m_1 = 1, m_2 = 0$.

Система(**??**) перепишеться наступним чином

$$u^2f^{ab}_{u^2} + \delta_{b2}f^{a2} - \delta_{a2}f^{2b} = 0, \quad (3.125)$$

$$u^1f^{ab}_{u^2} + \delta_{b1}f^{a1} - \delta_{a1}f^{1b} = 0, \quad (3.126)$$

$$u^2g^{ab}_{u^2} + \delta_{b2}g^{a2} - \delta_{a2}g^{2b} = 0, \quad (3.127)$$

$$k_2(u^1g^{ab}_{u^1} + \delta_{b1}g^{a1} - \delta_{a1}g^{1b}) + u^2(f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + 2\delta_{b2}f^{a2} + \delta_{ab} = 0, \quad (3.128)$$

$$u^2h^a_{u^2} - \delta_{a2}h^2 = 0, \quad (3.129)$$

$$k_2u^1h^a_{u^1} - k_2\delta_{a1}h^1 + u^2g^{a2} = 0. \quad (3.130)$$

Загальним розв'язком системи рівнянь (**??**)–(**??**) будуть функції (**??**).

Загальниий розв'язок системи рівнянь (**??**) має вигляд

$$\begin{aligned} &g^{11} = \psi^{11}(u^1), g^{12} = \tfrac{\psi^{12}(u^1)}{u^2}, \\ &g^{21} = u^2\psi^{21}(u^1), g^{22} = \psi^{22}(u^1). \end{aligned} \quad (3.131)$$

Підставивши (**??**) та (**??**) у (**??**) та розв'язавши одержану систему, маємо

$$\begin{aligned} &g^{11} = -\tfrac{\lambda_{12}+1}{k_2}lnu^1 + m_{11}, g^{12} = m_{12}\tfrac{u^1}{u^2}, \\ &g^{21} = (-\tfrac{\lambda_{21}}{k_2}lnu^1 + m_{21})\tfrac{u^2}{u^1}, g^{22} = -\tfrac{2\lambda_{22}+1}{k_2}lnu^1 + m_{22}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Неважко впевнитись, що загальним розв'язком системи (??) будуть функції

$$h^1 = \chi^1(u^1), h^2 = \chi^2(u^1)u^2. \tag{3.133}$$

Підставивши (??), (??) у (??), одержимо

$$\begin{array}{l} h^1 = (-\frac{m_{12}}{k_2} lnu^1 + n_1)u^1 \\ h^2 = (\frac{2\lambda_{22}+1}{2k_2^2} ln^2 u^1 - \frac{m_{22}}{k_2} lnu^1 + n_2)u^2. \end{array} \tag{3.134}$$

Рівності (??), (??) та (??) визначають нелінійності (??).

Другий пункт теореми доведено.

3) При $|k_2| + |m_2| = 0, k_1 \neq 0, m_1 \neq 0$, використавши перетворення еквівалентності

$$x_0 \to k_1 x_0, x_1 \to x_1, u^1 \to u^1, u^2 \to u^2$$

та властивість лінійної комбінації операторів алгебри, одержуємо

$$G = x_0\partial_1 + x_1(u^1\partial_{u^1} + m_1 u^2 \partial_{u^2}).$$

Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати $k_1 = 1$.

Система(??) набуде вигляду

$$u^1 f^{ab}_{u^1} + m_1 u^2 f^{ab}_{u^2} + \delta_{b1} f^{a1} - \delta_{a1} f^{1b} + m_1(\delta_{b2} f^{a2} - \delta_{a2} f^{2b}) = 0, \tag{3.135}$$

$$u^1 g^{ab}_{u^1} + m_1 u^2 g^{ab}_{u^2} + (1 - m_1)(\delta_{b1} g^{a1} - \delta_{a1} g^{1b}) = 0, \tag{3.136}$$

$$u^1(f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b}) + m_1 u^2 (f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + 2\delta_{b1} f^{a1} + 2m_1 \delta_{b2} f^{a2} + \delta_{ab} = 0, \tag{3.137}$$

$$u^1 h^a_{u^1} + m_1 u^2 h^a_{u^2} - \delta_{a1} h^1 - m_1 \delta_{a2} h^2 = 0, \tag{3.138}$$

$$u^1 g^{a1} + m_1 u^2 g^{a2} = 0. \tag{3.139}$$

Загальним розв'язком системи рівнянь (??) будуть функції

$$\begin{array}{l} f^{11} = \varphi^{11}(\omega), f^{12} = \varphi^{12}(\omega)(u^1)^{1-m_1}, \\ f^{21} = \varphi^{21}(\omega)(u^1)^{m_1-1}, f^{22} = \varphi^{22}(\omega), \end{array} \tag{3.140}$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^{m_1}}$. Підставивши (??) у систему (??), уточнимо одержані функції φ^{ab}

$$\varphi^{11} = -\tfrac{1}{2}, \varphi^{12} = 0, \varphi^{21} = 0, \varphi^{22} = -\tfrac{1}{2m_1}. \tag{3.141}$$

Таким чином, маємо

$$f^{11} = -\tfrac{1}{2}, f^{12} = 0, f^{21} = 0, f^{22} = -\tfrac{1}{2m_1}. \tag{3.142}$$

Загальниий розв'язок системи рівнянь (??) має вигляд

$$\begin{aligned} &g^{11} = \psi^{11}(\omega), g^{12} = \psi^{12}(\omega)(u^1)^{1-m_1}, \\ &g^{21} = \psi^{21}(\omega)(u^1)^{m_1-1}, g^{22} = \psi^{22}(\omega). \end{aligned} \tag{3.143}$$

Підставивши (??) у (??) та розв'язавши одержану систему, маємо

$$g^{11} = -m_1\alpha(\omega), g^{12} = \alpha(\omega)\tfrac{u^1}{u^2}, g^{21} = -m_1\beta(\omega)\tfrac{u^2}{u^1}, g^{22} = \beta(\omega). \tag{3.144}$$

Загальним розв'язком системи (??) будуть функції

$$h^1 = \chi^1(\omega)u^1, h^2 = \chi^2(\omega)u^2. \tag{3.145}$$

Тобто мають місце нелінійності (??).

Теорема доведена.

Теорема 4.6. *Система рівнянь (??) інваріантна відносно алгебри Галілея (??)при умові (??) тоді і тільки тоді, коли матриці з точністю до перетворень еквівалентності (??) F, G, H мають наступний вигляд*

$$\begin{aligned} F(U) &= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ 0 & \lambda_{11} \end{pmatrix}, \\ G(U) &= \begin{pmatrix} -(2\lambda_{11}+1)\omega+m_{11} & -2(æ\lambda_{11}+\lambda_{12})\omega+(m_{22}-m_{11})\frac{u^1}{u^2}+m_{12} \\ 0 & -(2\lambda_{11}+1)\omega+m_{22} \end{pmatrix}, \\ H(U) &= \begin{pmatrix} u^2[(\lambda_{12}-\frac{æ}{2})\omega^2+æm_{11}\omega+n_1]+u^1[(\lambda_{11}+\frac{1}{2})\omega^2-m_{22}\omega+n_2] \\ u^2[(\lambda_{11}+\frac{1}{2})\omega^2-m_{22}\omega+n_2] \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.146}$$

причому $Q_1 = I + æu^2\partial_{u^1}, Q_2 = u^2\partial_{u^1},\ \omega = \frac{u^1}{u^2} - æ ln u^2,\ æ\epsilon\{1,0\}$, $\lambda_{ab}, m_{ab}, n_a$ *— довільні сталі;*

$$F(U) = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -æ \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$G(U) = \begin{pmatrix} \psi^{11} + \psi^{21}\frac{u^1}{u^2} & -(\frac{u^1}{u^2} + æ)(\psi^{11} + \psi^{21}\frac{u^1}{u^2}) \\ \psi^{21} & -(\frac{u^1}{u^2} + æ)\psi^{21} \end{pmatrix}, \quad (3.147)$$
$$H(U) = \begin{pmatrix} u^2\chi^1 + u^1\chi^2 \\ u^2\chi^2 \end{pmatrix}.$$

причому $Q_1 = I + æu^2\partial_{u^1}, Q_2 = 0, æ\epsilon\{0,1\}, \omega = \frac{u^1}{u^2} - æ ln u^2, \psi^{a1} = \psi^{a1}(\omega)$, $\chi^a = \chi^a(\omega)$ *— довільні гладкі функції;*

$$F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{21}\frac{u^1}{u^2} + \lambda_{11} & -2\lambda_{21}(\frac{u^1}{u^2})^2 + (\lambda_{22} - \lambda_{11})\frac{u^1}{u^2} + \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21}\frac{u^1}{u^2} + \lambda_{22} \end{pmatrix},$$
$$G(U) = \begin{pmatrix} m_{21}\frac{u^1}{u^2} + A & -m_{21}(\frac{u^1}{u^2})^2 + (B - A)\frac{u^1}{u^2} - (\lambda_{11} + \lambda_{22}) ln u^2 + m_{12} \\ m_{21} & -m_{21}\frac{u^1}{u^2} + B \end{pmatrix},$$
$$H(U) = \begin{pmatrix} u^1(-m_{21} ln u^2 + n_2) + u^2[(\lambda_{21} + \frac{1}{2}) ln^2 u^2 - m_{11} ln u^2 + n_1] \\ u^2(-m_{21} ln u^2 + n_2) \end{pmatrix}, \quad (3.148)$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^1}, Q_2 = I,\ A = -(2\lambda_{21} + 1) ln u^2 + m_{11}, B = -(\lambda_{21} + 1) ln u^2 + m_{22}$.

Доведення. Координати оператора Галілея при умові (**??**) мають вигляд

$$\xi^0 = 0, \xi^1 = x_0, \eta^a = (k_1x_1 + k_2)u^a + (m_1x_1 + m_2)u^2\delta_{a1}. \quad (3.149)$$

Підставимо (**??**) у систему (**??**) та розщепимо її за степенями x_1 :

$$\begin{aligned} &Q_c(f^{ab}) = L_{abc}(f), \\ &Q_c(g^{ab}) = L_{abc}(g) - \delta_{c2}[L_{ab1}(f) + k_1(u^1 f^{a1}_{u^b} + u^2 f^{a2}_{u^b} + 2f^{ab}) + \\ &+ m_1(u^2 f^{a1}_{u^b} 2\delta_{b2} f^{a1}) + \delta_{ab}], \\ &Q_c(h^a) = k_c h^a + m_c h^2\delta_{a1} - \delta_{c2}(k_1 u^b g^{ab} + m_1 u^2 g^{a1}), \end{aligned} \quad (3.150)$$

де $L_{abc}(f) = m_c(\delta_{a1} f^{2b} - \delta_{b2} f^{a1})$.

При розв'язуванні системи (**??**) виникають суттєво різні випадки:

1) $k_1 \neq 0, m_2 \neq 0$, 2) $k_1 \neq 0, m_2 = 0$, 3) $k_1 = 0, k_2 \neq 0$.

Розглянемо детально кожен випадок.

1) При $k_1 \neq 0, m_2 \neq 0$ за властивістю лінійної комбінації операторів алгебри, не втрачаючи загальності, можна вважати $k_2 = 0$.

Застосовуючи перетворення еквівалентності :

при $m_1 \neq 0$

$$x_0 \to (\frac{m_2}{m_1})^2 x_0, x_1 \to \frac{m_2}{m_1} x_1, u^1 \to u^1, u^2 \to \frac{k_1}{m_1} u^2,$$

а при $m_1 = 0$

$$x_0 \to k_1 x_0, x_1 \to x_1, u^1 \to u^1, u^2 \to \frac{k_1}{m_2} u^2,$$

одержуємо

$$G = x_0 \partial_1 + x_1 (I + æ u^2 \partial_{u^1}) + u^2 \partial_{u^1}.$$

Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати $k_1 = m_2 = 1, m_1 = æ \epsilon \{0, 1\}$. Тоді система (**??**)набуде вигляду

$$(u^1 + æ u^2) f^{ab}_{u^1} + u^2 f^{ab}_{u^2} = æ(f^{2b}\delta_{a1} - f^{a1}\delta_{b2}), \tag{3.151}$$

$$u^2 f^{ab}_{u^1} = f^{2b}\delta_{a1} - f^{a1}\delta_{b2}, \tag{3.152}$$

$$(u^1 + æ u^2) g^{ab}_{u^1} + u^2 g^{ab}_{u^2} = æ(g^{2b}\delta_{a1} - g^{a1}\delta_{b2}), \tag{3.153}$$

$$\begin{gathered} u^2 g^{ab}_{u^1} = g^{2b}\delta_{a1} - g^{a1}\delta_{b2} - \\ -(f^{2b}\delta_{a1} - f^{a1}\delta_{b2}) - \\ -u^1 f^{a1}_{u^b} - u^2 f^{a2}_{u^b} - 2f^{ab} - æ(u^2 f^{a1}_{u^b} + 2f^{a1}\delta_{b2}) - \delta_{ab}, \end{gathered} \tag{3.154}$$

$$(u^1 + æ u^2) h^a_{u^1} + u^2 h^a_{u^2} = h^a + æ h^2 \delta_{a1}), \tag{3.155}$$

$$u^2 h^a_{u^1} = h^2 \delta_{a1} - u^b g^{ab} - æ u^2 g^{a1}. \tag{3.156}$$

Розв'язком системи (**??**) будуть функції

$$\begin{gathered} f^{11} = \varphi^{21} \tfrac{u^1}{u^2} + \varphi^{11}, f^{12} = -\varphi^{21} (\tfrac{u^1}{u^2})^2 + (\varphi^{22} - \varphi^{11}) \tfrac{u^1}{u^2} + \varphi^{12}, \\ f^{21} = \varphi^{21}, f^{22} = -\varphi^{21} \tfrac{u^1}{u^2} + \varphi^{22}, \end{gathered} \tag{3.157}$$

де $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(\omega)$-довільні гладкі функції, $\omega = \frac{u^1}{u^2} - æ ln u^2$.

