Збірник праць Інституту математики НАН України 2007, т.4, N 3, 159–170

УДК 517.9:519.46

Q-умовні симетрії і точні розв'язки систем рівнянь реакції-дифузії

О.Г. Плюхін

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail:pliukhin@imath.kiev.ua

Побудовано широкий клас Q-умовних симетрій систем реакції-дифузії (РД) зі степеневими коефіцієнтами дифузії. Отримано нові неліївські анзаци, які редукують системи РД до систем ЗДР, та точні розв'язки.

A wide range of Q-conditional symmetries for reaction-diffusion systems with power diffusivities are constructed. The relevant non-Lie ansätze to reduce the systems to ODE systems and examples of exact solutions are obtained.

1. Вступ. Системою рівнянь реакції-дифузії(РД)

$$\begin{aligned} U_t &= [D^1(U)U_x]_x + F^1(U,V), \\ V_t &= [D^2(V)V_x]_x + F^2(U,V), \end{aligned} \tag{1}$$

де $D^1(U)$, $D^2(V)$, $F^1(U,V)$ та $F^2(U,V)$ – невідомі гладкі функції, нижні індекси t та x означають диференціювання за цими змінними, узагальнюється значна кількість математичних моделей, якими описуються різноманітні процеси фізики, біології, хімії. Природно, що актуальною задачею є знаходження точних розв'язків цієї системи. Для побудови розв'язків ми використаємо відомий алгоритм відшукання операторів Q-умовної симетрій [1, 2], потім за цими операторами проводимо редукцію відповідних систем РД до систем ЗДР та врешті-решт побудуємо точні розв'язки вихідної системи. Вичерпний опис симетрій Лі для системи (2) отримано в роботах [3–5] (при сталих коефіцієнтах дифузії) та [6] (при змінних коефіцієнтах дифузії). Відшукання операторів Q-умовної симетрій таких систем тут проводиться вперше. Зауважимо, що деякі Q-умовні симетрії системи (2) знайдені в роботі [7], але лише для випадку сталих коефіцієнтів дифузії.

Оскільки знаходження Q-умовних симетрій системи (2) є досить складною задачею, то в цій роботі ми розглянемо систему рівнянь реакції-дифузії зі степеневими коефіцієнтами дифузії

$$\begin{aligned} U_t &= [U^k U_x]_x + F^1(U,V),\ l \neq -1, \\ V_t &= [V^l V_x]_x + F^2(U,V),\ k \neq -1,\ k^2 + l^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

яка є частковим випадком (2). Зауважимо, що в роботах [8–10] проведено повний опис Q-умовних симетрії скалярного рівняння РД зі степеневим коефіцієнтом дифузії

$$U_t = [U^k U_x]_x + F^1(U).$$

В роботах [11, 12] (детальніше див. [13, 14]) знайдено всі Q-умовні симетрії та побудовано низку точних розв'язків скалярного рівняння реакції-дифузії-конвекції

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^n U_x + F(U),\ \lambda \neq 0;\ \ n = m,\ m+1;\ n \neq -1.$$

2. Q-умовні симетрії. Ставимо задачу відшукання операторів вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,U,V)\partial_x + \eta^1(t,x,U,V)\partial_U + \eta^2(t,x,U,V)\partial_V, \tag{3}$$

для системи (8). Шукатимемо лише ті оператори, які не можуть бути зведені до ліївських. Для спрощення обрахунків використаємо наступну заміну

$$\begin{aligned} u &= U^{k+1},\ k \neq -1, \\ v &= V^{l+1},\ l \neq -1. \end{aligned} \tag{4}$$

Після заміни (3) система (8) і оператор (5) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u^m u_t + C^1(u,v), \\ v_{xx} &= v^n v_t + C^2(u,v), \end{aligned} \tag{5}$$

де $m = -\frac{k}{k+1} \neq -1$, $n = -\frac{p}{p+1} \neq -1$, $C^1(u,v) = -(k+1)F^1\left(u^{\frac{1}{k+1}}, v^{\frac{1}{l+1}}\right)$, $C^2(u,v) = -(p+1)F^2\left(u^{\frac{1}{k+1}}, v^{\frac{1}{l+1}}\right)$,

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,u,v)\partial_x + \eta^1(t,x,u,v)\partial_u + \eta^2(t,x,u,v)\partial_v, \tag{6}$$

