Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка

Сєров Микола Іванович
Блажко Людмила Миколаївна

СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Полтава — 2010

УДК 517.9

Рецензенти:
В. А. Тичинін, доктор фізико-математичних наук, професор
Г. М. Губреєв, доктор фізико-математичних наук, професор
В. М. Мойсишин, доктор фізико-математичних наук, професор

Сєров М. І., Блажко Л. М.
Симетрійні властивості та точні розв'язки нелінійних рівнянь гіперболічного типу. — Кременчук: ТОВ " Кременчуцька міська друкарня ", 2010. — 124 с.

ISBN 978-9667513-92-4

Монографію присвячено проведенню класифікації квазілінійних хвильових рівнянь відносно алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, побудові інваріантних розв'язків типу солітонних для рівняння синус-Гордон методами умовної симетрії та за допомогою ітеративної процедури нелокального розмноження розв'язків.

Рекомендовано до друку вченою радою Полтавського національного університету імені Юрія Кондратюка (протокол № 16 від 2 липня 2010 року).

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ **4**

ВСТУП **5**

РОЗДІЛ 1
Конформна інваріантність квазілінійних хвильових рівнянь **18**
1.1. Квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку 19
1.2. Конформна інваріантність рівнянь, які описують процеси електродинаміки 34
1.3. Класифікація лінійних неоднорідних зображень розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри у випадку двовимірного векторного поля 50
1.4. Системи квазілінійних хвильових рівнянь, інваріантні відносно розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри . . 65

РОЗДІЛ 2
Нелокальні формули розмноження розв'язків та умовна симетрія рівняння синус-Гордон **82**
2.1. Нелокальні формули розмноження розв'язків 84
2.2. Умовна інваріантність одновимірного рівняння синус-Гордон 104
2.3. Умовна інваріантність багатовимірного рівняння синус-Гордон 109

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ **113**

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

У формулах індекси, позначені латинськими літерами, змінюються від 1 до n, грецькими — від 0 до n. За індексами, що повторюються йде сумування. Нижні індекси функцій позначають диференціювання за відповідними індексами.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$	—	множини натуральних та дійсних чисел відповідно
$\mathbb{R}^n$	—	арифметичний дійсний n-вимірний простір
$\underset{n}{X}$	—	n-е продовження інфінітезимального оператора X
${}^{\mu}\eta$, ${}^{\mu\nu}\eta$,	—	координати продовженого оператора X
$\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_u = \dfrac{\partial}{\partial u}$	—	оператори диференціювання по x_μ та u
δ_{ab}	—	символ Кронекера
$g_{\mu\nu}$	—	метричний тензор із сігнатурою $(1, -1, -1, -1)$
$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$	—	оператор Д'Аламбера

Вступ

Однією з головних задач математичної фізики є побудова математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь для опису процесів природознавства. Отже, внаслідок широкого застосування диференціальні рівняння є цікавим об'єктом дослідження. Характерна особливість сучасного математичного опису реальних процесів полягає в тому, що основні фізичні закони, рівняння руху, різні математичні моделі володіють явною чи умовною, геометричною чи негеометричною, локальною чи нелокальною симетріями. Усі основні рівняння математичної фізики (рівняння Ньютона, Лапласа, Д'Аламбера, Шредінгера, Ліувілля, Дірака, Максвела і т. д.) інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень. Саме ця властивість виділяє їх із множини диференціальних рівнянь.

Математичні основи теорії симетрії диференціальних рівнянь започаткував у своїх фундаментальних роботах норвежський математик Софус Лі. Розвиток теорії С. Лі продовжили багато дослідників. Вперше ідеї Лі були застосовані Пуанкаре (1905 р.) до системи рівнянь Максвела. У 1918 році Е. Ньотер довела дві важливі теореми, які пов'язали групи симетрії з законами збереження. Г. Бейтман [69] ефективно використав симетрію лінійного хвильового рівняння для одержання його точних розв'язків. Роботи В.І. Смірнова і С.Л. Соболєва (1932 р.) були присвячені побудові та застосуванню функціонально–інваріантних розв'язків лінійного хвильового рівняння. Тривалий період результати С. Лі щодо групового аналізу диференціальних рівнянь з частинними похідними залишалися маловідомими. Г. Біркгоф першим наголосив на їх важливості і принциповій можливості застосування теорії груп у механіці [11]. Подальший розвиток метод С. Лі набув у роботах Л.В. Овсяннікова [31, 32, 33] і його школи, якими була створена теорія інваріантних і частковоінваріантних розв'язків диференціальних рівнянь. Важливі результати одержано Дж. Блуменом та І.Д. Коулом [72, 71], У. Міллером [25], П. Олвером [34, 89, 91, 92], Н.Х. Ібрагімовим [18, 17], П. Вінтерніцем [94, 95, 97]. В Україні перші роботи на цю тему опубліковано львівським математиком В.Г. Костенком наприкінці 50-х років минулого століття [20]. Так у математичній науці остатачно оформився важливий напрямок, який за пропозицією Л. В. Овсяннікова отримав назву „Груповий аналіз диференціальних рівнянь“. Суттєвий вклад у ці дослідження зроблений українською школою теоретико-алгебраїчного аналізу, яка була заснована В.І. Фущичем. Важливим напрямом, у якому працював В. Фущич і його учні, було застосування алгебр та груп інваріантності нелінійних диференціальних рівнянь до знаходження їх розв'язків. За допомогою підалгебр алгебри інваріантності диференціальних рівнянь будують спеціальні підстановки, які названо „анзацами“. Анзаци редукують вихідне рівняння до рівняння з меншою кількістю незалежних змінних. Це дало можливість одержати цілі класи точних розв'язків багатьох основних рівнянь математичної фізики Д'Аламбера [58], Ліувілля [4], Шредінгера [5, 77], Борна–Інфельда [53, 60, 75], Монжа–Ампера [54] та багатьох інших.

В.І. Фущичем та А. Г. Нікітіним [44, 46, 47, 51, 52] розроблено новий підхід до дослідження алгебр інваріантності диференціальних рівнянь, головна відмінність якого від класичного полягає в тому, що базисні елементи алгебри інваріантності даних рівнянь є інтегродиференціальними операторами. Цей підхід дозволив знайти нові симетрії багатьох добре відомих рівнянь квантової механіки: Дірака [57], Максвела [52], Ламе [59] тощо.

Виявляється, що є цілі класи рівнянь, що широко застосовуються при описі конкретних фізичних процесів, які не володіють ліївською симетрією, а це означає, що стандартний метод Лі для них є малоефективним. Тому актуальною стала задача узагальнити метод Лі з метою побудови принципово нових анзаців і точних розв'язків, які не можуть бути отримані стандартним алгоритмом Лі. В 1969 році Дж. Блумен та І.Д. Коул у роботі [71] ввели поняття некласичної симетрії, яка дала можливість знаходити оператори інваріантності диференціальних рівнянь, відмінні від операторів С. Лі. Ідеї Дж. Блумена і І.Д. Коула розвинуто в роботах П. Олвера та П. Розенау [92, 93], В.І. Фущича і І.М. Цифри [79]. На основі цих досліджень у роботах В.І. Фущича, В.І. Чопика та М.І. Сєрова [47, 56, 58, 63] розроблено новий метод знаходження симетрій, який отримав назву метод умовної симетрії. За допомогою цього методу можна виділити такі підмножини розв'язків диференціального рівняння, симетрія яких ширша, а іноді і зовсім відрізняється, від симетрії всієї множини його розв'язків. Результати досліджень умовної симетрії деяких конкретних рівнянь представлено в роботах [55, 63, 74, 76, 86].

У сучасних дослідженнях у математичній фізиці важливу роль відіграє принцип симетрії. Це пов'язано з тим, що основні фізичні закони, рівняння руху, різні математичні моделі володіють явною або неявною, геометричною або негеометричною, локальною або нелокальною симетріями. Всі основні рівняння математичної фізики — Ньютона, Лапласа, Д'Аламбера, Шредінгера, Максвела і т. д. — володіють широкими симетрійними властивостями.

Різноманітні задачі математичного опису реальних процесів приводять до диференціальних рівнянь. Методи інтегрування диференціальних рівнянь почали інтенсивно розроблятись після появи „Математичних початків натуральної філософії "І. Ньютона в процесі дослідження проблем всесвітнього тяжіння і теорії світла. Розквіт методів класичної математичної фізики пов'язаний із прізвищами Ж. Лагранжа, Л. Ейлера, Ж.Л. Д'Аламбера, П.С. Лапласа, Д. Бернуллі, Ж. Фур'є, М.В. Остроградського, А.М. Ляпунова, С. Лі та багатьох інших. Одним із таких методів є метод оберненої задачі розсіяння (та низка споріднених з ними методів). Такий метод був розроблений у 1967 році в спільній роботі К. Гарднера (C. Gardner), Дж. Гріна (J. Green), М. Крускала (M. Kruskal) і Р. Міури (R. Miura) [82] на прикладі нелінійного рівняння Кортевега–де Фріза. Протягом останніх десятиліть спостерігається потужний розвиток сучасної теорії інтегровності динамічних систем і застосування методів оберненої задачі розсіяння та спорідненим з ним підходів до розв'язання багатьох нелінійних диференціальних рівнянь. Важливу роль при цьому відіграли праці українських математиків, зокрема, В.А. Марченка [24], Ю.М. Березанського [9, 10], Л.П. Нижника [26, 27], Є.Д. Білоколоса, [8, 2], Є.Я. Хруслова [64].

Не менш поширеним, ніж метод оберненої задачі розсіяння, методом для побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод Софуса Лі, в основі якого лежить принцип симетрії. Метод грунтується на знаходженні та застосуванні операторів алгебри інваріантності (симетрій Лі) диференціального рівняння для знаходження його точних розв'язків.

Побудова конструктивного математичного апарату, який може виявляти різні типи симетрії, — одна із найважливіших задач математичної фізики. Та не менш важливою є задача: по заданій групі побудувати математичні моделі (рівняння), які володіють заданою симетрією.

Проведенню класифікації квазілінійних хвильових рівнянь інваріантних відносно алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, побудові класів розв'язків типу солітонних за допомогою ітеративної процедури нелокального розмноження розв'язків та методами умовної симетрії рівняння синус-Гордон, присвячено дану роботу.

Для виконання групової класифікації застосовано класичний метод Лі, Овсяннікова [31, 34, 90] та метод умовної симетрії [47, 56, 58, 63]. Сформулюємо основні поняття та означення, які використаємо в роботі.

Нехай

$$S\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right) = 0, \quad S = (S^1, S^2, \ldots, S^l) \tag{0.1}$$

система диференціальних рівнянь з частинними похідними r–го порядку, де $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\underset{k}{u}$ — сукупність похідних k–го порядку функцій u, $k = \overline{1, r}$, $k, n, m, r, l \in \mathbb{N}$.

Означення 0.1. *Група Лі локальних перетворень вигляду*

$$\widetilde{x}_\mu = f^\mu(x, u, \theta), \quad \widetilde{u}^k = g^k(x, u, \theta), \tag{0.2}$$

де $\mu = \overline{0,n}$, $k = \overline{1,m}$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_l)$, *називається* l*-параметричною групою точкових симетрій системи рівнянь (0.1), якщо множина розв'язків даної системи інваріантна відносно перетворень (0.2).*

Означення 0.2. *Алгеброю Лі групи (0.2) називається лінійний векторний простір, базисом якого є диференціальні оператори першого порядку* $X_b = \xi^{b\mu}(x,u)\partial_{x_\mu} + \eta^{bk}(x,u)\partial_{u^k}$, *де* $\xi^{b\mu} = f^\mu_{\theta^b}\Big|_{\theta=0}$, $\eta^{bk} = g^k_{\theta^b}\Big|_{\theta=0}$, *зі стандартною операцією комутування.*

Між групами Лі перетворень (0.2) і алгебрами Лі існує взаємнооднозначна відповідність (перша теорема Лі). Щоб відновити групу Лі по її алгебрі Лі, необхідно розв'язати наступну задачу Коші (систему рівнянь Лі):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f^\mu}{\partial \theta^b} = \xi^{b\mu}(f,g), \quad \frac{\partial g^k}{\partial \theta^b} = \eta^{bk}(f,g), \\ &f^\mu|_{\theta=0} = x_\mu, \qquad g^k|_{\theta=0} = u^k. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Сформулюємо алгоритм Лі знаходження алгебри інваріантності системи рівнянь (0.1).

Теорема 0.1. *Диференціальний оператор* $X = \xi^\mu(x,u)\partial_{x_\mu} + \eta^k(x,u)\partial_{u^k}$ *є оператором інваріантності (0.1) тоді і тільки тоді, коли*

$$\underset{r}{X} S\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right)\Bigg|_{S=0} \equiv 0, \tag{0.4}$$

де $\underset{r}{X} = X + {}^{\mu_1}\eta^k\partial_{u^k_{\mu_1}} + \cdots + {}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}\eta^k\partial_{u^k_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}}$,

$$\begin{aligned} &{}^{\mu_1}\eta^k = D_{\mu_1}(\eta^k) - u^k_\nu D_{\mu_1}(\xi^\nu), \\ &{}^{\mu_1\mu_2}\eta^k = D_{\mu_2}({}^{\mu_1}\eta^k) - u^k_{\mu_1\nu} D_{\mu_2}(\xi^\nu), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\eta^k = D_{\mu_r}({}^{\mu_1\cdots\mu_{r-1}}\eta^k) - u^k_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{r-1}\nu} D_{\mu_r}(\xi^\nu), \\ &D_\mu = \partial_{x_\mu} + u^k_\mu\partial_{u^k} + u^k_{\mu\mu_1}\partial_{u^k_{\mu_1}} + \cdots + u^k_{\mu\mu_1\cdots\mu_{r-1}}\partial_{u^k_{\mu_1\cdots\mu_{r-1}}}, \\ &\mu, \mu_1, \ldots \mu_r, \nu = \overline{0,n}, \qquad k = \overline{1,m}. \end{aligned}$$

Записавши (0.4) в розгорнутому вигляді, після розщеплення по похідним, отримуємо систему лінійних рівнянь з частинними похідними відносно координат ξ, η оператора X (систему визначальних рівнянь), загальний розв'язок якої визначає максимальну в розумінні Лі алгебру інваріантності рівняння (0.1). Використовуючи формули (0.3), можна визначити локальну групу Лі локальних перетворень, що відповідає цій алгебрі.

Означення 0.3. *Система рівнянь (0.1) називається умовно інваріантною відносно оператора Q, який не належить алгебрі інваріантності даного рівняння і для якого виконується умова*

$$\underset{r}{Q}S = \lambda_0 S + \lambda_1 S_1, \quad \lambda_1 \neq 0,$$
$$\underset{r}{Q}S_1 = \lambda_2 S + \lambda_3 S_1,$$
$$S_1\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right) = 0,$$

де $S_1\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right)$ *— деякі диференціальні вирази відносно змінних* x *і функцій* u.

Дані поняття використано в роботі при розв'язанні задачі опису диференціальних рівнянь, інваріантних відносно заданої групи, при побудові класів інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь (алгоритм редукції та знаходження розв'язків див. детальніше [31, 34, 78]).

Квазілінійні хвильові рівняння є цікавим об'єктом дослідження внаслідок свого широкого застосування. Перший розділ монографії присвячено конформній інваріантності хвильових рівнянь. У першому підрозділі цього розділу досліджено інваріантність квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

$$F^{\mu\nu}\left(u, \underset{1}{u}\right) u_{\mu\nu} + G\left(u, \underset{1}{u}\right) = 0, \tag{0.5}$$

відносно алгебр Пуанкаре та конформної алгебри. У роботі [97] розглянута аналогічна задача класифікації загального рівняння другого порядку відносно конформної алгебри

$$\partial_0, \partial_1, J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1, D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u, K_\mu = 2x_\mu D - (x^2 - mu^2)\partial^\mu,$$

де $m = 0, \pm 1$, для більш широкого класу рівнянь. Але в такій загальній постановці ця задача роз'язана в [97] лише для випадку $m = 0$. У монографії ця задача розглянута повністю, але для вужчого класу рівнянь, а саме квазілінійного класу рівнянь з частинними похідними другого порядку.

Найбільш відомими рівняннями класу (0.5) є рівняння ейконалу

$$u_\mu u^\mu = F(u), \tag{0.6}$$

нелінійне хвильове рівняння

$$\Box u + G\left(u, \underset{1}{u}\right) = 0, \tag{0.7}$$

рівняння Борна–Інфельда

$$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0, \tag{0.8}$$

рівняння Ліувілля

$$\Box u + \lambda e^u = 0. \tag{0.9}$$

Рівняння (0.6) є одним з основних рівнянь геометричної оптики. Його симетрійні властивості прокласифіковані в [58]; нелінійне хвильове рівняння (0.7) широко застосовується при описанні різноманітних фізичних процесів. Інваріантність рівняння (0.7) відносно алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри досліджена в роботах [58]; рівняння (0.8) в евклідовому просторі узагальнює на n-вимірний випадок рівняння мінімальних поверхонь вперше одержане Лагранжем із варіаційного принципу Ейлера-Лагранжа. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки рівняння (0.8) знайдені в роботах [7, 41, 58]. Рівняння Ліувілля виникає у задачах диференціальної геометрії, теорії нелінійних хвиль, у квантовій теорії поля [6].

Також слід відзначити роботи, де одержано (повний або частковий) розв'язок задачі групової класифікації таких одновимірних хвильових рівнянь:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = -\lambda u_{xx} + F(u, u_x) \quad \text{у роботі [96]},\\
&u_{tt} = (f(u)u_x)_x \quad \text{у роботі [65, 93]},\\
&u_{tt} = f(u_x)u_{xx} \quad \text{у роботі [102]},\\
&u_{tx} = f(t, x, u), \quad f_{uu} \neq 0 \quad \text{у роботі [23]}.
\end{aligned}$$

У роботах [68, 85] проведено групову класифікацію квазілінійного хвильового рівняння другого порядку вигляду

$$u_{tt} = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x).$$

У [48, 49] наведено функціональні базиси абсолютних диференціальних інваріантів для набору з m скалярних функцій $u^r = u^r(x_0, x_1, ..., x_n)$, $n \geq 3$.

У підрозділі 1.1 прокласифіковано всі квазілінійні диференціальні рівняння другого порядку вигляду (0.5) інваріантні відносно алгебр Пуанкаре та конформної алгебри при $u = u(x_0, x_1)$.

В [62] Фущич В.І., Цифра І.М. виділили пуанкаре-інваріантні та конформно-інваріантні нелінійні рівняння електродинаміки, побудували нелінійні конформно-інваріантні рівняння для векторного і спінорного полів. У дисертаційній роботі розглянуто рівняння

$$\Pi_\mu \Pi^\mu u = 0,$$

яке також використовують при описі процесів електродинаміки. У другому підрозділі першого розділу описано всі можливі зображення конформної алгебри, відносно якої інваріантні нелінійні рівняння електродинаміки вигляду:

$$\Box u + F^1(u)A^\mu u^\mu + F^2(u)\partial^\mu A^\mu + F^3(u)A_\mu A^\mu = 0;$$

$$\begin{aligned}
&\Box u + F^1(u)A^\mu u^\mu + F^2(u)\partial^\mu A^\mu + F^3(u)A_\mu A^\mu = 0,\\
&\Box A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^\nu = \Psi^\mu(u, A);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Box u + F^1(u)A^\mu u^\mu + F^2(u)\partial^\mu A^\mu + F^3(u)A_\mu A^\mu = 0,\\
&\Box A^\mu = \psi^\mu(u, A).
\end{aligned}$$

Одержані результати класифікації застосовано для дослідження симетрійних властивостей цих рівнянь. У роботі [35] частково розглянуто дані рівняння та системи, досліджено їх інваріантність відносно алгебр Пуанкаре.

У роботі [15] одержано 6 нееквівалентних лінійних неоднорідних зображень алгебри Галілея. Дані зображення використано у третьому підрозділі першого розділу при описанні нееквівалентних лінійних неоднорідних зображень алгебр Пуанкаре та конформної алгебри у випадку $U \in \mathbb{R}^2$ з точністю до перетворень еквівалентності

$$W = KU + L, \tag{0.10}$$

де K – невироджена стала матриця розмірності 2×2, L – стала матриця розмірності 2×1, $W = W(x)$ – нові невідомі функції. Нелінійні зображення групи Пуанкаре $AP(1,3)$ наведено у роботі [87], для довільної розмірності в [104]. У роботах [84, 21, 22] прокласифіковано нелінійні зображення алгебри Пуанкаре в трьохвимірному просторі. Нееквівалентні зображення алгебр Пуанкаре $AP(n,m)$, $AP_1(n,m)$ та конформної алгебри $AC(n,m)$ прокласифіковано в роботі [81]. Опис нееквівалентних зображень операторів отриманий також у роботі [88].

У роботах [15, 16, 19] досліджено інваріантність системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії

$$U_0 = \Delta U + F^a(U)U_a,$$

відносно узагальненої алгебри Галілея для різних розмірностей векторного поля U та просторових змінних $\vec{x}$. Тут $U = U(x_0, \vec{x}) \in \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, F^a — функціональні матриці розмірності $m \times m$, $a = \overline{1,n}$.

В [105] досліджено інваріантність системи рівнянь

$$\Box U = F(U)$$

відносно спеціального класу зображень розширеної алгебри Пуанкаре.

У четвертому підрозділі першого розділу для дослідження симетрійних властивостей систем квазілінійних хвильових рівнянь вигляду

$$\Box U = (F^0(U)\partial_0 + F^1(U)\partial_1)U,$$

де $U = (u^1, u^2)$, F^0, F^1 — функціональні матриці розмірності 2×2, застосовано побудовані в підрозділі 1.3 лінійні зображення розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$ та конформної алгебри $AC(1,1)$. Серед всеможливих математичних моделей даного класу відібрано ті, які інваріантні відносно алгебр Пуанкаре та її розширень операторами масштабних і конформних перетворень.

У другому розділі монограії розглядаємо нелінійне хвильове рівняння

$$u_{00} - u_{11} + \sin u = 0, \tag{0.11}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, яке в літературі відоме як рівняння синус-Гордон (СГ). Рівняння (0.11) займає особливе місце серед диференціальних рівнянь, які використовуються в різноманітних задачах математичного опису реальних процесів. Дане рівняння з геометричної точки зору виникло в диференціальній геометрії наприкінці XIX століття і пов'язане із задачею побудови чебишевських сіток на поверхнях від'ємної кривизни [36]. Вивченням розв'язків рівняння (0.11) у 1936 році займався німецький вченний Р. Штойрвальд, але результати його досліджень були відомі в той час лише небагатьом спеціалістам по геометрії [28, 101]. У фізиці рівняння СГ було застосоване в теорії дислокацій Я. Френкелем та Т. Канторовою [43]. Воно описує розповсюдження обертань, умовних або дійсних, в різних фізичних системах [43, 42]. Наприклад, розповсюдження флюксонів в джозефсонівських контактах [30], розповсюдження резонансних ультрокоротких оптичних імпульсів [66]. В 1958 році Т. Скірм запропонував використати рівняння Клейна-Гордона

$$u_{00} - u_{11} + \dot{\phi}(u) = 0,$$

де $\phi = \phi(u)$ — гладка функція, яка описує потенціальну енергію поля, як стандартну модель теорії поля в одновимірному просторі часу з періодичним потенціалом $\phi(u) = 1 - \cos u$ [28, 98].

Рівняння синус-Гордон є одним із найбільш відомих рівнянь в теорії солітонів [28], розвиток якої бере початок із спостереження фізичного явища

„solitary ware“(відокремленої хвилі) британським інженером Д.С.Расселом у 1834 році. Однак його роботи на деякий час були забуті. Сплеск інтересу до солітонів почався в другій половині XX століття одночасно у декількох галузях науки - нелінійній електродинаміці, фізиці твердого тіла, гідродинаміці, біофізиці та ін. У роботі Н. Забуского і М. Крускала [103] у 1965 році ця хвиля була названа солітоном. Прикладами солітонів можуть служити хвилі на мілкій воді, іонно-звукові та магнітозвукові хвилі в плазмі, поширення надпотужних світлових імпульсів у нелінійних кристалах, антициклони в атмосфері Землі, Червона пляма на Юпітері. Дослідження солітонів іще раз продемонструвало єдність нелінійних коливних (хвильових) процесів різної природи.

Наприкінці XIX століття Беклунд [36, 70] запропонував нелокальні перетворення вигляду:

$$\left(\frac{\overset{2}{u}+\overset{1}{u}}{2}\right)_y = \frac{1}{\lambda}\sin\frac{\overset{2}{u}-\overset{1}{u}}{2}, \quad \left(\frac{\overset{2}{u}-\overset{1}{u}}{2}\right)_z = \lambda\sin\frac{\overset{2}{u}+\overset{1}{u}}{2} \tag{0.12}$$

для рівняння СГ (0.11) записаного в конусних змінних

$$u_{yz} = \sin u, \tag{0.13}$$

де

$$y = \frac{x_1 + x_0}{2}, \quad z = \frac{x_1 - x_0}{2}, \tag{0.14}$$

$\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ — два різні розв'язки рівняння (0.13), λ — довільна стала.

За допомогою АПБ (0.12) у літературі [28, 29] побудовані деякі точні розв'язки рівняння (0.13), які одержали назву солітонних розв'язків. Односолітонні

$$u = 4\arctan e^{\theta_1} \tag{0.15}$$

та двохсолітонні

$$u = 4\arctan\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}\right), \tag{0.16}$$

де $\theta_i = \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i} y + c_i$, λ_i, c_i — довільні сталі, $i = 1, 2$, розв'язки (0.13).

У роботі [73] побудовано формулу знаходження N-солітонних розв'язків рівняння СГ:

$$\begin{aligned} &\cos u(x_0, x_1) = 1 - 2(\tfrac{\partial^2}{\partial {x_0}^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}) \ln F, \\ &F = det(M_{ij}), \\ &M_{ij} = 2(a_i + a_j)^{-1} \cosh[\tfrac{1}{2}(\theta_i + \theta_j)], \\ &\theta_j = \gamma_j (x_0 - V_j x_1 - t_j), \\ &a_j^2 = (1 - V_j)(1 + V_j)^{-1}, \\ &\gamma_j^2 = (1 - V_j^2)^{-1}, \end{aligned} \tag{0.17}$$

де a_j, t_j — довільні параметри.

Для побудови солітонних розв'язків рівняння СГ може також використовуватись теорема Б'янки про перестановочність [28].

Перетворення (0.12) зв'язують між собою два різні розв'язки рівняння СГ, вони є автоперетвореннями Беклунда (АПБ). Враховуючи те, що перетворення (0.12) задають неявний зв'язок між двома розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння (0.13), то їх важко використовувати для побудови точних розв'язків цього рівняння.