Підставивши (**??**) у (**??**), одержимо, $\varphi^{ab} = \lambda_{ab}$. Тоді

$$\begin{array}{l} f^{11} = \lambda_{21}\frac{u^1}{u^2} + \lambda_{11}, f^{12} = -\lambda_{21}(\frac{u^1}{u^2})^2 + (\lambda_{22} - \lambda_{11})\frac{u^1}{u^1} + \lambda^{12}, \\ f^{21} = \lambda_{21}, f^{22} = -\lambda_{21}\frac{u^1}{u^2} + \lambda_{22}. \end{array} \quad (3.158)$$

Аналогічно розв'язком (**??**) будуть функції

$$\begin{array}{l} g^{11} = \psi^{21}\frac{u^1}{u^2} + \psi^{11}, g^{12} = -\psi^{21}(\frac{u^1}{u^2})^2 + (\psi^{22} - \psi^{11})\frac{u^1}{u^2} + \psi^{12}, \\ g^{21} = \psi^{21}, g^{22} = -\psi^{21}\frac{u^1}{u^2} + \psi^{22}, \end{array} \quad (3.159)$$

де $\psi^{ab} = \psi^{ab}(\omega)$-довільні гладкі функції. Підставивши (**??**) та (**??**) у (**??**), одержимо

$$\begin{array}{l} \dot{\psi}^{11} = 2\lambda_{21}\frac{u^1}{u^2} - 2æ\lambda_{21} - \lambda_{11} - \lambda_{22} - 1, \\ \dot{\psi}^{12} = -2æ\lambda_{11} - 2\lambda_{12}, \\ \dot{\psi}^{21} = 0, \\ \dot{\psi}^{22} = -2\lambda_{22} - 1. \end{array} \quad (3.160)$$

Загальним розв'язком системи (**??**) будуть функції

$$\begin{array}{l} \psi^{11} = -(2\lambda_{11} + 1)\omega + m_{11}, \\ \psi^{12} = -2(æ\lambda_{11} + \lambda_{12})\omega + m_{12}, \\ \psi^{21} = \lambda_{21}, \\ \psi^{22} = -(2\lambda_{22} + 1)\omega + m_{22}. \end{array} \quad (3.161)$$

Таким чином,

$$\begin{array}{l} g^{11} = -(2\lambda_{11} + 1)\omega + m_{11}, \\ g^{12} = -2(æ\lambda_{11} + \lambda_{12})\omega + (m_{22} - m_{11})\frac{u^1}{u^2} + m_{12}, \\ g^{21} = 0, g^{22} = -(2\lambda_{22} + 1)\omega + m_{22}. \end{array} \quad (3.162)$$

Система (**??**) має загальний розв'язок

$$\begin{array}{l} h^1 = u^2\chi^1(\omega) + u^1\chi^2(\omega), \\ h^2 = u^2\chi^2(\omega), \end{array} \quad (3.163)$$

де $\chi^a = \chi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції. Підставивши (**??**) та (**??**) у (**??**), одержимо систему диференціальних рівнянь для визначення функцій χ^a

$$\begin{aligned}&\dot{\chi}^1+\tfrac{u^1}{u^2}\dot{\chi}^2-\tfrac{u^1}{u^2}(2\lambda_{11}+1)\omega+(æ-2\lambda_{12})\omega+\\&+m_{22}\tfrac{u^1}{u^2}-æm_{11}+m_{12}=0,\\&\dot{\chi}^2-(2\lambda_{11}+1)\omega+m_{22}=0.\end{aligned}\tag{3.164}$$

Із системи (??) випливає, що $\lambda_{11}=\lambda_{22}$. Загальним розв'язком цієї системи будуть функції

$$\begin{aligned}&\chi^1=(\lambda_{12}-\tfrac{æ}{2})\omega^2+æm_{11}\omega+n_1,\\&\chi^2=(\lambda_{11}+\tfrac{1}{2})\omega^2-m_{22}\omega+n_2.\end{aligned}\tag{3.165}$$

Отже,

$$\begin{aligned}&h^1=u^2[(\lambda_{12}-\tfrac{æ}{2})\omega^2+æm_{11}\omega+n_1]+\\&+u^1[(\lambda_{11}+\tfrac{1}{2})\omega^2-m_{22}\omega+n_2],\\&h^2=u^2[(\lambda_{11}+\tfrac{1}{2})\omega^2-m_{22}\omega+n_2].\end{aligned}\tag{3.166}$$

Таким чином, перший пункт даної теореми доведено.

2) При $k_1\neq 0, m_2=0$ аналогічно за властивістю лінійної комбінації операторів алгебри можна вважати $k_2=0$.

Застосовуючи перетворення еквівалентності :

при $m_1\neq 0$

$$x_0\to k_1x_0, x_1\to x_1, u^1\to\frac{m_1}{k_1}u^1, u^2\to u^2,$$

а при $m_1=0$

$$x_0\to k_1x_0, x_1\to x_1, u^1\to u^1, u^2\to u^2,$$

одержуємо, що оператор G набуває наступного вигляду

$$G=x_0\partial_1+x_1(I+æu^2\partial_{u^1}).$$

Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати $k_1=1, m_1=æ\epsilon\{0,1\}$. Тоді система (??)набуде вигляду

$$(u^1+æu^2)f^{ab}_{u^1}+u^2f^{ab}_{u^2}=æ(f^{2b}\delta_{a1}-f^{a1}\delta_{b2}),\tag{3.167}$$

$$(u^1+æu^2)g^{ab}_{u^1}+u^2g^{ab}_{u^2}=æ(g^{2b}\delta_{a1}-g^{a1}\delta_{b2}),\tag{3.168}$$

$$u^1 f^{a1}_{u^b} + u^2 f^{a2}_{u^b} + 2f^{ab} + æ(u^2 f^{a1}_{u^b} + 2f^{a1}\delta_{b2}) + \delta_{ab} = 0, \tag{3.169}$$

$$(u^1 + æu^2)h^a_{u^1} + u^2 h^a_{u^2} = h^a + æh^2\delta_{a1}, \tag{3.170}$$

$$u^b g^{ab} + æu^2 g^{a1} = 0. \tag{3.171}$$

Загальним розв'язком системи (**??**) та (**??**) будуть функції (**??**) та (**??**) відповідно. Підставивши (**??**) у (**??**), функції f^{ab} уточнюються наступним чином

$$f^{11} = -\tfrac{1}{2}, f^{12} = \tfrac{æ}{2}, f^{21} = 0, f^{22} = -\tfrac{1}{2}. \tag{3.172}$$

Підставивши (**??**) у (**??**), одержимо

$$\psi^{12} = -æ\psi^{11}, \psi^{22} = -æ\psi^{21}. \tag{3.173}$$

Таким чином з врахуванням (**??**) вигляд функцій g^{ab} уточниться наступним чином

$$\begin{aligned} &g^{11} = \psi^{11} + \psi^{21}\tfrac{u^1}{u^2}, g^{12} = -(\tfrac{u^1}{u^2} + æ)(\psi^{11} + \psi^{21}\tfrac{u^1}{u^2}),\\ &g^{21} = \psi^{21}, g^{22} = -(\tfrac{u^1}{u^2} + æ)\psi^{21}. \end{aligned} \tag{3.174}$$

Загальним розв'язком системи (**??**) будуть функції (**??**), причому $\omega = \frac{u^1}{u^2} - æ ln u^2$.

Другий пункт даної теореми доведено.

3) При $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ за властивістю лінійної комбінації операторів алгебри, не втрачаючи загальності, можна вважати $m_2 = 0$. Зауважимо, що у цьому випадку $m_1 \neq 0$, так як ми вважаємо, що $Q_1 \neq 0$.

Застосовуючи перетворення еквівалентності :

$$x_0 \to k_2 x_0, x_1 \to x_1, u^1 \to \frac{m_1}{k_2}u^1, u^2 \to u^2,$$

одержуємо

$$G = x_0\partial_1 + x_1 u^2 \partial_{u^1} + I.$$

Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати $k_2 = m_1 = 1$. Тоді система (**??**)набуде вигляду

$$u^2 f^{ab}_{u^1} = f^{2b}\delta_{a1} - f^{a1}\delta_{b2}, \tag{3.175}$$

$$u^1 f^{ab}_{u^1} + u^2 f^{ab}_{u^1} = 0, \tag{3.176}$$

$$u^2 g^{ab}_{u^1} = g^{2b}\delta_{a1} - g^{a1}\delta_{b2}, \tag{3.177}$$

$$u^1 g^{ab}_{u^1} + u^2 g^{ab}_{u^1} = -(f^{2b}\delta_{a1} - f^{a1}\delta_{b2}) - u^2 f^{a1}_{u^b} - 2f^{a1}\delta_{b2} - \delta_{ab}, \tag{3.178}$$

$$u^2 h^a_{u^1} = h^2\delta_{a1}, \tag{3.179}$$

$$u^1 h^a_{u^1} + u^1 h^a_{u^2} = h^a - u^2 g^{a1}. \tag{3.180}$$

Розв'язком системи (**??**) будуть функції

$$\begin{aligned} &f^{11} = \varphi^{21}\tfrac{u^1}{u^2} + \varphi^{11}, f^{12} = -2\varphi^{21}(\tfrac{u^1}{u^2})^2 + (\varphi^{22} - \varphi^{11})\tfrac{u^1}{u^1} + \varphi^{12},\\ &f^{21} = \varphi^{21}, f^{22} = -\varphi^{21}\tfrac{u^1}{u^2} + \varphi^{22}, \end{aligned} \tag{3.181}$$

де $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(u^2)$-довільні гладкі функції. Підставивши (**??**) у (**??**), одержимо, що $\varphi^{ab} = \lambda_{ab}$. Тоді

$$\begin{aligned} &f^{11} = \lambda_{21}\tfrac{u^1}{u^2} + \lambda_{11}, f^{12} = -2\lambda_{21}(\tfrac{u^1}{u^2})^2 + (\lambda_{22} - \lambda_{11})\tfrac{u^1}{u^1} + \lambda_{12},\\ &f^{21} = \lambda_{21}, f^{22} = -\lambda_{21}\tfrac{u^1}{u^2} + \lambda_{22}. \end{aligned} \tag{3.182}$$

Загальним розв'язком (**??**) будуть функції

$$\begin{aligned} &g^{11} = \psi^{21}\tfrac{u^1}{u^2} + \psi^{11}, g^{12} = -2\psi^{21}(\tfrac{u^1}{u^2})^2 + (\psi^{22} - \psi^{11})\tfrac{u^1}{u^1} + \psi^{12},\\ &g^{21} = \psi^{21}, g^{22} = -\psi^{21}\tfrac{u^1}{u^2} + \psi^{22}, \end{aligned} \tag{3.183}$$

де $\psi^{ab} = \psi^{ab}(u^2)$-довільні гладкі функції. Підставивши (**??**) та (**??**) у (**??**), одержимо

$$\begin{aligned} &u^2\dot{\psi}^{11} = -2\lambda_{21} - 1,\\ &u^2\dot{\psi}^{12} = -\lambda_{11} - \lambda_{22},\\ &\dot{\psi}^{21} = 0,\\ &u^2\dot{\psi}^{22} = -\lambda_{21} - 1. \end{aligned} \tag{3.184}$$

Загальним розв'язком системи (**??**) будуть функції

$$\begin{aligned} &\psi^{11} = -(2\lambda_{21} + 1)\ln u^2 + m_{11},\\ &\psi^{12} = -(\lambda_{11} + \lambda_{22})\ln u^2 + m_{12},\\ &\psi^{21} = m_{21},\\ &\psi^{22} = -(\lambda_{21} + 1)\ln u^2 + m_{22}, \end{aligned} \tag{3.185}$$

де m_{ab} — сталі інтегрування. Таким чином, функції (??) з врахуванням (??) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
&g^{11} = m_{21}\tfrac{u^1}{u^2} - (2\lambda_{21}+1)lnu^2 + m_{11},\\
&g^{12} = -2m_{21}(\tfrac{u^1}{u^2})^2 + (\lambda_{21}lnu^2 + m_{22} - m_{11})\tfrac{u^1}{u^2} -\\
&-(\lambda_{11}+\lambda_{22})lnu^2 + m_{12}\\
&g^{21} = m_{21}, g^{22} = -m_{21}\tfrac{u^1}{u^2} - (\lambda_{21}+1)lnu^2 + m_{22}.
\end{aligned} \tag{3.186}$$

Загальним розв'язком системи (??) будуть функції

$$\begin{aligned}
&h^1 = \chi^2\tfrac{u^1}{u^2} + \chi^1,\\
&h^2 = \chi^2,
\end{aligned} \tag{3.187}$$

де $\chi^a = \chi^a(u^2)$ — довільні гладкі функції. Підставивши (??) та (??) у (??), одержимо систему

$$\begin{aligned}
&u^2\dot{\chi}^1 = \chi^1 + [(2\lambda_{21}+1)lnu^2 - m_{11}]u^2,\\
&u^2\dot{\chi}^2 = \chi^2 - m_{21}u^2.
\end{aligned} \tag{3.188}$$

Загальним розв'язком системи (??) будуть функції

$$\begin{aligned}
&\chi^1 = [(\lambda_{21}+\tfrac{1}{2})ln^2u^2 - m_{11}lnu^2 + n_1]u^2,\\
&\chi^2 = (-m_{21}lnu^2 + n_2)u^2.
\end{aligned} \tag{3.189}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&h^1 = u^1(-m_{21}lnu^2 + n_2) + u^2[(\lambda_{21}+\tfrac{1}{2})ln^2u^2 - m_{11}lnu^2 + n_1],\\
&h^2 = u^2(-m_{21}lnu^2 + n_2),
\end{aligned} \tag{3.190}$$

що і доводить третій пункт даної теореми.

Теорема доведена.