відповідно. Використавши відому процедуру [1, 2, 15], отримаємо систему визначальних рівнянь для відшукання коефіцієнтів операторів вигляду (6)

$$
\begin{aligned}
&1)\ \xi_{uu} = \xi_{vv} = \xi_{uv} = 0,\\
&2)\ \eta^1_{vv} = 0,\\
&3)\ \eta^2_{uu} = 0,\\
&4)\ 2\xi\xi_u u^m + \eta^1_{uu} - 2\xi_{xu} = 0,\\
&5)\ 2\xi\xi_v v^n + \eta^2_{vv} - 2\xi_{xv} = 0,\\
&6)\ \xi\xi_v(u^m + v^n) + 2\eta^1_{uv} - 2\xi_{xv} = 0,\\
&7)\ \xi\xi_u(u^m + v^n) + 2\eta^2_{uv} - 2\xi_{xu} = 0,\\
&8)\ \xi\eta^1_v(u^m - v^n) + 2\eta^1_{xv} - 2\xi_v C^1 - 2\xi_v\eta^1 u^m = 0,\\
&9)\ \xi\eta^2_u(v^n - u^m) + 2\eta^2_{xu} - 2\xi_u C^2 - 2\xi_u\eta^2 v^n = 0,\\
&10)\ - m\xi\eta^1 u^{m-1} + (2\xi_u\eta^1 - \xi_t - \xi_v\eta^2 - 2\xi\xi_x)u^m +\\
&+\xi_v\eta^2 v^n + 3\xi_u C^1 + \xi_v C^2 - 2\eta^1_{xu} + \xi_{xx} = 0,\\
&11)\ - n\xi\eta^2 v^{n-1} + (2\xi_v\eta^2 - \xi_t - \xi_u\eta^1 - 2\xi\xi_x)v^n +\\
&+\xi_u\eta^1 u^m + 3\xi_v C^2 + \xi_u C^1 - 2\eta^2_{xv} + \xi_{xx} = 0,\\
&12)\ m(\eta^1)^2 u^{m-1} + (\eta^1_t + \eta^2\eta^1_v + 2\xi_x\eta^1)u^m - \eta^2\eta^1_v v^n +\\
&+\eta^1 C^1_u + \eta^2 C^1_v - \eta^1_u C^1 + 2\xi_x C^1 - \eta^1_v C^2 - \eta^1_{xx} = 0,\\
&13)\ n(\eta^2)^2 v^{n-1} + (\eta^2_t + \eta^1\eta^2_u + 2\xi_x\eta^2)v^n - \eta^1\eta^2_u u^m +\\
&+\eta^1 C^2_u + \eta^2 C^2_v - \eta^2_u C^1 + 2\xi_x C^2 - \eta^2_v C^2 - \eta^2_{xx} = 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Розв'язуючи систему (7) приходимо до висновку, що у випадку $\xi = a(t,x)u + b(t,x)v + c(t,x),\ a(t,x)^2 + b(t,x)^2 \neq 0$ система (4) не має операторів Q-умовної симетрії. Тому, надалі $\xi = \xi(t,x)$. Використавши 1) – 7) рівняння системи (7), отримаємо

$$
\begin{aligned}
\eta^1 &= q^1(t)v + r^1(t,x)u + p^1(t,x),\\
\eta^2 &= q^2(t)u + r^2(t,x)v + p^2(t,x).
\end{aligned}
$$

Далі після нетривіального процесу розв'язування рівнянь 8) – 13) системи (7) ми отримуємо велику кількість неліївських симетрій. В залежності від значень функцій $q^1(t),\ q^2(t),\ \xi(t,x)$ природнім чином виділяється три випадки

a) $q^1(t)^2+q^2(t)^2\neq 0,\ \xi(t,x)=0;$

b) $q^1(t)=q^2(t)=0,\ \xi(t,x)=0;$

c) $q^1(t)=q^2(t)=0,\ \xi(t,x)\neq 0.$

Зауважимо, що випадок $q^1(t)^2+q^2(t)^2\neq 0,\ \xi(t,x)\neq 0$ неможливий, оскільки тоді з рівнянь системи (7) випливає, що $m=n=0$, а ми припустили, що $m^2+n^2\neq 0$. У випадку (c) було отримано лише ліївські оператори. Найбільш складними виявилися перші два випадки. Тут ми наводимо лише результати, отримані у випадку (a). Повний перелік Q-умовних симетрій з випадку (b) буде наведено в подальших роботах.