У підрозділі 2.1 запропоновано ітеративну процедуру нелокального розмноження розв'язків рівняння СГ, яка дозволила побудувати ланцюжок розв'язків типу односолітонних.

У теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними важливу роль відіграють рівняння яким притаманні нетривіальні симетрійні властивості. Як правило, такі рівняння плідно використовуються для математичного моделювання об'єктів, явищ і процесів у різних наукових галузях, і саме вони стимулюють виникнення та розвиток нових понять і методів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. У 1969 році Блумен і Коул [71] на прикладі лінійного (1+1)-вимірного рівняння теплопровідності ввели поняття некласичної симетрії диференціального рівняння з частинними похідними. Така симетрія узагальнюється поняттям умовної симетрії, яке введене в [58] (див. також [44, 45, 47, 55, 79, 83]). Метод умовної симетрії дає можливість одержувати такі підмножини розв'язків диференціальних рівнянь, симетрія яких ширша, а іноді зовсім відрізняється від симетрії всієї множини розв'язків.

У другому підрозділі даного розділу досліджено умовну інваріантність одновимірного рівняння синус-Гордон (0.11) і зв'язок деяких відомих та одержаних розв'язків з операторами умовної симетрії даного рівняння.

У роботі [106] доведена еквіввалентність редукції рівняння за допомогою деякого анзацу та наявності у цього рівняння операторів умовної симетрії. У підрозділі 2.3 досліджено умовну інваріантність багато вимірного рівняння синус-Гордон

$$\Box u + \sin u = 0, \tag{0.18}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in R^n$. За допомогою операторів умовної симетрії знайдено анзаци та проведено редукцію багатовимірного нелінійного хвильового рівняння синус-Гордон (0.18) до системи рівнянь Д'Аламбера–ейконала

$$\begin{aligned} &\Box\varphi = 0, \\ &\varphi_\alpha \varphi^\alpha = m, \end{aligned} \tag{0.19}$$

де $\varphi = \varphi(\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{n-1})$ — довільні гладкі функції, $\omega_\alpha = \omega_\alpha(x)$ — інваріантні змінні, кількість яких на одиницю менша, ніж кількість незалежних змінних x, $m \in \{-1, 0, 1\}$. Повний аналітичний опис множини гладких розв'язків систем (0.19) проведено в роботах [50], [67], а також [99, 100]. У результаті цього в підрозділі 3.3 отримано цілі класи точних розв'язків багатовимірного рівняння (0.18).

Робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані при розв'язуванні ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, математичної фізики, електродинаміки, а також диференціальної геометрії, геометричної оптики, фізики та деяких інших.

РОЗДІЛ 1

Конформна інваріантність квазілінійних хвильових рівнянь

У сучасних дослідженнях задач математичної фізики важливу роль відіграє принцип симетрії. Це пов'язано з тим, що основні фізичні закони, рівняння руху, різні математичні моделі володіють явною або неявною, геометричною або негеометричною, локальною або нелокальною симетріями. Всі основні рівняння математичної фізики — Ньютона, Лапласа, Д'Аламбера, Шредінгера, Максвела і т. д. — володіють широкими симетрійними властивостями.

Квазілінійні хвильові рівняння є цікавим об'єктом дослідження внаслідок свого широкого застосування. Даний розділ присвячено класифікації нееквівалентних зображень алгебри Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре, конформної алгебри та опису квазілінійних хвильових рівнянь, інваріантних відносно даних алгебр.

У даному розділі досліджено інваріантність квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку відносно спеціального класу зображень алгебр Пуанкаре та конформної алгебри; описано зображення алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, які можуть бути задані на множині розв'язків рівнянь нелінійної електродинаміки. Одержані результати класифікації застосовано для опису нелінійних рівнянь електродинаміки, інваріантних відносно даних алгебр; з точністю до лінійних перетворень прокласифіковано неоднорідні зображення розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри у випадку двовимірного векторного поля. Проведено повну класифікацію системи квазілінійних хвильових рівнянь, інваріантних відносно алгебри Пуанкаре та її розширень операторами масштабних та конформних перетворень.

1.1. Квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку

Найбільш загальний клас квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку має вигляд

$$F^{\mu\nu}\left(u, \underset{1}{u}\right) u_{\mu\nu} + G\left(u, \underset{1}{u}\right) = 0, \tag{1.1}$$

де $F^{\mu\nu}\left(u, \underset{1}{u}\right)$, $G\left(u, \underset{1}{u}\right)$, $u = u(x)$ — гладкі функції, $\mu, \nu = 0, 1$, $x = (x_0, x_1)$, $\underset{1}{u} = (u_0, u_1)$.

До класу рівнянь (1.1) входять такі класичні рівняння як рівняння ейконалу

$$u_\mu u^\mu = F(u). \tag{1.2}$$

Рівняння (1.2) є одним з основних рівнянь геометричної оптики. Його симетрійні властивості прокласифіковані в [58].

Якщо $F^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, то з (1.1) одержимо нелінійне хвильове рівняння

$$\Box u + G\left(u, \underset{1}{u}\right) = 0, \tag{1.3}$$

яке широко застосовується при описанні різноманітних фізичних процесів. Інваріантність рівняння (1.3) відносно алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри досліджена в роботах [58].

Якщо $F^{\mu\nu} = (1 - u_\alpha u^\alpha) g^{\mu\nu} + u^\mu u^\mu, G = 0$, то рівняння (1.1) співпадає з рівнянням Борна-Інфельда

$$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0, \tag{1.4}$$

яке в евклідовому просторі узагальнює на n-вимірний випадок рівняння мінімальних поверхонь вперше одержане Лагранжем із варіаційного принципу Ейлера-Лагранжа. Симетрійні властивості рівняння (1.4) досліджені в роботах [7, 41, 58].

Рівняння (1.2)–(1.4) володіють широкими симетріями Лі. Вони інваріантні відносно алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре, конформної алгебри.

У даному підрозділі поставимо задачу опису всіх квазілінійних диференціальних рівнянь другого порядку вигляду (1.1) інваріантних відносно алгебр Пуанкаре та конформної алгебри.

Інваріантність відносно алгебри Пуанкаре. Розглянемо при яких функціях $F^{\mu\nu}$, G рівняння (1.1) інваріантне відносно алгебри, оператори якої Q_1, Q_2, Q_3 задовольняють комутаційні співвідношення

$$[Q_1, Q_2] = 0, \quad [Q_1, Q_3] = Q_2, \quad [Q_2, Q_3] = Q_1. \tag{1.5}$$

Оскільки рівняння (1.1) при довільних функціях $F^{\mu\nu}$, G інваріантне відносно операторів зсувів по незалежних змінних, то в якості Q_1, Q_2 виберемо оператори ∂_0, ∂_1. Не важко переконатися, що оператор Q_3, який задовольняє умови (1.5) при $Q_1 = \partial_0$, $Q_2 = \partial_1$, має вигляд

$$Q_3 = J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1.$$

Надалі алгебру

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 \rangle \tag{1.6}$$

будемо називати алгеброю Пуанкаре і позначати $AP(1,1)$. Справедливе наспупне твердження.

Теорема 1.1. *Рівнянння (1.1) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре (1.6), тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:*

$$f^1 S_1 + f^2 S_2 + f^3 S_3 + f^4 = 0, \tag{1.7}$$

де

$$\begin{aligned} S_1 &= u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} u_\alpha u_\beta u_{\mu\nu}, \\ S_2 &= u^\mu u^{1-\nu} u_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \epsilon_{\nu\beta} u_\alpha u_\beta u_{\mu\nu}, \\ S_3 &= \Box u = g^{\mu\nu} u_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$f^i = f^i(u, \omega)$ — *довільні гладкі функції,* $\omega = u_0^2 - u_1^2$, $i = \overline{1,4}$, μ, ν, α, $\beta = 0, 1$, $\epsilon_{00} = \epsilon_{11} = 0$, $\epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1$.

Доведення. Для доведення теореми використаємо алгоритм Лі. Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (1.1) має вигляд

$$X = \xi^0\partial_0 + \xi^1\partial_1 + \eta\partial_u. \tag{1.9}$$

Оскільки рівняння (1.1) інваріантне відносно операторів ∂_0, ∂_1, то нам залишається встановити вигляд функцій $F^{\mu\nu}$, G, вимагаючи інваріантності рівняння (1.1) відносно оператора

$$X = J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1.$$

а) Розглянемо випадок $F^{01} \neq 0$. Тоді, не втрачаючи загальності, можна вважати $F^{01} = 1$. Умова інваріантності рівняння (1.1) відносно оператора (1.9) має вигляд

$$\tilde{X}(F^{00}u_{00} + 2u_{01} + F^{11}u_{11} + G)|_{u_{01} = -\frac{1}{2}(F^{00}u_{00} + F^{11}u_{11} + G)} = 0, \tag{1.10}$$

де $\tilde{X}$ — продовження оператора X. Застосувавши формули продовження (див. [31, 34]), одержимо друге продовження оператора X, необхідне для умови (1.10)

$$\overset{2}{X} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 - u_1\partial_{u_0} - u_0\partial_{u_1} - 2u_{01}(\partial_{u_{00}} + \partial_{u_{11}}) - (u_{00} + u_{11})\partial_{u_{01}}. \tag{1.11}$$

Використавши вигляд оператора (1.11) з умови (1.10) одержимо

$$\begin{aligned} &(F^{00} + F^{11})(F^{00}u_{00} + F^{11}u_{11} + G) - (u_1F^{00}_{u_0} + u_0F^{00}_{u_1} + 2)u_{00} - \\ &-u_1G_{u_0} - u_0G_{u_1} = 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Оскільки функції F^{00}, F^{11}, G не залежать від u_{00}, і u_{11}, то рівність (1.12) можлива при

$$\begin{aligned} &u_1F^{00}_{u_0} + u_0F^{00}_{u_1} = F^{00}(F^{00} + F^{11}) - 2, \\ &u_1F^{11}_{u_0} + u_0F^{11}_{u_1} = F^{11}(F^{00} + F^{11}) - 2, \\ &u_1G_{u_0} + u_0G_{u_1} = G(F^{00} + F^{11}). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Загальним розв'язком рівнянь (1.13) є функції:

$$
\begin{aligned}
&F^{00}=\tfrac{1+(u_0+u_1)^4f+(u_0+u_1)^2g}{1-(u_0+u_1)^4f},\\
&F^{11}=\tfrac{1+(u_0+u_1)^4f-(u_0+u_1)^2g}{1-(u_0+u_1)^4f},\\
&G=\tfrac{(u_0+u_1)^2\varphi}{1-(u_0+u_1)^4f},
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

де $f=f(u,\omega)$, $g=g(u,\omega)$, $\varphi=\varphi(u,\omega)$ — довільні гладкі функції, $\omega=u_0^2-u_1^2$. Таким чином рівняння (1.1) набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
&(1+(u_0+u_1)^4f+(u_0+u_1)^2g)u_{00}+2(1-(u_0+u_1)^4f)u_{01}+\\
&+(1+(u_0+u_1)^4f-(u_0+u_1)^2g)u_{11}+(u_0+u_1)^2\varphi=0.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Перепозначивши довільні елементи f, g, φ наступним чином:

$$
f=\frac{f^1-f^2}{\omega^2(f^1+f^2)},\quad g=2\frac{2f^3+\omega f^1}{\omega^2(f^1+f^2)},\quad \varphi=\frac{4f^4}{\omega^2(f^1+f^2)},
$$

де $f^i=f^i(u,\omega)$ — довільні гладкі функції, $f^1+f^2\neq 0$, одержимо рівняння (1.7).

б) Розглянемо випадок $F^{01}=0$. Не втрачаючи загальності будемо вважати $F^{00}=1$. Тоді рівняння (1.1) має вигляд

$$
u_{00}+u_{11}F^{11}+G=0. \tag{1.16}
$$

Згідно критерію Лі, діючи другим продовженням інфінітезимального оператора на рівняння (1.16) та перейшовши на многовид рівняння (1.16), після розщеплення по похідним отримуємо:

$$
F^{11}=-1,\quad u_1G_{u_0}+u_0G_{u_1}=0. \tag{1.17}
$$

Звідки

$$
G=G(u,\omega). \tag{1.18}
$$

У цьому випадку рівняння (1.16) є частинним випадком рівняння (1.3) при $f^1=0$, $f^2=1$, $f^3=0$, $f^4=G$.

У випадку $F^{00}=F^{01}=0$ не втрачаючи загальності будемо вважати $F^{11}=1$, тоді рівняння (1.1) має вигляд

$$
u_{11}+G=0.
$$

Не важко переконатися, що дане рівняння не є інваріантним відносно алгебри Пуанкаре (1.6).

Теорему 1.1 доведено.

Інваріантність відносно розширеної алгебри Пуанкаре. Доповнимо елементи алгебри (1.6) оператором масштабних перетворень

$$D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + \eta(x,u)\partial_u, \tag{1.19}$$

де функція $\eta(x,u)$ підлягає уточненню. Для того, щоб оператори ∂_0, ∂_1, J_{01}, D утворювали алгебру, необхідно виконання умов комутування

$$\begin{aligned} &[\partial_0, \partial_1] = 0, \quad [\partial_0, J_{01}] = \partial_1, \quad [\partial_1, J_{01}] = \partial_0, \\ &[\partial_0, D] = \partial_0, \quad [\partial_1, D] = \partial_1, \quad [J_{01}, D] = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Врахувавши ці умови, одержимо:

$$\begin{aligned} &[\partial_0, D] = \partial_0 + \eta_0\partial_u, \quad [\partial_1, D] = \partial_1 + \eta_1\partial_u, \\ &[J_{01}, D] = x_1\eta_0\partial_u + x_0\eta_1\partial_u. \end{aligned} \tag{1.21}$$

З (1.21) випливає, що $\eta = \eta(u)$ — довільна гладка функція аргументу u. Має місце твердження.

Лема 1.1. *Перетворення*

$$x_\mu = y_\mu, \quad u = \Phi(w), \tag{1.22}$$

де w — нова невідома функція, яка залежить від нових змінних y_0, y_1, при довільній гладкій функції $\Phi = \Phi(w)$ є перетворенням еквівалентності рівняння (1.7).

Доведення. Застосуємо перетворення (1.22) до рівняння (1.7). В результаті одержимо

$$\begin{aligned} &f^i(u,\omega) = f^i(\Phi(w), \dot{\Phi}^2(w)\Omega), \\ &S_1(u) = \dot{\Phi}^3(w)S_1(w) + \dot{\Phi}(w)\ddot{\Phi}(w)\Omega^2, \\ &S_2(u) = \dot{\Phi}(w)S_2(w) + \ddot{\Phi}(w)\Omega, \\ &S_3(u) = \dot{\Phi}^3(w)S_3(w), \end{aligned} \tag{1.23}$$

де $\Omega = w_0^2 - w_1^2$, $w_\mu = \frac{\partial w}{\partial y_\mu}$. Врахувавши формули (1.23), одержимо, що перетворення (1.22) зводять рівняння (1.3) до вигляду

$$F^1(w,\Omega)S_1(w) + F^2(w,\Omega)S_2(w) + F^3(w,\Omega)S_3(w) + F^4(w,\Omega) = 0, \quad (1.24)$$

де

$$\begin{aligned} &F^k(w,\Omega) = \dot{\Phi}^3(w) f^k(\Phi(w), \dot{\Phi}^2(w)\Omega), k = \overline{1;3}, \\ &F^4(w,\Omega) = \dot{\Phi}^3(w) f^4(\Phi(w), \dot{\Phi}^2(w)\Omega) + \\ &+ \ddot{\Phi}(w)\Omega(\dot{\Phi}(w)\Omega f^1(\Phi(w), \dot{\Phi}^2(w)\Omega) + + f^2(\Phi(w), \dot{\Phi}^2(w)\Omega)). \end{aligned} \quad (1.25)$$

З вигляду рівняння (1.24) ми бачимо, що це є рівняння того ж класу, що й (1.7). Це і означає, що перетворення (1.22) є перетворенням еквівалентності рівняння (1.7).

Лема 1.1 доведена.

Використавши результат леми 1.1, одержимо, що оператор

$$D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + \eta(u)\partial_u, \quad (1.26)$$

за допомогою перетворень (1.22) можна звести до вигляду

$$D = y_0\frac{\partial}{\partial y_0} + y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + kw\frac{\partial}{\partial_w}, \quad (1.27)$$

де $k = 0, 1$. Тому надалі з точністю до перетворень еквівалентності (1.22) будемо вважати, що в (1.26)

$$\eta(u) = ku, \quad k \in \{0, 1\}. \quad (1.28)$$

Теорема 1.2. *Рівняннння (1.1) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$, базисні елементи якої задаються операторами*

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + ku\partial_u, \quad (1.29)$$

де $k \in \{0, 1\}$, тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$\varphi^1 S_1 + \omega\varphi^2 S_2 + \varphi^3 S_3 + \omega^2\varphi^4 = 0, \quad (1.30)$$

де $\varphi^i = \varphi^i(u)$ — довільні гладкі функції, $i = \overline{1,4}$ при $k = 0$;

$$\psi^1 S_1 + \psi^2 S_2 + \psi^3 S_3 + \frac{1}{u}\psi^4 = 0, \quad (1.31)$$

де $\psi^i = \psi^i(\omega)$ *— довільні гладкі функції,* $i = \overline{1,4}$ *при* $k = 1$.

Доведення. Оскільки $AP_1(1,1) \supset AP(1,1)$, то згідно теореми 1.1 рівняння (1.1) має вигляд (1.7). Залишається дослідити при яких умовах рівняння (1.7) буде інваріантне відносно оператора D. З умови інваріантності рівняння (1.7) відносно оператора D

$$\tilde{D}S|_{S=0} = 0,$$

де $\tilde{D}$ — продовження оператора D, $S = f^1S_1 + f^2S_2 + f^3S_3 + f^4$, одержуємо систему визначальних рівнянь для визначення невідомих функцій f^i, $i = \overline{1,4}$:

$$\begin{aligned}
&2(k-1)\omega(f^1_\omega f^2 - f^1 f^2_\omega) + ku(f^1_u f^2 - f^1 f^2_u) + 2(k-1)f^1f^2 = 0,\\
&2(k-1)\omega(f^1_\omega f^3 - f^1 f^3_\omega) + ku(f^1_u f^3 - f^1 f^3_u) = 0,\\
&2(k-1)\omega(f^1_\omega f^4 - f^1 f^4_\omega) + ku(f^1_u f^4 - f^1 f^4_u) + (3k-4)f^1f^4 = 0,\\
&2(k-1)\omega(f^2_\omega f^3 - f^2 f^3_\omega) + ku(f^2_u f^3 - f^2 f^3_u) - 2(k-1)f^2f^3 = 0,\\
&2(k-1)\omega(f^2_\omega f^4 - f^2 f^4_\omega) + ku(f^2_u f^4 - f^2 f^4_u) + (k-2)f^2f^4 = 0,\\
&2(k-1)\omega(f^3_\omega f^4 - f^3 f^4_\omega) + ku(f^3_u f^4 - f^3 f^4_u) + (3k-4)f^3f^4 = 0.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

У залежності від значень k система визначальних рівнянь (1.32) має два суттєво різні розв'язки:

1) $k = 0$.

Якщо $f^1 \neq 0$, то система (1.32) буде рівносильна наступній системі трьох рівнянь

$$\begin{aligned}
&\omega(f^1_\omega f^2 - f^1 f^2_\omega) + f^1 f^2 = 0,\\
&f^1_\omega f^3 - f^1 f^3_\omega = 0,\\
&\omega(f^1_\omega f^4 - f^1 f^4_\omega) + 2f^1 f^4 = 0.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Система (1.33) заміною

$$g^a = \frac{f^a}{f^1}, \quad a = 2,3,4 \tag{1.34}$$

зводиться до вигляду

$$\omega g^2_\omega - g^2 = 0, \quad g^3_\omega = 0, \quad \omega g^4_\omega - 2g^4 = 0. \tag{1.35}$$

Загальним розв'язком системи рівнянь (1.35) є функції

$$g^2 = \omega\tilde{\varphi}^2(u), \quad g^3 = \tilde{\varphi}^3(u), \quad g^4 = \omega^2\tilde{\varphi}^4(u), \tag{1.36}$$

де $\tilde{\varphi}^2$, $\tilde{\varphi}^3$, $\tilde{\varphi}^4$ — довільні гладкі функції. Підставивши (1.36), (1.34) в рівняння (1.7) та ввівши перепозначення $\varphi^a = \varphi^1\tilde{\varphi}^a$, $a = 2, 3, 4$, одержимо рівняння (1.30).

Якщо $f^1 = 0$, $f^3 \neq 0$, то система (1.32) буде рівносильна системі двох рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega(f^2_\omega f^3 - f^2 f^3_\omega) - f^2 f^3_u = 0, \\ &\omega(f^3_\omega f^4 - f^3 f^4_\omega) + 2f^3 f^4 = 0. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Система (1.37) після заміни

$$h^2 = \frac{f^2}{f^3}, \quad h^4 = \frac{f^4}{f^3} \tag{1.38}$$

зводиться до вигляду

$$\omega h^2_\omega - h^2 = 0, \quad \omega h^4_\omega - 2h^4 = 0. \tag{1.39}$$

Загальним розв'язком системи (1.39) є функції

$$h^2 = \omega\tilde{\varphi}^2(u), \quad h^4 = \omega^2\tilde{\varphi}^4(u). \tag{1.40}$$

Аналогічно, як і у попередньому випадку із формул (1.40) та (1.38) одержуємо рівняння (1.30) при $\varphi^1 = 0$.

Якщо $f^1 = f^3 = 0$, $f^2 \neq 0$, то система (1.32) буде рівносильна рівнянню

$$\omega\left(\frac{f^4}{f^2}\right)_\omega - \frac{f^4}{f^2} = 0,$$

загальним розв'язком якого є

$$\frac{f^4}{f^2} = \omega\frac{\varphi^4(u)}{\varphi^2(u)}, \tag{1.41}$$

де φ^2, φ^4 — довільні гладкі функції. Підставивши (1.41) в (1.7) одержимо рівняння (1.30) при $\varphi^1 = \varphi^3 = 0$.

2) $k = 1$.

У даному випадку система визначальних рівнянь (1.32) для визначення невідомих функцій f^i рівносильна наступній системі рівнянь

$$f^1_u f^2 - f^1 f^2_u = 0, \quad f^1_u f^3 - f^1 f^3_u = 0, \quad u(f^1_u f^4 - f^1 f^4_u) - f^1 f^4 = 0. \quad (1.42)$$

Якщо $f^1 \neq 0$, то заміною

$$g^a = \frac{f^a}{f^1}, \quad a = 2, 3, 4 \quad (1.43)$$

система (1.42) зводиться до вигляду

$$g^2_u = 0, \quad g^3_u = 0, \quad u g^4_u + g^4 = 0, \quad (1.44)$$

звідки одержуємо

$$g^2 = \tilde{\psi}^2(\omega), \quad g^3 = \tilde{\psi}^3(\omega), \quad g^4 = \frac{1}{u}\tilde{\psi}^4(\omega), \quad (1.45)$$

де $\tilde{\psi}^2(\omega)$, $\tilde{\psi}^3(\omega)$, $\tilde{\psi}^4(\omega)$ — довільні гладкі функції. Врахувавши заміну (1.43) маємо

$$f^2 = f^1\tilde{\psi}^2(\omega), \quad f^3 = f^1\tilde{\psi}^3(\omega), \quad f^4 = \frac{1}{u} f^1\tilde{\psi}^4(\omega). \quad (1.46)$$

Підставивши функції (1.46) у рівняння (1.7) та ввівши перепозначення $\psi^a = f^1\tilde{\psi}^a$, $a = \overline{2,4}$ одержуємо рівняння (1.31).

Якщо $f^1 = 0$, $f^2 \neq 0$, то система (1.32) рівносильна наступній системі двох рівнянь

$$\left(\frac{f^3}{f^2}\right)_u = 0, \quad u\left(\frac{f^4}{f^2}\right)_u + \frac{f^4}{f^2} = 0, \quad (1.47)$$

звідки $\frac{f^3}{f^2} = \tilde{\psi}^3(\omega)$, $\frac{f^4}{f^2} = \frac{1}{u}\tilde{\psi}^4(\omega)$. Таким чином загальним розв'язком системи рівнянь є функції

$$f^3 = f^2\tilde{\psi}^3, \quad f^4 = \frac{1}{u} f^2\tilde{\psi}^4. \quad (1.48)$$

Аналогічно, як і у попередньому випадку, підставивши функції (1.48) у рівняння (1.7) одержуємо рівняння (1.31) при $\psi^1 = 0$.

Якщо $f^1 = 0$, $f^2 = 0$, $f^3 \neq 0$, то система (1.32) рівносильна рівнянню

$$u(\left(\frac{f^4}{f^3}\right)_u + \frac{f^4}{f^3} = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\frac{f^4}{f^3} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\psi^4(\omega)}{\psi^3(\omega)}, \tag{1.49}$$

де ψ^3, ψ^4 — довільні гладкі функції. Підставивши (1.49) у рівняння (1.7) одержимо рівняння (1.31) при $\psi^1 = \psi^2 = 0$.

Випадок $f^1 = f^2 = f^3 = 0$ ми не розглядаємо, оскільки при цьому рівняння (1.7) не буде рівнянням другого порядку.

Теорема 1.2 доведена.