Теорема 4.7. *Система рівнянь (??) інваріантна відносно алгебри Галілея (??)при умові (??) тоді і тільки тоді, коли матриці F, G, H з точністю до перетворень еквівалентності (??) мають* *наступний вигляд*

$$F(U)=\begin{pmatrix} c_1+\lambda_1-\frac{2u^1}{\vec{u}^2}\vec{\lambda}\vec{u} & c_2+\lambda_2-\frac{2u^2}{\vec{u}^2}\vec{\lambda}\vec{u} \\ -c_2+\lambda_2-\frac{2u^2}{\vec{u}^2}\vec{\lambda}\vec{u} & c_1-\lambda_1+\frac{2u^1}{\vec{u}^2}\vec{\lambda}\vec{u}\end{pmatrix},$$
$$G(U)=\begin{pmatrix} \alpha^1+\beta^1-\frac{2u^1}{\vec{u}^2}\vec{\beta}\vec{u} & \alpha^2+\beta^2-\frac{2u^2}{\vec{u}^2}\vec{\beta}\vec{u} \\ -\alpha^2+\beta^2-\frac{2u^2}{\vec{u}^2}\vec{\beta}\vec{u} & \alpha^1-\beta^1+\frac{2u^1}{\vec{u}^2}\vec{\beta}\vec{u}\end{pmatrix}, \quad (3.191)$$
$$H(U)=\begin{pmatrix} u^1\chi^1+u^2\chi^2 \\ -u^1\chi^2+u^2\chi^1\end{pmatrix}.$$

причому $Q_1=k_1I-k_2J, Q_2=m_1I-m_2J$, $\omega=k_2 ln\vec{u}^2+2k_1 arctg\frac{u^2}{u^1}$, $\vec{\alpha}=\vec{p}\omega+\vec{m}$, $\vec{\beta}=\vec{r}\omega+\vec{l}$, $\vec{\chi}=\vec{\gamma}\omega^2+\vec{\sigma}\omega+\vec{n}$; $\vec{m}=(m_1,m_2)$, $|m_1|+|m_2|\neq 0$, $\vec{n}=(n_1,n_2)$, $\vec{r}=\frac{1}{2\vec{k}\vec{m}^{\perp}}(k_1\lambda_1-k_2\lambda_2\,,\ k_1\lambda_2+k_2\lambda_1)$, $\vec{p}=\frac{1}{2\vec{k}\vec{m}^{\perp}}(2(c_1k_1-c_2k_2)-\vec{\lambda}\vec{k}+1, 2(c_1k_2+c_2k_1)-\vec{\lambda}\vec{k}^{\perp})$, $\vec{\gamma}=\frac{k_1\vec{p}-k_1\vec{r}+k_2\vec{p}^{\perp}+k_2\vec{r}^{\perp}}{4\vec{k}\vec{m}^{\perp}}$, $\vec{\sigma}=\frac{k_1\vec{m}-k_1\vec{l}+k_2\vec{m}^{\perp}+k_2\vec{l}^{\perp}}{2\vec{k}\vec{m}^{\perp}}$, $\vec{k}^{\perp}=(-k^2,k^1)$, $|\vec{k}|=1$, $c_a,k_a,\lambda_a,m_a,n_a\epsilon\mathbb{R}$;

$$F(U)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_1\end{pmatrix},$$
$$G(U)=\begin{pmatrix} 2k_1\vec{k}\vec{\beta}-\frac{2u^1}{\vec{u}^2}\vec{\beta}\vec{u} & 2k_1\vec{k}^{\perp}\vec{\beta}-\frac{2u^2}{\vec{u}^2}\vec{\beta}\vec{u} \\ 2k_2\vec{k}\vec{\beta}-\frac{2u^2}{\vec{u}^2}\vec{\beta}\vec{u} & 2k_2\vec{k}^{\perp}\vec{\beta}+\frac{2u^1}{\vec{u}^2}\vec{\beta}\vec{u}\end{pmatrix}, \quad (3.192)$$
$$H(U)=\begin{pmatrix} u^1\chi^1+u^2\chi^2 \\ -u^1\chi^2+u^2\chi^1\end{pmatrix}.$$

причому $Q_1=k_1I-k_2J, Q_2=0$, $\omega=k_2 ln\vec{u}^2+2k_1 arctg\frac{u^2}{u^1}$, $\alpha^a=\alpha^a(\omega),\beta^a=$
$=\beta^a(\omega),\chi^a=\chi^a(\omega)$ *— довільні гладкі функції.*

Доведення. З умови інваріантності системи рівнянь (**??**) відносно оператора Галілея при умові (**??**) випливає, що

$$\xi^0=0,\xi^1=x_0,\eta^a=(k_1u^a+\varepsilon_{ab}k_2u^b)x_1+m_1u^a+\varepsilon_{ab}m_2u^b, \quad (3.193)$$

причому $(\varepsilon_{ab})=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Підставимо (**??**) у систему (**??**) та розщепимо її за степенями x_1:

$$Q_c(f^{ab})=L_{abc}(f), \quad (3.194)$$

$$\begin{aligned} &Q_c(g^{ab}) = L_{abc}(g) - \delta_{c2}[(k_2u^1 + k_1u^2)(f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + \\ &+2(\delta_{bd}k_1 + \varepsilon_{db}k_2)f^{ad} + \delta_{ab}], \end{aligned} \tag{3.195}$$

$$Q_c(h^a) = \alpha_{cab}h^b + \delta_{c2}(k_1u^b + k_2\varepsilon_{bd}u^d)g^{ab}, \tag{3.196}$$

де $L_{abc}(f) = (\delta_{c1}k_2 + \delta_{c2}m_2)(\delta_{b1}f^{a2} - \delta_{b2}f^{a1} + \delta_{a1}f^{2b} - \delta_{a2}f^{1b}), \alpha_{cab} = \delta_{c1}(\delta_{ab}k_1 + +\varepsilon_{ab}k_2) + \delta_{c2}(\delta_{ab}m_1 + \varepsilon_{ab}m_2)$.

При $c = 1$ система (**??**) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} &Q_1(f^{11}) = k_2(f^{12} + f^{21}), \\ &Q_1(f^{12}) = k_2(f^{22} - f^{11}), \\ &Q_1(f^{21}) = k_2(f^{22} - f^{11}), \\ &Q_1(f^{22}) = -k_2(f^{12} + f^{21}). \end{aligned} \tag{3.197}$$

Після заміни

$$W^1 = f^{11} + f^{22}, W^2 = f^{12} - f^{21}, W^3 = f^{11} - f^{22}, W^4 = f^{12} + f^{21}$$

система (**??**) перепишеться наступним чином

$$Q_1(W^1) = 0, Q_1(W^2) = 0, Q_1(W^3) = 2k_2W^4, Q_1(W^4) = -2k_2W^3. \tag{3.198}$$

Загальний розв'язок системи (**??**) має вигляд

$$\begin{aligned} &W^1 = 2\varphi^1(\omega), W^2 = 2\varphi^2(\omega), \\ &W^3 = 2\psi^1(\omega) - 4\tfrac{u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\psi}\,\overrightarrow{u}, W^4 = 2\psi^2(\omega) - 4\tfrac{u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\psi}\,\overrightarrow{u}, \end{aligned} \tag{3.199}$$

де $\omega = k_2 \ln \overrightarrow{u}^2 + 2k_1 arctg\frac{u^2}{u^1}$, $\varphi^a = \varphi^a(\omega), \psi^a = \psi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції. З останньої системи випливає, що загальним розв'язком (**??**) будуть функції

$$\begin{aligned} &f^{1a} = \varphi^a + \psi^a - 2\tfrac{u^a}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\psi}\,\overrightarrow{u}, \\ &f^{2a} = \varphi^{a\perp} - \psi^{a\perp} + 2\tfrac{u^{a\perp}}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\psi}\,\overrightarrow{u}, \end{aligned} \tag{3.200}$$

де $\overrightarrow{u}^\perp = (-u^2, u^1)$.

Аналогічно загальний розв'язок системи (**??**) при $c = 1$ має вигляд

$$\begin{aligned} &g^{1a} = \alpha^a + \beta^a - 2\tfrac{u^a}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\beta}\,\overrightarrow{u}, \\ &g^{2a} = \alpha^{a\perp} - \beta^{a\perp} + 2\tfrac{u^{a\perp}}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\beta}\,\overrightarrow{u}, \end{aligned} \tag{3.201}$$

де $\alpha^a = \alpha^a(\omega), \beta^a = \beta^a(\omega)$-довільні гладкі функції. Неважко впевнитись, що загальним розв'язком системи (**??**) при $c = 1$ будуть наступні функції

$$h^1 = \overrightarrow{\chi}\overrightarrow{u}, h^2 = \overrightarrow{\chi}^{\perp}\overrightarrow{u} \tag{3.202}$$

при довільних гладких функціях χ^a.

Підставивши (**??**) у (**??**) при $c = 2$, одержимо систему

$$\begin{aligned}&(k_2m_1 - k_1m_2)(\dot{\varphi}^a + \dot{\psi}^a - 2\tfrac{u^a}{\overrightarrow{u}^2}\dot{\overrightarrow{\psi}}\overrightarrow{u}) = 0,\\ &(k_2m_1 - k_1m_2)(\dot{\varphi}^{a\perp} - \dot{\psi}^{a\perp} + 2\tfrac{u^{a\perp}}{\overrightarrow{u}^2}\dot{\overrightarrow{\psi}}\overrightarrow{u}) = 0.\end{aligned} \tag{3.203}$$

Аналогічно система (**??**) за умов (**??**) при $c = 2$ перепишеться наступним чином

$$\begin{aligned}&2\overrightarrow{k}\overrightarrow{m}^{\perp}(\dot{\alpha}^a + \dot{\beta}^a - 2\tfrac{u^a}{\overrightarrow{u}^2}\dot{\overrightarrow{\beta}}\overrightarrow{u}) =\\ &= -(k_2u^1 - k_1u^2)(f^{1a}_{u^2} + f^{12}_{u^b}) + 2(\delta_{ad}k_1 + \varepsilon_{da}k_2)f^{1d} + \delta_{1a},\\ &2\overrightarrow{k}\overrightarrow{m}^{\perp}(\dot{\alpha}^{a\perp} - \dot{\beta}^{a\perp} + 2\tfrac{u^{a\perp}}{\overrightarrow{u}^2}\dot{\overrightarrow{\beta}}\overrightarrow{u}) =\\ &= -(k_2u^1 - k_1u^2)(f^{2a}_{u^2} + f^{22}_{u^a}) + 2(\delta_{ad}k_1 + \varepsilon_{da}k_2)f^{2d} + \delta_{2a}.\end{aligned} \tag{3.204}$$

Система (**??**) за умов (**??**) при $c = 2$ набуде вигляду

$$\begin{aligned}&[2\overrightarrow{k}\overrightarrow{m}^{\perp}\dot{\overrightarrow{\chi}} - k_1(\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}) - k_2(\overrightarrow{\alpha}^{\perp} + \overrightarrow{\beta}^{\perp})]\overrightarrow{u} = 0,\\ &(2\overrightarrow{k}\overrightarrow{m}^{\perp}\dot{\overrightarrow{\chi}}^{\perp} - k_1(\overrightarrow{\alpha}^{\perp} - \overrightarrow{\beta}^{\perp}) + k_2(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}))\overrightarrow{u} = 0.\end{aligned} \tag{3.205}$$

При розв'язуванні систем (**??**)–(**??**) виникають наступні суттєво різні випадки:

1) $\overrightarrow{k}\overrightarrow{m}^{\perp} \neq 0$, 2) $\overrightarrow{k}\overrightarrow{m}^{\perp} = 0$.

Розглянемо детально кожен з них.

1) При $\overrightarrow{k}\overrightarrow{m}^{\perp} \neq 0$ загальним розв'язком системи(**??**) будуть функції

$$\begin{aligned}&f^{11} = c_1 + \lambda_1 - \tfrac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\lambda}\overrightarrow{u}, f^{12} = c_2 + \lambda_2 - \tfrac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\lambda}\overrightarrow{u},\\ &f^{21} = -c_2 + \lambda_2 - \tfrac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\lambda}\overrightarrow{u}, f^{22} = c_1 - \lambda_1 + \tfrac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\lambda}\overrightarrow{u}.\end{aligned} \tag{3.206}$$

Підставивши (**??**) у (**??**) та розв'язавши одержану систему, отримаємо

$$\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{p}\omega + \overrightarrow{m}, \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{r}\omega + \overrightarrow{l}, \tag{3.207}$$

де $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{m}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{l}$-сталі інтегрування. В даному випадку система (??) перепишеться наступним чином

$$\dot{\overrightarrow{\chi}} = \frac{k_1(\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta})+k_2(\overrightarrow{\alpha}^{\perp}+\overrightarrow{\beta}^{\perp})}{2\overrightarrow{k}\overrightarrow{m}^{\perp}}. \tag{3.208}$$

Підставивши (??) у (??), одержимо систему, загальним розв'язком якої будуть функції

$$\overrightarrow{\chi} = \overrightarrow{\gamma}\omega^2 + \overrightarrow{\sigma}\omega + \overrightarrow{n}. \tag{3.209}$$

Із співвідношень (??), (??) та (??) при врахуванні (??), (??) можна зробити висновок, що нелінійності F, G, H мають вигляд (??).

2) При $\overrightarrow{k}\overrightarrow{m}^{\perp} = 0$ система(??) набуде вигляду

$$\begin{aligned}(k_2u^1 - k_1u^2)(f^{1a}_{u^2} + f^{12}_{u^b}) - 2(\delta_{ad}k_1 + \varepsilon_{da}k_2)f^{1d} - \delta_{1a} = 0,\\ (k_2u^1 - k_1u^2)(f^{2a}_{u^2} + f^{22}_{u^a}) - 2(\delta_{ad}k_1 + \varepsilon_{da}k_2)f^{2d} - \delta_{2a} = 0.\end{aligned} \tag{3.210}$$

Підставивши (??) у (??) та розщепивши одержану систему по $\overrightarrow{u}$, отримаємо

$$k_1\varphi^1 - k_2\varphi^2 = -\tfrac{1}{2}, k_2\varphi^1 + k_1\varphi^2 = 0. \tag{3.211}$$

Тому

$$f^{11} = -\tfrac{k_1}{2\overrightarrow{k}^2}, f^{12} = -\tfrac{k_2}{2\overrightarrow{k}^2}, f^{21} = \tfrac{k_2}{2\overrightarrow{k}^2}, f^{22} = -\tfrac{k_1}{2\overrightarrow{k}^2}. \tag{3.212}$$

Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\overrightarrow{k}^2 = 1$.

