# ГАЛІЛЕЇВСЬКА ІНВАРІАНТНІСТЬ РІВНЯННЯ ГІНЗБУРГА — ЛАНДАУ З ДЕРИВАТИВНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

**М. І. Сєров, І. В. Рассоха, О. Г. Плюхін**

*Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна*

innaolha@mail.ru

Системи нелінійних рівняння вигляду

$$U_0 = \partial_1[F(U)U_1] + G(U)U_1 + H(U), \tag{1}$$

де

$$U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} f^{11}(U) & f^{12}(U) \\ f^{21}(U) & f^{22}(U) \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} g^{11}(U) & g^{12}(U) \\ g^{21}(U) & g^{22}(U) \end{pmatrix}, H(U) = \begin{pmatrix} h^1(U) \\ h^2(U) \end{pmatrix},$$

$u^a = u^a(x_0, x_1)$ — довільні гладкі функції,

$$U_0 = \frac{\partial U}{\partial x_0}, U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$x_0$ — часова, $x_1$ — просторова змінні, широко застосовуються для опису різних фізичних та біохімічних процесів. При переході у системі (1) до комплексної змінної можна одержати рівняння Шредінгера, яке описує рух квантової частинки, та рівняння Гінзбурга — Ландау, яке є основним нелінійним рівнянням фізики нерівноважних середовищ і виникає при описі дифузного хаосу і дисипативних структур в гідродинаміці, фізиці лазерів, хімічний кінетиці та магнітогідродинамічні хвилі в плазмі.

Симетрійні властивості рівняння Гінзбурга — Ландау без деривативного члена вивчались багатьма авторами, наприклад в роботі [1]. Зауважимо, що класичне рівняння Гінзбурга — Ландау не володіє галілеївською інваріантністю.

Серед найвагоміших результатів з цього питання можна виділити роботи А. Г. Нікітіна [3], де розглянуто класифікацію симетрійних властивостей нелінійної багатовимірної системи рівнянь реакції-дифузії. В результаті досліджень, як частинний випадок, одержано класифікацію нелінійностей узагальненого рівняння Гінзбурга — Ландау без деривативного члена вигляду

$$\psi_0 + \lambda\Delta\psi = F(\psi, \psi^*), \ \lambda \in C,$$

при яких воно галілеївськи інваріантне.

Оскільки більшість основних фізичних процесів задовольняють принципу відносності Галілея чи Пуанкаре — Енштейна, то і рівняння, які їх описують, повинні також бути інваріантні відносно алгебри Галілея чи алгебри Пуанкаре. Тому вимога інваріантності диференціальних рівнянь відносно тієї чи іншої групи перетворень може служити критерієм відбору його в якості математичної моделі опису конкретного фізичного процесу. У зв'язку з цим актуальною є задача: по заданій групі перетворень побудувати математичну модель (диференціальне рівняння), що володіє зазначеною симетрією.

Поставимо задачу:

дослідити, при яких нелінійностях рівняння Гінзбурга — Ландау з деривативною нелінійністю вигляду

$$\psi_0 = -\lambda\psi_{11} + F^1(\psi,\psi^*)\psi_1 + F^2(\psi,\psi^*)\psi_1^* + F(\psi,\psi^*) \qquad (2)$$

де $\psi = u^1 + iu^2$ інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея вигляду

$$\begin{aligned}&\langle\partial_0,\partial_1, G = x_0\partial_1 + x_1 Q_1 + Q_2, Q_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3,\\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_3 + x_1Q_2 + \frac{x_1^2}{2}Q_1 + Q_4\rangle,\end{aligned} \qquad (3)$$

де оператори $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ мають вигляд $Q_i = (\alpha^i_{ab}u^b + \beta^i_a)\partial_{u^a}$, причому $\alpha^i_{ab}, \beta^i_a - const$, $i \in \{1,2\}$, та задовольняють наступні комутаційні співвідношення

$$[Q_1,Q_2] = 0, [Q_1,Q_3] = 0,\ [Q_2,Q_3] = -Q_2,$$

$$[Q_1,Q_4] = 0,\ [Q_2,Q_4] = 0,\ [Q_3,Q_4] = 2Q_4.$$

Дослідження проведено з точністю до перетворень еквівалентності вигляду

$$x_0' = a_0x_0 + b_0,\ x_1' = a_1x_1 + gx_0 + b_1,\ u^{a'} = k_{ab}u^b + m_a \qquad (4)$$

де $a_\mu, b_\mu, g, k_{ab}, m_a$ — довільні сталі, $\mu \in \{0,1\}$, $a,b \in \{1,2\}$. Перетворення еквівалентності, тобто такі перетвореннння, які не виводять дане рівняння з класу дозволяють значно полегшити аналіз симетрійних властивостей диференціальних рівнянь. Вони дають можливість поділити клас рівнянь на нееквівалентні підкласи. Це дозволяє виділити в кожному підкласі канонічний представник, дослідити його симетрійні властивості та поширити одержаний результат на всі рівняння даного підкласу.

В результаті встановлено, що рівняння (2) з точністю до перетворень еквіваленності (4) інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея (3) тоді і тільки тоді, коли воно має наступний вигляд

$$\psi_0 = -\lambda\psi_{11} + \left[\mathrm{m}(4k_1\lambda\psi^*\psi_1 - (|\vec{\psi}|^2)_1) + n\,|\vec{\psi}|^4\ e^{2w}\right]e^{2w}\psi,$$

де $\psi = u^1 + iu^2,\ \lambda, m, n \in C$, причому

$$Q_1 = k_1I - k_2J,\ Q_2 = 0,\ Q_3 = -\frac{1}{2}I,\ Q_4 = 0,$$

$$\omega = k_2\ln\vec{u}^2 + 2k_1\,\mathrm{arctg}\frac{u^2}{u^1},$$

$$I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2},\ J = -u^2\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2},$$

$$\vec{k} = (k_1, k_2),\ |\vec{k}| = 1,\ k_2 \neq 0.$$

Вимога інваріантності диференціального рівняння відносно тієї чи іншої групи перетворень може служити критерієм відбору його в якості математичної моделі для опису конкретного фізичного процесу [2]. Знання груп симетрії даного рівняння також дає можливість його інтегрування, дозволяє генерувати нові розв'язки з відомих та ін.

**Список літератури**


1. Берман В. С., Данило Ю. А. О групповых свойствах обобщенного уравнения Ландау — Гинзбурга // ДАН СССР. — 1981. — **258**, № 1. — С. 67—70.

2. Фущич В. И. Принцип относительности Галилея и нелинейные уравнения в частных производных // Тез. докл. Всесоюзн. конф. «Нелинейные пробле-мы дифференциальных уравнений и математической физики», 12—15 сентября, 1989, Тернополь. Ч. II. — С. 444—452.

3. Nikitin A. G. Group classification of systems of non-linear reaction—diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalised Ginzburg—Landau equations // J. Math. Anal. and Appl. (JMAA). 2006. — **324**. — P. 615—628. — ArXiv math-ph/0411027, 2004.