Випадок (a) поділяється в свою чергу на чотири підвипадки, а саме

a1) $p^1_x=0,\ p^2_x\neq 0.$

a2) $p^1_x\neq 0,\ p^2_x\neq 0.$

a3) $p^1_x=p^2_x=0.$

Зауважимо, що підвипадок $p^2_x=0,\ p^1_x\neq 0$ еквівалентний до a1). Виявляється, що випадок a2) не веде до жодних умовних симетрій. У випадку a3) отримано систему класифікаційних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&(q^1v+r^1u+p^1)C^1_u+(q^2u+r^2v+p^2)C^1_v-r^1C^1-q^1C^2+\\
&+(q^1(q^2u+r^2v+p^2)+q^1_tv+r^1_tu+p^1_t)u^m+\\
&+m(q^1v+r^1u+p^1)^2u^{m-1}-q^1(q^2u+r^2v+p^2)v^n=0,\\
&(q^1v+r^1u+p^1)C^2_u+(q^2u+r^2v+p^2)C^2_v-r^2C^2-q^2C^1+\\
&+(q^2(q^1v+r^1u+p^1)+q^2_tu+r^2_tv+p^2_t)v^n+\\
&+n(q^2u+r^2v+p^2)^2v^{n-1}-q^2(q^1v+r^1u+p^1)u^m=0,
\end{aligned}
$$

(тут $C^i=C^i(u,v),\ q^i=q^i(t),\ r^i=r^i(t),\ p^i=p^i(t),\ i=1,2$ – шукані функції), яку не вдається розв'язати. Випадок a1) нами повністю проаналізовано та отримано 16 систем РД (8), що допускають оператори Q-умовної симетрії, які не збігаються з операторами класичних симетрій Лі. Всі 16 систем мають таку особливість, що одне з двох рівнянь є автономним. Нижче ми подаємо отримані результати у такому порядку: нелінійна система РД, відповідний оператор Q-умовної симетрії, обмеження на коефіцієнти системи або оператора. Скрізь $f(u)$ є довільною гладкою функцією, а λ з індексами та β – довільними (якщо нема обмежень) сталими. У всіх системах наведених нижче $m\neq 0,\ p^2_x\neq 0$, крім (9), а в системі (9) $m\in\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \lambda_1 u + \lambda_2,\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + f(u),\\
&Q = \partial_t + (\lambda_4 \exp((\lambda_1 - \lambda_3)t)u + p^2)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + \lambda_2\lambda_4 \exp((\lambda_1 - \lambda_3)t),\ \lambda_4 \neq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + f(u),\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_1 v - \lambda_2 f(u) + \lambda_1\lambda_2 u + \lambda_3,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
Q = \partial_t + (\lambda_4(\lambda_2 u + v) + p^2)\partial_v,
\tag{9}
$$

де

$$
p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_1 p^2 + \lambda_3\lambda_4,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_4 \neq 0.
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \lambda_1 - \lambda_2 u^m,\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + \lambda_4 u^2 + \lambda_5 u + \lambda_6,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2\partial_u + \left(\left(\lambda_7 \exp(-\lambda_3 t) - \tfrac{2\lambda_2\lambda_1}{\lambda_3}\right) u + p^2\right)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\left(\lambda_7 \exp(-\lambda_3 t) - \tfrac{2\lambda_2\lambda_4}{\lambda_3}\right) - \lambda_2\lambda_5,\ \lambda_2 \neq 0,\\
&\lambda_3 \neq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \lambda_1 - \lambda_2 u^m,\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 u^2 + \lambda_4 u + \lambda_5,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2\partial_u + ((-2\lambda_2\lambda_3 t + \lambda_6)u + p^2)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 + (2\lambda_2\lambda_3 t - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_2\lambda_4,\ \lambda_2 \neq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \lambda_1 - \lambda_2 u^m,\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + \lambda_4 u + \lambda_5 \exp\left(\tfrac{\lambda_7}{\lambda_2} u\right) + \lambda_6,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2\partial_u + \left(\left(\lambda_8 \exp(-\lambda_3 t) + \tfrac{\lambda_4\lambda_7}{\lambda_3}\right) u + \lambda_7 v + p^2\right)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\left(\lambda_8 \exp(-\lambda_3 t) + \tfrac{\lambda_7\lambda_4}{\lambda_3}\right) - \lambda_2\lambda_4 + \lambda_6\lambda_7,\\
&\lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0,\ \lambda_7 \neq 0.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \lambda_1 - \lambda_2 u^m,\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 u + \lambda_4 \exp(\tfrac{\lambda_6}{\lambda_2} u) + \lambda_5,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 \partial_u + ((\lambda_3\lambda_6 t + \lambda_7)u + \lambda_6 v + p^2)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3\lambda_6 t + \lambda_7) - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_5\lambda_6,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_6 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (\lambda_1 + \lambda_2(m+1))u - \lambda_2 u^{m+1},\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_1 v + \lambda_3 u^{m+1} - \lambda_3(m+1)u + \lambda_4,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
Q = {} & \partial_t + \tfrac{\lambda_2}{1-\lambda_5\exp(-m\lambda_2 t)} u\partial_u + \\
& + \left(\tfrac{\lambda_3(\lambda_2(m+1)+\lambda_6(\lambda_5\exp(-m\lambda_2 t)-1))}{\lambda_2\lambda_5\exp(-m\lambda_2 t)} u + \lambda_6 v + p^2\right)\partial_v,
\end{aligned} \tag{11}$$