Інваріантність відносно конформної алгебри. Доповнимо алгебру (1.29) операторами конформних перетворень

$$K_\mu = \alpha^{\mu\nu}(x,u)\partial_\nu + \beta^\mu(x,u)\partial_u, \tag{1.50}$$

де функції $\alpha^{\mu\nu}(x,u)$, $\beta^\mu(x,u)$ підлягають уточненню, $\mu, \nu = 0, 1$. Для того, щоб оператори (1.29) та (1.50) утворювали конформну алгебру $AC(1,1)$, необхідно виконання комутаційних співвідношень:

$$[\partial_0, K_0] = 2D, \quad [\partial_1, K_0] = 2J_{01}, \quad [D, K_0] = K_0; \tag{1.51}$$

$$[\partial_0, K_1] = 2J_{01}, \quad [\partial_1, K_1] = 2D, \quad [D, K_1] = K_1; \tag{1.52}$$

$$[J_{01}, K_0] = K_1, \quad [J_{01}, K_1] = K_0, \quad [K_0, K_1] = 0. \tag{1.53}$$

З умов (1.51) одержимо

$$\begin{aligned} &\alpha_0^{0\nu} = 2x_\nu, \quad \alpha_1^{0\nu} = 2x_1\delta_{0\nu} + 2x_0\delta_{1\nu}, \quad x_\mu\alpha_\mu^{0\nu} + ku\alpha_u^{0\nu} = 2\alpha^{0\nu}, \\ &\beta_0^0 = 2ku, \quad \beta_1^0 = 0, \quad x_\mu\beta_\mu^0 + ku\beta_u^0 = (k+1)\beta^0. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Загальним розв'язком системи (1.54) є функції

$$\begin{aligned} &\alpha^{0\nu} = 2x_0(x_0\delta_{0\nu} + x_1\delta_{1\nu}) - x^2\delta_{0\nu} + \psi^{0\nu}(u), \\ &\beta^0 = 2kx_0u + h^0(u), \end{aligned} \tag{1.55}$$

де $x^2 = x_0^2 - x_1^2$, $\psi^{0\nu}(u)$ і $h^0(u)$ — функції, які є розв'язками наступних рівнянь

$$ku\dot{\psi}^{0\nu} = 2\psi^{0\nu}, \quad ku\dot{h}^0 = (k+1)h^0. \tag{1.56}$$

Аналогічно із співвідношень (1.52) знаходимо

$$\begin{aligned} &\alpha^{1\nu} = 2x_1(x_0\delta_{0\nu} + x_1\delta_{1\nu}) + x^2\delta_{1\nu} + \psi^{1\nu}(u), \\ &\beta^1 = 2kx_1u + h^1(u), \end{aligned} \tag{1.57}$$

де $\psi^{1\nu}(u)$ і $h^1(u)$ — розв'язки рівнянь

$$ku\dot{\psi}^{1\nu} = 2\psi^{1\nu}, \quad ku\dot{h}^1 = (k+1)h^1. \tag{1.58}$$

Якщо $k = 0$, то з (1.56), (1.58) випливає, що

$$\psi^{0\nu} = \psi^{1\nu} = h^0 = h^1 = 0.$$

Тоді

$$K_0 = 2x_0x_\nu\partial_\nu - x^2\partial_0, \quad K_1 = 2x_1x_\nu\partial_\nu + x^2\partial_1. \tag{1.59}$$

Неважко переконатися, що оператори (1.59) умови (1.53) задовольняють тотожньо.

Якщо $k = 1$, то з (1.56), (1.58) знаходимо

$$\psi^{0\nu} = c_{0\nu}u^2, \quad \psi^{1\nu} = c_{1\nu}u^2, \quad h^\nu = c_\nu u^2, \tag{1.60}$$

де $c_{\mu\nu}$, c_ν — довільні сталі. Тоді

$$\begin{aligned} &K_0 = 2x_0(x_\nu\partial_\nu + u\partial_u) - x^2\partial_0 + u^2(c_{0\nu}\partial_\nu + c_0\partial_u), \\ &K_1 = 2x_1(x_\nu\partial_\nu + u\partial_u) + x^2\partial_1 + u^2(c_{1\nu}\partial_\nu + c_1\partial_u). \end{aligned} \tag{1.61}$$

Підставивши оператори (1.61) в умови (1.53), одержимо

$$c_{11} = -c_{00} = m, \quad c_{10} = c_{01} = c_\nu = 0, \tag{1.62}$$

де m — довільна стала. Врахувавши (1.62), остаточно одержимо, що оператори конформних перетворень мають вигляд

$$K_0 = 2x_0D - (x^2 - mu^2)\partial_0, \quad K_1 = 2x_1D + (x^2 - mu^2)\partial_1. \tag{1.63}$$

Таким чином, доповнивши розширену алгебру Пуанкаре $AP_1(1,1)$ операторами конформних перетворень отримали два суттєво різні зображення конформної алгебри $AC(1,1)$:

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01}, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \quad K_\mu = 2x_\mu D - x^2\partial^\mu; \tag{1.64}$$

$$\begin{gathered}\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01}, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u, \\ K_\mu = 2x_\mu D - (x^2 - mu^2)\partial^\mu,\end{gathered} \tag{1.65}$$

де m — довільна стала, $\mu = 0, 1$.

Зауваження. Перетворення еквівалентності рівняння (1.7)

$$x_\mu \to x_\mu, \quad u \to \theta u, \tag{1.66}$$

де $\theta = \frac{1}{\sqrt{|m|}}$, алгебру (1.65) зводять до того ж вигляду, але при цьому $m = 0, \pm 1$. Тому надалі будемо вважати, що $m \in \{-1, 0, 1\}$.

Дослідимо при яких функціях $F^{\mu\nu}$, G рівняння (1.1) конформноінваріантне. Результатом цих досліджень є наступні твердження.

Теорема 1.3. *Рівнянння (1.1) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,1)$, базисні елементи якої задаються операторами (1.64), тоді і тільки тоді, коли воно з точністю до перетворень (1.22) еквівалентне рівнянню*

$$\Box u = 0. \tag{1.67}$$

Доведення. Визначимо, коли рівняння (1.1) буде інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,1)$, базисні елементи якої задаються операторами (1.64). Оскільки $AC(1,1)$ містить розширену алгебру Пуанкаре $AP_1(1,1)$, то, як випливає із теореми 1.2, рівняння (1.1) має вигляд (1.30). Знайдемо функції φ^a, при яких рівняння (1.30) буде інваріантне відносно алгебри $AC(1,1)$. Застосувавши критерій інваріантності, отримаємо систему визначальних рівнянь для визначення невідомих функцій φ^a

$$\varphi^1 = 0, \quad \varphi^2 = 0. \tag{1.68}$$

Таким чином рівняння (1.30) інваріантне відносно конформної алгебри, базисні елементи якої задаються операторами (1.64), тоді ітільки тоді, коли воно має наступний вигляд

$$\varphi^3(u_{00} - u_{11}) + \omega\varphi^4 = 0. \tag{1.69}$$

Не втрачаючи загальності можна вважати $\varphi^3 = 1$. Перетворенння (1.22) при $\Phi = \int \frac{du}{\int \varphi^4 du}$ рівняння (1.69) зводить до рівняння (1.67).

Теорема 1.3 доведена.

Теорема 1.4. *Рівняння (1.1) інваріантне відносно конформної алгебри* $AC(1,1)$*, базисні елементи якої задаються операторами (1.65), тоді і тільки тоді, коли воно з точністю до перетворень (1.22) еквівалентне при* $m = 0$ *рівнянню Ліувілля*

$$\Box w = \lambda_1 e^w; \tag{1.70}$$

при $m = 1$ *рівнянню*

$$(1 - u_\mu u^\mu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = \frac{2}{u}(1 - u_\mu u^\mu)(1 + \lambda_2\sqrt{|1 - u_\alpha u^\alpha|}); \tag{1.71}$$

при $m = -1$ *рівнянню*

$$-(1 + u_\mu u^\mu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = \frac{2}{u}(1 + u_\mu u^\mu)(1 + \lambda_3\sqrt{|1 + u_\alpha u^\alpha|}), \tag{1.72}$$

де λ_1, λ_2, λ_3 *— довільні сталі.*

Доведення. Згідно теореми 1.2 рівняння (1.1) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре , базисні елементи якої задаються операторами (1.31) при $k = 1$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд (1.31). З'ясуємо вигляд функцій ψ^a, $a = \overline{1,4}$, при яких рівняння (1.31) інваріантне відносно операторів конформних перетворень K_0, K_1. Запишемо інфінітезимальний оператор у вигляді

$$X = b_\mu K_\mu = \left(-b_\mu(x^2 - mu^2) + 2x_\mu bx\right)\partial_\mu + 2bxu\partial_u, \tag{1.73}$$

де b_μ — сталі. Оператор, продовжений для оператора (1.73) має вигляд

$$\tilde{X} = \xi^\mu\partial_\mu + \eta\partial_u + {}^\mu\eta\partial_{u_\mu} + {}^{\mu\nu}\eta\partial_{u_{\mu\nu}} + ..., \tag{1.74}$$

де

$$\begin{aligned}
&\xi^{\mu} = -b_{\mu}(x^2 - mu^2) + 2x_{\mu}bx, \quad \eta = 2bxu,\\
&{}^{\mu}\eta = 2(u - x_t u_t)b^{\mu} + 2b_t u_t(x^{\mu} - muu_{\mu}),\\
&{}^{\mu\nu}\eta = -2bxu_{\mu\nu} + 2b_t u_t\left(g^{\mu\nu} - m(u_{\mu}u_{\nu} + uu_{\mu\nu})\right) -\\
&-2mub_t(u_{\nu}u_{\mu t} + u_{\mu}u_{\nu t}) + 2(b_t x^{\nu} - b^{\nu}x_t)u_{\mu t} + 2(b_t x^{\mu} - b^{\mu}x_t)u_{\nu t}.
\end{aligned} \tag{1.75}$$

Подіявши продовженим оператором (1.74) на рівняння (1.31) одержимо

$$\begin{aligned}
&\tilde{X}S = 2u^{\alpha}\,{}^{\alpha}\eta\left(\dot{\psi}^1 u^{\mu}u^{\nu}u_{\mu\nu} + \dot{\psi}^2 u^{\mu}u^{1-\nu}u_{\mu\nu} + \dot{\psi}^3\Box u + \tfrac{1}{u}\dot{\psi}^4\right) -\\
&-\tfrac{1}{u^2}\eta\psi^4 + \psi^1\left(u^{\mu}{}_{\nu,}\eta + u^{\nu}{}_{\mu,}\eta\right)u_{\mu\nu} + \psi^2\left(u^{\mu}{}_{1-\nu,}\eta + u^{1-\nu}{}_{\mu,}\eta\right)u_{\mu\nu}+\\
&+\left(\psi^1 u^{\mu}u^{\nu} + \psi^2 u^{\mu}u^{1-\nu} + \psi^3 g^{\mu\nu}\right){}^{\mu\nu}\eta.
\end{aligned} \tag{1.76}$$

Підставивши (1.75) в (1.76) отримаємо

$$\begin{aligned}
&\tilde{X}S = -2bxS + 4(b_0x_1 - b_1x_0)\psi^2 u^{\mu}u^{\nu}u_{\mu\nu}-\\
&-6mub_t u_t\left(S - \tfrac{2}{3}\psi^3\Box u - \tfrac{1}{u}\psi^4\right) +\\
&+2b_t\left(1 - mu_{\nu}u^{\nu}\right)\left(2uu^{\mu}u_{\mu t} + u_t u_{\mu}u^{\mu}\right)\psi^1+\\
&+2ub_t\left(u^{\mu}u_{\mu 1-t} + u^{1-\nu}u_{\nu t} + mu_{\mu}u^{\mu}u^{1-\nu}u_{\nu t}\right)\psi^2+\\
&+4b_t\left((1 - \tfrac{m}{2}u_{\mu}u^{\mu})u_t - muu^{\mu}u_{\mu t}\right)\psi^3+\\
&+4ub_t u_t(1 - mu_{\alpha}u^{\alpha})\left(\dot{\psi}^1 u^{\mu}u^{\nu}u_{\mu\nu} + \dot{\psi}^2 u^{\mu}u^{1-\nu}u_{\mu\nu} + \dot{\psi}^3\Box u + \tfrac{1}{u}\dot{\psi}^4\right).
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Оскільки змінні x_0, x_1 присутні лише в другому доданку формули (1.77), то звідси випливає, що

$$\psi^2 = 0.$$

Таким чином рівняння (1.1) має вигляд

$$\psi^1 u^{\mu}u^{\nu}u_{\mu\nu} + \psi^3\Box u + \frac{1}{u}\psi^4 = 0. \tag{1.78}$$

Можливі наступні нееквівалентні випадки:

$$\psi^1 = 0, \quad \psi^3 = 1; \tag{1.79}$$

$$\psi^1 = 1. \tag{1.80}$$

Розглянемо кожний із цих випадків окремо.

У випадку (1.79) рівняння (1.1) має вигляд

$$\Box u + \frac{1}{u}\psi^4 = 0. \tag{1.81}$$

Тоді

$$\begin{aligned}&\tilde{X}S = -2bxS - 6mub_tu_tS + 4mub_t\left(S + \tfrac{1}{2u}\psi^4\right) + \\ &+4b_t\left((1 - \tfrac{m}{2}u_\mu u^\mu)u_t - muu^\mu u_{\mu t}\right) + 4ub_tu_t(1 - mu_\alpha u^\alpha)\tfrac{1}{u}\dot{\psi}^4.\end{aligned} \tag{1.82}$$

Звідси випливає, що $m = 0$ і

$$\dot{\psi}^4 + 1 = 0. \tag{1.83}$$

Тобто $\psi^4 = \frac{\lambda_1}{2} - \omega$, λ_1 — стала. Отже, рівняння (1.1) має вигляд

$$\Box u + \frac{1}{u}\left(\frac{\lambda_1}{2} - u_\mu u^\mu\right) = 0. \tag{1.84}$$

Рівняння (1.84) заміною $u = e^{-\frac{w}{2}}$ зводиться до рівняння Ліувілля (1.70). Таким чином перший пункт теореми доведений.

Розглянемо випадок (1.80). Рівняння (1.1), як випливає з (1.8), (1.31) у даному випадку має вигляд

$$S \equiv u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} + \psi^3\Box u + \frac{1}{u}\psi^4 = 0. \tag{1.85}$$

Тоді

$$\begin{aligned}&\tilde{X}S = -2(bx - 3mub_tu_t)S - 4ub_t\left(m(\psi^3 + \omega) - 1\right)u^\mu u_{\mu t} - \\ &-4b_tu_t\left(m(\omega\dot{\psi}^3 - \psi^3) + 1\right)u\Box u + 4b_tu_t\left((1 - m\omega)\dot{\psi}^4 + \tfrac{3}{2}m\psi^4 + \right. \\ &\left. + (1 - \tfrac{m}{2}\omega)\psi^3 + \tfrac{1}{2}\omega(1 - m\omega)\right).\end{aligned} \tag{1.86}$$

Звідки одержуємо

$$m(\omega\dot{\psi}^3 - \psi^3) + 1 = 0, \tag{1.87}$$

$$m(\psi^3 + \omega) - 1 = 0, \tag{1.88}$$

$$(1 - m\omega)\dot{\psi}^4 + \frac{3m}{2}\psi^4 + (1 - \frac{m}{2}\omega)\psi^3 + \frac{1}{2}\omega(1 - m\omega) = 0. \tag{1.89}$$

З рівняння (1.88), (1.87) випливає, що $m \neq 0$ та

$$\psi^3 = \frac{1}{m} - \omega. \tag{1.90}$$

Якщо (1.90) підставити в (1.89), то одержимо

$$(1 - m\omega)\dot{\psi}^4 + \frac{3m}{2}\psi^4 + \frac{1}{m} - \omega = 0. \tag{1.91}$$

Загальним розвязком рівняння (1.91) є функція

$$\psi^4 = -\frac{2}{m}\left(\frac{1}{m} - \omega\right)\left(1 + \lambda\sqrt{\left|\frac{1}{m} - \omega\right|}\right). \tag{1.92}$$

де λ — довільна стала. Остаточний вигляд рівняння (1.85) такий

$$\begin{aligned} &(\tfrac{1}{m} - u_\alpha u^\alpha)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = \\ &= \tfrac{2}{mu}(\tfrac{1}{m} - u_\alpha u^\alpha)(1 + \lambda\sqrt{\left|\tfrac{1}{m} - u_\beta u^\beta\right|}). \end{aligned} \tag{1.93}$$

Рівняння (1.93) при $m = 1$ та $\lambda = \lambda_2$ співпадає з рівнянням (1.71), а при $m = -1$, $\lambda = \lambda_3$ — з рівнянням (1.72).

Теорема 1.4 доведена.

1.2. Конформна інваріантність рівнянь, які описують процеси електродинаміки

При описанні процесів електродинаміки використовується рівняння

$$\Pi_\mu \Pi^\mu u = 0, \tag{1.94}$$

де $\Pi_\mu = \partial_\mu - eA^\mu$, e — стала, $A^\mu = A^\mu(x), u = u(x)$ — довільні гладкі функції, $x = x(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\mu = \overline{0, 3}$. Підняття та опускання індексу здійснюється за допомогою метричного тензору $g^{\mu\nu}$. Таким чином рівняння (1.94) має вигляд

$$\Box u - 2eA^\mu u^\mu - eu\partial^\mu A^\mu + e^2 u A_\mu A^\mu = 0. \tag{1.95}$$

Максимальна алгебра інваріантності рівняння (1.95) є алгебра

$$\begin{aligned}&\partial_\mu,\quad I_{\mu\nu}=x_\mu\partial^\nu-x_\nu\partial^\mu+S_{\mu\nu},\quad D=x_\mu\partial_\mu-A^\mu\partial_{A^\mu},\\&K_\mu=2x_\mu D-x^2\partial^\mu+2x^\nu S_{\mu\nu}+\tfrac{2}{e}\partial_{A^\mu},\\&Q^\infty=a(x)u\partial_u+\tfrac{1}{e}a_\mu(x)\partial_{A^\mu},\end{aligned}\tag{1.96}$$

де $a(x)$ — довільна гладка функція,

$$S_{\mu\nu}=A_\mu\partial_{A^\nu}-A_\nu\partial_{A^\mu},\quad \mu,\nu=\overline{0,3}.\tag{1.97}$$

Узагальнимо рівняння (1.95) наступним рівнянням

$$\Box u+F^1(u)A^\mu u^\mu+F^2(u)\partial^\mu A^\mu+F^3(u)A_\mu A^\mu=0,\tag{1.98}$$

де $F^a=F^a(u)$ — довільні гладкі функції одночасно не рівні нулю, $a=\overline{1,3}$.

Зауважимо, що рівняння (1.98) заміною

$$A^\mu\to\psi(u)B^\mu\tag{1.99}$$

зводиться до еквівалентного рівняння

$$\Box u+\Phi^1(u)B^\mu u^\mu+\Phi^2(u)\partial^\mu B^\mu+\Phi^3(u)B_\mu B^\mu=0,$$

де Φ^a, B^μ — довільні гладкі функції, причому $\Phi^1=\psi F^1+\dot\psi F^2$, $\Phi^2=\psi F^2$, $\Phi^3=\psi^2F^3$. Отже, перетворення (1.99) є перетвореннями еквівалентності рівняння (1.98).

Розглянемо задачу знайти такі функції F^a, при яких рівняння (1.98) з точністю до перетворень еквівалентності (1.99) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре та її розширень операторами масштабних та конформних перетворень. Результати класифікації сформулюємо у вигляді наступних тверджень.

Теорема 1.5. *Ядром алгебри Лі основної групи інваріантності рівняння (1.98) є алгебра*

$$A^{ker}=\left\langle\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu},I_{\mu\nu}=x_\mu\partial^\nu-x_\nu\partial^\mu+S_{\mu\nu},D=x_\mu\partial_\mu-A^\mu\partial_{A^\mu}\right\rangle,\tag{1.100}$$

де $S_{\mu\nu}$ задаються формулами (1.97).

Доведення. Визначимо ядро симетрії рівняння (1.98), тобто знайдемо максимальну алгебру інваріантності рівняння (1.98) при довільних функціях F^a. Для доведення теореми використаємо алгоритм Лі. Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (1.98) має вигляд:

$$X = \xi^\mu(x,u,A)\partial_\mu + \eta(x,u,A)\partial_u + \eta^\mu(x,u,A)\partial_{A^\mu}, \tag{1.101}$$

$\mu = \overline{0,3}$. З умови інваріантності

$$\tilde{X}S\mid_{S=0} = 0, \tag{1.102}$$

де $\tilde{X}$ — продовження оператора X, S — ліва частина рівняння (1.98), одержуємо систему визначальних рівнянь для визначення координат оператора (1.101) та функцій F^a:

$$\begin{aligned} &\xi^\mu_u = 0, \quad \xi^\mu_{A^\nu} = 0, \quad \xi^{\mu,\nu} + \xi^{\nu,\mu} = 2g^{\mu\nu}\xi^0_0, \\ &\eta_{A^\mu} = 0, \quad \eta_{uu} = 0, \quad \eta^\mu_{A^\nu A^\gamma} = 0; \end{aligned} \tag{1.103}$$

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu}\eta\dot{F}^2 + (g^{\mu\nu}(2\xi^0_0 - \eta_u) + g^{\nu\sigma}\eta^\sigma_{A^\mu} - g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma)F^2 = 0, \\ &g^{\mu\nu}A^\mu\eta\dot{F}^1 + ((2g^{\mu\nu}\xi^0_0 - g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma)A^\mu + g^{\mu\nu}\eta^\mu)F^1 + g^{\mu\nu}\eta^\mu_u F^2 + \\ &+2g^{\nu\sigma}\eta_{\sigma u} - \Box\xi^\nu = 0, \\ &g^{\mu\nu}A^\mu A^\nu\eta\dot{F}^3 + (g^{\mu\nu}A^\mu A^\nu(2\xi^0_0 - \eta_u) + 2g^{\mu\nu}A^\nu\eta^\mu)F^3 + g^{\mu\nu}\eta^\mu_\nu F^2 + \\ &+g^{\mu\nu}\eta_\nu A^\mu F^1 + \Box\eta = 0. \end{aligned} \tag{1.104}$$

Розв'язуючи рівняння (1.103) визначальної системи, одержимо

$$\begin{aligned} &\xi^\mu = -b_\mu x^2 + x_\mu(2bx + æ) + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \\ &\eta = a(x)u + p(x), \\ &\eta^\mu = \alpha^{\nu\mu}(x,u)A^\nu + \beta^\mu(x,u), \end{aligned} \tag{1.105}$$

де b_μ, æ, $c_{\mu\nu}$, d_μ — довільні сталі, причому $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, $a(x)$, $p(x)$, $\alpha^{\mu\nu}(x,u)$, $\beta^\mu(x,u)$ — довільні гладкі функції. Підставиивши η^μ в рівняння (1.104) та розщепивши по степеням функцій A^μ, маємо

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu}\eta\dot{F}^1 + (2g^{\mu\nu}\xi^0_0 - g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\sigma})F^1 + g^{\sigma\nu}\alpha^{\mu\sigma}_u F^2 = 0, \\ &g^{\mu\nu}\eta\dot{F}^2 + (2g^{\mu\nu}\xi^0_0 - g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\sigma} - g^{\mu\nu}\eta_u)F^2 = 0, \\ &g^{\mu\nu}\eta\dot{F}^3 + (2g^{\mu\nu}\xi^0_0 + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}\alpha^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}\eta_u)F^3 = 0; \end{aligned} \tag{1.106}$$

$$g^{\mu\nu}\eta_\nu F^1 + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\nu}_\sigma F^2 + 2g^{\mu\nu}\beta^\nu F^3 = 0,$$
$$g^{\mu\nu}\beta^\nu F^1 + g^{\mu\nu}\beta^\mu_u F^2 = \Box\xi^\mu - 2g^{\mu\nu}a_\nu, \qquad (1.107)$$
$$g^{\mu\nu}\beta^\mu_\nu F^2 = -\Box\eta.$$

При довільних функціях F^a системи (1.106), (1.107) задовольняються лише при наступних умовах:

$$\Box\xi^\mu = 0, \quad \eta = 0, \quad \beta^\nu = 0, \quad \alpha^{\nu\mu}_\sigma = 0,$$
$$2g^{\mu\nu}\xi^0_0 - g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\sigma} = 0, \qquad (1.108)$$
$$2g^{\mu\nu}\xi^0_0 + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}\alpha^{\nu\sigma} = 0.$$

Загальним розв'язком системи (1.108) є функції

$$\xi^\mu = æx_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \quad \eta = 0, \quad \eta^\mu = æA^\mu + c_{\mu\nu}A_\nu. \qquad (1.109)$$

Інфінітезимальний оператор (1.101) з координатами (1.109) породжує розширену алгебру Пуанкаре, базисні елементи якої мають вигляд (1.100).

Теорема 1.5 доведена.

Поставимо задачу визначити при яких функціях F^a відбувається розширення ядра симетрії (1.100), розширеною алгеброю Пуанкаре $AP_1(1,3)$ та конформною алгеброю $AC(1,3)$.

Теорема 1.6 *Якщо рівняння (1.98) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре* $AP_1(1,3)$, *то її базисні елементи з точністю до перетворень еквівалентності (1.99) мають вигляд*

$$\partial_\mu, \quad I_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + S_{\mu\nu},$$
$$D = x_\mu\partial_\mu + (nu+m)\partial_u - A^\mu\partial_{A^\mu}, \qquad (1.110)$$

де n, m — довільні сталі, $S_{\mu\nu}$ задаються формулами (1.97).