В даному випадку система (??) перепишеться наступним чином

$$k_1(\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}) + k_2(\overrightarrow{\alpha}^{\perp} + \overrightarrow{\beta}^{\perp}) = 0. \tag{3.213}$$

Підставивши загальний розв'язок (??) у (??) та розв'язавши одержану систему, знаходимо, що функції g^{ab} уточняться наступним чином

$$\begin{aligned}g^{11} = 2k_1\overrightarrow{k}\overrightarrow{\beta} - \tfrac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\beta}\overrightarrow{u}, g^{12} = 2k_1\overrightarrow{k}^{\perp}\overrightarrow{\beta} - \tfrac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\beta}\overrightarrow{u},\\ g^{21} = 2k_2\overrightarrow{k}\overrightarrow{\beta} - \tfrac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\beta}\overrightarrow{u}, g^{22} = 2k_2\overrightarrow{k}^{\perp}\overrightarrow{\beta} + \tfrac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{\beta}\overrightarrow{u}.\end{aligned} \tag{3.214}$$

Отже, враховуючи (??), (??) та (??) при умові (??), одержуємо, що нелінійності F, G, H мають вигляд (??).

Теорема доведена.

Зауваження 4.1. В теоремах 4.2–4.7 доведено інваріантність системи (**??**) тільки відносно оператора

$$G = x_0\partial_1 + x_1 Q_1 + Q_2.$$

Так як для кожного випадку система визначальних рівнянь розчеплюється по x_1, то звідси випливає інваріантність системи (**??**) відносно оператора Q_1. Відносно операторів ∂_0, ∂_1 система (**??**) інваріантна при довільних нелінійностях. Таким чином, можна стверджувати, що система (**??**) інваріантна відносно алгебри Галілея (**??**).

Отже, для кожного з можливих зображень алгебри Галілея з точністю до перетворень еквівалентності (**??**) знайдено нелінійності f^{ab}, g^{ab}, h^a, при яких система (**??**) інваріантна відносно даної алгебри.

3.5. Зображення розширеної алгебри Галілея

Розширимо алгебру Галілея (**??**) оператором масштабних перетворень X_5, для якого виконуються наступні комутаційні співвідношення

$$[\partial_0, X_5] = 2\partial_0, \quad [\partial_1, X_5] = \partial_1, \quad [G, X_5] = -G, \quad [Q_1, X_5] = 0. \tag{3.215}$$

Встановимо зображення розширеної алгебри Галілея вигляду (**??**), відносно якої може бути інваріантна система (**??**).

Згідно (**??**) маємо загальний вигляд оператора масштабних перетворень

$$X_5 = A^5(x_0)\partial_0 + B^5(x_0, x_1)\partial_1 + [\alpha^{5ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{5a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \tag{3.216}$$

де $A^5, B^5, \alpha^{5ab}, \beta^{5a}$ — довільні гладкі функції відповідних аргументів, які підлягають визначенню за формулами (**??**).

З комутаційних умов $[\partial_0, X_5] = 2\partial_0$ та $[\partial_1, X_5] = \partial_1$ одержуємо, що

$$A^5 = 2x_0, B^4 = x_1, \alpha^{5ab} = \alpha^5_{ab}, \beta^{5a} = \beta^5_a, \tag{3.217}$$

де α^5_{ab}, β^5_a-довільні сталі.

Отже,

$$X_5 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3, \tag{3.218}$$

де $Q_3 = (\alpha^5_{ab}u^b + \beta^5_a)\partial_{u^a}$.

З комутаційних співвідношень $[G, X_5] = -G$ та $[Q_1, X_5] = 0$ маємо

$$[Q_1, Q_3] = 0, [Q_2, Q_3] = -Q_2. \tag{3.219}$$

Оператор X_5 позначимо D.

Таким чином, розширена алгебра Галілея для системи (??) має вигляд

$$\begin{aligned} &AG_1(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + x_1 Q_1 + Q_2, Q_1, \\ &D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3\rangle, \end{aligned} \tag{3.220}$$

де оператори Q_1, Q_2, Q_3 задовольняють умови (??), (??).

В роботі [?] показано, що з точністю до перетворень еквівалентності (??) існує десять нееквівалентних наборів операторів Q_1, Q_2, Q_3, для яких виконуються умови (??), (??).

3.6. Інваріантність системи (??) відносно розширеної алгебри Галілея

Знайдемо вигляд нелінійностей F, G, H, при яких система (??) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея (??).

Теорема 4.8. *Система рівнянь (??) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея (??) тоді і тільки тоді, коли матриці F, G, H з точністю до перетворень еквівалентності (??) мають наступний вигляд*

$$\begin{aligned} &F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} -u^2 & m_{12} \\ 0 & -u^2 \end{pmatrix}, \\ &H(U) = \tfrac{1}{2}(u^2)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.221}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = \partial_{u^2}$,$Q_3 = k_3\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$;

$$\begin{aligned} &F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & -\frac{u^1}{u^2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, G(U) = (u^1)^k \begin{pmatrix} m_{11}u^1 & 0 \\ m_{21}u^2 & 0 \end{pmatrix}, \\ &H(U) = (u^1)^{2(k+1)} \begin{pmatrix} n_1u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.222}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}, Q_2 = 0, Q_3 = -\frac{1}{k+1}u^1\partial_{u^1} + m_3u^2\partial_{u^2}$, $k \neq -1$;

$$\begin{aligned} &F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} -u^1 & 0 \\ m_{21}u^2 & -(2\lambda_{22}+1)u^1 \end{pmatrix}, \\ &H(U) = (u^1)^2u^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{22} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.223}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}, Q_2 = \partial_{u^1}$, $Q_3 = -u^1\partial_{u^1} + m_3u^2\partial_{u^2}$;

$$\begin{aligned} &F(U) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2m_1} \end{pmatrix}, G(U) = \omega^k \begin{pmatrix} -m_1m_{11} & m_{11}\frac{u^1}{u^2} \\ -m_1m_{12}\frac{u^2}{u^1} & m_{12} \end{pmatrix}, \\ &H(U) = \omega^{2k} \begin{pmatrix} n_1u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.224}$$

причому $Q_1 = u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}, Q_2 = 0, Q_3 = k_3u^1\partial_{u^1} + (k_3m_1 - \frac{1}{k})u^2\partial_{u^2}$, $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^{m_1}}$, $m_1 \neq 0$, $k \neq 0$;

$$\begin{aligned} &F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{11} \end{pmatrix}, G(U) = -(2\lambda_{11}+1)\frac{u^1}{u^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &H(U) = (\lambda_{11} + \tfrac{1}{2})(\tfrac{u^1}{u^2})^2 \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.225}$$

причому $Q_1 = I, Q_2 = u^2\partial_{u^1}, Q_3 = k_3I + u^2\partial_{u^2}$;

$$\begin{aligned} &F(U) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -æ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &G(U) = e^{m\omega} \begin{pmatrix} m_{11} + m_{21}\frac{u^1}{u^2} & -(\frac{u^1}{u^2} + æ)(m_{11} + m_{21}\frac{u^1}{u^2}) \\ m_{21} & -(\frac{u^1}{u^2} + æ)m_{21} \end{pmatrix}, \\ &H(U) = e^{2m\omega} \begin{pmatrix} n_1u^2 + n_2u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.226}$$

причому $Q_1 = I + æu^2\partial_{u^1}, Q_2 = 0, Q_3 = k_3I + (k_3æ - \frac{1}{m})u^2\partial_{u^1}$, $\omega =$
$= \frac{u^1}{u^2} - æ\ln u^2$, $m \neq 0$;

$$\begin{aligned} &F(U) = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} m_{11}\frac{u^1}{u^2} & -m_{11}(\frac{u^1}{u^2})^2 \\ m_{21} & -m_{21}\frac{u^1}{u^2} \end{pmatrix}, \\ &H(U) = (\tfrac{u^1}{u^2})^2\begin{pmatrix} n_1u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.227}$$

причому $Q_1 = I, Q_2 = 0, Q_3 = k_3I + u^2\partial_{u^2}$;

$$\begin{aligned} &F(U) = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix}, \\ &G(U) = e^{-\frac{1}{2\triangle}\omega}\begin{pmatrix} 2k_1\overrightarrow{k}\overrightarrow{m} - \frac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} & 2k_1\overrightarrow{k}^{\perp}\overrightarrow{m} - \frac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} \\ 2k_2\overrightarrow{k}\overrightarrow{m} - \frac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} & 2k_2\overrightarrow{k}^{\perp}\overrightarrow{m} + \frac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} \end{pmatrix}, \\ &H(U) = e^{-\frac{1}{\triangle}\omega}\begin{pmatrix} \overrightarrow{n}\overrightarrow{u}\cos\frac{m_3}{\triangle}\omega + \overrightarrow{n}\overrightarrow{u}^{\perp}\sin\frac{m_3}{\triangle}\omega \\ -\overrightarrow{n}\overrightarrow{u}^{\perp}\cos\frac{m_3}{\triangle}\omega + \overrightarrow{n}\overrightarrow{u}\sin\frac{m_3}{\triangle}\omega \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.228}$$

причому $Q_1 = k_1I - k_2J, Q_2 = 0, Q_3 = k_3I + m_3J$, $\omega = k_2\ln\overrightarrow{u}^2 +$
$+ 2k_1 arctg\frac{u^2}{u^1}$, $\triangle = k_2k_3 - k_1m_3$, $\triangle \neq 0$, $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2)$.

У формулах (??)–(??) $æ\epsilon\{0,1\}$, $\lambda_{ab}, m_{ab}, n_a, k_i, m_i, m, k$ *— довільні сталі,* $a, b = \overline{1,2}, i = \overline{1,3}$.

Доведення. Розглянемо нелінійності (??). Розширення алгебри Галілея в даному випадку можливе лише, коли $æ = 0$. Оператор масштабних перетворень має вигляд $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + k_3\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$. Так як $Q_1 = \partial_{u^1}$, то, не втрачаючи загальності, взявши лінійну комбінацію операторів Q_1 і Q_2, можна вважати $k_3 = 0$. Тому координати оператора масштабних перетворень мають вигляд

$$\xi^0 = 2x_0, \xi^1 = x_1, \eta^a = -\delta_{a2}u^2 \tag{3.229}$$

Підставивши (??) у (??), одержимо

$$\delta_{a2}f^{2b} - \delta_{b2}f^{a2} = 0, \tag{3.230}$$

$$-\delta_{c2}u^2g^{ab}_{u^c} + g^{ab} - \delta_{b2}g^{a2} + \delta_{a2}g^{2b} = 0, \tag{3.231}$$

$$-u^2h^a_{u^2} + 2h^a + \delta_{a2}h^2 = 0. \tag{3.232}$$

Підставивши (**??**) у систему рівнянь (**??**)–(**??**) та розв'язавши її одержуємо, що $\lambda_{12} = \lambda_{21} = m_{11} = m_{21} = m_{22} = n_1 = n_2 = 0$. Таким чином, нелінійності F, G, H мають вигляд (**??**).

Перший пункт теореми доведено.

Розглянемо систему з нелінійностями (**??**) В даному випадку оператор масштабних перетворень має вигляд $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + + k_3u^1\partial_{u^1} + m_3u^2\partial_{u^2}$. Не втрачаючи загальності, в силу лінійної комбінації операторів $Q_1 = u^2\partial_{u^2}$ і D можна вважати, що $m_3 = 0$. Тоді координати оператора масштабних перетворень мають вигляд

$$\xi^0 = 2x_0, \xi^1 = x_1, \eta^a = -\tfrac{1}{k+1}\delta_{a1}u^1, \tag{3.233}$$

де $k_3 = -\frac{1}{k+1}$.

Підставивши (**??**) у (**??**), одержимо

$$u^1 f^{ab}_{u^1} + \delta_{b1}f^{a1} - \delta_{a1}f^{1b} = 0, \tag{3.234}$$

$$-\tfrac{1}{k+1}(u^1 g^{ab}_{u^1} + \delta_{b1}g^{a1} - \delta_{a1}g^{1b}) + g^{ab} = 0, \tag{3.235}$$

$$-\tfrac{1}{k+1}(u^1 h^a_{u^1} - \delta_{a1}h^1) + 2h^a = 0. \tag{3.236}$$

Розв'язувавши систему рівнянь (**??**)–(**??**), попередньо підставивши в неї (**??**), приходимо до висновку, що $\varphi^{11} = \lambda_{11}$,
$\psi^1 = m_{11}(u^1)^{k+1}, \psi^2 = m_{21}(u^1)^k$, $\chi^1 = n_1(u^1)^{2(k+1)+1}, \chi^2 = n_2(u^1)^{2(k+1)}$
Отже, нелінійності F, G, H мають вигляд (**??**).

Другий пункт теореми доведено.

Розглянемо систему з нелінійностями (**??**). В даному випадку оператор масштабних перетворень має вигляд $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + + k_3u^1\partial_{u^1} + m_3u^2\partial_{u^2}$. Аналогічно до попереднього випадку, не втрачаючи загальності, можна вважати $m_3 = 0$. Тому оператор масштабних претворень для третього пункту теореми має координати

$$\xi^0 = 2x_0, \xi^1 = x_1, \eta^a = \delta_{a1}k_3u^1 \tag{3.237}$$

Підставивши (**??**) у (**??**), одержимо

$$\delta_{b1}f^{a1} - \delta_{a1}f^{1b} = 0, \tag{3.238}$$

$$k_3(u^1 g^{ab}_{u^1} + \delta_{b1} g^{a1} - \delta_{a1} g^{1b}) + g^{ab} = 0, \tag{3.239}$$

$$k_3(u^1 h^a_{u^1} - \delta_{a1} h^1) + 2h^a = 0. \tag{3.240}$$

Підставивши нелінійності (**??**) у систему рівнянь (**??**)–(**??**), приходимо до висновку, що $\lambda_{12} = \lambda_{21} = m_{11} = m_{12} = m_{22} = = n_1 = n_2 = 0$, $k_3 = -1$ Отже, нелінійності F, G, H мають вигляд (**??**).