де

$$p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_1 p^2 + \lambda_4\lambda_6,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_5 \neq 0. \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (\lambda_1 + \lambda_2(m+1))u - \lambda_2 u^{m+1},\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_1 v + \lambda_3 u^{m+1} - \lambda_3(m+1)u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5,\\
&Q = \partial_t + \tfrac{\lambda_2}{1-\lambda_6\exp(-m\lambda_2 t)} u\partial_u + \left(\tfrac{\lambda_3(m+1)\exp(m\lambda_2 t)}{\lambda_6} u + p^2\right)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_1 p^2 + \tfrac{\lambda_2\lambda_4}{1-\lambda_6\exp(-m\lambda_2 t)},\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_6 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + (\lambda_1 - \lambda_2)v + \lambda_3(u+\alpha)^\beta + \lambda_4(u+\alpha) + \lambda_5,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$Q = \partial_t + \lambda_2(u+\alpha)\partial_u + ((\lambda_2\lambda_4(\beta-1)t + \lambda_6)u + \lambda_2\beta v + p^2)\partial_v, \tag{14}$$

де

$$\begin{aligned}
p_t^2 = {} & p_{xx}^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)p^2 + \lambda_2\beta\lambda_5 + \alpha(\lambda_2\lambda_4(\beta-1) + \\
& + (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2\lambda_4(\beta-1)t + \lambda_6)),\ \lambda_2 \neq 0,\ \beta \neq 1,\ 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + \lambda_4 (u+\alpha)^{\lambda_5} + \lambda_6 (u+\alpha) + \lambda_7,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 (u+\alpha)\partial_u + \left((\lambda_8 \exp((\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)t) - \tfrac{\lambda_2\lambda_6(\lambda_5-1)}{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3} \right) u +\\
&\quad + \lambda_2\lambda_5 v + p^2)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + \lambda_2\lambda_5\lambda_7 + \alpha \Big((\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_8 \exp((\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)t) -\\
&\quad - \tfrac{\lambda_2\lambda_3\lambda_6(\lambda_5-1)}{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3} \Big),\ \lambda_3 \neq \lambda_1 - \lambda_2,\ \lambda_5 \neq 0,\ 1,\ \lambda_2 \neq 0\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + \lambda_4 (u+\alpha)\ln(u+\alpha) + \lambda_5 (u+\alpha) + \lambda_6,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 (u+\alpha)\partial_u + \bigg(\left(\lambda_7 \exp((\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)t) + \tfrac{\lambda_2\lambda_4}{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}\right) u +\\
&\quad + \lambda_2 v + p^2 \bigg)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_7 \exp((\lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_2)t) +\\
&\quad + \tfrac{\alpha\lambda_2\lambda_3\lambda_4}{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3} - \lambda_2\lambda_6,\ \lambda_3 \neq \lambda_1 - \lambda_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + (\lambda_1 - \lambda_2) v + \lambda_3 (u+\alpha)\ln(u+\alpha) + \lambda_4 (u+\alpha) + \lambda_5,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 (u+\alpha)\partial_u + ((-\lambda_2\lambda_3 t + \lambda_6)u + \lambda_2 v + p^2)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)p^2 + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2)(-\lambda_2\lambda_3 t + \lambda_6) - \lambda_2(\alpha\lambda_3 - \lambda_5).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + (\lambda_1 - \lambda_2) v + \lambda_3 \ln(u+\alpha) + \lambda_4 (u+\alpha) + \lambda_5,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 (u+\alpha)\partial_u + ((-\lambda_2\lambda_4 t + \lambda_6)u + p^2)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)p^2 + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2)(-\lambda_2\lambda_4 t + \lambda_6) - \lambda_2(\alpha\lambda_4 + \lambda_3).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + (u+\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2 u^m),\\