Теорема 1.7. *Якщо рівняння (1.98) інваріантне відносно конформної алгебри* $AC(1,3)$, *то її базисні елементи з точністю до перетворень еквіва-*

валентності (1.99) мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu, \quad I_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + S_{\mu\nu},\\
&D = x_\mu\partial_\mu + (nu+m)\partial_u - A^\mu\partial_{A^\mu},\\
&K_\mu = 2x_\mu D - x^2\partial^\mu + 2x^\nu S_{\mu\nu} + k_{\mu\sigma\nu}f(u)A^\nu\partial_{A^\sigma} + h^{\mu\nu}\partial_{A^\nu},
\end{aligned}
\tag{1.111}
$$

де $S_{\mu\nu}$ *задаються формулами (1.97),* $h^{\mu\nu} = \begin{cases} h^{\mu\nu}(u), n = m = 0,\\ h_{\mu\nu}, |n| + |m| \neq 0,\end{cases}$

$f(u) = \begin{cases} 0, n = m = 0,\\ e^u, n = 0, m = 1,\\ u, n \neq 0, m = 0,\end{cases}$ $h^{\mu\nu}(u)$ *— довільні гладкі функції,* $h_{\mu\nu}$*,* $k_{\mu\nu\sigma}$ *— довільні сталі.*

Доведення теорем 1.6, 1.7 проведемо одночасно. Якщо рівняння (1.98) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$, то з системи визначальних рівнянь (1.103) випливає, що елементи даної алгебри мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + \left(a^{\mu\nu}(x)u + p^{\mu\nu}(x)\right)\partial_u +\\
&+ \left(\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}(x,u)A^\gamma + \beta^{\mu\nu\sigma}(x,u)\right)\partial_{A^\sigma},
\end{aligned}
\tag{1.112}
$$

де $a^{\mu\nu}$, $p^{\mu\nu}$, $\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}$, $\beta^{\mu\nu\sigma}$ — довільні гладкі функції, які визначаються із умов комутування

$$
\begin{aligned}
&[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, \quad [\partial^\mu, J_{\nu\gamma}] = g^{\mu\nu}\partial_\gamma - g^{\mu\gamma}\partial_\nu,\\
&[J_{\mu\nu}, J_{\gamma\sigma}] = g^{\mu\sigma}J_{\nu\gamma} + g^{\nu\gamma}J_{\mu\sigma} - g^{\mu\gamma}J_{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J_{\mu\gamma}.
\end{aligned}
\tag{1.113}
$$

Із комутаційних співвідношень

$$
[\partial^\mu, J_{\nu\gamma}] = g^{\mu\nu}\partial_\gamma - g^{\mu\gamma}\partial_\nu + \left(a^{\nu\gamma,\mu}(x)u + p^{\nu\gamma,\mu}(x)\right)\partial_u +
$$

$$
+ \left(\alpha^{\nu\gamma\theta\sigma,\mu}(x,u)A^\theta + \beta^{\nu\gamma\sigma,\mu}(x,u)\right)\partial_{A^\sigma} = g^{\mu\nu}\partial_\gamma - g^{\mu\gamma}\partial_\nu
$$

випливає, що $\partial^\mu a^{\nu\gamma} = \partial^\mu p^{\nu\gamma} = \partial^\mu\alpha^{\nu\gamma\theta\sigma} = \partial^\mu\beta^{\nu\gamma\sigma} = 0$. Таким чином $a^{\nu\gamma} = a_{\nu\gamma}, p^{\nu\gamma} = p_{\nu\gamma}$, де $a_{\nu\gamma}$, $p_{\nu\gamma}$ — довільні сталі, $\alpha^{\nu\gamma\theta\sigma} = \alpha^{\nu\gamma\theta\sigma}(u), \beta^{\nu\gamma\sigma} = \alpha^{\nu\gamma\theta\sigma}(u)$ — довільні гладкі функції. Отже, оператор $J_{\mu\nu}$ має вигляд

$$
J_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + \left(a_{\mu\nu}u + p_{\mu\nu}\right)\partial_u + \left(\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}(u)A^\gamma + \beta^{\mu\nu\sigma}(u)\right)\partial_{A^\sigma}.
$$

Вимагаючи виконання комутаційних співвідношень для операторів $J_{\mu\nu}$, $J_{\gamma\sigma}$, одержимо

$$\begin{aligned} &g^{\mu\sigma}p_{\nu\gamma} + g^{\nu\gamma}p_{\mu\sigma} - g^{\mu\gamma}p_{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}p_{\mu\gamma} = 0, \\ &g^{\mu\sigma}a_{\nu\gamma} + g^{\nu\gamma}a_{\mu\sigma} - g^{\mu\gamma}a_{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}a_{\mu\gamma} = 0; \end{aligned} \tag{1.114}$$

$$\begin{aligned} &(a_{\mu\nu}u + p_{\mu\nu})\dot{\alpha}^{\gamma\sigma\epsilon\theta} - (a_{\gamma\sigma}u + p_{\gamma\sigma})\dot{\alpha}^{\mu\nu\epsilon\theta} - \alpha^{\mu\nu\tau\theta}\alpha^{\gamma\sigma\epsilon\tau} + \\ &+\alpha^{\mu\nu\epsilon\tau}\alpha^{\gamma\sigma\tau\theta} = g^{\mu\sigma}\alpha^{\nu\gamma\epsilon\theta} + g^{\nu\gamma}\alpha^{\mu\sigma\epsilon\theta} - g^{\mu\gamma}\alpha^{\nu\sigma\epsilon\theta} - g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\gamma\epsilon\theta}; \end{aligned} \tag{1.115}$$

$$\begin{aligned} &(a_{\mu\nu}u + p_{\mu\nu})\dot{\beta}^{\gamma\sigma\theta} - (a_{\gamma\sigma}u + p_{\gamma\sigma})\dot{\beta}^{\mu\nu\theta} - \alpha^{\mu\nu\tau\theta}\beta^{\gamma\sigma\tau} + \\ &+\alpha^{\gamma\sigma\tau\theta}\beta^{\mu\nu\tau} = g^{\mu\sigma}\beta^{\nu\gamma\theta} + g^{\nu\gamma}\beta^{\mu\sigma\theta} - g^{\mu\gamma}\beta^{\nu\sigma\theta} - g^{\nu\sigma}\beta^{\mu\gamma\theta}. \end{aligned} \tag{1.116}$$

Не важко переконатися, що виконання умов (1.114) можливе лише при $p_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} = 0$, тоді рівняння (1.115), (1.116) перепишуться наступним чином

$$\begin{aligned} &-\alpha^{\mu\nu\tau\theta}\alpha^{\gamma\sigma\epsilon\tau} + \alpha^{\mu\nu\epsilon\tau}\alpha^{\gamma\sigma\tau\theta} = \\ &= g^{\mu\sigma}\alpha^{\nu\gamma\epsilon\theta} + g^{\nu\gamma}\alpha^{\mu\sigma\epsilon\theta} - g^{\mu\gamma}\alpha^{\nu\sigma\epsilon\theta} - g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\gamma\epsilon\theta}; \end{aligned} \tag{1.117}$$

$$\begin{aligned} &-\alpha^{\mu\nu\tau\theta}\beta^{\gamma\sigma\tau} + \alpha^{\gamma\sigma\tau\theta}\beta^{\mu\nu\tau} = \\ &= g^{\mu\sigma}\beta^{\nu\gamma\theta} + g^{\nu\gamma}\beta^{\mu\sigma\theta} - g^{\mu\gamma}\beta^{\nu\sigma\theta} - g^{\nu\sigma}\beta^{\mu\gamma\theta}. \end{aligned} \tag{1.118}$$

Отже, зображення оператора $J_{\mu\nu}$ має вигляд

$$J_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + \left(\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}(u)A^\gamma + \beta^{\mu\nu\sigma}(u)\right)\partial_{A^\sigma}.$$

Вимагаючи інваріантність рівняння (1.98) відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$, із системи (1.104), отримаємо

$$g^{\nu\sigma}\eta^\sigma_{A^\mu} = g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma,$$

звідки, враховуючи (1.105), одержимо

$$\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma} = g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma}. \tag{1.119}$$

Тоді з системи рівнянь (1.118) одержимо

$$\beta^{\mu\nu\gamma} = 0. \tag{1.120}$$

Враховуючи (1.120), (1.119), знаходимо зображення операторів $J_{\mu\nu}$:

$$J_{\mu\nu} = x_\mu \partial^\nu - x_\nu \partial^\mu + (g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})A^\gamma \partial_{A^\sigma}.$$

Базисні елементи алгебри Пуанкаре (1.112) доповнені операторами масштабних перетворень

$$D = x_\mu \partial_\mu + (N(x)u + M(x))\partial_u + (\varphi^{\mu\nu}(x,u)A^\nu + \psi^\mu(x,u))\partial_{A^\mu} \qquad (1.121)$$

при умовах

$$[\partial_\mu, D] = \partial_\mu, \quad [J_{\mu\nu}, D] = 0 \qquad (1.122)$$

утворюють розширену алгебру Пуанкаре

$$AP_1(1,3) = \langle \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu}, \quad D \rangle . \qquad (1.123)$$

Зауважимо, що зображення оператора (1.121) є самим загальним в класі операторів, координати яких задовольняють визначальні рівняння (1.103). У даному випадку, використовуючи комутаційні співвідношення (1.122), одержимо

$$[\partial_\mu, D] = \partial_\mu + (N_\mu(x)u + M_\mu(x))\,\partial_u + \left(\varphi_\mu^{\gamma\nu}(x,u)A^\nu + \psi_\mu^\gamma(x,u)\right)\partial_{A^\gamma} = \partial_\mu,$$

тобто $N_\mu = M_\mu = \varphi_\mu^{\gamma\nu} = \psi_\mu^\gamma = 0$. Таким чином $N(x) = n, M(x) = m$, де n, m — довільні сталі, $\varphi^{\gamma\nu} = \varphi^{\gamma\nu}(u), \psi^\gamma = \psi^\gamma(u)$ — довільні гладкі функції. Отже,

$$D = x_\mu \partial_\mu + (nu + m)\partial_u + (\varphi^{\mu\nu}(u)A^\nu + \psi^\mu(u))\partial_{A^\mu}.$$

З комутаційних співвідношень
$[J_{\mu\nu}, D] = \left(\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}A^\gamma\varphi^{\theta\sigma} - (\varphi^{\epsilon\gamma}A^\gamma + \psi^\epsilon)\alpha^{\mu\nu\epsilon\theta}\right)\partial_\theta = 0$
приходимо до висновку, що

$$\begin{aligned} &\alpha^{\mu\nu\epsilon\theta}\varphi^{\epsilon\gamma} - \alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}\varphi^{\theta\sigma} = 0, \\ &\alpha^{\mu\nu\epsilon\theta}\psi^\epsilon = 0. \end{aligned} \qquad (1.124)$$

З рівнянь (1.124) випливає, що

$$\begin{aligned} &\varphi^{\mu\nu} = k(u)\delta_{\mu\nu}, \\ &\psi^\mu = 0. \end{aligned} \qquad (1.125)$$

Таким чином зображення оператора D має вигляд

$$D = x_\mu \partial_\mu + (nu + m)\partial_u + k(u)A^\nu \partial_{A^\nu}. \tag{1.126}$$

З точністю до перетворень (1.99) оператор (1.126) еквівалентний оператору

$$D = x_\mu \partial_\mu + (nu + m)\partial_u - A^\nu \partial_{A^\nu}.$$

Елементи розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$, доповнені операторами конформних перетворень

$$K_\mu = 2x_\mu D - x^2 \partial^\mu + (L^\mu(x)u + P^\mu(x))\partial_u + (G^{\mu\sigma\nu}(x,u)A^\nu + H^{\mu\sigma}(x,u))\partial_{A^\sigma}$$

при умовах

$$\begin{aligned} &[\partial^\mu, K_\nu] = 2(g^{\mu\nu} D - J_{\mu\nu}), \quad [K_\mu, J_{\nu\gamma}] = g^{\mu\nu} K_\gamma - g^{\mu\gamma} K_\nu, \\ &[D, K_\mu] = K_\mu, \quad [K_\mu, K_\nu] = 0 \end{aligned} \tag{1.127}$$

утворюють конформну алгебру

$$AC(1,3) = \langle \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu}, \quad D, \quad K_\mu \rangle . \tag{1.128}$$

Зауважимо, що зображення операторів K_μ є самим загальним в класі операторів, координати яких задовольняють визначальні рівняння (1.103). Вимагаючи виконання комутаційних співвідношень між операторами ∂^μ, K_ν, отримаємо

$$L^\nu_\mu = 0, \quad P^\nu_\mu = 0, \quad G^{\nu\sigma\gamma}_\mu = 2(\delta_{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma} g^{\mu\sigma}), \quad H^{\nu\sigma}_\mu = 0. \tag{1.129}$$

Розв'язком системи рівнянь (1.129) є функції

$$\begin{aligned} &L^\nu = l_\nu, \quad P^\nu = p_\nu, \\ &G^{\nu\sigma\gamma} = 2(g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})x^\mu + k^{\nu\sigma\gamma}(u), \quad H^{\nu\sigma} = h^{\nu\sigma}(u), \end{aligned} \tag{1.130}$$

де l_ν, p_ν — довільні сталі, $h^{\nu\sigma}(u)$, $k^{\nu\sigma\gamma}(u)$ — довільні гладкі функції. Враховуючи (1.130) одержимо зображення операторів конформних перетворень $K_\nu = 2x_\nu D - x^2\partial^\nu + (l_\nu u + p_\nu)\partial_u + \left((2(g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})x^\mu + k^{\nu\sigma\theta})A^\theta + h^{\nu\sigma}\right)\partial_{A^\sigma}$.

Вимагаючи виконання комутаційних співвідношень (1.127) для операторів розширеної алгебри Пуанкаре та операторів конформних перетворень, одержимо умови, яким повинні задовольняти функції $k^{\mu\sigma\theta}$, $h^{\mu\sigma}$:

$$\begin{aligned} &(nu+m)\dot{k}^{\mu\sigma\theta} - k^{\mu\sigma\theta} = 0, \\ &(nu+m)\dot{h}^{\mu\sigma} = 0, \\ &p_\mu = 0, \quad l_\mu = 0. \end{aligned} \tag{1.131}$$

При розв'язуванні системи рівнянь (1.131) виникають три суттєво різні випадки:

1. Якщо $n = m = 0$, тоді $k^{\mu\sigma\theta} = 0$, $h^{\mu\sigma} = h^{\mu\sigma}(u)$ — довільні функції і
$D = x_\mu \partial_\mu - A^\mu \partial_{A^\mu}$,
$K_\nu = 2x_\nu D - x^2\partial^\nu + 2(g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})x^\mu A^\gamma \partial_{A^\sigma} + h^{\nu\sigma}(u)\partial_{A^\sigma}$.
2. При $n = 0, m \neq 0$, маємо $k^{\mu\sigma\theta}(u) = k_{\mu\sigma\theta}e^u$, $h^{\mu\sigma}(u) = h_{\mu\sigma}$, $k_{\mu\sigma\theta}$, $h_{\mu\sigma}$ — довільні сталі. Таким чином
$D = x_\mu \partial_\mu + \partial_u - A^\mu \partial_{A^\mu}$,
$K_\nu = 2x_\nu D - x^2\partial^\nu + ((2(g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})x^\mu + k_{\nu\sigma\gamma}e^u)A^\gamma + h_{\nu\sigma})\partial_{A^\sigma}$.
3. Коли $n \neq 0, m = 0$, то розв'язком системи рівнянь є функції $k^{\mu\sigma\theta} = k_{\mu\sigma\theta}u$, $h^{\mu\sigma}(u) = h_{\mu\sigma}$, $k_{\mu\sigma\theta}$, $h_{\mu\sigma}$ — довільні сталі. Отже, оператори D і K_ν мають вигляд
$D = x_\mu \partial_\mu + u\partial_u - A^\mu \partial_{A^\mu}$,
$K_\nu = 2x_\nu D - x^2\partial^\nu + ((2(g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})x^\mu + k_{\nu\sigma\gamma}u)A^\gamma + h_{\nu\sigma})\,\partial_{A^\sigma}$.

Таким чином, якщо рівняння (1.98) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$, то її базисні елементи мають вигляд (1.110); якщо рівняння (1.98) інваріантне відносно конформнї алгебри $AC(1,3)$, то її базисні елементи мають вигляд (1.111).

Теореми 1.6, 1.7 доведено.

Теореми 1.6, 1.7 є лише необхідною умовою інваріантності рівняння (1.98) відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$ та конформної алгебри AC(1,3), оскільки в них одержано лише зображення даних алгебр, але не вказано вигляд нелінійностей F^a. Вигляд цих функцій, при яких рівняння (1.98) буде конформно-інваріантним, визначається в наступних твердженнях.

Теорема 1.8. *Рівняння (1.98) з точністю до перетворень еквівалентності (1.99) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре* $AP_1(1,3)$, *базисні елементи якої задаються операторами:*

$$\partial_\mu,\ I_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + S_{\mu\nu},\ D = x_\mu\partial_\mu + (nu+m)\partial_u - A^\mu\partial_{A^\mu}, \quad (1.132)$$

де $|m| + |n| \neq 0$, $S_{\mu\nu}$ *задаються формулами (1.97), тоді і тільки тоді, коли*

1.$F^a = \lambda_a$, *де* λ_a *— довільні сталі,* $a = \overline{1,3}$, *причому* $n = 0, m \neq 0$.

2.$F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2 u$, $F^3 = \lambda_3 u$, *причому* $n \neq 0, m = 0$.

Доведення. Визначимо, коли рівняння (1.98) буде інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$. З теореми 1.6 випливає, що, якщо рівняння (1.98) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре, то її базисні елементи з точністю до перетворень еквівалентності (1.99) мають вигляд (1.110). Знайдемо функції F^a, при яких рівняння (1.98) буде інваріантне відносно даної алгебри.

Підставивши координати інфінітезимального оператора

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu}x^\nu + æx_\mu + d_\mu, \quad \eta = æ(nu+m)\delta_{\mu\nu}A^\nu, \quad \eta^\mu = (c_{\mu\nu} - æ)\delta_{\mu\nu}A^\mu,$$

де $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, æ, d_μ — довільні сталі, в систему визначальних рівнянь (1.106), (1.107), після спрощень отримаємо наспупну систему диференціальних рівнянь:

$$(nu+m)\dot{F}^1 = 0, \quad (nu+m)\dot{F}^i - nF^i = 0, \quad i = 2,3. \quad (1.133)$$

З вигляду рівнянь системи (1.133) випливає, що її розв'язки залежать від значень сталих n і m.

При $n = 0$, $m \neq 0$ система диференціальних рівнянь (1.133) набуває вигляду

$$\dot{F}^a = 0, \quad a = \overline{1,3}. \quad (1.134)$$

Розв'язавши рівняння (1.134), одержуємо $F^a = \lambda_a$, λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$. Даний результат співпадає з пунктом 1 теореми 1.8.

У випадку $n \neq 0$, $m = 0$ система (1.133) має вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{F}^1 = 0, \\ &u\dot{F}^i = F^i, \quad i = 2, 3. \end{aligned} \tag{1.135}$$

Розв'язком даної системи є функції $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2 u$, $F^3 = \lambda_3 u$, де λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$. Таким чином одержали функції пункту 2 теореми 1.8.

Якщо $n \neq 0$, $m \neq 0$, то із системи рівнянь (1.133) маємо $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2(nu + m)$, $F^3 = \lambda_3(nu + m)$. Не важко переконатися, що заміною $u = w - \frac{m}{n}$ даний випадок зводиться до результату у випадку $n \neq 0$, $m = 0$.

Теорему 1.8 доведено.

Зауваження. У теоремі 1.8 накладена умова $|m| + |n| \neq 0$, оскільки випадок $n = m = 0$ розглянутий в теоремі 1.5.

Теорема 1.9. *Рівняння (1.98) з точністю до перетворень еквівалентності (1.99) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,3)$, базисні елементи якої задаються операторами (1.111), тоді і тільки тоді, коли*

1. F^1, F^2 — довільні гладкі функції, $F^3 = \frac{F^1F^2}{2}$, причому $n = m = 0$, $h^{\mu\nu}(u) = -\frac{4}{F^1}\delta_{\mu\nu}$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$.

2. $F^a = \lambda_a$, λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$, $\lambda_1 \neq 0$, причому $n = 0$, $m = -\frac{2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2}$, $h^{\mu\nu}(u) = -\frac{4}{\lambda_1}\delta_{\mu\nu}$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$.

3. $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2 u$, $F^3 = \lambda_3 u$, λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$, $\lambda_1^2 - 4\lambda_3 \neq 0$, причому $m = 0$, $n = \frac{-2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$, $h^{\mu\nu}(u) = -\frac{4(\lambda_1 - 2\lambda_2)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}\delta_{\mu\nu}$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$.

4. Рівняння (1.98) співпадає з рівнянням (1.95), причому $m = 0$, $n \in \mathbb{R}$, $h^{\mu\nu}(u) = \frac{2}{e}(n+1)\delta_{\mu\nu}$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$.

Доведення. Якщо рівняння (1.98) інваріантне відносно конформної алгебри, то, як показано в теоремі 1.7, базисні елементи даної алгебри з точністю до перетворень еквівалентності (1.99) мають вигляд (1.111). Для кожного з отриманих в теоремі 1.7 зображень конформної алгебри знайдемо функції F^a, при яких рівняння (1.98) буде інваріантне відносно даної алгебри.

Оскільки конформна алгебра $AC(1,3)$ містить у собі розширену алгебру Пуанкаре $AP_1(1,3)$, то використаємо результати теорем 1.5, 1.8.

Розглянемо зображення конформної алгебри при $n=0$, $m=0$. У даному випадку згідно теореми 1.8 $F^a=F^a(u)$ — довільні функції, $a=\overline{1,3}$. Підставивши координати інфінітезимального оператора

$$\begin{aligned}&\xi^\mu=-b_\mu x^2+(2bx+æ)x_\mu+c_{\mu\nu}x^\nu+d_\mu, \quad \eta=0,\\&\eta^\mu=(c_{\mu\gamma}-(2bx+æ)\delta_{\mu\gamma}+2b_\gamma x^\mu-2b^\mu x_\gamma)A^\gamma+b^\alpha h^{\alpha\mu},\end{aligned} \tag{1.136}$$

де b_μ, æ, $c_{\mu\nu}=-c_{\nu\mu}$, d_μ — довільні сталі, у систему визначальних рівнянь (1.106), (1.107) отримаємо

$$h^{\mu\nu}=-\frac{4}{F^1}\delta_{\mu\nu}, \quad F^3=\frac{1}{2}F^1F^2. \tag{1.137}$$

Таким чином рівняння (1.98) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,3)$, оператори якої мають зображення (1.111) при $n=0$, $m=0$, має вигляд

$$\Box u+F^1(u)A^\mu u^\mu+F^2(u)\partial^\mu A^\mu+\frac{1}{2}F^1(u)F^2(u)A_\mu A^\mu=0.$$

Перший пункт теореми доведено.

Якщо $n=0, m\neq 0$, то координати інфінітезимального оператора мають вигляд

$$\begin{aligned}&\xi^\mu=-b_\mu x^2+(2bx+æ)x_\mu+c_{\mu\nu}x^\nu+d_\mu, \quad \eta=m(2bx+æ),\\&\eta^\mu=(c_{\mu\gamma}-(2bx+æ)\delta_{\mu\gamma}+2b_\gamma x^\mu-2b^\mu x_\gamma+b^\sigma k_{\mu\sigma\gamma}e^{\frac{u}{m}})A^\gamma+\\&+b^\alpha h^{\alpha\mu}(u).\end{aligned} \tag{1.138}$$

Згідно теореми 1.8 функції $F^a=\lambda_a$. Підставивши функції ξ^μ, η, η^μ, η^μ, F^a у систему визначальних рівнянь (1.106), (1.107), одержимо наступну систему рівнянь для визначення $h^{\mu\nu}$, $k_{\mu\sigma\gamma}$:

$$\lambda_3h^{\sigma\mu}=-(\lambda_1m+2\lambda_2)\delta_{\sigma\mu}, \quad \lambda_1h^{\sigma\mu}=-4\delta_{\sigma\mu}, \quad k_{\mu\sigma\gamma}=0. \tag{1.139}$$

Із умов (1.139) випливає, що $\lambda_1 \neq 0, m = \frac{2(2\lambda_3-\lambda_1\lambda_2)}{\lambda_1^2}, h^{\sigma\mu} = -\frac{4}{\lambda_1}\delta_{\mu\sigma}$, тобто одержуємо результат пункту 2 теореми 1.9.

Нехай $n \neq 0$, $m = 0$, тоді згідно теореми 1.8 $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2 u$, $F^3 = \lambda_3 u$.

Якщо $n \neq 0, m = 0$, то координати інфінітезимального оператора мають вигляд

$$\begin{aligned} &\xi^\mu = -b_\mu x^2 + (2bx + æ)x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \quad \eta = n(2bx + æ)u, \\ &\eta^\mu = (c_{\mu\gamma} - (2bx + æ)\delta_{\mu\gamma} + 2b_\gamma x^\mu - 2b^\mu x_\gamma + b^\nu k_{\nu\mu\gamma}u)A^\gamma + b^\alpha h_{\alpha\mu}, \end{aligned} \tag{1.140}$$

У даному випадку із системи визначальних рівнянь (1.106), (1.107) одержимо

$$\lambda_1 h^{\mu\nu} = -4(n+1)\delta_{\mu\nu}, \quad \lambda_3 h^{\mu\nu} = -4(n\lambda_1 + 2\lambda_2)\delta_{\mu\nu}, \quad k_{\nu\mu\gamma} = 0, \tag{1.141}$$

звідки випливає, що

а) якщо $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, то $n = -1$, $h^{\mu\nu} = -\frac{2\lambda_2}{\lambda_3}\delta_{\mu\nu}$;

б) у випадку $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$ маємо $n = -\frac{2\lambda_2}{\lambda_3}$, $h^{\mu\nu} = -\frac{4(n+1)}{\lambda_1}\delta_{\mu\nu}$;

в) при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ отримуємо, що $n = -\frac{2(\lambda_1\lambda_2-2\lambda_3)}{\lambda_1^2-4\lambda_3}$, $h^{\mu\nu} = -\frac{4(\lambda_1-2\lambda_2)}{\lambda_1^2-4\lambda_3}\delta_{\mu\nu}$, $\lambda_1^2 - 4\lambda_3 \neq 0$.

Об'єднавши випадки а, б, в, одержимо пункт 3 теореми 2.9.

Якщо, $\lambda_1^2 - 4\lambda_3 = 0$, то $h^{\mu\nu} = \frac{2(n+1)}{\lambda_2}\delta_{\mu\nu}$, причому у цьому випадку $\lambda_1 = 2\lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_2^2$, тобто рівняння (1.98) має вигляд (1.95) при $\lambda_2 = -e$.

Теорему 1.9 доведено.

Узагальнимо рівняння (1.95) системою рівнянь

$$\begin{aligned} &\Box u + F^1(u)A^\mu u^\mu + F^2(u)\partial^\mu A^\mu + F^3(u)A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu\partial^\nu A^\nu = \Psi^\mu(u, A), \end{aligned} \tag{1.142}$$

де $F^a = F^a(u)$, $\Psi^\mu = \Psi^\mu(u, A)$ — довільні гладкі функції, F^a функції, одночасно не рівні нулю, $a = \overline{1,3}$, $\mu = \overline{0,3}$.

В роботі [35] досліджена задача, при яких F^a, Ψ^μ система (1.142) інваріантна відносно алгебри $AP_1(1,3)$. В роботі [62] встановлена конформна інваріантність системи рівнянь електродинаміки у випадку спінорного і векторного полів. Знайдемо такі функції F^a, Ψ^μ, при яких система (1.142) є інваріантною відносно конформної алгебри $AC(1,3)$. Справедливе наступне твердження.