Третій пункт теореми доведено.

Для системи з нелінійностями (**??**) Оператор масштабних перетворень має вигляд $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + k_3 u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{k}u^2\partial_{u^2}$. Аналогічно до попереднього можна вважати $k_3 = 0$.

Оператор масштабних перетворень має координати

$$\xi^0 = 2x_0, \xi^1 = x_1, \eta^a = -\delta_{a2}\tfrac{1}{k}u^2 \tag{3.241}$$

Підставивши (**??**) у (**??**), одержимо

$$\delta_{b2} f^{a2} - \delta_{a2} f^{2b} = 0, \tag{3.242}$$

$$u^2 g^{ab}_{u^2} + \delta_{b2} g^{a2} - \delta_{a2} g^{2b} - k g^{ab} = 0, \tag{3.243}$$

$$u^2 h^a_{u^2} - \delta_{a2} h^2 - 2k h^a = 0. \tag{3.244}$$

Підставивши (**??**) у систему рівнянь (**??**)–(**??**) та розв'язавши її одержуємо, що $\alpha = m_{11}\omega^k, \beta = m_{12}\omega^k, \chi^a = n_a\omega^{2k}$. Таким чином, нелінійності F, G, H мають вигляд (**??**). Четвертий пункт теореми доведено.

Для доведення п'ятого пункту розглянемо систему з нелінійностями (**??**). Тоді оператор масштабних перетворень має вигляд $D = 2x_0\partial_0 + +x_1\partial_1 + k_3 I + u^2\partial_{u^2}$. Аналогічно до попереднього випадку теореми, вважаючи $k_3 = 0$, робимо висновок, що оператор масштабних претворень має координати

$$\xi^0 = 2x_0, \xi^1 = x_1, \eta^a = \delta_{a2} u^2. \tag{3.245}$$

Підставивши (**??**) у (**??**), одержимо

$$\delta_{b2} f^{a2} - \delta_{a2} f^{2b} = 0, \tag{3.246}$$

$$u^2 g^{ab}_{u^2} + g^{ab} + \delta_{b2} g^{a2} - \delta_{a2} g^{2b} = 0, \tag{3.247}$$

$$u^2 h^{a}_{u^2} - \delta_{a2} h^2 + 2h^a = 0. \tag{3.248}$$

Підставивши нелінійності(**??**) у систему рівнянь (**??**)–(**??**), приходимо до висновку, що $\lambda_{12} = m_{11} = m_{12} = m_{22} = n_1 =$ $= n_2 = 0$. Отже, нелінійності F, G, H мають вигляд (**??**).

П'ятий пункт теореми доведено.

Розглянемо систему з нелінійностями (**??**). В даному випадку оператор масштабних перетворень має вигляд $D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 +$ $+ k_3 I + m_3 u^2 \partial_{u^1}$. Не втрачаючи загальності, в силу лінійної комбінації операторів можна вважати $k_3 = 0$. Тоді координати оператора масштабних перетворень мають вигляд

$$\xi^0 = 2x_0, \xi^1 = x_1, \eta^a = \delta_{a1} m_3 u^2. \tag{3.249}$$

Підставивши (**??**) у (**??**), одержимо

$$\delta_{b2} f^{a1} - \delta_{a1} f^{2b} = 0, \tag{3.250}$$

$$u^2 g^{ab}_{u^1} - m g^{ab} + \delta_{b2} g^{a1} - \delta_{a1} g^{2b} = 0, \tag{3.251}$$

$$u^2 h^{a}_{u^2} - \delta_{a1} h^2 - 2m h^a = 0, \tag{3.252}$$

$m = \frac{1}{k_3 æ - m_3}$ Підставивши нелінійності(**??**) у систему рівнянь (**??**)–(**??**), одержуємо: $\psi^{11} = m_{11} e^{m\omega}, \psi^{21} = m_{21} e^{m\omega}$, $\chi^a =$ $= n_a e^{2m\omega}$, $\omega = \frac{u^1}{u^2} - æ ln u^2$. Таким чином, нелінійності F, G, H мають вигляд (**??**).

Шостий пункт теореми доведено.

Для доведення сьомого пункту теореми розглянемо нелінійності (**??**) при $æ = 0$. Оператор масштабних перетворень має вигляд $D =$ $2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + k_3 I + m_3 u^2 \partial_{u^2}$. Не втрачаючи загальності, аналогічно до попередніх випадків теореми можна вважати $k_3 = 0$, а координати оператора рівними

$$\xi^0 = 2x_0, \xi^1 = x_1, \eta^a = -\delta_{a2} m_3 u^2 \tag{3.253}$$

Система (??) за умов (??) набуде вигляду

$$\delta_{b2}f^{a2} - \delta_{a2}f^{2b} = 0, \tag{3.254}$$

$$m_3(u^2 g^{ab}_{u^2} + \delta_{b2}g^{a2} - \delta_{a2}g^{2b}) + g^{ab} = 0, \tag{3.255}$$

$$m_3(u^2 h^a_{u^2} - \delta_{a2}h^2) + 2h^a = 0. \tag{3.256}$$

Підставивши (??) у систему рівнянь (??)–(??) та розв'язавши її одержуємо, що $\psi^{11} = \lambda_{11}\frac{u^1}{u^2}, \psi^{21} = \lambda_{21}, \chi^1 = n_1(\frac{u^1}{u^2})^3, \chi^2 = n_2(\frac{u^1}{u^2})^2$, $m_3 = 1$. Таким чином, нелінійності F, G, H набувають вигляду (??).

Сьомий пункт теореми доведено.

Для доведення восьмого пункту теореми вкажемо координати оператора масштабних перетворень

$$\xi^0 = 2x_0, \xi^1 = x_1, \eta^a = k_3 u^a - \varepsilon_{ab} m_3 u^b \tag{3.257}$$

Система (??) з урахуванням (??) набуває вигляду

$$m_3(\varepsilon_{cb}f^{ac} - \varepsilon_{ac}f^{cb}) = 0, \tag{3.258}$$

$$(k_3u^c - \varepsilon_{cb}u^b)g^{ab}_{u^c} + g^{ab} - m_3(\varepsilon_{cb}g^{ac} - \varepsilon_{ac}g^{cb}) = 0, \tag{3.259}$$

$$(k_3u^c - \varepsilon_{cb}u^b)h^a_{u^c} + 2h^a - (\delta_{ac}k_3 - \varepsilon_{ac}m_3)h^c = 0. \tag{3.260}$$

Підставимо (??) у систему рівнянь (??)–(??). Система (??) задовольняється тотожньо. Із системи (??)випливає

$$\begin{aligned} &2\triangle(\overrightarrow{k}^{\perp}\dot{\beta}^1 - \overrightarrow{k}\dot{\beta}^2) + \overrightarrow{k}^{\perp}\beta^1 - \overrightarrow{k}\beta^2 = 0, \\ &2\triangle[\dot{\overrightarrow{\beta}}^{\perp} - k_2(\overrightarrow{k}\dot{\beta}^1 - \overrightarrow{k}^{\perp}\dot{\beta}^2)] + \overrightarrow{\beta}^{\perp} - k_2(\overrightarrow{k}\beta^1 - \overrightarrow{k}^{\perp}\beta^2) = 0. \end{aligned} \tag{3.261}$$

Загальним розв'язком системи (??) будуть функції

$$\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{m}e^{-\frac{1}{2\triangle}\omega}, \tag{3.262}$$

де $\overrightarrow{m} = \{m_1, m_2\}$, m_a — довільні сталі. Після спрощень система (??) перепишеться наступним чином

$$\begin{aligned} &2\triangle(\dot{\chi}^1 + \dot{\chi}^2) + 2(\chi^1 + \chi^2) + m_3(\chi^1 - \chi^2) = 0, \\ &2\triangle(\dot{\chi}^1 - \dot{\chi}^2) + 2(\chi^1 - \chi^2) - m_3(\chi^1 + \chi^2) = 0. \end{aligned} \tag{3.263}$$

Загальним розв'язком системи (??) будуть функції

$$
\begin{aligned}
\chi^1 &= [\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{u}\,cos\tfrac{m_3}{\triangle}\omega + \overrightarrow{n}\,\overrightarrow{u}^{\perp} sin\tfrac{m_3}{\triangle}\omega]e^{-\frac{\omega}{\triangle}},\\
\chi^2 &= [-\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{u}^{\perp} cos\tfrac{m_3}{\triangle}\omega + \overrightarrow{n}\,\overrightarrow{u}\,sin\tfrac{m_3}{\triangle}\omega]e^{-\frac{\omega}{\triangle}}.
\end{aligned} \tag{3.264}
$$

Підставивши (??) та (??) у (??), одержимо нелінійності (??).

Восьмий пункт теореми доведено.

Для інших систем класу (??), інваріантних відносно алгебри Галілея, розширення алгебри Галілея оператором масштабних перетворень неможливе.

Теорема доведена.

3.7. Зображення узагальненої алгебри Галілея

Розширимо алгебру Галілея (??) проективним оператором, для якого виконуються наступні комутаційні співвідношення

$$
\begin{aligned}
&[\partial_0, X_6] = D, [\partial_1, X_6] = G, [G, X_6] = 0,\\
&[\partial_1, X_6] = 0, [D, X_6] = 2X_6.
\end{aligned} \tag{3.265}
$$

Одержану алгебру назвемо узагальненою алгеброю Галілея, а оператор X_6 проективним оператором і позначимо його П.

Встановимо зображення узагальненої алгебри Галілея, відносно якої може бути інваріантна система (??).

Згідно (??) загальний вигляд проективного оператора є наступним

$$
\Pi = A^6(x_0)\partial_0 + B^6(x_0, x_1)\partial_1 + [\alpha^{6ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{6a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \tag{3.266}
$$

де $A^6, B^6, \alpha^{6ab}, \beta^{6a}$ — довільні гладкі функції відповідних аргументів.

З комутаційних умов $[\partial_0, \Pi] = D$ та $[\partial_1, \Pi] = G$ одержуємо, що

$$
\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_3 + x_1Q_2 + \frac{x_1^2}{2}Q_1 + Q_4, \tag{3.267}
$$

де $Q_4 = \alpha^4_{ab}u^b + \beta^4_a$, α^4_{ab}, β^4_a — довільні сталі.

З інших комутаційних співвідношень (??) маємо

$$[Q_1, Q_4] = 0, [Q_2, Q_4] = 0, [Q_3, Q_4] = 2Q_4. \tag{3.268}$$

Таким чином, узагальнена алгебра Галілея для системи (??) має вигляд

$$\begin{aligned} &AG_2(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + x_1 Q_1 + Q_2, Q_1, \\ &D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 + x_0 Q_3 + x_1 Q_2 + \tfrac{x_1^2}{2} Q_1 + Q_4 \rangle, \end{aligned} \tag{3.269}$$

де оператори Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 задовольняють умови (??), (??), (??).

3.8. Інваріантність системи (??) відносно узагальненої алгебри Галілея

Знайдемо вигляд нелінійностей F, G, H, при яких система (??) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея.В роботі [?] показано, що з врахуванням (??) і з точністю до перетворень еквівалентності (??) існує шістнадцять нееквівалентних наборів операторів Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, для яких виконуються комутаційні співвідношення (??), (??), (??).

Використавши результати вказаної роботи [?], одержимо наступне твердження.

Теорема 4.9 *Система рівнянь (??) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень еквівалентності (??) має один з наступних виглядів*

$$\begin{aligned} &U_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} U_1 \right] + \\ &+ \begin{pmatrix} -u^2 & m_{12} \\ 0 & -u^2 \end{pmatrix} U_1 + \tfrac{1}{2}(u^2)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.270}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = \partial_{u^2}$, $Q_3 = (\lambda_{11} + m_{12})\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$, $Q_4 = 0$;

$$\begin{aligned} U_0 = {} & \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & -\frac{u^1}{u^2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} U_1 \right] + \\ & + \begin{pmatrix} m_{11}u^1 & 0 \\ m_{21}u^2 & 0 \end{pmatrix} U_1 + (u^1)^2 \begin{pmatrix} n_1 u^1 \\ n_2 u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.271}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}, Q_2 = 0, Q_3 = -u^1\partial_{u^1} + \frac{1}{2}u^2\partial_{u^2}$, $Q_4 = 0$;

$$\begin{aligned} U_0 = {} & \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} U_1 \right] + \\ & + \begin{pmatrix} -u^1 & 0 \\ m_{21}u^2 & -(2\lambda_{22}+1)u^1 \end{pmatrix} U_1 + (u^1)^2 u^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{22} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.272}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}, Q_2 = \partial_{u^1}, Q_3 = -u^1\partial_{u^1} + (\lambda_{22} + m_{21})u^2\partial_{u^2}, Q_4 = 0$;

$$\begin{aligned} U_0 = {} & \partial_1 \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2m_1} \end{pmatrix} U_1 \right] + \\ & + \omega^2 \begin{pmatrix} -m_1 m_{11} & m_{11}\frac{u^1}{u^2} \\ -m_1 m_{12}\frac{u^2}{u^1} & m_{12} \end{pmatrix} U_1 + \omega^4 \begin{pmatrix} n_1 u^1 \\ n_2 u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.273}$$

причому $Q_1 = u^1\partial_{u^1} + m_1 u^2\partial_{u^2}, Q_2 = 0, Q_3 = -\frac{1}{2}\left(I + m_1 u^2\partial_{u^2}\right)$, $Q_4 = = 0$, $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^{m_1}}$, $m_1 \neq 0$;

$$U_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} U_1 \right] + \frac{u^2}{u^1} \begin{pmatrix} n_1 u^1 \\ n_2 u^2 \end{pmatrix}, \tag{3.274}$$

причому $Q_1 = I, Q_2 = 0, Q_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{n_1}{n_1 - n_2}\right) I - 2u^2\partial_{u^2}$, $n_1 \neq n_2$
$Q_4 = \frac{1}{n_1 - n_2} u^1 \partial_{u^2}$;

$$\begin{aligned} U_0 = {} & \partial_1 \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_1 \right] + \\ & + e^{-2\omega} \begin{pmatrix} m_{11} + m_{21}\frac{u^1}{u^2} & -(\frac{u^1}{u^2} + 1)(m_{11} + m_{21}\frac{u^1}{u^2}) \\ m_{21} & -(\frac{u^1}{u^2} + 1)m_{21} \end{pmatrix} U_1 + \\ & + e^{-4\omega} \begin{pmatrix} n_1 u^2 + n_2 u^1 \\ n_2 u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.275}$$

причому $Q_1 = I + u^2\partial_{u^1}, Q_2 = 0, Q_3 = -\frac{1}{2}I$, $Q_4 = 0$, $\omega = \frac{u^1}{u^2} - \ln u^2$;

$$
\begin{aligned}
U_0 = \partial_1 & \left[-\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix} U_1 \right] + \\
+ e^{\frac{1}{k_2}\omega} & \begin{pmatrix} 2k_1 \overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m} - \frac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{u} & 2k_1 \overrightarrow{k}^{\perp}\overrightarrow{m} - \frac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{u} \\ 2k_2 \overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m} - \frac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{u} & 2k_2 \overrightarrow{k}^{\perp}\overrightarrow{m} + \frac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{u} \end{pmatrix} U_1 + \\
+ e^{\frac{2}{k_2}\omega} & \begin{pmatrix} \overrightarrow{n}\,\overrightarrow{u} \\ -\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{u}^{\perp} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.276}
$$

причому $Q_1 = k_1 I - k_2 J, Q_2 = 0, Q_3 = -\frac{1}{2}I$, $Q_4 = 0$, $\omega = k_2 \ln \overrightarrow{u}^2 + 2k_1 arctg\frac{u^2}{u^1}$, $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2)$, $|\overrightarrow{k}| = 1$, $k_2 \neq 0$.