&v_{xx} = v_t + \lambda_3 v + \lambda_4 \ln(u+\alpha) + \lambda_5 (u+\alpha) + \lambda_6,\\
&Q = \partial_t + \lambda_2 (u+\alpha)\partial_u +\\
&\quad + \left(\left(\lambda_7 \exp((\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)t) + \tfrac{\lambda_2\lambda_5}{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}\right) u + p^2 \right)\partial_v,\\
&p_t^2 = p_{xx}^2 - \lambda_3 p^2 + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_7 \exp((\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)t) +\\
&\quad + \lambda_2 \left(\tfrac{\alpha\lambda_3\lambda_5}{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3} - \lambda_4 \right),\ \lambda_3 \neq \lambda_1 - \lambda_2.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t - \lambda_1 u^{m+1} - \lambda_2 u^m - \lambda_3 u^m v + \lambda_3 v + \lambda_4 u + \lambda_5,\\
&v_{xx} = v_t + (\lambda_4 - \lambda_1)v + \lambda_6,\\
&Q = \partial_t + (\lambda_3 v + \lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u + (\lambda_7 u + \lambda_8 v + p^2)\partial_v,\\
&p^2_t = p^2_{xx} - (\lambda_4 - \lambda_1)p^2 + \lambda_7(\lambda_5 - \lambda_2) + \lambda_6\lambda_8,\\
&\lambda_3 \neq 0,\ \lambda_6 = \tfrac{\lambda_2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_5}{\lambda_3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u^m u_t + \tfrac{\lambda_1}{2}v^2 - \lambda_1 v u^m - \lambda_2 u^m + \lambda_3 u + \lambda_4,\\
&v_{xx} = v v_t + \lambda_3(v + \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}),\\
&Q = \partial_t + (\lambda_1 v + \lambda_2)\partial_u + p^2\partial_v,\\
&p^2_{xx} - (p^2)^2 - \lambda_3 p^2 = 0,\ p^2_t = 0,\ \lambda_1 \neq 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Оскільки при розв'язуванні системи (7) нелінійності системи (4) і відповідні оператори (6) отримуються у термінах u, v, то необхідно ще зробити заміну (3) для того щоб отримати системи вигляду (8) і відповідні оператори (5) у термінах U, V. Ми зробимо цю заміну для деяких найбільш цікавих систем.

3. Анзаци та точні розв'язки. В цьому пункті ми побудуємо анзаци, запишемо редуковані рівняння і інколи точні розв'язки для деяких вище наведених операторів.

Розглянемо систему рівнянь (8) і відповідний оператор (9). Використавши оператор (9), отримаємо анзац

$$\begin{aligned}
&u = \varphi(x),\\
&v = -\lambda_2\varphi(x) + \exp(\lambda_4 t)\left(\psi(x) + \int p^2 \exp(-\lambda_4 t)dt\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Підставивши анзац (13) у рівняння (8) отримаємо редуковані рівняння

$$\begin{aligned}
&\varphi_{xx} = f(\varphi),\\
&\psi_{xx} = (\lambda_1 + \lambda_4)\psi.
\end{aligned} \tag{17}$$

Розв'яжемо систему (14) при $f(\varphi) = \alpha\varphi$.

В залежності від значення сталої α, отримаємо три типи розв'язків

$$\alpha = 0,\ \varphi = A_1 x + A_2, \tag{18}$$

$$\alpha > 0,\ \varphi = A_1 \exp(\sqrt{\alpha} x) + A_2 \exp(-\sqrt{\alpha} x), \tag{19}$$

$$\alpha < 0,\ \varphi = A_1 \cos(\sqrt{-\alpha} x) + A_2 \sin(\sqrt{-\alpha} x), \tag{20}$$

тут і нижче $A_i = const,\ i = 1, 2, 3, 4$. В залежності від значення виразу $\lambda_1 + \lambda_4$, отримаємо три типи розв'язків

$$\lambda_4 = -\lambda_1,\ \psi = A_3 x + A_4, \tag{21}$$

$$\lambda_4 + \lambda_1 > 0,\ \psi = A_3 \exp(\sqrt{\lambda_1 + \lambda_4} x) + A_4 \exp(-\sqrt{\lambda_1 + \lambda_4} x), \tag{22}$$

$$\lambda_4 + \lambda_1 < 0,\ \psi = A_1 \cos(\sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_4)} x) + A_2 \sin(\sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_4)} x). \tag{23}$$

Підставляючи попарно вирази (15–17), (18–20) у (13) отримаємо 9 різних розв'язків системи (8).