Теорема 1.10. *Система диференціальних рівнянь (1.142) інваріантна відносно конформної алгебри AC(1,3), базисні елементи якої задаються операторами вигляду (1.111), тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна одній із наступних систем*

$$\begin{aligned} &\Box u + 2\lambda_1 A^\mu u^\mu + \lambda_1 u \partial^\mu A^\mu + \lambda_2 u A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^\nu = A_\nu A^\nu \varphi(w) A^\mu, \end{aligned} \tag{1.143}$$

де $w = \frac{A_\nu A^\nu}{u^2}$, *причому* $k_{\mu\sigma\nu} = 0$, $n = -1$, $m = 0$, $h^{\mu\nu} = 0$, $\varphi = \varphi(w)$ — *довільні гладкі функції;*

$$\begin{aligned} &\Box u + 2\lambda A^\mu u^\mu + F \partial^\mu A^\mu + \lambda F A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^\nu = 0, \end{aligned} \tag{1.144}$$

причому $n = 0$, $m = 0$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$, $h^{\mu\nu}(u) = h\delta_{\mu\nu}$, $h = -\frac{2}{\lambda}$, $F = F(u)$ — *довільна гладка функція,* λ — *довільна стала;*

$$\begin{aligned} &\Box u + \lambda_1 A^\mu u^\mu + \lambda_2 \partial^\mu A^\mu + \lambda_3 A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^\nu = 0, \end{aligned} \tag{1.145}$$

причому $n = 0$, $m = -\frac{2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2}$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$, $h^{\mu\nu}(u) = h\delta_{\mu\nu}$, $h = -\frac{4}{\lambda_1}$, λ_a — *довільні сталі;*

$$\begin{aligned} &\Box u + \lambda_1 A^\mu u^\mu + \lambda_2 u \partial^\mu A^\mu + \lambda_3 u A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^\nu = 0, \end{aligned} \tag{1.146}$$

причому $n = -\frac{2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$, $m = 0$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$, $h^{\mu\nu}(u) = h\delta_{\mu\nu}$, $h = -\frac{4(\lambda_1 - 2\lambda_2)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$, λ_a — *довільні сталі;*

$$\begin{aligned} &\Box u - 2e A^\mu u^\mu - e u \partial^\mu A^\mu + e^2 u A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^\nu = 0, \end{aligned} \tag{1.147}$$

причому $n \in \mathbb{R}$, $m = 0$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$, $h^{\mu\nu}(u) = h\delta_{\mu\nu}$, $h = \frac{2}{e}(n+1)$, e *— довільна стала.*

Доведення. Застосувавши критерій інваріантності, отримаємо систему визначальних рівнянь для визначення невідомих функцій, яка складається із систем рівнянь (1.106), (1.107) та рівнянь

$$\begin{aligned}
&A^\nu \psi^\alpha_{A^\nu} - (nu+m)\psi^\alpha_u = 3\psi^\alpha, \\
&A^s \psi^\alpha_{A^\sigma} - A^\sigma \psi^\alpha_{A^s} + g^{\alpha s}\psi^\sigma - g^{\alpha\sigma}\psi^s = 0, \\
&\dot{h}(u) = 0, \quad h\psi^\alpha_{A^s} = 0.
\end{aligned} \tag{1.148}$$

Звідки

$$h \text{ — стала}, \quad \psi^\mu = \psi(u,\omega)A^\mu, \quad \omega = A_\mu A^\mu, \tag{1.149}$$

$$\begin{aligned}
&2\omega\psi_\omega - (nu+m)\psi_u = 2\psi, \\
&h\psi = 0.
\end{aligned} \tag{1.150}$$

Згідно теореми 1.9 для першого рівняння системи (1.142) існує чотири можливих зображення алгебри інваріантності конформної алгебри $AC(1,3)$.

Нехай $h = 0$, тоді із теореми 1.9 випливає, що $m = 0$, $\lambda_1 = 2\lambda_2$, $n = -1$; функцію ψ визначимо розв'язуючи рівняння

$$2\omega\psi_\omega + u\psi_u = 2\psi.$$

Загальним розв'язком даного рівняння є функція $\psi = \omega\varphi(w)$, де $w = \frac{\omega}{u^2}$, $\varphi = \varphi(w)$ — довільна гладка функція. Таким чином система (1.142) набуває вигляду (1.143), що і потрібно було показати.

Якщо $h \neq 0$, то з (1.150) випливає, що $\psi = 0$. Використавши теорему 1.9, одержимо:

а) $h = -\frac{4}{\lambda_1}$ при $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = F(u)$, $F^3 = \frac{\lambda_1 F(u)}{2}$, де λ_1 — довільна стала, $F(u)$ — довільна гладка функція, причому $m = n = 0$, при цьому система (1.142) має вигляд (1.144);

б) при $F^a = \lambda_a$, де λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$, $\lambda_1 \neq 0$, система (1.142) набуває вигляду (1.145) при цьому $n = 0$, $m = -\frac{2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2}$, $h^{\mu\nu} = -\frac{4}{\lambda_1}\delta_{\mu\nu}$;

в) система (1.142) має вигляд (1.146), якщо $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2 u$, $F^3 = \lambda_3 u$, λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$, $\lambda_1^2 - 4\lambda_3 \neq 0$, причому $m = 0$, $n = \frac{-2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$, $h = -\frac{4(\lambda_1 - 2\lambda_2)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$;
г) система (1.142) співпадає із системою (1.147), причому $m = 0$, $n \in \mathbb{R}$, $h = \frac{2}{e}(n+1)$ у випадку коли перше рівняння системи (1.142) має вигляд (1.95).

Теорему 1.10 доведено.

Якщо рівняння (1.98) узагальнити системою рівнянь

$$\begin{aligned} &\Box u + F^1(u)A^\mu u^\mu + F^2(u)\partial^\mu A^\mu + F^3(u)A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu = \psi^\mu(u, A), \end{aligned} \tag{1.151}$$

то спаведливий наступний результат.

Теорема 1.11. *Система диференціальних рівнянь (1.151) не є конформно-інваріантною.*

Доведення. Згідно критерію Лі, діючи другим продовженням інфінітезимального оператора на кожне з рівнянь системи (1.151) та перейшовши на многовид системи (1.151), після розщеплення по похідних отримуємо систему визначальних рівнянь, яка складається із рівнянь (1.106), (1.107) та рівнянь

$$\eta^\mu_u A^\alpha F^1 = 2\eta^\mu_{\alpha u}; \tag{1.152}$$

$$g^{\mu\nu}\eta^\alpha_u F^2 = 2g^{\nu\beta}\eta^\alpha_{\beta A^\mu} - \delta_{\alpha\mu}\Box\xi^\nu; \tag{1.153}$$

$$\eta^\alpha_u A_\mu A^\mu F^3 = -\eta\psi^\alpha_u - \eta^\nu\psi^\alpha_{A^\nu} + \eta^\alpha_{A^\nu}\psi^\nu - 2\xi^0_0\psi^\alpha. \tag{1.154}$$

Із рівнянь (1.106), (1.107), як показано в теоремах 1.7, 1.9, випливає, координати інфінітезимального оператора мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} &\xi^\mu = -b_\mu x^2 + (2bx + \text{æ})x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \\ &\eta = (2bx + \text{æ})(nu + m), \\ &\eta^\mu = (c_{\mu\gamma} - (2bx + \text{æ})\delta_{\mu\gamma} + 2b_\gamma x^\mu - 2b^\mu x_\gamma)A^\gamma - b^\nu h^{\nu\mu}(u), \end{aligned} \tag{1.155}$$

де $h^{\mu\nu}$ задовольняють умові теореми 6, b_μ, æ, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, d_μ — довільні сталі, $F^1(u) \neq 0$. Для всіх зображень $h^\mu_{\alpha u} = 0$, тоді із рівнянь (1.152) випливає, що $h^\mu_u = 0$, а із рівняння (1.153) одержимо рівність

$$b_s(\delta_{\mu s}\delta_{\alpha\nu} - g^{\alpha s}g^{\mu\nu}) = 0. \tag{1.156}$$

Оскільки (1.156) виконується лише при $b_s = 0$, то звідси випливає, що система рівнянь (1.151) не є конформно-інваріантною, що і потрібно було показати.

Теорема 1.11 доведена.

1.3. Класифікація лінійних неоднорідних зображень розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри у випадку двовимірного векторного поля

При дослідженні симетрійних властивостей рівнянь та систем математичної фізики

$$S\left(x, U, \underset{1}{U}, \underset{2}{U}, \ldots, \underset{n}{U}\right) = 0 \tag{1.157}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ — незалежні змінні, $U = U(x) \in \mathbb{R}^m$ — невідомі функції, $\underset{k}{U}$ — сукупність усіх похідних функцій U порядку k, є важливою задача класифікації зображень їх алгебр інваріантності.

У даному підрозділі опишемо нееквівалентні лінійні неоднорідні зображення алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких інваріантні рівняння гіперболічного типу у випадку $U \in \mathbb{R}^2$ при умові, що вихідна система допускає лінійні перетворення еквівалентності

$$W = KU + L, \tag{1.158}$$

де K — невироджена стала матриця розмірності 2×2, L — стала матриця розмірності 2×1, $W = W(x)$ — нові невідомі функції.

Базисні елементи алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + Q_1, \tag{1.159}$$

доповнені операторами масштабних перетворень

$$D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2, \tag{1.160}$$

при умові

$$[Q_1, Q_2] = 0 \tag{1.161}$$

утворюють розширену алгебру Пуанкаре:

$$AP_1(1,1) =< \partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01}, \quad D > . \tag{1.162}$$

Елементи цієї алгебри, доповнені операторами конформних перетворень

$$K_\mu = 2x_\mu D - x^2\partial^\mu + 2x_\mu Q_1 + Q_{\mu+3} \tag{1.163}$$

при умовах

$$\begin{aligned} &[Q_1, Q_3] = Q_4, \quad [Q_2, Q_3] = Q_3, \quad [Q_3, Q_4] = 0, \\ &[Q_1, Q_4] = Q_3, \quad [Q_2, Q_4] = Q_4 \end{aligned} \tag{1.164}$$

утворюють конформну алгебру:

$$AC(1,1) =< \partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01}, \quad D, \quad K_0, \quad K_1 > . \tag{1.165}$$

Тут Q_i — оператори вигляду

$$Q_i = (\alpha_{iba}u^a + \beta_{ib})\partial_{u^b}, \tag{1.166}$$

де α_{iba}, β_{ib} — довільні сталі, $i = \overline{1,4}$, a, $b = 1,2$.

Зауваження. Якщо оператори (1.159), (1.159)–(1.160) та (1.159), (1.160), (1.163) утворюють відповідні алгебри, то в класі

$$Q_i = (\alpha^{iba}(x_0, x_1)u^a + \beta^{ib}(x_0, x_1))\partial_{u^b}$$

де $\alpha^{iba}(x_0, x_1)$, $\beta^{ib}(x_0, x_1)$ — довільні гладкі функції, оператори (1.166) є найбільш загальними. Це випливає з комутаційних співвідношень

$$[\partial_\mu, J_{01}] = \delta_{\mu 1}\partial_0 + \delta_{\mu 0}\partial_1, \quad [\partial_\mu, D] = \partial_\mu, \quad [\partial_\mu, K_\alpha] = 2(J_{\mu\alpha} + g^{\mu\alpha}D).$$

Наприклад,

$$[\partial_\mu, x_0\partial_1 + x_1\partial_0 + (\alpha^{1ba}(x_0, x_1)u^a + \beta^{1b}(x_0, x_1))\partial_{u^b}] =$$

$$= \delta_{\mu 0}\partial_1 + \delta_{\mu 0}\partial_0 + (\alpha^{1ba}_\mu u^a + \beta^{1b}_\mu)\partial_{u^b}.$$

Звідки $\alpha^{1ba}_\mu = \beta^{1b}_\mu = 0$, тобто α^{1ab}, β^{1b} — сталі.

Проведемо класифікацію нееквівалентних зображень алгебр (1.159), (1.162), (1.165) з точністю до перетворень (1.158).

У роботі [15] в залежності від співвідношень між коефіцієнтами α_{abc}, β_{ac} одержано шість нееквівалентних відносно перетворень (1.158) виглядів оператора Q_1:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & Q_1 & = & \partial_{u^1} \\ 2. & Q_1 & = & æ_1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2} \\ 3. & Q_1 & = & æ_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2} \\ 4. & Q_1 & = & k_1u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2} \\ 5. & Q_1 & = & m_1I + æ_1u^2\partial_{u^1} \\ 6. & Q_1 & = & k_1I + m_1J, \end{array} \qquad (1.167)$$

де $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$, $J = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$; $æ_1 \in \{0, 1\}$, k_1, m_1 — довільні сталі. Використаємо цей результат для класифікації нееквівалентних відносно перетворень (1.158) зображень розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$ (1.162), вибравши в ролі оператора Q_1 кожен з операторів (1.167). Результати цієї класифікації наведемо в вигляді наступної теореми.

Теорема 1.12. *Існує 6 нееквівалентних зображень розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$ (1.162) з точністю до перетворень еквівалентності (1.158), які задаються операторами Q_1, Q_2, наведеними в таблиці 1.1.*

Таблиця 1.1

Нееквівалентні зображення розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$

№	Q_1	Q_2
1	∂_{u^1}	$æ_2\partial_{u^2} + m_2u^2\partial_{u^1}$
2	$æ_1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}$	$k_2\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}$
3	$æ_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$	$k_2\partial_{u^2} + m_2(æ_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2})$
4	$k_1u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}$	$k_2u^1\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}$
5	$m_1I + æ_1u^2\partial_{u^1}$	$k_2I + m_2u^2\partial_{u^1}$
6	$k_1I + m_1J$	$k_2I + m_2J$

Тут $æ_i \in \{0,1\}$, k_i, m_i — довільні сталі, $i = 1,2$.

Доведення.

I. Розглянемо зображення

$$Q_1 = \partial_{u^1}. \tag{1.168}$$

Враховуючи комутаційні співвідношення (1.161) для операторів алгебри (1.162):

$$[Q_1, Q_2] = [\partial_{u^1}; \quad (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}] = \alpha_{2a1}\partial_{u^a} = 0, \quad a = 1,2, \tag{1.169}$$

одержуємо $\alpha_{2a1} = 0$. Отже, оператор Q_2 має вигляд

$$Q_2 = (\alpha_{2a2}u^2 + \beta_{2a})\partial_{u^a}. \tag{1.170}$$

Оскільки у формулу (1.170) входять довільні сталі, то вона описує цілий клас операторів Q_2. Відшукаємо серед них оператори нееквівалентні відносно перетворень (1.158), які в даному випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} w^1 &= k_{11}u^1 + k_{12}u^2 + l_1, \\ w^2 &= k_{21}u^1 + k_{22}u^2 + l_2. \end{aligned} \tag{1.171}$$

При цьому будемо вимагати, щоб перетворення (1.171) залишали інваріантним оператор Q_1. Оскільки

$$Q_1 = \partial_{u^1} = k_{11}\partial_{w^1} + k_{21}\partial_{w^2}, \tag{1.172}$$

то $k_{11}=1$, $k_{21}=0$, тобто лінійні невироджені перетворення, відносно яких інваріантний оператор Q_1, у цьому випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} w^1 &= u^1 + k_{12}u^2 + l_1, \\ w^2 &= k_{22}u^2 + l_2. \end{aligned} \tag{1.173}$$

Перетворення (1.173) мають бути невиродженими, тому $k_{22} \neq 0$. Оскільки

$$\begin{aligned} \partial_{u^1} &= \partial_{w^1}, \\ \partial_{u^2} &= k_{12}\partial_{w^1} + k_{22}\partial_{w^2}, \end{aligned} \tag{1.174}$$

то оператор Q_2 під дією перетвореннь (1.173) зводиться до вигляду
$Q_2 = [\frac{1}{k_{22}}(\alpha_{212}+k_{12}\alpha_{222})w^2 + \beta_{21} - \frac{l_2}{k_{22}}(\alpha_{212}+k_{12}\alpha_{222}) + k_{12}\beta_{22}]\partial_{w^1} +$
$+(\alpha_{222}w^2 + k_{22}\beta_{22} - \alpha_{222}l_2)\partial_{w^2}$.
У залежності від значень коефіцієнтів α_{222}, α_{212} можливі три нееквівалентні випадки:
а) якщо $\alpha_{222}=0$, то при $\alpha_{212}=0$ одержимо

$$Q_2 = æ_2\partial_{w^2}, \quad æ_2 = k_{22}\beta_{22} \tag{1.175}$$

при умові $\beta_{22}\neq 0$, $\quad k_{12} = -\frac{\beta_{21}}{\beta_{22}}$ та

$$Q_2 = k_2\partial_{w^1}, \quad k_2 = \beta_{21} \tag{1.176}$$

якщо $\beta_{22}=0$. Оператори (1.176) та (1.168) наведені в 2 пункті таблиці 1.1 при $m_1 = m_2 = 0$;
б) якщо $\alpha_{222}=0$, $\alpha_{212}\neq 0$, то

$$Q_2 = m_2 w^2\partial_{w^1} + æ_2\partial_{w^2}, \quad m_2 = \frac{\alpha_{212}}{k_{22}}, \quad æ_2 = k_{22}\beta_{22}. \tag{1.177}$$

(1.175) при $m_2 = 0$ та (1.177) разом з оператором (1.168) наведені в пункті 1 таблиці 1.1;
в) якщо $\alpha_{222}\neq 0$, то вибравши $k_{12} = -\frac{\alpha_{212}}{\alpha_{222}}$, $l_2 = \frac{k_{22}\beta_{22}}{\alpha_{222}}$ одержимо найпростіший вигляд оператора Q_2:

$$Q_2 = k_2\partial_{u^1} + m_2 u^2\partial_{u^2}, \tag{1.178}$$

де $k_2 = \beta_{21} - \frac{\alpha_{212}}{\alpha_{222}}$, $m_2 = \alpha_{222}$. Оператор (1.178) разом з оператором (1.168) є частинним випадком пункту 2 таблиці 1.1 при $æ_1 = 1$, $m_1 = 0$.

II. Розглянемо зображення

$$Q_1 = æ_1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}, \quad m_1 \neq 0. \tag{1.179}$$

Використавши формули (1.161) та (1.166), знаходимо:

$$[Q_1, Q_2] = [æ_1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}; \quad (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}] =$$

$$= (m_1\alpha_{212}u^2 + æ_1\alpha_{211})\partial_{u^1} + (-m_1\alpha_{221}u^1 + æ_1\alpha_{221} - m_1\beta_{22})\partial_{u^2} = 0,$$

тобто

$$\begin{aligned} &æ_1\alpha_{211} = 0, \quad æ_1\alpha_{221} - m_1\beta_{22} = 0, \\ &\alpha_{212} = 0, \quad \alpha_{221} = 0. \end{aligned} \tag{1.180}$$

З рівності (1.180) одержимо два різні набори констант, яким відповідають оператори Q_1, Q_2:

$$\begin{aligned} &æ_1 = 0, \quad \alpha_{212} = 0, \quad \alpha_{221} = 0, \quad \beta_{22} = 0, \\ &Q_1 = m_1u^2\partial_{u^2}, \quad Q_2 = (\alpha_{211}u^1 + \beta_{21})\partial_{u^1} + \alpha_{222}u^2\partial_{u^2}; \end{aligned} \tag{1.181}$$

$$\begin{aligned} &æ_1 = 1, \quad \alpha_{211} = 0, \quad \alpha_{212} = 0, \quad \alpha_{221} = 0, \quad \beta_{22} = 0, \\ &Q_1 = \partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}, \quad Q_2 = \beta_{21}\partial_{u^1} + \alpha_{222}u^2\partial_{u^2}. \end{aligned} \tag{1.182}$$

У кожному з випадків (1.181), (1.182) оператор Q_2 містить довільні сталі, тобто формули (1.181), (1.182) задають деякі класи операторів. Знайдемо всі нееквівалентні зображення оператора Q_2 відносно перетворень (1.158), вимагаючи при цьому, щоб оператор Q_1 був інваріантним відносно даних перетворень. Лінійні невироджені перетворення, відносно яких інваріантний оператор Q_1 заданий (1.181), у даному випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} &w^1 = k_{11}u^1 + l_1, \\ &w^2 = k_{22}u^2, \end{aligned} \tag{1.183}$$

причому $\partial_{u^1} = k_{11}\partial_{w^1}$, $\partial_{u^2} = k_{22}\partial_{w^2}$, $k_{11} \cdot k_{22} \neq 0$. Перетворення (1.183) зводять оператор Q_2 до вигляду

$$Q_2 = (\alpha_{211}w^1 - \alpha_{211}l_1 + k_{11}\beta_{21})\partial_{w^1} + \alpha_{222}w^2\partial_{w^2}. \tag{1.184}$$

Максимально спростимо вигляд оператора (1.184). Якщо $\alpha_{211} = 0$, тоді

$$Q_2 = k_2\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}, \quad k_2 = k_{11}\beta_{21}, \quad m_2 = \alpha_{222}; \tag{1.185}$$

якщо $\alpha_{211} \neq 0$, то вибравши $l_1 = \frac{k_{11}\beta_{21}}{\alpha_{211}}$, одержимо найпростіший вигляд оператора Q_2:

$$Q_2 = k_2u^1\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}, \quad k_2 = \alpha_{211}, \quad m_2 = \alpha_{222}. \tag{1.186}$$

Оператор (1.185) разом з оператором Q_1 вигляду (1.181) є частинним випадком п.2 таблиці 1.1 при $æ_1 = 0$, а оператор (1.186) разом з оператором Q_1 вигляду (1.181) є частинним випадком п.4 таблиці 1.1. Зображення операторів Q_1, Q_2, що мають вигляд (1.182), наведені в п.2 таблиці 1.1 при $k_2 = \beta_{21}$, $m_2 = \alpha_{222}$.

III. Розглянемо зображення

$$Q_1 = æ_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}. \tag{1.187}$$

Комутаційне співвідношення (1.161) для операторів алгебри (1.162) набуде вигляду

$$[Q_1; Q_2] = [æ_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}; \quad (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}] = (\alpha_{212}u^1 + æ_1\alpha_{211})\partial_{u^1} +$$
$$+ ((\alpha_{222} - \alpha_{211})u^1 - \alpha_{212}u^2 + æ_1\alpha_{221} - \beta_{21})\partial_{u^2} = 0.$$

З даної рівності одержуємо два суттєво різні випадки:

$$\begin{aligned} &æ_1 = 0, \quad \alpha_{212} = 0, \quad \alpha_{211} = \alpha_{222}, \quad \beta_{21} = 0, \\ &Q_1 = u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = \alpha_{211}u^1\partial_{u^1} + (\alpha_{221}u^1 + \alpha_{211}u^2 + \beta_{22})\partial_{u^2}; \end{aligned} \tag{1.188}$$

$$\begin{aligned} &æ_1 = 1, \quad \alpha_{211} = \alpha_{212} = \alpha_{222} = 0, \quad \alpha_{221} = \beta_{21}, \\ &Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = \alpha_{221}\partial_{u^1} + (\alpha_{221}u^1 + \beta_{22})\partial_{u^2}. \end{aligned} \tag{1.189}$$

Відшукаємо нееквівалентні зображення операторів Q_2 відносно перетворень (1.158). Лінійні невироджені перетворення (1.158) у випадку (1.188) мають вигляд

$$\begin{aligned} &w^1 = u^1, \\ &w^2 = k_{21}u^1 + k_{22}u^2 + l_2 \end{aligned} \tag{1.190}$$

і зводять оператор Q_2 до вигляду

$$Q_2 = \alpha_{211} w^1 \partial_{w^1} + (k_{22}\alpha_{221} w^1 + \alpha_{211} w^2 - l_2\alpha_{211} + k_{22}\beta_{22})\partial_{w^2}$$

при цьому перетвореня (1.190) залишають інваріантним оператор Q_1 . В результаті отримаємо

$$\begin{array}{l} \text{при} \quad \alpha_{211} = 0, \\ Q_1 = u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = (m_2 u^1 + k_2)\partial_{u^2}, \\ \text{де} \quad m_2 = k_{22}\alpha_{221}, \quad k_2 = k_{22}\beta_{22}; \end{array} \tag{1.191}$$

$$\begin{array}{l} \text{при} \quad \alpha_{211} \neq 0, \quad l_2 = \frac{k_{22}\beta_{22}}{\alpha_{211}}, \\ Q_1 = u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = k_2 I + m_2 u^1 \partial_{u^2}, \quad k_2 = \alpha_{211}, \quad m_2 = k_{22}\alpha_{221}. \end{array} \tag{1.192}$$

Зображення (1.191) операторів Q_1, Q_2 співпадає з пунктом 3 таблиці 1 при $æ_1 = k_1 = 0$, а зображення (1.192) співпадає з пунктом 5 таблиці 1.1 при $æ_1 = 1, m_1 = 0$.

Розглянемо зображення (1.189) оператора Q_2. Відшукаємо серед даних зображень оператори, нееквівалентні відносно перетворень (1.158), при цьому будемо вимагати, щоб перетворення (1.158) залишали інваріантним оператор Q_1. Оскільки

$$\begin{array}{l} Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2} = (k_{11} + k_{12} g)\partial_{w^1} + (k_{21} + k_{22} g)\partial_{w^2}, \\ g = \frac{k_{22}w^1 - k_{12}w^2 - k_{22}l_1 + k_{12}l_2}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}, \end{array} \tag{1.193}$$

то $k_{11} = k_{22} = 1$, $k_{12} = 0$. Таким чином лінійні невироджені перетвореня, відносно яких інваріантний оператор Q_1, у даному випадку мають вигляд:

$$\begin{array}{l} w^1 = u^1 + l_2, \\ w^2 = k_{21}u^1 + u^2 + l_2. \end{array} \tag{1.194}$$

Перетворення (1.194) зводять оператор Q_2 до вигляду

$$Q_2 = m_2\partial_{w^1} + (m_2 w^1 + k_2)\partial_{w^2}, \quad m_2 = \alpha_{221}, \quad k_2 = \beta_{22}. \tag{1.195}$$

Дане зображення оператора Q_2 разом з оператором Q_1, вигляду (1.189), наведені в пункті 3 таблиці 1.1.

IV. Розглянемо зображення

$$Q_1 = k_1 u^1 \partial_{u^1} + m_1 u^2 \partial_{u^2}. \tag{1.196}$$

Враховуючи комутаційні співвідношення (1.161) для операторів алгебри (1.162)

$$\begin{aligned} &[Q_1; Q_2] = [k_1 u^1 \partial_{u^1} + m_1 u^2 \partial_{u^2}; \quad (\alpha_{2ab} u^b + \beta_{2a}) \partial_{u^a}] = \\ &= (\alpha_{212}(m_1 - k_1) u^2 - k_1 \beta_{21}) \partial_{u^1} + \\ &+ (\alpha_{221}(k_1 - m_1) u^1 - m_1 \beta_{22}) \partial_{u^2} = 0, \end{aligned} \tag{1.197}$$

в залежності від значень сталих k_1, m_1 одержуємо три суттєво різні випадки задання операторів Q_1, Q_2:

$$\begin{aligned} &k_1 = m_1 \neq 0, \quad \beta_{21} = \beta_{22} = 0, \quad Q_1 = k_1 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}), \\ &Q_2 = (\alpha_{211} u^1 + \alpha_{212} u^2) \partial_{u^1} + (\alpha_{221} u^1 + \alpha_{222} u^2) \partial_{u^2}; \end{aligned} \tag{1.198}$$

$$\begin{aligned} &m_1 = 0, \quad k_1 \neq 0 \quad \alpha_{212} = \alpha_{221} = \beta_{21} = 0, \\ &Q_1 = k_1 u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = \alpha_{211} u^1 \partial_{u^1} + (\alpha_{222} u^2 + \beta_{22}) \partial_{u^2}; \end{aligned} \tag{1.199}$$

$$\begin{aligned} &k_1 \neq 0; m_1, \quad \alpha_{212} = \alpha_{221} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0, \\ &Q_1 = k_1 u^1 \partial_{u^1} + m_1 u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = \alpha_{211} u^1 \partial_{u^1} + \alpha_{222} u^2 \partial_{u^2}. \end{aligned} \tag{1.200}$$

Серед класів операторів (1.198)–(1.200) відшукаємо оператори нееквівалентні відносно перетворень (1.158), при цьому, як і в попередніх випадках, будемо вимагати, щоб перетворення (1.158) залишали інваріантним оператор Q_1.