У формулах (??)–(??) $\lambda_{ab}, m_{ab}, m_a, k_a, n_a$ *— довільні сталі,* $a, b = \overline{1,2}$.

Доведення. Розглянемо систему з нелінійностями (??). Для системи з такими нелінійностями узагальнення розширеної алгебри Галілея згідно [?] може бути лише при $Q_4 = 0$. Тоді оператор Π має наступні координати

$$
\xi^0 = x_0^2, \xi^1 = x_0 x_1, \eta^a = \delta_{a1}\tfrac{x_1^2}{2} + \delta_{a2}(-x_0 u^2 + x_1). \tag{3.277}
$$

Підставимо (??) у (??) та розщепимо одержані рівності по x_0, x_1. В результаті отримаємо системи рівнянь (??), (??), що виконуються за вказаних умов ($m_2 = 0, k_2 = 1$) та (??),(??), які задовольняються з попередньої теореми, а також систему

$$
f^{a1} + g^{a2} + \delta_{a2}u^2 + \delta_{a1}k_3 = 0. \tag{3.278}
$$

З (??) та (??) випливає, що $m_{12} = k_3 - \lambda_{11}$. Таким чином, нелінійності (??) набувають вигляду (??).

Отже, перший пункт даної теореми доведено.

Для доведення другого пункту підставимо у (??) нелінійності (??) та координати відповідного проективного оператора

$$
\xi^0 = x_0^2, \xi^1 = x_0 x_1, \eta^a = (-\delta_{a1}\tfrac{x_0}{k+1} + \delta_{a2}(\tfrac{x_1^2}{2} + m_3 x_0))u^a. \tag{3.279}
$$

При цьому одержимо систему рівнянь (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??) та систему

$$
u^2 f^{a2} + \tfrac{\delta_{a1}}{k+1}u^1 - \delta_{a2} m_3 u^2 = 0. \tag{3.280}
$$

З (??) та (??) випливає, що $k = 0$, $m_3 = \frac{1}{2}$.

Таким чином, другий пункт теореми доведено.

Розглянемо третій пункт теореми 4.8. В даному випадку система має нелінійності (??), а координати проективного оператора мають вигляд

$$\xi^0 = x_0^2, \xi^1 = x_0 x_1, \eta^a = -\delta_{a1}(-x_0 u^1 + x_1) + \delta_{a2}(\frac{x_1^2}{2} + m_3 x_0)u^2. \tag{3.281}$$

Підставимо нелінійності (??) та координати проективного оператора (??) у (??).Одержимо систему рівнянь (??) , (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??) та систему

$$u^2 f^{a2} + g^{a1} + \delta_{a1} u^1 - \delta_{a2} m_3 = 0. \tag{3.282}$$

З (??) та (??) випливає, що $m_3 = \lambda_{22} + m_{21}$.

Отже, третій пункт теореми доведено.

Для доведення четвертого пункту даної теореми підставимо у (??) нелінійності (??) та координати проективного оператора

$$\xi^0 = x_0^2, \xi^1 = x_0 x_1, \eta^a = \delta_{a1}(k_3 x_0 + \frac{x_1^2}{2})u^1 + \delta_{a2}(-\frac{x_0}{k} + m_1 \frac{x_1^2}{2})u^2. \tag{3.283}$$

В результаті одержимо систему рівнянь (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??) та систему

$$u^1 f^{a1} + m_1 u^2 f^{a2} - \delta_{a1} k_3 u^1 - \delta_{a2} \frac{u^2}{k} = 0. \tag{3.284}$$

З (??) та (??) випливає, що $k = 2$, $k_3 = -\frac{1}{2}$. Нелінійності (??) набудуть вигляду (??), що доводить четвертий пункт теореми.

Розглянемо п'ятий пункт теореми 4.8. В даному випадку система має нелінійності (??), а координати проективного оператора мають вигляд

$$\xi^0 = x_0^2, \xi^1 = x_0 x_1, \eta^a = (\frac{x_1^2}{2} + k_3 x_0)u^a + \delta_{a2}(-2x_0 u^2 + k_4 u^1). \tag{3.285}$$

Підставимо нелінійності (??) та координати проективного оператора (??) у (??). Одержимо систему рівнянь одержимо систему рівнянь (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??) при $m_1 = 1, m_{11} = m_{12} = 0, k = \frac{1}{2}$ та систему

$$k_4 u^1 h^a_{u^2} - \delta_{a2} h^1 - \delta_{ab}\frac{u^b}{2} - k_3 u^a + 2\delta_{a2} u^2 = 0, g^{ab} = 0. \tag{3.286}$$

З (??) та (??) випливає, що $k_4 = \frac{1}{n_1 - n_2}$.

Таким чином, п'ятий пункт теореми доведено.

Для нелінійностей (??) координати проективного оператора мають вигляд

$$\xi^0 = x_0^2, \xi^1 = x_0 x_1, \eta^a = (k_3 x_0 + \tfrac{x_1^2}{2})u^a + \delta_{a1}(m_3 x_0 + æ\tfrac{x_1^2}{2})u^2. \tag{3.287}$$

При підстановці (??) та (??) у (??) одержимо систему рівнянь (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??) та систему

$$u^b f^{ab} + æ u^2 f^{a1} - k_3 u^a - \delta_{a1} m_3 u^2 = 0. \tag{3.288}$$

З (??) та (??) випливає, що $æ = 1$, $m = -2$, $k_3 = -\frac{1}{2}$, $m_3 = 0$. Тоді нелінійності (??) набудуть вигляду (??).

Отже, шостий пункт теореми доведено.

Зауважимо, що згідно результатам роботи [?] узагальнення розширеної алгебри Галілея (??) у випадку нелінійностей (??) проективним оператором (??) є неможливим.

Якщо нелінійності F, G, H мають вигляд (??), то координати проективного оператора будуть наступними

$$\xi^0 = x_0^2, \xi^1 = x_0 x_1, \eta^a = (k_3 x_0 + k_1\tfrac{x_1^2}{2})u^a + (\varepsilon_{ba} m_3 x_0 + \varepsilon_{ab} k_2 \tfrac{x_1^2}{2})u^b. \tag{3.289}$$

Підставивши (??) та (??) у (??) одержимо систему рівнянь (??), (??), (??), (??) та систему

$$(k_1 u^b + \varepsilon_{bc} k_2 u^c) f^{ab} - k_3 u^a - \varepsilon_{ab} m_3 u^b = 0. \tag{3.290}$$

Підставивши нелінійності (??) у (??) одержимо, що $k_3 = -\frac{1}{2}$, $m_3 = 0$. Тому нелінійності (??) набудуть вигляду (??), що доводить сьомий пункт даної теореми.

Для інших випадків теореми 8 приєднання до розширеної алгебри проективного оператора неможливе або одержані системи визначальних рівнянь є несумісними.

Теорема доведена.

Зауваження 4.2. Система (??) є узагальненням рівнянь системи хемотаксису, яка описує формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера [?] та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії. [?]. ЇЇ симетрійні властивості вивчені в роботі [?].

Якщо у системі (??) перейти до функції комплексної змінної, то одержимо узагальнення рівняння Гінзбурга-Ландау, яке є основним нелінійним рівнянням фізики нерівноважних середовищ і виникає при описі дифузного хаосу і дисипативних структур в гідродинаміці, фізиці лазерів та хімічний кінетиці

$$\psi_0 = -\frac{k}{2}\psi_{11} + \left[\frac{m^*}{2}(2k_1 k\psi^*\psi_1 - (|\overrightarrow{\psi}|^2)_1) + n^*|\overrightarrow{\psi}|^4 e^{2w}\right] e^{2w}\psi, \quad (3.291)$$

де $\psi = u^1 + iu^2$, $k, m, n \epsilon C$. Симетрійні властивості рівняння Гінзбурга–Ландау без деривативного члена вивчались Нікітіним А.Г. в роботах [?], [?].

При $k_1 = 0$ з рівняння (??) можна одержати узагальнення рівняння Шредінгера з деривативною нелінійністю

$$i\psi_0 = \tfrac{1}{2}\psi_{11} + [\alpha(|\psi|^2)_1 + \beta|\psi|^4]\psi, \quad (3.292)$$

де $\alpha, \beta \epsilon C$.

Рівняння (??) належить до класу рівнянь

$$\begin{aligned} i\psi_0 = \tfrac{1}{2}\psi_{11} + (\lambda_1 + \lambda_2|\psi|^2 + \lambda_3|\psi|^4 + \\ + \lambda_4\partial_1|\psi|^2)\psi + (\lambda_5 + \lambda_6|\psi|^2)\partial_1\psi, \end{aligned} \quad (3.293)$$

які використовується для моделювання хвильових процесів в різних розділах фізики, таких як нелінійна оптика [?], [?], [?]. Зокрема, рівняння (??) описують альвеновські хвилі з круговою поляризацією – магнітогідродінамічні хвилі, що розповсюджуються в плазмі в магнітнгому полі [?], [?], [?], хвилі Стокса у рідині скінченої глибини та ін.

Системи (??) та (??) узагальнюють результати, одержані для системи рівнянь хемотаксису [?] та нелінійної системи рівнянь конвекції-дифузії [?] відповідно. Системи (??), (??) є узагальненням результатів Черніги Р.М.та Кінга Дж. [?], [?], [?], [?],[?] а системи (??), (??) — Нікітіна А.Г. та Вілштира Р. [?] , [?], [?], [?], [?], що були одержані у роботах по дослідженню симетрійних властивостей системи реакції-дифузії. Поряд з цим встановлено систему (??), яка не може бути одержана із узагальнення раніше відомих систем, інваріантних відносно алгебри Галілея.

Таким чином, нами вказано зображення алгебри Галілея, розширеної та узагальненої алгебр Галілея для системи реакції-конвекції-дифузії. Для кожного з можливих зображень з точністю до перетворень еквівалентності (??), (??) знайдено нелінійності f^{ab}, g^{ab}, h^{a}, при яких система (??) інваріантна відносно даної алгебри. Одержані системи володіють симетрійними властивостями, характерними для рівнянь, що описують процеси, які підпорядковуються принципу відносності Галілея. Серед них містяться такі відомі рівняння, як рівняння Шредінгера, система хемотаксису, рівняння Гінзбурга-Ландау та інші. Виходячи з вище сказаного одержані системи можуть претендувати на роль математичних моделей реальних фізичних процесів.

Список використаних джерел

[1] Абраменко А.А. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований / А.А. Абраменко, В.И. Лагно, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 482–489.

[2] Аль Фарах Х. Гранична теорема для кількості перетинів фіксованого рівня слабко збіжною послідовністю дифузійних процесів / Аль Фарах Х., Портенко М. — Ін-т математики НАН України. — К. — 2007. — 24 с. — (Препр. 2007.6).

[3] Андреєва Н.В. (тепер Ічанська Н.В.) Симетрійні властивості нелінійної системи рівнянь параболічного типу / Н.В. Андреєва // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. — 1998. — Т. 19. — С. 10–13.

[4] Ахатов И.Ш. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации / И.Ш. Ахатов, Р.К. Газизов, Н.Х. Ибрагимов // Докл. АН СССР — 1987. — Т. 293. — С. 1033–1035.

[5] Ахатов И. Ш. Нелокальные симметрии. Эвристический подход / И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. — М.: ВИНИТИ АН СССР. — 1989. — Т.34. — С. 3–83.

[6] Ахромеева Т.С. Двухкомпонентные диссипативные системы в окрестности точки бифуркации / Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.Л. Самарский //Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. — М.: Наука.‘— 1986. — С. 7–59.

[7] Белоколос Е.Д. О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравненииний в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния / Е.Д. Белоколос, В.З.Эпольский // Успехи математических наук. — 1982. — Т. 37, № 4. — С. 89–120.

[8] Белоколос Е.Д. Алгебро–геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений / Е.Д. Белоколос, А.И. Бобенко, В.Б. Матвеев, В.З. Эпольский // Успехи математических наук. — 1986. — Т. 41, № 2. — С. 3–42.

[9] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. — К.: Наукова думка, 1965. — 798 с.

[10] Березанский Ю.М. Самосопряженные операторы в пространстве бесконечного числа переменных / Ю.М. Березанский. — К.: Наукова думка, 1978. — 360 с.