Розглянемо систему рівнянь (10) і відповідний оператор (11). Використавши оператор (11), отримаємо анзац

$$\begin{gathered} u = \varphi(x)(\exp(m\lambda_2 t) - \lambda_5)^{\frac{1}{m}}, \\ v = \frac{\lambda_3 \varphi(x)(\exp(m\lambda_2 t) - \lambda_5)^{\frac{1}{m}+1}}{\lambda_2 \lambda_5} + \exp(\lambda_6 t)\left(\psi(x) + \int p^2 \exp(-\lambda_6 t) dt\right). \end{gathered} \tag{24}$$

Підставивши анзац (21) у рівняння (10) отримаємо редуковані рівняння

$$\begin{gathered} \varphi_{xx} = \lambda_2 \lambda_5 \varphi^{m+1} + (\lambda_1 + \lambda_2(m+1))\varphi, \\ \psi_{xx} = (\lambda_1 + \lambda_6)\psi. \end{gathered} \tag{25}$$

Розв'язками другого рівняння системи (22) є вирази (18–20) з $\lambda_4 = \lambda_6$. Частковий розв'язок першого рівняння системи (22) отримано за допомогою пакета програм Mathematica 5.0

$$\begin{gathered} \varphi = \left(-\frac{(m+2)(\lambda_1 + \lambda_2(m+1))}{\lambda_2 \lambda_5 (1 + \cosh(m\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2(m+1)}(x + A_3))}\right)^{\frac{1}{m}}, \\ m \neq -2,\ \lambda_1 \neq -\lambda_2(m+1). \end{gathered} \tag{26}$$

Отже, розв'язками системи (10) будуть вирази (21) з урахуванням (23), та (18–20) з $\lambda_4 = \lambda_6$.

Розглянемо систему (10) при $m = -\frac{1}{2},\ \lambda_4 = 0,\ \lambda_2 = 2\lambda_1$. Зробивши заміну (3), одержимо

$$\begin{aligned} &U_t = (UU_x)_x + \lambda_1 U(1-U), \\ &V_t = V_{xx} - \lambda_1 V - \lambda_3 U(1 - \tfrac{1}{2}U). \end{aligned} \tag{27}$$

Перше рівняння системи - це добре відоме пористе рівняння Фішера [6,16,17], а друге - це класичне рівняння дифузії для компоненти V плюс нелінійність, яка моделює взаємодію з компонентою U за так званим логістичним законом. Розв'язком системи (27) будуть вирази

$$\begin{aligned} U &= \frac{4\lambda_5 \cosh^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{8}}(x+A_3)\right)}{3}(\exp(-\lambda_1 t) - \lambda_5)^{-1}, \\ V &= \frac{16\lambda_3\lambda_5 \cosh^4\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{8}}(x+A_3)\right)(\exp(-\lambda_1 t)-\lambda_5)^{-1}}{9\lambda_2} + \\ &\quad + \exp(\lambda_6 t)\left(\psi(x) + \int p^2 \exp(-\lambda_6 t)dt\right), \end{aligned} \tag{28}$$

де $\psi(x)$ визначається формулами (18–20) з $\lambda_4 = \lambda_6$, а p^2 є розв'язком рівняння (12).