У випадку зображення операторів (1.198) одержимо

$$Q_1 = k_1 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) = k_1 (w^1 - l_1) \partial_{w^1} + k_1 (w^2 - l_2) \partial_{w^2},$$

тобто лінійні невироджені перетворення (1.158), відносно яких інваріантний оператор Q_1 у даному виападку мають вигляд

$$w^1 = k_{11} u^1 + k_{12} u^2, \quad w^2 = k_{21} u^1 + k_{22} u^2.$$

Тоді

$$\partial_{u^1} = k_{11} \partial_{w^1} + k_{21} \partial_{w^2}, \quad \partial_{u^2} = k_{21} \partial_{w^1} + k_{22} \partial_{w^2}.$$

Оскільки перетворення (1.158) мають бути невироджені, то $k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21} \neq 0$. Оператор Q_2 під дією даних перетворень зводиться до вигляду

$$Q_2 = \frac{1}{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}\gamma_{2ab}w^b\partial_{w^a}, \tag{1.201}$$

де $a, b = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \gamma_{211} &= k_{11}k_{22}\alpha_{211} - k_{11}k_{21}\alpha_{212} + k_{12}k_{22}\alpha_{221} - k_{12}k_{21}\alpha_{222}, \\ \gamma_{212} &= -k_{11}k_{12}\alpha_{211} + k_{11}^2\alpha_{212} - k_{12}^2\alpha_{221} + k_{11}k_{12}\alpha_{222}, \\ \gamma_{221} &= k_{21}k_{22}\alpha_{211} - k_{21}^2\alpha_{212} + k_{22}^2\alpha_{221} - k_{21}k_{22}\alpha_{222} \\ \gamma_{222} &= -k_{12}k_{21}\alpha_{211} + k_{11}k_{21}\alpha_{212} - k_{12}k_{22}\alpha_{221} + k_{11}k_{22}\alpha_{222}. \end{aligned} \tag{1.202}$$

Підберемо сталі k_{ab} таким чином, щоб максимально спростити оператор (1.201). Після тотожніх перетворень одержимо

$$\begin{aligned} &\alpha_{212}t^2 + (\alpha_{222} - \alpha_{211})t - \alpha_{221} = \frac{\gamma_{212}}{k_{12}^2}, \\ &\alpha_{212}s^2 + (\alpha_{222} - \alpha_{211})s - \alpha_{221} = -\frac{\gamma_{221}}{k_{22}^2}, \end{aligned} \tag{1.203}$$

де $t = \frac{k_{11}}{k_{12}}$, $s = \frac{k_{21}}{k_{22}}$. В залежності від величини дискримінанта

$$D = (\alpha_{211} - \alpha_{222})^2 + 4\alpha_{212}\alpha_{221}$$

одержуємо три суттєво різні випадки зображення оператора (1.201):
а) якщо $D > 0$, то одержимо

$$\begin{aligned} &\gamma_{212} = \gamma_{221} = 0, \\ &Q_2 = k_2u^1\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}, \end{aligned} \tag{1.204}$$

де $k_2 = \frac{k_{12}k_{22}}{2(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})\alpha_{212}}((\alpha_{211} - \alpha_{222})^2 + (\alpha_{211} + \alpha_{222})\sqrt{D} + 4\alpha_{212}\alpha_{221})$,
$m_2 = -\frac{k_{12}k_{22}}{2(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})\alpha_{212}}((\alpha_{211} - \alpha_{222})^2 - (\alpha_{211} + \alpha_{222})\sqrt{D} + 4\alpha_{212}\alpha_{221})$;
б) $D = 0$, то вибравши $\frac{k_{11}}{k_{22}} = \frac{\alpha_{211}-\alpha_{222}}{2\alpha_{212}}$, одержимо $\gamma_{212} = 0$, $\gamma_{211} = \gamma_{222}$. Тоді

$$Q_2 = k_2I + m_2u^2\partial_{u^1}, \tag{1.205}$$

де $k_2 = \frac{\alpha_{211}+\alpha_{222}}{2}$, $m_2 = \frac{\gamma_{222}}{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}$;
в) $D < 0$, то

$$\alpha_{212}\alpha_{221} < -\frac{(\alpha_{211} - \alpha_{222})^2}{4},$$

тобто $\alpha_{212}\alpha_{221} < 0$. Тоді, вибравши $k_{11} = \alpha_{221}$, $k_{21} = \alpha_{221}$, $k_{12} = -\sqrt{-\alpha_{212}\alpha_{221}}$, $k_{22} = \sqrt{-\alpha_{212}\alpha_{221}}$, одержимо $\gamma_{211} = \gamma_{222}$, $\gamma_{221} = -\gamma_{212}$. Оператор Q_2 у цьому випадку має вигляд

$$Q_2 = k_2 I + m_2 J, \tag{1.206}$$

де $k_2 = \frac{\alpha_{211}+\alpha_{222}}{2} + \sqrt{-\alpha_{212}\alpha_{221}}$, $m_2 = \frac{\alpha_{211}-\alpha_{222}}{2} + \sqrt{-\alpha_{212}\alpha_{221}}$.

Оператор (1.204) разом з оператором (1.198) є частинним випадком пункту 4 таблиці 1.1 при $m_1 = k_1$; зображення (1.205) оператора Q_2 разом з оператором (1.198) відповідає пункту 5 таблиці 1.1 при $æ_1 = 0$ і (1.206) разом з (1.198) співпадає з пунктом 6 таблиці 1.1 при $m_1 = 0$.

Розглянемо зображення операторів (1.199). Лінійні невироджені перетворення (1.158), відносно яких інваріантний оператор Q_1, у даному випадку мають вигляд

$$w^1 = k_{11}u^1, \quad w^2 = k_{22}u^2 + l_2, \tag{1.207}$$

тоді $\partial_{u^1} = k_{11}\partial_{w^1}$, $\partial_{u^2} = k_{22}\partial_{w^2}$, причому $k_{11}k_{22} \neq 0$. Перетворення (1.207) зводять оператор Q_2 до вигляду

$$Q_2 = k_{11}\alpha_{211}w^1\partial_{w^1} + k_{22}(k_{22}\alpha_{222}u^2 + \alpha_{222}l_2 + \beta_{22})\partial_{w^2}.$$

Якщо $\alpha_{222} = 0$, то найпростіший вигляд оператора Q_2

$$Q_2 = k_2\partial_{u^2} + m_2u^1\partial_{u^1}, \quad k_2 = k_{22}\beta_{22}, \quad m_2 = k_{11}\alpha_{211}; \tag{1.208}$$

якщо $\alpha_{222} \neq 0$, то вибравши $l_2 = -\frac{\beta_{22}}{\alpha_{222}}$ одержимо

$$Q_2 = k_2u^2\partial_{u^2} + m_2u^1\partial_{u^1}, \quad k_2 = k_{22}^2\alpha_{222}, \quad m_2 = k_{11}\alpha_{211}. \tag{1.209}$$

Задання оператора (1.208) разом з оператором Q_1, що має зображення (1.199), наведені в пункті 2 таблиці 1.1 при $æ_1 = 0$, а зображення (1.209) разом з оператором Q_1, що має зображення (1.199), наведені в пункті 4 таблиці 1.1 при $m_1 = 0$.

Задання (1.200) операторів Q_1, Q_2 наведені в пункті 4 таблиці 1.1 де $k_2 = \alpha_{211}$, $m_2 = \alpha_{222}$.

V. Розглянемо зображення

$$Q_1 = m_1 I + æ_1 u^2 \partial_{u^1}. \tag{1.210}$$

Враховуючи комутаційне співвідношення (1.161) для операторів алгебри (1.162) в даному випадку одержимо три різні набори зображень операторів Q_1, Q_2:

$$Q_1 = m_1 I, \quad Q_2 = \alpha_{2ab} u^b \partial_{u^a}; \tag{1.211}$$

$$Q_1 = u^2 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = \alpha_{211} I + (\alpha_{212} u^2 + \beta_{21}) \partial_{u^1}; \tag{1.212}$$

$$Q_1 = m_1 I + u^2 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = \alpha_{211} I + \alpha_{212} u^2 \partial_{u^1}. \tag{1.213}$$

Зображення (1.211), (1.212) операторів Q_1, Q_2 розглянуті відповідно в IV та III пунктах даної теореми. Оператор Q_2 разом з оператором Q_1, що мають зображення (1.213), наведені в пункті 5 таблиці 1.1 де $k_2 = \alpha_{211}$, $m_2 = \alpha_{212}$.

VI. Розглянемо зображення

$$Q_1 = k_1 I + m_1 J. \tag{1.214}$$

Використавши формули (1.161), (1.166) для операторів алгебри (1.162) та перетворення еквівалентності (1.158) одержимо найпростіший вигляд оператора Q_2:

$$Q_2 = k_2 I + m_2 J, \tag{1.215}$$

де $k_2 = \alpha_{211}$, $m_2 = \alpha_{212}$. Дане задання оператора Q_2 разом з оператором Q_1, що має зображення (1.214), наведені в пункті 6 таблиці 1.1.

Теорема 1.12 доведена.

Отже, існує 6 нееквівалентних відносно перетворень (1.158) зображень розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$. Результати даної класифікації використаємо для класифікації нееквівалентних відносно перетворень (1.158) зображень конформної алгебри $AC(1,1)$. Результатом цих досліджень є наступне твердження.

Теорема 1.13. *З точністю до перетворень еквівалентності (1.158) існують 16 нееквівалентних зображень конформної алгебри $AC(1,1)$ (1.165), які задаються операторами Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, наведеними в таблиці 1.2.*

Таблиця 1.2

№	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
1	∂u^1	$m_2u^2\partial_{u^1}+\text{æ}_2\partial_{u^2}$	0	0
2	$\text{æ}_1\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^2}$	$k_2\partial_{u^1}-u^2\partial_{u^2}$	$\text{æ}_3\partial_{u^2}$	$-\text{æ}_3\partial_{u^2}$
3	$u^1\partial_{u^2}$	$k_2I+m_2u^1\partial_{u^2}$	0	0
4	$\text{æ}_1\partial_{u^1}+m_1u^2\partial_{u^2}$	$k_2\partial_{u^1}+m_2u^2\partial_{u^2}$	0	0
5	$\text{æ}_1\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}$	$k_2\partial_{u^2}+$ $+m_2(\text{æ}_1\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2})$	0	0
6	$I+k_1u^2\partial_{u^2}$	$k_2I+m_2u^2\partial_{u^2}$	0	0
7	I	$-I$	$\text{æ}_3\partial_{u^1}+m_3\partial_{u^2}$	$-(\text{æ}_3\partial_{u^1}+$ $+m_3\partial_{u^2})$
8	$k_1I+u^1\partial_{u^1}$	$k_2I-u^2\partial_{u^2}$	$k_3u^1\partial_{u^2}$	$k_3u^1\partial_{u^2}$
9	$k_1I+u^1\partial_{u^1}$	$k_2I+u^2\partial_{u^2}$	$\text{æ}_3u^2\partial_{u^1}$	$-\text{æ}_3u^2\partial_{u^1}$
10	$u^1\partial_{u^1}+k_1u^2\partial_{u^2}$	$-u^1\partial_{u^1}+k_2u^2\partial_{u^2}$	$\text{æ}_3\partial_{u^1}$	$-\text{æ}_3\partial_{u^1}$
11	$I+u^2\partial_{u^2}$	$-(I+u^2\partial_{u^2})$	$\text{æ}_3\partial_{u^1}+\text{æ}_4u^1\partial_{u^2}$	$-(\text{æ}_3\partial_{u^1}+$ $+\text{æ}_4u^1\partial_{u^2})$
12	$I+u^2\partial_{u^2}$	$-u^1\partial_{u^1}$	$(\text{æ}_3u^2+r)\partial_{u^1}$	$(\text{æ}_3u^2-r)\partial_{u^1}$
13	$u^1\partial_{u^1}$	$u^1\partial_{u^1}+\text{æ}_2\partial_{u^2}$	$\text{æ}_3u^1\partial_{u^2}$	$\text{æ}_3u^1\partial_{u^2}$
14	$I+\text{æ}_1u^2\partial_{u^1}$	$-I+k_2u^2\partial_{u^1}$	$\text{æ}_3\partial_{u^1}$	$-\text{æ}_3\partial_{u^1}$
15	k_1I	$k_2I+\text{æ}_2u^2\partial_{u^1}$	0	0
16	k_1I+m_1J	k_2I+m_2J	0	0

Тут $æ_i \in \{0,1\}$, $i=\overline{1,4}$, $r=\begin{cases}0, æ_3=1\\ 1, æ_3=0\end{cases}$, k_j, m_j *— довільні сталі,* $j=\overline{1,3}$.

Доведення. Розглянемо зображення розширеної алгебри Пуанкаре (1.162), що відповідає пункту 1 таблиці 1.1.

Елементи цієї алгебри доповнимо операторами конформних перетворень, вимагаючи виконання умов комутування (1.164). Оскільки

$$[Q_1;Q_3]=[\partial_{u^1};(\alpha_{3bc}u^c+\beta_{3b})\partial_{u^b}]=\alpha_{3b1}\partial_{u^b},$$

то оператор Q_4 має вигляд

$$Q_4=\alpha_{3b1}\partial_{u^b};$$

вимагаючи виконання умов комутування між операторами Q_1, Q_4, одержимо

$$[Q_1;Q_4]=[\partial_{u^1};\alpha_{3b1}\partial_{u^b}]=Q_3=0,$$

Таким чином

$$Q_3=(\alpha_{3cb}u^b+\beta_{3c})\partial_{u^c}=0,$$

звідки $\alpha_{3cb}=\beta_{3c}=0$, тобто $Q_3=0, Q_4=0$. Отже, маємо перше нееквівалентне зображення алгебри (1.165):

$$Q_1=\partial_{u^1},\quad Q_2=m_2u^2\partial_{u^1}+æ_2\partial_{u^2},\quad Q_3=0,\quad Q_4=0,$$

яке наведене в першому пункті таблиці 1.2.

Аналогічно до першого пункту таблиці 1.2 отримується задання зображень операторів Q_3, Q_4 пунктів 3, 4, 5, 6, 15, 16 даної таблиці.

Розглянемо зображення операторів

$$Q_1=æ_1\partial_{u^1}+m_1u^2\partial_{u^2},\quad Q_2=k_2\partial_{u^1}+m_2u^2\partial_{u^2},\qquad (1.216)$$

що відповідає пункту 2 таблиці 1.1. Враховуючи комутаційні співвідношення (1.164) для операторів алгебри (1.165), одержимо

$$[Q_1,Q_3]=[æ_1\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^2},(\alpha_{3bc}u^c+\beta_{3b})\partial_{u^b}]=$$

$$= (m_1\alpha_{312}u^2 + æ_1\alpha_{311})\partial_{u^1} + (-m_1\alpha_{321}u^1 + æ_1\alpha_{321} - m_1\beta_{32})\partial_{u^2} = Q_4,$$

тобто $Q_4 = (m_1\alpha_{312}u^2 + æ_1\alpha_{311})\partial_{u^1} + (-m_1\alpha_{321}u^1 + æ_1\alpha_{311} - m_1\beta_{32})\partial_{u^2}$;

$$[Q_2, Q_3] = (m_2\alpha_{312}u^2 + k_2\alpha_{311})\partial_{u^1} + (-m_2\alpha_{321}u^1 + k_2\alpha_{321} - m_2\beta_{32})\partial_{u^2} = Q_3,$$

звідки маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\alpha_{311} = 0, \quad \alpha_{322} = 0, \quad (m_2 - 1)\alpha_{312} = 0, \quad (m_2 + 1)\alpha_{321} = 0, \\ &\beta_{31} = 0, \quad (m_2 + 1)\beta_{32} = k_2\alpha_{321}. \end{aligned} \tag{1.217}$$

Обєднавши результати комутаційних співвідношень

$$[Q_3, Q_4] = 0, \quad [Q_1, Q_4] = Q_3, \quad [Q_2, Q_4] = Q_4$$

та розв'язки системи (1.217), одержимо зображення операторів конформної алгебри (1.165)

$$Q_1 = æ_1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, \quad Q_2 = k_2\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}, \quad Q_3 = æ_3\partial_{u^2}, Q_4 = -æ_3\partial_{u^2},$$

яке співпадає із зображеннями наведеними в пункті 2 таблиці 1.2.

Аналогічно до другого пункту таблиці 1.2 отримується задання операторів Q_3, Q_4 пунктів 7–14 даної таблиці.

Теорема доведена.

Отже, як випливає з досліджень, існує 16 нееквівалентних зображень коформної алгебри (1.165). Тому при дослідженні симетрійних властивостей систем хвильових рівнянь ми можемо використовувати зображення, подані в таблиці 2 як канонічні за умови, що вихідні системи рівнянь допускають лінійні перетворення еквівалентності (1.158).

1.4. Системи квазілінійних хвильових рівнянь, інваріантні відносно розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри

Застосуємо класифікацію лінійних неоднорідних зображень алгебри Пуанкаре та її розширень у випадку $U \in \mathbb{R}^2$, одержану в попередньому підрозділі, для дослідження симетрійних властивостей системи квазілінійних хвильових рівнянь:

$$\Box U = (f(U)\partial)U, \tag{1.218}$$

де

$$U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad f(U) = \left(f^0, f^1\right), \quad f^\alpha = \begin{pmatrix} f^{11\alpha} & f^{12\alpha} \\ f^{21\alpha} & f^{22\alpha} \end{pmatrix},$$

$\alpha = \overline{0, 1}$, $\partial = (\partial_0, \partial_1)$.

Покажемо, що система (1.218) допускає лінійні перетворення еквівалентності (1.158). Підставивши $U = K^{-1}(W - L)$, знайдене з (1.158), в систему (1.218), одержимо

$$\Box K^{-1}W = f(K^{-1}(W - L))\partial K^{-1}W$$

або

$$\Box W = (\tilde{f}(W)\partial)W,$$

де $\tilde{f}(W) = Kf(K^{-1}(W - L))K^{-1}$. Отже, перетворення (1.158) є перетвореннями еквівалентності системи (1.218).

Розглянемо при яких функціях f система (1.218) інваріантна відносно алгебри Пуанкаре (1.159). Справедливе наступне твердження.

Теорема 1.14. *Система (1.218) інваріантна відносно алгебри Пуанкаре (1.159) з точністю до перетворень еквівалентності (1.158) тоді і тільки тоді, коли*

1.

$$f^\alpha = (u^1)^{-n} \begin{pmatrix} \psi^{11\alpha} & (u^1)^{1-m}\psi^{12\alpha} \\ (u^1)^{m-1}\psi^{21\alpha} & \psi^{22\alpha} \end{pmatrix}, \tag{1.219}$$

де

$$\psi^{ab0} = (u^1)^{2n}\varphi^{ab0} + \varphi^{ab1}, \quad \psi^{ab1} = (u^1)^{2n}\varphi^{ab0} - \varphi^{ab1}, \tag{1.220}$$

$\varphi^{ab\alpha} = \varphi^{ab\alpha}(\omega)$ *— довільні гладкі функції,* $\omega = \frac{(u^1)^m}{u^2}$, *причому* $Q = \frac{1}{n}(u^1\partial_{u^1} + mu^2\partial_{u^2})$, $n \neq 0$, $m \neq 0$ *— довільні сталі.*
2.

$$f^\alpha = \begin{pmatrix} \psi^{11\alpha} & (u^2)^{-1}\psi^{12\alpha} \\ u^2\psi^{21\alpha} & \psi^{22\alpha} \end{pmatrix}, \tag{1.221}$$

де

$$\psi^{ab0} = (u^2)^p\varphi^{ab0} + (u^2)^{-p}\varphi^{ab1}, \quad \psi^{ab1} = (u^2)^p\varphi^{ab0} - (u^2)^{-p}\varphi^{ab1}, \tag{1.222}$$

$\varphi^{ab\alpha} = \varphi^{ab\alpha}(\omega)$, $\omega = u^1 - æ_1 \ln u^2$, *причому* $Q = æ_1\partial_{u^1} + \frac{1}{p}u^2\partial_{u^2}$, $p \neq 0$ *— довільна стала.*
3.

$$f^\alpha = \begin{pmatrix} f^{11\alpha} & f^{12\alpha} \\ f^{21\alpha} & f^{22\alpha} \end{pmatrix}, \tag{1.223}$$

$$a) f^{ab0} = e^{u^1}\varphi^{ab0} + e^{-u^1}\varphi^{ab1}, \quad f^{ab1} = e^{u^1}\varphi^{ab0} - e^{-u^1}\varphi^{ab1}, \tag{1.224}$$

де $\varphi^{ab\alpha} = \varphi^{ab\alpha}(\omega)$ *— довільні гладкі функції,* $\omega = u^2$, *причому* $Q = \partial_{u^1}$;

$$\begin{aligned}
&b)\\
&f^{110} = \alpha_{110}(\vec{u}^2)^p + \alpha_{111}(\vec{u}^2)^{-p} + q,\\
&f^{111} = \alpha_{110}(\vec{u}^2)^p - \alpha_{111}(\vec{u}^2)^{-p} + g,\\
&f^{120} = \alpha_{120}(\vec{u}^2)^p + \alpha_{121}(\vec{u}^2)^{-p} + \varphi,\\
&f^{121} = \alpha_{120}(\vec{u}^2)^p - \alpha_{121}(\vec{u}^2)^{-p} + \psi,\\
&f^{210} = \alpha_{210}(\vec{u}^2)^p + \alpha_{211}(\vec{u}^2)^{-p} + \varphi,\\
&f^{211} = \alpha_{210}(\vec{u}^2)^p - \alpha_{211}(\vec{u}^2)^{-p} + \psi,\\
&f^{220} = \alpha_{220}(\vec{u}^2)^p + \alpha_{221}(\vec{u}^2)^{-p} - q,\\
&f^{221} = \alpha_{220}(\vec{u}^2)^p - \alpha_{221}(\vec{u}^2)^{-p} - g,
\end{aligned} \tag{1.225}$$

де $q = \frac{u^1}{\vec{u}^2}((\vec{u}^2)^p(\vec{\alpha}^{\perp}\cdot\vec{u}) + (\vec{u}^2)^{-p}(\vec{\beta}^{\perp}\cdot\vec{u}))$, $g = \frac{u^1}{\vec{u}^2}((\vec{u}^2)^p(\vec{\alpha}^{\perp}\cdot\vec{u}) - (\vec{u}^2)^{-p}(\vec{\beta}^{\perp}\cdot\vec{u}))$, $\varphi = -\frac{u^1}{\vec{u}^2}((\vec{u}^2)^p(\vec{\alpha}\cdot\vec{u}) + (\vec{u}^2)^{-p}(\vec{\beta}\cdot\vec{u}))$, $\psi = -\frac{u^1}{\vec{u}^2}((\vec{u}^2)^p(\vec{\alpha}\cdot\vec{u}) - (\vec{u}^2)^{-p}(\vec{\beta}\cdot\vec{u}))$, $\vec{u}^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{\alpha}^{\perp} = (-\alpha_2, \alpha_1)$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{u} = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, $\vec{\beta}^{\perp} = (-\beta_2, \beta_1)$, *причому* $Q = \frac{1}{2p}I + J$, α_a, β_a, $p \neq 0$ — *довільні сталі.*

4.

$$a) f^{\alpha} = \begin{pmatrix} -u^1\psi^{12\alpha} + \psi^{11\alpha} & \psi^{12\alpha} \\ -(u^1)^2\psi^{12\alpha} - u^1(\psi^{22\alpha} - \psi^{11\alpha}) + \psi^{21\alpha} & u^1\psi^{12\alpha} + \psi^{22\alpha} \end{pmatrix}, \quad (1.226)$$

де

$$\psi^{ab0} = e^{u^1}\varphi^{ab0} + e^{-u^1}\varphi^{ab1}, \quad \psi^{ab1} = e^{u^1}\varphi^{ab0} - e^{-u^1}\varphi^{ab1}, \quad (1.227)$$

$\varphi^{ab\alpha} = \varphi^{ab\alpha}(\omega)$ — *довільні гладкі функції,* $\omega = \frac{(u^1)^2}{2} - u^2$, *причому* $Q = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$;

$$b) f^{\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{u^2}{u^1}\psi^{12\alpha} + \psi^{11\alpha} & \psi^{12\alpha} \\ -(\frac{u^2}{u^1})^2\psi^{12\alpha} - \frac{u^2}{u^1}(\psi^{22\alpha} - \psi^{12\alpha}) + \psi^{21\alpha} & -\frac{u^2}{u^1}\psi^{12\alpha} + \psi^{22\alpha} \end{pmatrix}, \quad (1.228)$$

де

$$\psi^{ab0} = e^{\frac{u^2}{u^1}}\varphi^{ab0} + e^{-\frac{u^2}{u^1}}\varphi^{ab1}, \quad \psi^{ab1} = e^{\frac{u^2}{u^1}}\varphi^{ab0} - e^{-\frac{u^2}{u^1}}\varphi^{ab1}, \quad (1.229)$$

$\varphi^{ab\alpha} = \varphi^{ab\alpha}(\omega)$ — *довільні гладкі функції,* $\omega = u^1$, *причому* $Q = u^1\partial_{u^2}$;

$$c) f^{\alpha} = \begin{pmatrix} w\psi^{21\alpha} + \psi^{11\alpha} & -w^2\psi^{21\alpha} - w(\psi^{11\alpha} - \psi^{22\alpha}) \\ \psi^{21\alpha} & -w\psi^{21\alpha} + \psi^{22\alpha} \end{pmatrix}, \quad (1.230)$$

де

$$\psi^{ab0} = u^2\varphi^{ab0} + \frac{1}{u^2}\varphi^{ab1}, \quad \psi^{ab1} = u^2\varphi^{ab0} - \frac{1}{u^2}\varphi^{ab1}, \quad (1.231)$$

$w = m_1 \ln u^2$, $\varphi^{ab\alpha} = \varphi^{ab\alpha}(\omega)$ — *довільні гладкі функції,* m_1 — *довільна стала,* $\omega = \frac{u^1}{u^2} - m_1 \ln u^2$, *причому* $Q = I + m_1 u^2 \partial_{u^1}$.