[11] Березанский Ю.М. Гармонический анализ в гиперкомплексных системах / Ю.М. Березанский, А.А. Калюжный. — К.: Наукова думка, 1992. — 352 с.

[12] Березанский Ю.М. Спектральные методы в бесконечномерном анализе / Ю.М. Березанский, Ю.Г. Кондратьев. — К.: Наукова думка, 1988. — 680 с.

[13] Берман В.С. О групповых свойствах обобщенного уравнения Ландау-Гинзбурга / В.С. Берман, Ю.Л. Данилов // ДАН СССР. — 1981. — Т. 258, № 1. — С. 67–70.

[14] Биркгоф Г. Гидродинамика / Г. Биркгоф. — М. : Иностранная литература, 1963. — 400 с.

[15] Вільгельмссон Г. Коливання та встановлення рівноваги за умов взаємозв‘язку температури та густини у термоядерних плазмах / Г. Вільгельмссон // УМЖ. — 1993. — Т. 38, № 1. — С. 44–53.

[16] Власенко Л.А. О разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений с импульсным воздействием / Л.А. Власенко, Н.А. Перестюк // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, N 4. — С. 458–468.

[17] Глеба А.В. Симетрійні властивості і точні розв’язки нелінійних галілей–інваріантних рівнянь: дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03 / Глеба Аліна Володимирівна. — К., 2003. — 120 с.

[18] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником / В.А. Дородницын // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1982. — Т. 22, № 6. — С. 1393–1400.

[19] Дородницын В.А. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях / В.А. Дородницын, И.В. Князева, С.Р. Свирщевский // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19. — С. 1215–1223.

[20] Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике / Н. Х. Ибрагимов // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, вып. 4 (286). — С. 83–144.

[21] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М. : Наука, 1983. — 280 с.

[22] Иваницкий Г.Р. От беспорядка к упорядоченности - на примере движения микроорганизмов / Г.Р. Иваницкий, А.Б. Медвинский, М.А. Цыганов // Успехи физических наук. — 1991. — Т. 161, № 4. — С. 13–71.

[23] Ічанська Н. В. Ліївська та умовна симетрії деяких нелінійних еволюційних рівнянь: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. / Ічанська Наталія Василівна — Полтава, 2005. — 148с.

[24] Катков В.Л. Групповая классификация и решения уравнения Хопфа / В.Л. Катков // Журнал прикладной механики и теоретической физики. — 1965. — Т. 6. — С. 105–106.

[25] Костенко В. Г. Інтегрування деяких диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом / В. Г. Костенко. — Л. : Львів. держ. ун-т, 1959. — 22 с.

[26] Лагно В.И. Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований / В.И. Лагно, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 365–372.

[27] Лагно В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу / Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Праці Інституту математики НАН України : Мат-ка та її застосування. — К., 2002. — Т. 45. — 359 с.

[28] Лазарь Р.Д. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / Лазарь Р.Д., Макаров В.Л., Самарский А.А. — М.: В. школа, 1987. — 296 с.

[29] Луковский И.А. Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности / Луковский И.А. — Киев.: Наукова думка, 1977. — 240 с.

[30] Луковський І.О. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках / І.О. Луковський // Доп. НАН України. — 2002. — № 5. — С. 53–58.

[31] Луковский И.А. Вариационные методы исследования задач динамики твердых тел с жидкостью / И.А. Луковский // Приклад. механика. — 2004. — Т. 40, № 10. — С. 37–77.

[32] Луковский И.А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объёма жидкости / Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. — Киев.: Наукова думка, 1984. — 232 с.

[33] Ляшко И.И. Методы вычислений: Численный анализ. Методы решения задач математической физики / Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. — Киев.: Вища школа, 1977. — 408 с.

[34] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения./ Марченко В.А. — Київ: Наук. думка., 1977. — 331 с.

[35] Магадеев Б. А. Структура симметрии эволюционных уравнений : дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.02. — Уфа., 1990. — 103 с.

[36] Мартынюк Д.Н. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами / Мартынюк Д.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. — К.: Наук. думка., 1984. — 213 с.

[37] Миллер У. мл. Симметрия и разделение переменных / У. мл. Миллер. — М. : Мир, 1981. — 342 с.

[38] Митропольский Ю.А. Асимптотическое исследование слабонелинейных колебательных систем / Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. — К.: Наукова думка, 1976. — 54 с.

[39] Митропольский Ю.А. Математические проблемы нелинейной механики / Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. — К.: Вища шк., 1987. — 69 с.

[40] Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния./ Нижник Л.П. — Киев: Наук. думка, 1973. — 182 с.

[41] Нижник Л.П., Починайко М.Д. Интегрирование пространственно–двумерного уравнения Шредингера методом обратной задачи / Л.П. Нижник, М.Д. Починайко // Функц. анализ. — 1982. — Т. 16, вып. 1. — С. 80–82.

[42] Николис Г. Самоорганизация в неравновесных системах / Николис Г., Пригожий И. — М.: Мир, 1979. — 512 с.

[43] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Овсянников Л.В. — М. : Наука, 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations / Ovsiannikov L.V. — New York : Academic Press, 1982. — 400 p.

[44] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности./ Л.В. Овсянников. — Доклады АН СССР. — т.125, 1959. — С. 492–495.

[45] Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений / Л.В. Овсянников, С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1960. — № 3. — С. 126–145.

[46] Омелян О.М. Інваріантність нелінійної системи дифузії відносно алгебри Галілея // Матеріали IX міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. — Київ. — 2002. — С. 149.

[47] Омелян О.М. Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції дифузії / О.М. Омелян // Тр. Ин-та ИПММ НАН Украины. — Донецк. — 2009. — Т. 1. — С. 138–147.

[48] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / Олвер П. — М. : Мир, 1989. — 581 с.

[49] Перестюк Н.А. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. — Тр. Ин-та математики НАН Украины. Сер.: Математика и её применение. — К, 2007. — Т. 67. — 427 с.

[50] Перестюк Н.А. О существовании периодических решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием / Н.А. Перестюк, А.М. Самойленко, А.Н. Станжицкий // Укр. мат. журн. — 2001. — 53, N 8. — С. 1061–1079.

[51] Портенко М.І. Про рівняння відновлення, які виникають в деяких задачах теорії узагальнених дифузійних процесів / М.І. Портенко // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, N 9. — С. 1302–1312.

[52] Портенко М.І. Ймовірнісне зображення розв'язку однієї задачі математичної фізики / М.І. Портенко // Укр. мат. журн. — 2000. — Т 52, N 9. — С. 1272–1282.

[53] Рассоха І. В. Інваріантність системи рівнянь реакції-конвекції-дифузії відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень / І.В. Рассоха // Збірник тез 64-ї наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів уні-верситету, 17 квітня -11 травня 2012 р. — Полтава, 2012. — Т.1. — С. 215–216.

[54] Рассоха І.В. Перетворення еквівалентності нелінійного рівняння реакції-конвекції-дифузії / І.В. Рассоха // Тези доповідей II міжнародної конферен-ції молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені В.Я. Лопатинського, 11-14 листопада 2008 р. — Донецьк, 2008. — С. 95–96.

[55] Рассоха І.В. Дискретні перетворення інваріантності та формули розмноження розв'язків деяких рівнянь класу реакції-конвекції-дифузії / І.В. Рассоха // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. — Випуск 1. — 2009. — С. 44–47.

[56] Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы / Самойленко А.М. — М.: Наука, 1987. — 301 с.

[57] Самойленко А.М. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / Самойленко А.М., Ронто Н.И. — Киев.: Наук. думка, 1992. — 279 с.

[58] Самойленко А.М. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / Самойленко А.М., Петришин Р.І. — Київ.: Наук. думка, 2004. — 474 с.

[59] Самойленко А.М. Багатосастотні коливання нелінійних систем / Самойленко А.М., Петришин Р.І. — К.: Ін-т математики НАН України, 1998. — 340 с.

[60] Сєров М.І. Класифікація симетрійних властивостей диференціальних рівнянь за допомогою перетворень Q-умовної еквівалентності / М.І. Сєров, І.В. Рассоха, Т.О. Карпалюк // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2007. — Т.4, №3. — С. 232–246.

[61] Сєров М.І. Інваріантність системи реакції-конвекції-дифузії відносно алгебр Галілея / М.І. Сєров, І.В. Рассоха // Збірник праць II Всеукраїнського наукового семінару "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи 19-20 жовтня 2011р. — Полтава, 2011. — С. 112–128.

[62] Сєров М.І. Нелінійні системи рівнянь реакції-конвекції-дифузії інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень [Електронний ресурс] / М.І. Сєров, М.М. Сєрова, І.В. Рассоха // Міжнародний семінар до 75-річчя від дня народження Вільгельма Ілліча Фущича "Симетрія та інтегрованість рівнянь математичної фізики 18-19 грудня 2011р. — Київ: Інститут математики НАН України, 2011. — Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/appmath/aboutWIF.html symmetry.conferen-ce@gmail.com

[63] Сєров М.І. Симетрійні властивості системи рівнянь реакції-конвекції-дифузії / Сєрова М.М., Рассоха І.В. // Науковий вісник Чернівецького національного університету ції-конвекції-дифузії ім. Ю. Федьковича. Серія "Математика". — 2012 р. — Т. 2, №2-3. — С. 149–156.

[64] Сєров М.І. Система рівнянь реакції-конвекції-дифузії. Принцип відносності Галілея. / М.І. Сєров, М.М. Сєрова, І.В. Рассоха [Електронний ресурс] // Всеукраїнська наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці 11-13 червня 2012 р. — Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, 2012. - Режим доступу: http://www.pmm50.org/

[65] Сєров М.І. Класифікація симетрійних властивостей системи рівнянь хемотаксису / М.І. Сєров, О.М. Омелян// Український математичний вісник. — 2008. — Т. 5, № 4. — С. 536–562.

[66] Сєров М.І. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь з конвективним членом / М.І. Сєров, Р.М. Черніга // УМЖ. — 1997. — Т. 49, № 9. — С. 1262–1270.

[67] Сєров М.І. Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування / М.І. Сєров, Т.О. Жадан, Л.М. Блажко //УМЖ. — 2006. — Т. 58, № 8.— С. 1128–1145.

[68] Сєров М.І. Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії [Електронний ресурс] / М.І. Сєров, М.М. Сєрова, О.М. Омелян, Т.О. Карпалюк // Матеріали Українського математичного конгресу (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова). — Київ. — 2009. — URL: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Serov.pdf

[69] Сєров М.І. Принцип відносності Галілея для системи рівнянь реакції-конвекції-дифузії / Рассоха І.В. // Український математичний вісник. — 2013 р. —Т. 10, №2. — С. 211–233.

[70] Тычинин В.А. Преобразование Бэклунда дифференциальных уравнений, приводимых конечным преобразованием Ли-Бэклунда / Тычинин В.А. — Деп. в ВИНИТИ № 3172.80 (Рукопись представлена Днепропетровским ун-том 18 июля 1980 г.). — Днепропетровск. — 1980. — 19 с.

[71] Тычинин В.А. Симметрия и точные решения уравнения $u_t = h(u)u_{xx}$ / В.А. Тычинин // Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР: Симметрийный анализ и решенния уравнений матфизики. — Киев. — 1988. — № 8. — С. 72–77.

[72] Тичинін В.А. Нелокальна симетрія та розмноження розв'язків рівняння $u_0 u_{11} + 1 = 0$ / В.А. Тичинін // Зб. наук. праць Ін-ту математики АН України: Симетрійний аналіз рівнянь математичної фізики. — Київ. — 1993. — С. 26–33.

[73] Фущич В. И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? / В. И. Фущич // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. — К. : Ин-т математики, 1987. — С. 4–16.

[74] Фущич В. И. Симметрия в задачах математической физики / В. И. Фущич // Теоретико–алгебраические исследования в математической физике. — К. : Ин–т математики, 1981. — С. 6–28.

[75] Фущич В. И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики / В. И. Фущич // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1456–1470.

[76] Фущич В.І. Лінійні та нелінійні зображення груп Галілея в двовимірному просторі-часі / В.І. Фущич, В.І. Лагно // Укр. мат. журн. — 1998. — 50, № 3. — С. 414-–423.

[77] Фущич В. И. Симметрия уравнений квантовой механики / Фущич В.И., Никитин А.Г. — М. : Наука, 1990. — 400 с.

[78] Фущич В. И. Симметрия уравнений Максвелла / Фущич В.И., Никитин А.Г. — К. : Наук. думка, — 1983. — 199 с.

[79] Фущич В. И. Негрупповая симметрия некоторых нелинейных волновых уравнений / В.И. Фущич, М.И. Серов // Докл. АН СССР. — 1991. — № 9. — С. 45–49.

[80] Фущич В. И. О нелинейном галилей-инвариантном обобщении уравнений Ламе / В.И. Фущич, С.Л. Славуцкий // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 287, № 2. — С. 320–323.

[81] Фущич В. І. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь / В.І. Фущич, В.І. Чопик // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, № 10. — С. 1433–1443.

[82] Фущич В. И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. — К. : Наук. думка, 1989. — 339 с.

[83] Фущич В. И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности / Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И. // Докл. АН УССР. — 1988. — Сер. А, № 9. — С. 17–20.

[84] Фущич В. И. Негрупповая симметрия некоторых нелинейных волновых уравнений / В. И. Фущич, Н. И. Серов // Докл. АН УССР. — 1991. — № 9. — С. 45–49.

[85] Фущич В. И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности / В. И. Фущич, Н. И. Серов // Докл. АН УССР. — 1990. — Сер. А, № 7. — С. 24—27.

[86] Фущич В.І. Системи лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень / В.І. Фущич, Р.М. Черніга // Доповіді АН України. — 1993. — № 8. — С. 44–51.

[87] Фущич В.И. Симметрия и точные решения многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа / В.И. Фущич, Р.М. Чернига // I, Укр. мат. журн. — 1989. — 41, № 10. — С. 1349-–1357.

[88] Фущич В.И. О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа / Фущич В.И., Чернига Р.М. —Киев, Ин-т математики АН УССР. — 1986. — 44 с. —Препринт № 86.85.