Розглянемо систему (13) і відповідний оператор (14). Отримаємо анзац

$$\begin{aligned} &u = \varphi(x)\exp(\lambda_2 t) - \alpha, \\ &v = \psi(x)\exp(\lambda_2\beta t) - \exp(\lambda_2 t)\varphi(x)\left(\lambda_4 t + \frac{\lambda_4+\lambda_6}{\lambda_2(\beta-1)}\right) + \frac{\alpha\lambda_4(\beta-1)}{\beta}t + \\ &+ \frac{\alpha(\lambda_4(\beta-1)+\beta\lambda_6)}{\lambda_2\beta^2} + \exp(\lambda_2\beta t)\int p^2\exp(-\lambda_2\beta t)dt. \end{aligned} \tag{29}$$

Далі отримаємо редуковані рівняння

$$\begin{aligned} &\varphi_{xx} = \lambda_1\varphi, \\ &\psi_{xx} = (\lambda_1 + \lambda_2(\beta-1))\psi + \lambda_3\varphi^\beta. \end{aligned} \tag{30}$$

Розв'язками першого рівняння системи (25) будуть вирази (15–17) з $\alpha = \lambda_1$. Друге рівняння в загальному вигляді не розв'язується, але має розв'язки при суттєвих обмеженнях на коефіцієнти, наприклад при $\lambda_1 = 0,\ \beta = 2,\ \lambda_2 > 0$.

Зауваження. Всі отримані вище анзаци мають ту особливість, що вони містять інтегральні члени вигляду $\int p^2 \exp(-\lambda t)dt$, які є наслідком того, що відповідний оператор Q-умовної симетрії містить довільний розв'язок $p^2(t,x)$ лінійного рівняння дифузії.

4. Висновки. В цій роботі побудовано систему визначальних рівнянь для знаходження операторів Q-умовної симетрії вигляду (6) для систем (4). Отриману систему вдалося розв'язати поки що частково. Знайдені оператори використано для побудови анзаців, за допомогою яких побудовано редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь. Для системи РД (10), яка на наш погляд є цікавою для застосування, побудовано точний розв'язок (28). Планується отримати розв'язки для деяких інших нелінійних систем РД, які допускають оператори Q-умовної симетрії, та дослідити їхні властивості.

Автор вдячний Р.М.Чернізі за постановку задачі та за допомогу в роботі над статтею.

[1] Bluman G., Cole I. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. –1969. –**18**. –P. 1025–42.

[2] Fushchych W., Shtelen W., Serov M. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics //Dordrecht: Kluwer. –1993.

[3] Cherniha R., King J., Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems:I. //J. Phys. A: Math. Gen. –2000. –**33**. –P. 267–282, 7839–7841

[4] Cherniha R., King J. Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems:II. // J. Phys. A: Math. Gen. –2003. –**36**. –P. 405–425.

[5] Nikitin A. G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems // J. Math. Anal. Appl. –2007. –**332**, № 1. –P. 666–690.

[6] Cherniha R., King J. Non-linear reaction–diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansätze and exact solutions //J. Math. Anal. Appl. –2005. –**308**. –P. 11–35.

[7] Баранник Т. Симетрія і точні розв'язки нелінійних рівнянь дифузії // (автореферат) –2006.

[8] Серов Н. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Укр. мат. журн. –1990. – **42**. –С. 1370–76.

[9] Clarkson P., Mansfield E. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Physica D. –1993. –**70**. – P. 250–288.

[10] Arrigo J., Hill M. Nonclassical symmetries for nonlinear diffusion and absorption // Stud. Appl. Math. –1995. –**94**. –P. 21–39.

[11] Cherniha R. New Q-conditional Symmetries and Exact Solutions of Some Reaction-Diffusion-Convection Equations Arising in Mathematical Biology // J. Math. Anal. Appl. –2007. –**326**. – P. 783–799.

[12] Черніга Р., Плюхін О. Нові Q-умовні симетрії та розв'язки рівнянь типу реакції-дифузії-конвекції зі степеневими нелінійностями // Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики (до 70-річчя від дня народження Вільгельма Ілліча Фущича), В.М. Бойко, А.Г. Нікітін, Р.О. Попович (ред.) // Збірник праць Інституту математики НАН України, –**3**, № 2. - Київ: Ін-т математики НАН України. –2006. –С. 316-330.

[13] Cherniha R., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction-difusion-convection equations. I. // math-ph/0612078. –2006.

[14] Cherniha R., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction-difusion-convection equations. II. // 0706.0814 [math-ph]. –2007.

[15] Cherniha R., Serov M. Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, Ansatze and solutions // J. Math. Anal. Appl. –2003. –**282**. –P. 305–328.

[16] Murray J. Mathematical Biology // Berlin: Springer. –1989. –750 p.

[17] Witelski T. Merging traveling waves for the pouous-Fisher's equation // Applied Mathematics Letters. –1995. –**8**, № 4. –P. 57–62.