Доведення. Для доведення теореми застосуємо алгоритм Лі. Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (1.218) має вигляд:

$$X = \xi^{\mu}(x,u)\partial_{\mu} + \eta^{a}(x,u)\partial_{u^a}. \qquad (1.232)$$

З умови інваріантності системи (1.218) відносно оператора (1.232)

$$(g_{\gamma\nu}{}^{\gamma\nu}\eta^{a} - \eta^{s} f^{ab\alpha}_{u^s} u^{b}_{\alpha} - {}^{\alpha}\eta^{b} f^{ab\alpha})|_{u^{a}_{00}=f^{ab\alpha}u^{b}_{\alpha}-g^{\alpha\beta}u^{a}_{\alpha\beta}} = 0, \qquad (1.233)$$

де ${}^{\gamma\nu}\eta^{\mu}$, ${}^{\beta}\eta^{\alpha}$, η^{s} — координати оператора $\tilde{X}$, продовженого для X, одержуємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат інфінітезимального оператора (1.232) та функцій $f^{ab\alpha}$:

$$\xi^{0}_{1} = \xi^{1}_{0}, \quad \xi^{0}_{0} = \xi^{1}_{1}, \quad \eta^{a}_{u^b u^c} = 0, \qquad (1.234)$$

$$LF = CF + 2M, \qquad (1.235)$$

$$\eta^{b}_{\alpha} f^{ab\alpha} = \Box\eta^{a}, \qquad (1.236)$$

де $L = \eta^{a}\partial_{u^a}$, $F = (f^{110}, f^{111}, f^{120}, f^{121}, f^{210}, f^{211}, f^{220}, f^{221})^{T}$,

$$C = \begin{pmatrix}
-\xi^{0}_{0} & \xi^{0}_{1} & -\eta^{2}_{u^1} & 0 & \eta^{1}_{u^2} & 0 & 0 & 0 \\
\xi^{0}_{1} & -\xi^{0}_{0} & 0 & -\eta^{2}_{u^1} & 0 & \eta^{1}_{u^2} & 0 & 0 \\
-\eta^{1}_{u^2} & 0 & a & \xi^{0}_{1} & 0 & 0 & \eta^{1}_{u^2} & 0 \\
0 & -\eta^{1}_{u^2} & \xi^{1}_{0} & a & 0 & 0 & 0 & \eta^{1}_{u^2} \\
\eta^{2}_{u^1} & 0 & 0 & 0 & b & \xi^{1}_{0} & -\eta^{2}_{u^1} & 0 \\
0 & \eta^{2}_{u^1} & 0 & 0 & \xi^{1}_{0} & b & 0 & -\eta^{2}_{u^1} \\
0 & 0 & \eta^{2}_{u^1} & 0 & -\eta^{1}_{u^2} & 0 & -\xi^{0}_{0} & \xi^{0}_{1} \\
0 & 0 & 0 & \eta^{2}_{u^1} & 0 & -\eta^{1}_{u^2} & \xi^{1}_{0} & -\xi^{0}_{0}
\end{pmatrix},$$

$$M = (\eta^{1}_{0u^1}, -\eta^{1}_{1u^1}, \eta^{1}_{0u^2}, -\eta^{1}_{1u^2}, \eta^{2}_{0u^1}, -\eta^{2}_{1u^1}, \eta^{2}_{0u^2}, -\eta^{2}_{1u^2})^{T},$$

$$a = -\xi^{0}_{0} + \eta^{1}_{u^1} - \eta^{2}_{u^2}, \quad b = -\xi^{0}_{0} - \eta^{1}_{u^1} + \eta^{2}_{u^2}.$$

Координати ξ^{μ}, η^{a} інфінітезимального оператора алгебри $AP(1,1)$ мають вигляд:

$$\xi^{0} = c_{01}x_{1} + d_{0}, \quad \xi^{1} = c_{01}x_{0} + d_{1}, \quad \eta^{a} = \alpha_{ab}u^{b} + \beta_{a}, \qquad (1.237)$$

де $c_{01} = -c_{10}$, d_μ, α_{ab}, β_a — довільні сталі. Підставивши функції (1.237) в систему визначальних рівнянь (1.235), (1.236), для кожного з зображень Q_i (1.167), $i = \overline{1,6}$, отримаємо системи рівнянь для визначення функцій $f^{ab\alpha}$

$$L_1 F = C_1 F, \tag{1.238}$$

де $L_1 = k_1 u^1 \partial_{u^1} + m_1 u^2 \partial_{u^2}$,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 - m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k_1 - m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 + m_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -k_1 + m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_2 F = C_2 F, \tag{1.239}$$

де $L_2 = æ_1 \partial_{u^1} + m_1 u^2 \partial_{u^2}$,

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_3 F = C_3 F, \tag{1.240}$$

де $L_3 = \partial_{u^1}$,

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_4F = C_4F, \tag{1.241}$$

де $L_4 = k_1 I + m_1 J$,

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -m_1 & 0 & -m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -m_1 & 0 & -m_1 & 0 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -m_1 & 0 \\ 0 & m_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_1 \\ m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m_1 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -m_1 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & m_1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_5F = C_5F, \tag{1.242}$$

де $L_5 = æ_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$,

$$C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_6F = C_6F, \tag{1.243}$$

де $L_6 = m_1 I + æ_1 u^2 \partial_{u^1}$,

$$C_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & æ_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & æ_1 & 0 & 0 \\ -æ_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & æ_1 & 0 \\ 0 & -æ_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & æ_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -æ_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -æ_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо детально розв'язок системи (1.239). За допомогою заміни

$$F = TZ, \tag{1.244}$$

де $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^5 \\ z^6 \\ z^7 \\ z^8 \end{pmatrix}$,

система (1.239) зводиться до вигляду

$$L_2 Z = \tilde{C}_2 Z, \tag{1.245}$$

де $\tilde{C}_2$ — жорданова матриця, що має вигляд

$$\tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, система (1.245) є системою незачеплених диференціальних рівнянь в частинних похідних. Знаходження загального розв'язку кожного з рівнянь системи (1.245) зводиться до знаходження перших інтегралів системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{du^1}{æ_1} = \frac{du^2}{m_1 u^2} = \frac{dy}{ky}, \tag{1.246}$$

де y — одна з функцій z^i, $i = \overline{1,8}$, а k набуває значень 1, -1, $1 - m_1$, $-1 - m_1$, $1 + m_1$, $-1 + m_1$, 1, -1 відповідно.

Перші інтеграли системи (1.246) мають вигляд

$$J_1 = u^1 - k_1 \ln u^2, \quad J_2 = y(u^2)^{-s}, \tag{1.247}$$

де $k_1 = \frac{æ_1}{m_1}$, $s = \frac{k}{m_1}$. Тоді загальний розв'язок кожного з рівнянь (1.245) задається формулою

$$y = (u^2)^s \varphi(\omega), \tag{1.248}$$

де $\omega = J_1$.

Врахувавши заміну (1.244), одержимо вигляд функцій $f^{ab\alpha}$, які задаються формулами (1.221), (1.222). Пункт 2 теореми 1.14 доведено. Решта випадків доводиться аналогічно.

Теорему 1.14 доведено.

Теорема 1.15. *Система (1.218) інваріантна відносно розширеної алгебри Пуанкаре (1.159) з точністю до перетворень еквівалентності (1.158) тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{aligned}
f^{110} &= \lambda_{110} e^{u^1} (u^2)^k + \lambda_{111} e^{-u^1} (u^2)^m, \\
f^{111} &= \lambda_{110} e^{u^1} (u^2)^k - \lambda_{111} e^{-u^1} (u^2)^m, \\
f^{120} &= \lambda_{120} e^{u^1} (u^2)^{k-1} + \lambda_{121} e^{-u^1} (u^2)^{m-1}, \\
f^{121} &= \lambda_{120} e^{u^1} (u^2)^{k-1} - \lambda_{121} e^{-u^1} (u^2)^{m-1}, \\
f^{210} &= \lambda_{210} e^{u^1} (u^2)^{k+1} + \lambda_{211} e^{-u^1} (u^2)^{m+1}, \\
f^{211} &= \lambda_{210} e^{u^1} (u^2)^{k+1} - \lambda_{211} e^{-u^1} (u^2)^{m+1}, \\
f^{220} &= \lambda_{220} e^{u^1} (u^2)^k + \lambda_{221} e^{-u^1} (u^2)^m, \\
f^{221} &= \lambda_{220} e^{u^1} (u^2)^k - \lambda_{221} e^{-u^1} (u^2)^m,
\end{aligned} \tag{1.249}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = \frac{k-m}{k+m}(Q_1 - \frac{2}{k-m}u^2\partial_{u^2})$, $k^2 - m^2 \neq 0$;

$$\begin{aligned} f^{ab0} &= e^{u^1}\Phi^{ab0}, \\ f^{ab1} &= e^{u^1}\Phi^{ab0}, \end{aligned} \tag{1.250}$$

де $\omega = u^2$, *причому* $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -Q_1$;

$$\begin{aligned} f^{110} &= e^{u^2+\omega}(-\lambda_{210}u^2 + \lambda_{110}) + e^{u^2-\omega}(-\lambda_{211}u^2 + \lambda_{111}), \\ f^{111} &= e^{u^2+\omega}(-\lambda_{210}u^2 + \lambda_{110}) - e^{u^2-\omega}(-\lambda_{211}u^2 + \lambda_{111}), \\ f^{120} &= -k(e^{u^2+\omega}(-\lambda_{210}(u^2)^2 + (\lambda_{110} - \lambda_{220})u^2 + \lambda_{120}) + \\ &+ e^{u^2-\omega}(-\lambda_{211}(u^2)^2 + (\lambda_{111} - \lambda_{221})u^2 + \lambda_{121})), \\ f^{121} &= -k(e^{u^2+\omega}(-\lambda_{210}(u^2)^2 + (\lambda_{110} - \lambda_{220})u^2 + \lambda_{120}) - \\ &- e^{u^2-\omega}(-\lambda_{211}(u^2)^2 + (\lambda_{111} - \lambda_{221})u^2 + \lambda_{121})), \\ f^{210} &= -\tfrac{1}{k}(e^{u^2+\omega}\lambda_{210} + e^{u^2-\omega}\lambda_{211}), \\ f^{211} &= -\tfrac{1}{k}(e^{u^2+\omega}\lambda_{210} - e^{u^2-\omega}\lambda_{211}), \\ f^{220} &= e^{u^2+\omega}(\lambda_{210}u^2 + \lambda_{220}) + e^{u^2-\omega}(\lambda_{211}u^2 + \lambda_{221}), \\ f^{221} &= e^{u^2+\omega}(\lambda_{210}u^2 + \lambda_{220}) - e^{u^2-\omega}(\lambda_{211}u^2 + \lambda_{221}), \end{aligned} \tag{1.251}$$

де $\omega = u^1 - \frac{k(u^2)^2}{2}$, *причому* $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -ku^2\partial_{u^1} - \partial_{u^2}$, $k \neq 0$;

$$\begin{aligned} f^{ab0} &= \lambda_{ab0}e^{u^1-u^2} + \lambda_{ab1}e^{-u^1-u^2}, \\ f^{ab1} &= \lambda_{ab0}e^{u^1-u^2} - \lambda_{ab1}e^{-u^1-u^2}, \end{aligned} \tag{1.252}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = \partial_{u^2}$;

$$\begin{aligned} f^{110} &= (u^2)^m\Phi^{110}, & f^{111} &= (u^2)^m\Phi^{110}, \\ f^{120} &= (u^2)^{m-1}\Phi^{120}, & f^{121} &= (u^2)^{m-1}\Phi^{120}, \\ f^{210} &= (u^2)^{m+1}\Phi^{210}, & f^{211} &= (u^2)^{m+1}\Phi^{210}, \\ f^{220} &= (u^2)^m\Phi^{220}, & f^{221} &= (u^2)^m\Phi^{220}, \end{aligned} \tag{1.253}$$

де $\omega = u^1 - æ_1 ln u^2$, *причому* $Q_1 = æ_1\partial_{u^1} + \frac{1}{m}u^2\partial_{u^2}$, $Q_2 = -Q_1$, $m \neq 0$;

$$\begin{aligned}
f^{110} &= \lambda_{110}(u^2)^p(u^1)^k + \lambda_{111}(u^2)^{-p}(u^1)^m,\\
f^{111} &= \lambda_{110}(u^2)^p(u^1)^k - \lambda_{111}(u^2)^{-p}(u^1)^m,\\
f^{120} &= \lambda_{120}(u^2)^{p-1}(u^1)^{k+1} + \lambda_{121}(u^2)^{-p-1}(u^1)^{m+1},\\
f^{121} &= \lambda_{120}(u^2)^{p-1}(u^1)^{k+1} - \lambda_{121}(u^2)^{-p-1}(u^1)^{m+1},\\
f^{210} &= \lambda_{210}(u^2)^{p+1}(u^1)^{k-1} + \lambda_{211}(u^2)^{-p+1}(u^1)^{m-1},\\
f^{211} &= \lambda_{210}(u^2)^{p+1}(u^1)^{k-1} - \lambda_{211}(u^2)^{-p+1}(u^1)^{m-1},\\
f^{220} &= \lambda_{220}(u^2)^p(u^1)^k + \lambda_{221}(u^2)^{-p}(u^1)^m,\\
f^{221} &= \lambda_{220}(u^2)^p(u^1)^k - \lambda_{221}(u^2)^{-p}(u^1)^m,
\end{aligned}\tag{1.254}$$

причому $Q_1 = \frac{1}{p}u^2\partial_{u^2}$, $Q_2 = \frac{k-m}{k+m}(Q_1 - \frac{2}{k-m}u^1\partial_{u^1})$, $p(k^2 - m^2) \neq 0$;

$$\begin{aligned}
f^{110} &= \lambda_{110}(u^2)^{m+1}e^{-mu^1} + \lambda_{111}(u^2)^{n-1}e^{-nu^1},\\
f^{111} &= \lambda_{110}(u^2)^{m+1}e^{-mu^1} - \lambda_{111}(u^2)^{n-1}e^{-nu^1},\\
f^{120} &= \lambda_{120}(u^2)^{m}e^{-mu^1} + \lambda_{121}(u^2)^{n-2}e^{-nu^1},\\
f^{121} &= \lambda_{120}(u^2)^{m}e^{-mu^1} - \lambda_{121}(u^2)^{n-2}e^{-nu^1},\\
f^{210} &= \lambda_{210}(u^2)^{m+2}e^{-mu^1} + \lambda_{211}(u^2)^{n}e^{-nu^1},\\
f^{211} &= \lambda_{210}(u^2)^{m+2}e^{-mu^1} - \lambda_{211}(u^2)^{n}e^{-nu^1},\\
f^{220} &= \lambda_{220}(u^2)^{m+1}e^{-mu^1} + \lambda_{221}(u^2)^{n-1}e^{-nu^1},\\
f^{221} &= \lambda_{220}(u^2)^{m+1}e^{-mu^1} - \lambda_{221}(u^2)^{n-1}e^{-nu^1},
\end{aligned}\tag{1.255}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$, $Q_2 = \frac{m+n}{m-n}(Q_1 + \frac{2}{m+n}\partial_{u^1})$, $m^2 - n^2 \neq 0$;

$$\begin{aligned}
f^{110} &= f^{111} = e^{u^1}(\Phi^{110} - u^1\Phi^{120}),\\
f^{120} &= f^{121} = e^{u^1}\Phi^{120},\\
f^{210} &= f^{211} = e^{u^1}(\Phi^{210} - u^1(\Phi^{220} - \Phi^{110}) - (u^1)^2\Phi^{120}),\\
f^{220} &= f^{221} = e^{u^1}(\Phi^{220} + u^1\Phi^{120}),
\end{aligned}\tag{1.256}$$

де $\omega=\frac{(u^1)^2}{2}-u^2$, *причому* $Q_1=\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}$, $Q_2=-Q_1$;

$$\begin{aligned}
&f^{110}=e^{m\omega+u^1}(\lambda_{110}-\lambda_{120}u^1)+e^{k\omega-u^1}(\lambda_{111}-\lambda_{121}u^1),\\
&f^{111}=e^{m\omega+u^1}(\lambda_{110}-\lambda_{120}u^1)-e^{k\omega-u^1}(\lambda_{111}-\lambda_{121}u^1),\\
&f^{120}=\lambda_{120}e^{m\omega+u^1}+\lambda_{121}e^{k\omega-u^1},\\
&f^{121}=\lambda_{120}e^{m\omega+u^1}-\lambda_{121}e^{k\omega-u^1},\\
&f^{210}=e^{m\omega+u^1}(\lambda_{210}-(\lambda_{220}-\lambda_{110})u^1-\lambda_{120}(u^1)^2)+\\
&+e^{k\omega-u^1}(\lambda_{211}-(\lambda_{221}-\lambda_{111})u^1-\lambda_{121}(u^1)^2),\\
&f^{211}=e^{m\omega+u^1}(\lambda_{210}-(\lambda_{220}-\lambda_{110})u^1-\lambda_{120}(u^1)^2)-\\
&-e^{k\omega-u^1}(\lambda_{211}-(\lambda_{221}-\lambda_{111})u^1-\lambda_{121}(u^1)^2),\\
&f^{220}=e^{m\omega+u^1}(\lambda_{220}+\lambda_{120}u^1)+e^{k\omega-u^1}(\lambda_{221}+\lambda_{121}u^1),\\
&f^{221}=e^{m\omega+u^1}(\lambda_{220}+\lambda_{120}u^1)-e^{k\omega-u^1}(\lambda_{221}+\lambda_{121}u^1),
\end{aligned}\tag{1.257}$$

де $\omega=\frac{(u^1)^2}{2}-u^2$, *причому* $Q_1=\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}$, $Q_2=\frac{m-k}{m+k}(Q_1+\frac{2}{m-k}\partial_{u^2})$, $m^2-k^2\neq 0$;

$$\begin{aligned}
&f^{110}=e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^k(\lambda_{110}-\lambda_{120}\tfrac{u^2}{u^1})+e^{-\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^m(\lambda_{111}-\lambda_{121}\tfrac{u^2}{u^1})\\
&f^{111}=e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^k(\lambda_{110}-\lambda_{120}\tfrac{u^2}{u^1})-e^{-\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^m(\lambda_{111}-\lambda_{121}\tfrac{u^2}{u^1})\\
&f^{120}=\lambda_{120}e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^k+\lambda_{121}e^{-\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^m,\\
&f^{121}=\lambda_{120}e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^k-\lambda_{121}e^{-\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^m,\\
&f^{210}=e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^k(\lambda_{210}-(\lambda_{220}-\lambda_{110})\tfrac{u^2}{u^1}-\lambda_{120}(\tfrac{u^2}{u^1})^2)+\\
&+e^{-\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^m(\lambda_{211}-(\lambda_{221}-\lambda_{121})\tfrac{u^2}{u^1}-\lambda_{121}(\tfrac{u^2}{u^1})^2),\\
&f^{211}=e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^k(\lambda_{210}-(\lambda_{220}-\lambda_{110})\tfrac{u^2}{u^1}-\lambda_{120}(\tfrac{u^2}{u^1})^2)-\\
&+e^{-\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^m(\lambda_{211}-(\lambda_{221}-\lambda_{121})\tfrac{u^2}{u^1}-\lambda_{121}(\tfrac{u^2}{u^1})^2),\\
&f^{220}=e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^k(\lambda_{220}+\lambda_{120}\tfrac{u^2}{u^1})+e^{-\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^m(\lambda_{221}+\lambda_{121}\tfrac{u^2}{u^1}),\\
&f^{221}=e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^k(\lambda_{220}+\lambda_{120}\tfrac{u^2}{u^1})-e^{-\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^m(\lambda_{221}+\lambda_{121}\tfrac{u^2}{u^1}),
\end{aligned}\tag{1.258}$$

причому $Q_1=u^1\partial_{u^2}$, $Q_2=\frac{k-m}{k+m}(Q_1-\frac{2}{k-m}I)$, $k^2-m^2\neq 0$;

$$\begin{aligned}
&f^{110}=f^{111}=e^{\frac{u^2}{u^1}}(\Phi^{110}-\tfrac{u^2}{u^1}\Phi^{120}),\\
&f^{120}=f^{121}=e^{\frac{u^2}{u^1}}\Phi^{120},\\
&f^{210}=f^{211}=e^{\frac{u^2}{u^1}}(\Phi^{210}-\tfrac{u^2}{u^1}(\Phi^{220}-\Phi^{110})-(\tfrac{u^2}{u^1})^2\Phi^{120}),\\
&f^{220}=f^{221}=e^{\frac{u^2}{u^1}}(\Phi^{220}+\tfrac{u^2}{u^1}\Phi^{120}),
\end{aligned}\tag{1.259}$$

де $\omega = u^1$, *причому* $Q_1 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = -Q_1$*;*

$$\begin{aligned} &f^{110} = f^{111} = u^2\Phi^{110}, \\ &f^{120} = f^{121} = u^2\Phi^{120} - ku^2\ln u^2(\Phi^{110} - \Phi^{220}), \\ &f^{210} = f^{211} = 0, \\ &f^{220} = f^{221} = u^2\Phi^{220}, \end{aligned} \tag{1.260}$$

де $\omega = \frac{u^1}{u^2} - k\ln u^2$, *причому* $Q_1 = I + ku^2\partial_{u^1}$, $Q_2 = -Q_1$, $k \neq 0$*;*

$$\begin{aligned} &f^{110} = u^2\Phi^{110} + \tfrac{1}{u^2}\Phi^{111} + k\ln u^2(u^2\Phi^{210} + \tfrac{1}{u^2}\Phi^{211}), \\ &f^{111} = u^2\Phi^{110} - \tfrac{1}{u^2}\Phi^{111} + k\ln u^2(u^2\Phi^{210} - \tfrac{1}{u^2}\Phi^{211}), \\ &f^{120} = u^2\Phi^{120} + \tfrac{1}{u^2}\Phi^{121} - k\ln u^2(u^2(\Phi^{110} - \Phi^{220}) + \tfrac{1}{u^2}(\Phi^{111} - \Phi^{211})) - \\ &-(k\ln u^2)^2(u^2\Phi^{210} + \tfrac{1}{u^2}\Phi^{211}), \\ &f^{121} = u^2\Phi^{120} - \tfrac{1}{u^2}\Phi^{121} - k\ln u^2(u^2(\Phi^{110} - \Phi^{220}) - \tfrac{1}{u^2}(\Phi^{111} - \Phi^{211})) - \\ &-(k\ln u^2)^2(u^2\Phi^{210} - \tfrac{1}{u^2}\Phi^{211}), \\ &f^{210} = u^2\Phi^{210} + \tfrac{1}{u^2}\Phi^{211}, \\ &f^{211} = u^2\Phi^{210} - \tfrac{1}{u^2}\Phi^{211}, \\ &f^{220} = u^2\Phi^{220} + \tfrac{1}{u^2}\Phi^{221} - k\ln u^2(u^2\Phi^{210} + \tfrac{1}{u^2}\Phi^{211}), \\ &f^{221} = u^2\Phi^{220} - \tfrac{1}{u^2}\Phi^{221} - k\ln u^2(u^2\Phi^{210} - \tfrac{1}{u^2}\Phi^{211}), \end{aligned} \tag{1.261}$$

де

$\Phi^{110} = (\lambda_{110} + \lambda_{210}\omega)e^{m\omega}$,

$\Phi^{111} = (\lambda_{111} + \lambda_{211}\omega)e^{n\omega}$,

$\Phi^{120} = (\lambda_{120} - (\lambda_{110} - \lambda_{220})\omega - \lambda_{210}\omega^2)e^{m\omega}$,

$\Phi^{121} = (\lambda_{121} - (\lambda_{111} - \lambda_{221})\omega - \lambda_{211}\omega^2)e^{n\omega}$,

$\Phi^{210} = \lambda_{210}e^{m\omega}$,

$\Phi^{211} = \lambda_{211}e^{n\omega}$,

$\Phi^{220} = (\lambda_{220} - \lambda_{210}\omega)e^{m\omega}$,

$\Phi^{221} = (\lambda_{221} - \lambda_{211}\omega)e^{n\omega}$,

$\omega = \frac{u^1}{u^2} - k\ln u^2$, *причому* $Q_1 = I + ku^2\partial_{u^1}$, $Q_2 = \frac{m-n}{m+n}(Q_1 - \frac{2}{m-n}u^2\partial_{u^1})$,

$m^2 - n^2 \neq 0$;

$$
\begin{aligned}
&f^{110} = f^{111} = u^1\Phi^{110},\\
&f^{120} = f^{121} = (u^1)^2\Phi^{120},\\
&f^{210} = f^{211} = \Phi^{210},\\
&f^{220} = f^{221} = u^1\Phi^{220},
\end{aligned}
\tag{1.262}
$$

де $\omega = \frac{1}{u^2}$, *причому* $Q_1 = u^1\partial_{u^1}$, $Q_2 = -Q_1$;

$$
\begin{aligned}
&f^{110} = \lambda_{110}u^1e^{mu^2} + \tfrac{\lambda_{111}}{u^1}e^{ku^2},\\
&f^{111} = \lambda_{110}u^1e^{mu^2} - \tfrac{\lambda_{111}}{u^1}e^{ku^2},\\
&f^{120} = \tfrac{1}{u^2}(\lambda_{120}(u^1)^2e^{mu^2} + \lambda_{121}e^{ku^2}),\\
&f^{121} = \tfrac{1}{u^2}(\lambda_{120}(u^1)^2e^{mu^2} - \lambda_{121}e^{ku^2}),\\
&f^{210} = u^2(\lambda_{210}e^{mu^2} + \tfrac{\lambda_{211}}{(u^1)^2}e^{ku^2}),\\
&f^{211} = u^2(\lambda_{210}e^{mu^2} - \tfrac{\lambda_{211}}{(u^1)^2}e^{ku^2}),\\
&f^{220} = \lambda_{220}u^1e^{mu^2} + \tfrac{\lambda_{221}}{u^1}e^{ku^2},\\
&f^{221} = \lambda_{220}u^1e^{mu^2} - \tfrac{\lambda_{221}}{u^1}e^{ku^2},
\end{aligned}
\tag{1.263}
$$

причому $Q_1 = u^1\partial_{u^1}$, $Q_2 = \frac{m-k}{m+k}(Q_1 - \frac{2}{m-k}\partial_{u^2})$, $m^2 - k^2 \neq 0$;

$$
\begin{aligned}
&f^{110} = f^{111} = u^1\Phi^{110},\\
&f^{120} = f^{121} = u^1\Phi^{120},\\
&f^{210} = f^{211} = u^1\Phi^{210},\\
&f^{220} = f^{221} = u^1\Phi^{220},
\end{aligned}
\tag{1.264}
$$

де $\omega = \frac{u^1}{u^2}$, *причому* $Q_1 = I$, $Q_2 = -Q_1$;

$$
\begin{aligned}
&f^{ab0} = u^1\Phi^{ab0} + \tfrac{1}{u^1}\Phi^{ab1},\\
&f^{ab1} = u^1\Phi^{ab0} - \tfrac{1}{u^1}\Phi^{ab1},
\end{aligned}
\tag{1.265}
$$

де

$\Phi^{110} = \frac{|\vec{u}|}{u^1}e^{\frac{m}{2}w}(\lambda_5\cos w + \lambda_6\sin w + \lambda_1)$,
$\Phi^{111} = \frac{|\vec{u}|}{u^1}e^{\frac{k}{2}w}(\lambda_7\cos w + \lambda_8\sin w + \lambda_2)$,
$\Phi^{120} = \frac{|\vec{u}|}{u^1}e^{\frac{m}{2}w}(\lambda_6\cos w - \lambda_5\sin w + \lambda_3)$,
$\Phi^{121} = \frac{|\vec{u}|}{u^1}e^{\frac{k}{2}w}(\lambda_8\cos w - \lambda_7\sin w + \lambda_4)$,
$\Phi^{210} = \frac{|\vec{u}|}{u^1}e^{\frac{m}{2}w}(\lambda_6\cos w - \lambda_5\sin w - \lambda_3)$,

$\Phi^{211} = \frac{|\vec{u}|}{u^1} e^{\frac{k}{2}w}(\lambda_8 \cos w - \lambda_7 \sin w - \lambda_4)$,
$\Phi^{220} = \frac{|\vec{u}|}{u^1} e^{\frac{m}{2}w}(-\lambda_5 \cos w - \lambda_6 \sin w + \lambda_1)$,
$\Phi^{221} = \frac{|\vec{u}|}{u^1} e^{\frac{k}{2}w}(-\lambda_7 \cos w - \lambda_8 \sin w + \lambda_2)$,
$|\vec{u}| = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}$, $w = 2\arctan\frac{u^1}{u^2}$, *причому* $Q_1 = I$,
$Q_2 = \frac{m-k}{m+k}(Q_1 + \frac{2}{m-k}J)$, $m^2 - k^2 \neq 0$.
У формулах (1.249)–(1.265) $\Phi = \Phi(\omega)$, $\Phi^{ab\alpha} = \Phi^{ab\alpha}(\omega)$ *— довільні гладкі функції,* $\lambda_{ab\alpha}$, λ_a, m, n, k *— довільні сталі.*

Доведення. Визначимо, коли система (1.218) буде інваріантна відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$. Для кожного з отриманих у теоремі 1.12 зображень розширеної алгебри Пуанкаре (1.162) знайдемо функції $f^\alpha = \begin{pmatrix} f^{11\alpha} & f^{12\alpha} \\ f^{21\alpha} & f^{22\alpha} \end{pmatrix}$, при яких система (1.218) буде інваріантна відносно цих алгебр.