[89] Хакен Г. Синергетика/ Хакен Г. — М.: Мир, 1980. — 404 с.

[90] Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза со ступенчастыми начальными данными / Е.Я. Хруслов // Мат. сборник. — 1976. — Т. 99. — С. 261–281.

[91] Черніга Р.М. О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа / Р.М. Черніга // Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР: Симметрийный анализ и решенния уравнений матфизики. — Киев. — 1988. — № 8. — С. 49–53.

[92] Черніга Р.М. Симетрія і точні розв'язки рівнянь тепломасопереносу у термоядерній плазмі / Р.М. Черніга // Доповіді АН України. — 1995. — № 4. — С. 17–21.

[93] Adler J. Chemotaxis in bacteria / J. Adler // Sciense. — 1996. — V. 153, P. 708–716.

[94] Akhatov I.S. Nonlocal symmetries. Heuristic approach / Akhatov I.S., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. // J. Sov. Math. — 55 (1991). — P. 1401–1450.

[95] Akhmanov S. A. Wave packets self-action in a nonlinear medium and femtosecond laser pulses generation [in Russian] / S.A. Akhmanov, V. A. Vysloukh, A.S. Chirkin // Uspekhi Fiz. Nauk. — 1986. — 149. — P. 449–509.

[96] Baikov V.A. Lie symmetry classification analysis for nonlinear coupled diffusion. V.A. Baikov, A.V. Gladkov and R.J. Wiltshire // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — Vol. 31. — P. 7483–7499.

[97] Bateman H. The transformations of electrodynamical equations / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. — 1909. — Vol. 8. — P. 223–264.

[98] Basarab–Horwath P. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. / P. Basarab–Horwath, V. Lahno and R. Zhdanov // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 69, № 1. — P. 43–94.

[99] Bluman G. W. The general similarity solution of the heat equation / G. W. Bluman, J. D. Cole // J. Math. Mech. — 1969. — Vol. 18, № 11. — P. 1025–1042.

[100] Bluman G. Symmetries and differential equations / Bluman G., Kumei S. — New York : Springer. — Verlag. — 1989. — 142 p.

[101] Clarkson P. New similarity solutions of the Boussinesq equation / P. Clarkson, M. D. Kruskal // J. Math. Phys. — 1989. — Vol. 30, № 10. — P. 2201–2213.

[102] Cherniha R. (2000) Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: I. / R. Cherniha, J.R. King // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — A 33. — P. 267–282, 7839–41.

[103] Cherniha R. Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: II. / R. Cherniha, J.R. King // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — A 36. — P. 405–425.

[104] Cherniha R. Nonlinear Reaction-Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansätze and Exact Solutions. / R. Cherniha, J.R. King // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — 308. — P. 11–35.

[105] Cherniha R.M. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum / R.M. Cherniha and J.R. King // J. Phys. — 2000. — A 33. — P. 7839–7841.

[106] Cherniha R.M. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: II / R.M. Cherniha and J.R. King // J. Phys. — 2002. — A 36. — P. 405–425.

[107] Cherniha R.M. Galilean–invariant nonlinear PDEs and their exact solutions / R.M. Cherniha // J. Nonlin. Math. Phys. — 1995. — Vol. 2, № 3. — P. 374–383.

[108] Cherniha R. Symmetries ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms / R. Cherniha, M. Serov // Euro. J. of Appl. Math. — 1998. — Vol. 9. — P. 527–542.

[109] R.M. Cherniha. Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, Ansätze and solutions / R. Cherniha, M. Serov // J. Math. Anal. Appl. — 282. — 2003. — P. 305–328.

[110] Cherniha R. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations / R. Cherniha, M. Serov, I. Rassokha // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — V. 342. — P. 1363–1379.

[111] Dorodnitsyn V.A. On invariant solutions of non-linear heat conduction with a source / V.A. Dorodnitsyn // USSR Comput. Math. and Math. Phys. — 1982. — 22. — P. 115–122.

[112] Fushchych W. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics / Fushchych W., Shtelen W. and Serov N. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 436 p.

[113] Fushchych W. On reduction and exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry / W. Fushchych, I. Tsyfra // J. Phys. A : Math. Gen. — 1987. — Vol. 20. — P. 45–47.

[114] Fushchich W. I. The Conditional Invariance and Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation / W. I. Fushchich, N. I. Serov, L. A. Tulupova // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. — 1993. — № 4. — P. 37–40.

[115] Fushchych W. Galilei-invariant nonlinear equations of Schrödinger-type and their exact solutions I, II./ W. Fushchych, R. Cherniha // Ukrainian Math.J. — 41. — 1989. — P. 1161–67; 1456–63.

[116] Fushchych W. Galilei-invariant systems of nonlinear systems of evolution equations / W. Fushchych, R. Cherniha // J.Phys.A. — 28. — 1995. — P. 5569–79.

[117] Fushchych W.I. On some exacht solutions of the three-dimensional nonlinear Schrodinger equation / W.I. Fushchych, N.I. Serov // J. Phys. A: Math. — 43. —1990. —P. 1161–67.

[118] Gardner C. Method for solving the Korteweg–de Vries equation / C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura// Phys. Rev. Lett. — 1967. — Vol. 19. — P. 1095–1097.

[119] Gilding B.H. The characterization of reaction-convection-diffusion processes by travelling waves / B.H. Gilding, R. Kersner // J. of Diff. Equations. — 1996. — 124. — P. 27–79.

[120] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations / M.P. Edwards // Phys. Lett. A. — 1994. — Vol. 190. — P. 149–154.

[121] Keller E.F. Model for chemotaxis / E.F. Keller, L.A. Segel // J.Theor.Biol. — 1971. — V. 30. — P. 225–234.

[122] Knyazeva I.V. Group classification of diffusion equations / I.V. Knyazeva, M.D. Popov // CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differenrial Equations (Ed. N. Ibragimov)., CRC Press. — 1994. — Vol1. — P. 171–176.

[123] Kuramofo Y. On the formation of dissipative structures in reaction diffusion systems / Y. Kuramofo, T. Tsuzuki // Prog. Theor. Phys. — 1975. — V. 54, № 3. — P. 687–689.

[124] Levi D. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation / D. Levi, P. Winternitz // J. Phys. A : Math. Gen. — 1989. — Vol. 22, № 15. — P. 2915–2924.

[125] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ / S. Lie // Arch. Math. — 1881. — Vol. 8, № 1. — P. 112–125.

[126] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differential gleichung / S. Lie // Arch for Math. — 1881. — V6, № 3. — P. 328–368.

[127] Lie S. Uber Differentialinvarianten / S. Lie // Math. Ann. — 1884. — Vol. 24, № 1. — P. 52–89.

[128] Lie S. Vorlesungen uber continuerliche gruppen / Lie S. — Leipzig: Teubnner — 1893. — 805 p.

[129] Lie S. Klassifikation und Integration von gewohnlichen Differential–gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten / S. Lie // I, II, Math. Ann. — 1888. — Vol. 32. — P. 213–281.

[130] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen / Lie S., Engel F. — Leipzig:Teubner. — Bd. 1–3. — 1888, 1890, 1893. — 623 s., 554 s., 830 s.

[131] Meskauskas T. Initial Boundary-Value Problems for Derivative Nonlinear Schr.odinger Equation. Justification of Two-Step Algorithm / T. Meskauskas, F. Ivanauskas // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. — 2002. — Vol. 7, No. 2. — P. 69-–104

[132] Mio W. Modified nonlinear Schr.odinger equation for Alfven waves propagating along the magnetic field in cold plasmas / W. Mio, T. Ogino, K. Minami, S. Takeda // J. Phys. Soc. Japan. — 1976. — 41. — P. 265—271.

[133] Mjolhus E. On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field / Mjolhus E. // J. Plasma Phys. — 1976. — 16. — P. 321-–334.

[134] Newell A. C., Moloney J.V. Nonlinear Optics / Newell A. C., Mol oney J.V. //Addison-Wesley, Redwood City, California. — 1991. —234 p.

[135] Niederer U., The maximal kinematical invariance group of the free SchrЃNodinger equation / U. Niederer // Helv. Phys. Acta. — 1972. — 45. — P. 808–816.

[136] Nikitin A.G. System of reaction–diffusion equations and their symmetry properties / A.G. Nikitin, R.J. Wiltshire // J. Math. Phys. — 2001. — Vol. 42. — P. 1666–1688.

[137] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I Generalized Ginzburg-Landau equations / A.G. Nikitin // J. Math. Anal. and Appl. (JMAA). —2006. — V. 324. — P. 615–628.

[138] Nikitin A.G. Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations / A.G. Nikitin // Ukrainian Marhematical Bulletin. — 2005. — Vol. 2, № 2, — P. 153–204.

[139] Nikitin A.G. Symmetries of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations in Symmetries in Nonlinear Mathematical Physics / A.G. Nikitin, R. Wiltshire // Proc. of the Third Int. Conf. — Kiev, July 12-18. — 1999, Ed. A.M. Samoilenko (Inst. of Mathematics of Nat. Acad. Sci. of Ukraine). — P. 47–59.

[140] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems / A.G. Nikitin // J. Math. Analysis and Applications (JMAA). — 2007. — Vol. 332, № 1, — P. 666–690.

[141] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. III. Triangular diffusion matrix / A.G. Nikitin // Ukrainian Mathematical Journal. — 2007. — Vol. 59, № 3, — P. 395–411.

[142] Olver P. Group-invariant solutions of differential equations / P. Olver, P. Rosenau // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — Vol. 47. — P. 263–278.

[143] Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations / P. Olver. — Berlin : Springer. — 1986. — 510 p.

[144] Olver P. Differential invariants and invariant differential equations / P. Olver // Lie Groups Appl. — 1994. — Vol. 1. — P. 177–192.

[145] Olver P. Direct reduction and differential constraints / P. Olver // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1994. — Vol. 444. — P. 509–523.

[146] Olver P. Group-invariant solutions of differential equations / P. Olver, P. Rosenau // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — Vol. 47. — P. 263–278.

[147] Oron A. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations / A. Oron, P. Rosenau // Phys. Lett. A. — 1986. — Vol. 118, № 4. — P. 172–176.

[148] Patera J. Subgroup of the Poincare group and their invariats / J. Patera, R. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenaus // J. Mat. Phys. — 1976. — Vol. 17, № 6. — P. 977–984.

[149] Patera J. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. 1. General method and the Poincare group / J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, № 8. — P. 1597–1624.

[150] Popovych R.O. Classification of admissible transformations of differential equations/ Popovych R.O. // Збірник праць Інституту математики НАН України . — К., 2006. — Т. 3. — с. 239–254.

[151] Popovych R.O. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations / R.O. Popovych, N.M. Ivanova // J. Phys. A.: Math. Gen. — 2004. — V.37. — P. 7547–7565.

[152] Popovych R.O. Realizations of real low-dimensional Lie algebras/ Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W. // J. Phys. A 36 (2003). — no. 26. — 7337–7360 (see arXiv:math-ph/0301029v7).

[153] Rideau G. Nonlinear equations invariant under the Poincare, similitude and confornal groups in two–dimensional spase–time / G. Rideau, P. Winternitz // J. Math. Phys. — 1990. — Vol. 31. — P. 1095–1105.

[154] Saleh B. E. A. Fundamentals of Fotonics / B. E. A. Saleh, M. C. Teich. — Wiley-Interscience Publication, New York. — 1991. — 317 p.

[155] Samoilenko A. Multifrequency. Oscillations of Nonlinear Systems / Samoilenko A., Petryshyn R. — DODRECH BOSTON/LONDON: Kluwer Academic Publishers. — 2004. — 317 p.

[156] Serov M. I. Galilei's relativity principle for a system of reaction- convection -diffusion equations/ Rassokha I. V. // Journal of Mathematic Scienses. — 2013. — Vol. 194, № 5. — P. 539–556.

[157] Spichak S.V. Symmetry classification and exact solutions of the one-dimensional Fokker-Planck equation with arbitrary coefficients of drift and diffusion / S.V. Spichak, V.I. Stognii // J. Phys. A. — 1999. — V. 32, № 47. — P. 8341–8353.

[158] Spichak S.V. Symmetric classification of the one-dimensional Fokker-Planck-Kolmogorov equation with arbitrary drift and diffusion coefficients / S.V. Spichak, V.I. Stognii // Nonlinear oscillations. — 1999. — V. 2, № 3. — P. 401–413. (in Russian).

[159] Tychynin V.A. Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations / V.A. Tychynin, O.V. Petrova, O.M. Tertyshnyk // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA) — 2007. — V. 3, 019. — 14 p. — URL: http://arxiv.org/abs/math-ph/0702033

[160] Tychynin V.A. Non-local symmetry and generating solutions for Harry–Dym–type equations / V.A. Tychynin // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Vol. 27. — P. 4549–4556.

[161] Wilhelmsson H. Plasma temperature and density dynamics including particle and heat pinch effects / H. Wilhelmsson // Physica Scripta. — 1992.— Vol. 46. — P. 177–181.

[162] Zhdanov R.Z. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source / R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno // J.Phys.A: Math. Gen. — 1999. — Vol. 32. — P. 7405–7418.

[163] Yung C.M. Group classification and symmetry reductions of the non-linear diffusion-convection equation $u_t = (D(u)u_x)_x - K'(u)u_x$ / C.M. Yung, K. Verburg, P. Baveye // Int. J. Non-Lin. Mech. — 1994. — V. 29, № 3. — P. 273–278.

Наукове видання

Сєров Микола Іванович
Рассоха Інна Володимирівна

СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Монографія

Комп'ютерна верстка Рассоха І.В.

Друк RISO.
Ум. друк. арк. 9,76.

Тираж 100 прим. Зам. № 547 від 20.12.13

Поліграфічний центр
Полтавського національного технічного університету
імені Юрія Кондратюка
36011, Полтава, Першотравневий проспект, 24

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів
видавничої продукції. Серія ДК № 3130 від 06.03.2008 р.

Віддруковано з оригінал-макета ПЦ ПолтНТУ