Розглянемо зображення операторів

$$Q_1 = æ_1\partial_{u^1} + m_1 u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = k_2\partial_{u^1} + m_2 u^2 \partial_{u^2},$$

що відповідають пункту 2 таблиці 1.1. Оскільки $AP_1(1,1) \supset AP(1,1)$, то згідно теореми 1.14 система рівнянь (1.218) інваріантна відносно оператора Q_1, що має зображення $Q_1 = æ_1\partial_{u^1} + \frac{1}{p}u^2\partial_{u^2}$, тоді і тільки тоді, коли функції f^α задаються формулами (1.221), (1.222). Підставивши координати інфінітезимального оператора
$\xi^0 = c_{01}x_1 + æx_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_{01}x_0 + æx_1 + d_1$,
$\eta^1 = æk_2 + c_{01}æ_1, \quad \eta^2 = (æm_2 + \frac{c_{01}}{p})u^2$
в систему визначальних рівнянь (1.235), (1.236) та врахувавши формули (1.221), (1.222) одержуємо систему незачеплених диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними

$$s\dot{\varphi} = (pm_2A - E)\varphi, \tag{1.266}$$

де $s = k_2 - æ_1 m_2, \quad \varphi = (\varphi^{110}, \varphi^{111}, \varphi^{120}, \varphi^{121}, \varphi^{210}, \varphi^{211}, \varphi^{220}, \varphi^{221})^T$,
$\varphi^{ab\alpha} = \varphi^{ab\alpha}(\omega), \quad \omega = u^1 - æ_1 \ln u^2$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Роз'язавши систему рівнянь (1.266), визначаємо вигляд функцій $\varphi^{ab\alpha}$. Використавши формули (1.221), (1.222), знаходимо вигляд функцій f^a, що задаються формулами (1.253) при $k_2 = -æ_1$, $p = m$, $m_2 = -\frac{1}{p}$, $p \neq 0$ та (1.255), якщо $æ_1 = p = 1$, $k_2 = \frac{m+n+2}{m^2-n^2}$, $m_2 = \frac{m+n}{m-n}$, $m^2 - n^2 \neq 0$.

Решта випадків доводиться аналогічно.

Теорему 1.15 доведено.

Теорема 1.16. *Система (1.218) інваріантна відносно конформної агебри* $AC(1,1)$ *(1.165) тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень (1.158) еквівалентна одній з наступних систем:*

$$\Box u^a = e^{-u^1}\left\{\Psi^a(u^2)(u_0^1 - u_1^1) + \Phi^a(u^2)(u_0^2 - u_1^2)\right\}, \tag{1.267}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = \partial_{u^1}$, $Q_3 = Q_4 = 0$*;*

$$\Box u^a = \alpha_a e^{u^1}(u_0^1 + u_1^1) + \beta_a e^{u^2}(u_0^2 - u_1^2), \tag{1.268}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1} - \partial_{u^2}$, $Q_2 = -\partial_{u^1} - \partial_{u^2}$, $Q_3 = Q_4 = 0$*;*

$$\begin{aligned} \Box u^1 &= \left(\tfrac{u^2}{u^1}(u_0^1 + u_1^1) - (u_0^2 + u_1^2)\right)(\Phi(u^1) - 2), \\ \Box u^2 &= \left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2\Phi(u^1)(u_0^1 + u_1^1) - \tfrac{u^2}{u^1}(\Phi(u^1) + 2)(u_0^2 + u_1^2), \end{aligned} \tag{1.269}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}$, $Q_2 = -u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_4 = -u^1\partial_{u^2}$*;*

$$\begin{aligned} \Box u^1 &= \Phi(u^1)(u_0^2 + u_1^2), \\ \Box u^2 &= -4u^2(u_0^2 + u_1^2), \end{aligned} \tag{1.270}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}$, $Q_2 = -u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = \partial_{u^2}$, $Q_4 = -\partial_{u^2}$*;*

$$\begin{aligned} \Box u^1 &= \alpha u^1(u_0^1 + u_1^1), \\ \Box u^2 &= 0, \end{aligned} \tag{1.271}$$

причому $Q_1 = u^1\partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + \gamma\partial_{u^2}$, $Q_3 = -\frac{4}{\alpha}\partial_{u^1}$, $Q_4 = \frac{4}{\alpha}\partial_{u^1}$, $\alpha \neq 0$;

$$\begin{aligned} &\Box u^1 = \alpha_1 e^{u^1}(u_0^1 + u_1^1) + \alpha_2(u_0^2 + u_1^2), \\ &\Box u^2 = \alpha_3 e^{2u^1}(u_0^1 + u_1^1) + (\alpha_4 e^{u^1} - 4u^2)(u_0^2 + u_1^2), \end{aligned} \tag{1.272}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$, $Q_2 = -\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = \partial_{u^2}$, $Q_4 = -\partial_{u^2}$;

$$\begin{aligned} &\Box u^1 = \alpha(u^2 \ln u^2 - u^1)(u_0^1 + u_1^1) + \\ &+ (u^2(\alpha \ln u^2 + \beta) - \alpha u^1)\beta(u_0^2 + u_1^2), \\ &\Box u^2 = \alpha(u^2 \ln u^2 - u^1)(u_0^2 + u_1^2), \end{aligned} \tag{1.273}$$

причому $Q_1 = I + u^2\partial_{u^1}$, $Q_2 = -I - u^2\partial_{u^1}$, $Q_3 = \frac{4}{\alpha}\partial_{u^1}$, $Q_4 = -\frac{4}{\alpha}\partial_{u^1}$, $\alpha \neq 0$;

$$\begin{aligned} &\Box u^1 = (\alpha_1 u^2 - 4u^1)(u_0^1 + u_1^1) + \alpha_2 u^2(u_0^2 + u_1^2), \\ &\Box u^2 = (\alpha_3 u^2 - 4u^1)(u_0^2 + u_1^2), \end{aligned} \tag{1.274}$$

причому $Q_1 = I$, $Q_2 = -I$, $Q_3 = \partial_{u^1}$, $Q_4 = -\partial_{u^1}$.

У формулах (1.267)–(1.274) Φ^a, Ψ^a, Φ *— довільні гладкі функції;* α, β, α_a, β_a *— довільні сталі.*

Доведення. Дослідимо, коли система (1.218) буде інваріантна відносно конформної алгебри $AC(1,1)$. Для кожного з отриманих в теоремі 1.13 зображень конформної алгебри знайдемо функції $f(U)$, при яких система (1.218) буде інваріантною відносно даної алгебри.

Розглянемо зображення операторів Q_i, що відповідає пункту 2 таблиці 1.2, тобто

$$Q_1 = æ_1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, \quad Q_2 = k_2\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}, \quad Q_3 = æ_3\partial_{u^2}, \quad Q_4 = -æ_3\partial_{u^2}.$$

Оскільки $AC(1,1) \supset AP_1(1,1)$, то використаємо результат теореми 1.15. Система (1.218) інваріантна відносно розширеної алгебри Пуанкаре (1.159) з точністю до перетворень еквівалентності (1.158) згідно теореми 1.15 у даному випадку містить функції $f(U)$, що задаються формулами вигляду (1.253) або (1.255). Вимагаючи інваріантність системи (1.218) відносно операторів конформних перетворень K_μ із системи визначальних рівнянь (1.235), (1.236) отримаємо у першому випадку

$$\begin{aligned} &f^{110} = f^{111} = 0, \quad f^{120} = f^{121} = \Phi(u^1), \\ &f^{210} = f^{211} = 0, \quad f^{220} = f^{221} = 4u^2, \end{aligned} \tag{1.275}$$

та

$$\begin{aligned} &f^{110} = f^{111} = \alpha_1 e^{u^1}, f^{120} = f^{121} = \alpha_2, \\ &f^{210} = f^{211} = \alpha_3 e^{2u^1}, f^{220} = f^{221} = \alpha_4 e^{u^1} - 4u^2, \end{aligned} \tag{1.276}$$

тобто одержуємо системи вигляду (1.270) при $æ_1 = k_2 = 0$ та (1.272), якщо $æ_1 = 1$, $k_2 = -1$. Система (1.218) не є конформноінваріантною у випадку коли функції $f(U)$ задаються формулами (1.255).

Аналогічно проводиться доведення інших випадків теореми.

Теорему 1.16 доведено.

РОЗДІЛ 2

Нелокальні формули розмноження розв'язків та умовна симетрія рівняння синус-Гордон

Даний розділ присвячено знаходженню точних розв'язків солітонного типу рівняння синус-Гордона методами нелокальної та умовної симетрії. У цьому розділі запропоновано ітеративну процедуру нелокального розмноження розв'язків, яка дозволяє будувати ланцюжки розв'язків типу односолітонних для рівняння синус-Гордон. Досліджено зв'язок деяких відомих та одержаних розв'язків з оператори умовної симетрії рівняння синус-Гордон, за допомогою яких побудовано класи точних розв'язків даного рівняння. Знайдено оператори умовної симетрії та відповідні їм класи розв'язків для багатовимірного хвильового рівняння синус-Гордон.

Розглянемо нелінійне хвильове рівняння

$$u_{00} - u_{11} + \sin u = 0, \tag{2.1}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, яке в літературі відоме як рівняння синус-Гордон (СГ). З геометричної точки зору рівняння синус-Гордон виникло в диференціальній геометрії наприкінці XIX століття і пов'язане із задачею побудови чебишевських сіток на поверхнях від'ємної кривизни [36]. В 1936 році вивченням розв'язків рівняння (2.1) займався німецький вченний Р. Штойрвальд, але результати його досліджень були відомі в той час лише небагатьом спеціалістам по геометрії [28, 101]. У фізиці рівняння СГ було застосоване в теорії дислокацій Я. Френкелем та Т. Канторовою [43]. Воно описує розповсюдження обертань, умовних або дійсних, у різних фізичних системах [42, 43]. Наприклад, розповсюдження флюксонів в джозефсонівських контактах [30], розповсюдження резонансних ультрокоротких оптичних імпульсів [66]. У 1958 році Т. Скірм запропонував використати рівняння Клейна-Гордона

$$u_{00} - u_{11} + \dot{\phi}(u) = 0, \tag{2.2}$$

де $\phi = \phi(u)$ — гладка функція, яка описує потенціальну енергію поля, як стандартну модель теорії поля в одновимірному просторі часу з періодичним потенціалом $\phi(u) = 1 - \cos u$ [28, 98].

Рівняння СГ є одним з найбільш відомих рівнянь теорії солітонів [28], розвиток якої бере початок із спостереження фізичного явища „solitary ware“(відокремленої хвилі) британським інженером Д.С.Расселом в 1834 році [1]. Однак його роботи були забуті. Пізніше, в 1965 році в роботі Н.Забуского і М. Крускала [103] ця хвиля була названа солітоном.

Сплеск інтересу до солітонів почався в другій половині XX століття одночасно в декількох галузях науки — нелінійній електродинаміці, фізиці твердого тіла, гідродинаміці, біофізиці та ін. Прикладами солітонів можуть служити хвилі на мілкій воді, іоннозвукові та магнітозвукові хвилі в плазмі, поширення надпотужних світлових імпульсів у нелінійних кристалах, антициклони в атмосфері Землі, Червона пляма на Юпітері. Дослідження солітонів іще раз продемонструвало єдність нелінійних коливних (хвильових) процесів різної природи.

Розглянемо деякі аспекти дослідження рівняння (2.1), а саме побудову розв'язків типу солітонних за допомогою ітеративної процедури нелокального розмноження розв'язків та зв'язок відомих і одержаних розв'язків з властивостями умовної симетрії рівняння.

Максимальною алгеброю інваріантості рівняння синус-Гордон (2.1) є алгебра Пуанкаре $AP(1,1)$, базисні елементи якої мають вигляд:

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1. \tag{2.3}$$

Зауваження 2.1. Оператори алгебри (2.3) породжують скінченні перетворення

$$x_0' = \alpha x + \theta_0, \quad x_1' = \beta x + \theta_1, \quad u' = u, \tag{2.4}$$

де $\alpha x = \alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_1, \beta x = \beta_0 x_0 - \beta_1 x_1; \alpha_\mu, \beta_\mu, \theta_\mu$ — довільні сталі, які задовольняють наступним умовам:
$\alpha^2 = -\beta^2 = 1, \quad \alpha\beta = 0, \quad \alpha^2 = \alpha_0^2 - \alpha_1^2, \quad \alpha\beta = \alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1, \quad \mu = 0, 1.$
Рівняння СГ (2.1) інваріантне також відносно так званних CPT перетворень

$$\begin{aligned} C: &\quad x_0 \to x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to -u, \\ P: &\quad x_0 \to x_0, \quad x_1 \to -x_1, \quad u \to u, \\ T: &\quad x_0 \to -x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to u, \end{aligned} \tag{2.5}$$

та перетворень

$$x_0 \to x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to u + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

Тому всі викладки в цій роботі будемо проводити з точністю до перетворень (2.4), (2.5), (2.6).

2.1. Нелокальні формули розмноження розв'язків

Наприкінці XIX століття Беклунд [36, 70] запропонував нелокальні перетворення вигляду:

$$\left(\frac{\overset{2}{u} + \overset{1}{u}}{2}\right)_y = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{2}, \quad \left(\frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{2}\right)_z = \lambda \sin \frac{\overset{2}{u} + \overset{1}{u}}{2} \tag{2.7}$$

для рівняння СГ (2.1) записаного в конусних змінних

$$u_{yz} = \sin u, \tag{2.8}$$

де

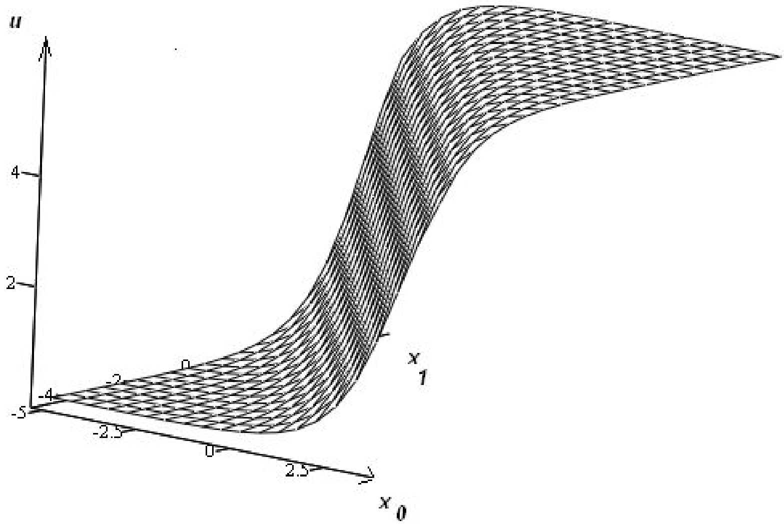
$$y = \frac{x_1 + x_0}{2}, \quad z = \frac{x_1 - x_0}{2}, \tag{2.9}$$

$\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ — два різні розв'язки рівняння (2.8), λ — довільна стала. Перетворення (2.7) зв'язують між собою два різні розв'язки рівняння СГ, вони є авто-перетвореннями Беклунда (АПБ). Враховуючи те, що перетворення (2.7) задають неявний зв'язок між двома розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння (2.8), то їх важко використовувати для побудови точних розв'язків цього рівняння.

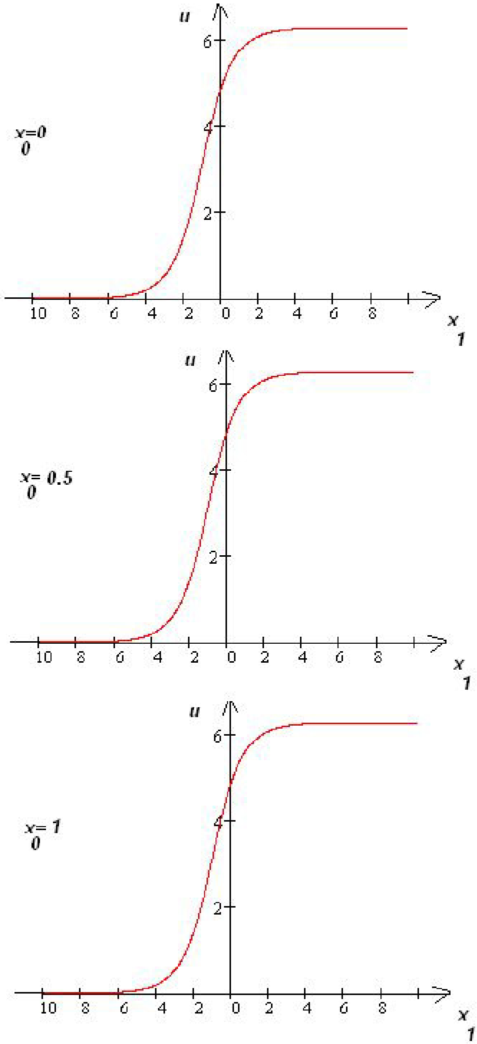
За допомогою АПБ (2.7) у літературі побудовані деякі точні розв'язки рівняння (2.8), які одержали назву солітонних розв'язків. Односолітонні

$$u = 4 \arctan e^{\theta_1} \tag{2.10}$$

Мал. 1. Графік функції $u = 4\arctan e^{\theta_1}$.



Мал. 2. Графіки функції $u = 4\arctan e^{\theta_1}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.

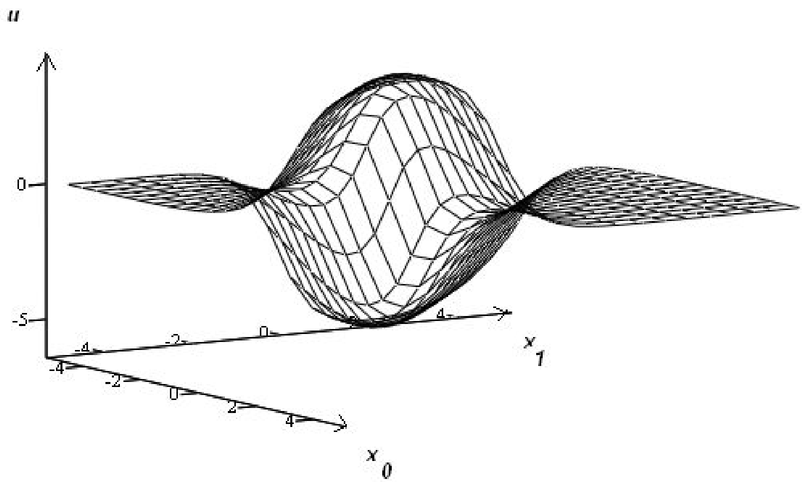


та двохсолітонні

$$u = 4\arctan\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}\right), \tag{2.11}$$

де $\theta_i = \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i}y + c_i$, λ_i, c_i — сталі, $i = 1, 2$, розв'язки даного рівняння [28, 29].

Мал. 3. Графік функції $u = 4\arctan(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}})$.



В роботі [73] побудована формула знаходження N-солітонних розв'язків рівняння СГ:

$$
\begin{aligned}
&\cos u(x_0,x_1) = 1 - 2(\tfrac{\partial^2}{\partial {x_0}^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial {x_1}^2})\ln F,\\
&F = det(M_{ij}),\\
&M_{ij} = 2(a_i + a_j)^{-1}\cosh[\tfrac{1}{2}(\theta_i + \theta_j)],\\
&\theta_j = \gamma_j(x_0 - V_j x_1 - t_j),\\
&a_j^2 = (1 - V_j)(1 + V_j)^{-1},\\
&\gamma_j^2 = (1 - V_j^2)^{-1},
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

де a_j, t_j — довільні параметри.

Для побудови солітонних розв'язків рівняння СГ може також використовуватись теорема Б'янки про перестановочність [28].

Теорема Б'янкі. *Нехай* $\overset{0}{u}$ *є розв'язком рівняння СГ,* $\overset{1}{u}$ *— розв'язок, одержаний у результаті застосування перетворення Беклунда з використанням* $\overset{0}{u}$ *та параметру* λ_1*,* $\overset{2}{u}$ *— розв'язок, одержаний у результаті застосування перетворення Беклунда з використанням* $\overset{0}{u}$ *та параметру* λ_2*. Тоді новий розв'язок* $\overset{3}{u}$ *може бути одержаний з співвідношення*

$$
\tan\frac{\overset{3}{u} - \overset{0}{u}}{4} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\tan\frac{\overset{1}{u} - \overset{2}{u}}{4}.
$$

Ми пропонуємо дещо інший підхід до знаходження розв'язків рівняння СГ за допомогою АПБ (2.7). Ланцюжки розв'язків будемо будувати прямо з одного розв'язку.

Нехай для простоти $\lambda = 1$. Введемо функціональний параметр $\tau = \tau(y,z)$ за формулою:

$$
\tau = \tan\frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{4}. \tag{2.13}
$$

Це дає можливість записати зв'язок між розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння СГ в параметричному вигляді. Сформулюємо даний результат у вигляді наступної теореми.

Теорема 2.1. *Якщо* $\overset{1}{u}$ *— розв'язок рівняння (2.8), то його інший розв'язок* $\overset{2}{u}$ *знаходиться за формулою*

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4 \arctan \tau, \tag{2.14}$$

де $\tau = \tau(y, z)$ *— розв'язок системи диференціальних рівнянь*

$$\begin{aligned} \tau_y &= -\tfrac{1}{2}(\tau^2 + 1)\overset{1}{u}_y + \tau, \\ \tau_z &= -\tfrac{1}{2}(\tau^2 - 1)\sin \overset{1}{u} + \tau \cos \overset{1}{u}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Теорема 2.1 доводиться безпосередньою підстановкою формул (2.14), (2.15) у рівняння (2.8).

Таким чином, згідно даної теореми, побудову розв'язків рівняння СГ пропонується здійснювати в два етапи. Спочатку по відомому розв'язку $\overset{1}{u}$ потрібно знайти функціональний параметр $\tau = \tau(y, z)$, як розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.15), а потім за допомогою розв'язку $\overset{1}{u}$ і знайденому по ньому параметру τ за формулою (2.14) знаходимо $\overset{2}{u}$ — новий розв'язок рівняння СГ.

На перший погляд формули (2.14), (2.15) спрощують знаходження розв'язку $\overset{2}{u}$, але, в той же час, для знаходження параметра τ потрібно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь (2.15), яка є системою рівнянь Ріккаті. Добре відомо, що немає загального методу розв'язування рівнянь Ріккаті. Тому щодо складності формули (2.14), (2.15), напевно, не поступаються формулам (2.7). Але нам вдалося помітити одну закономірність, яка дозволяє знаходити частинний розв'язок рівнянь Ріккаті (2.15) (див. лему нижче). Як відомо, наявність частинного розв'язку рівняння Ріккаті дозволяє звести його до рівняння Бернуллі, яке інтегрується в квадратурах.

Якщо для побудови розв'язків рівняння СГ формули (2.14), (2.15) використовувати послідовно декілька разів, то, в результаті, отримуємо рекурентні формули вигляду

$$\overset{n+1}{u} = \overset{n}{u} + 4 \arctan \overset{n+1}{\tau}, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} &\overset{n+1}{\tau}_y = -\tfrac{1}{2}((\overset{n+1}{\tau})^2+1)\overset{n}{u}_y + \overset{n+1}{\tau}, \\ &\overset{n+1}{\tau}_z = -\tfrac{1}{2}((\overset{n+1}{\tau})^2-1)\sin\overset{n}{u} + \overset{n+1}{\tau}\cos\overset{n}{u}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

де $\overset{n}{u}$ — розв'язок рівняння СГ на n-му кроці, $\overset{n+1}{u}$, $\overset{n+1}{\tau}$ — функції, які знайдені на $(n+1)$-му кроці. Ми помітили зв'язок між розв'язками системи рівнянь Ріккаті (2.17) на різних кроках. Сформулюємо цей зв'язок у вигляді наступного твердження.

Лема 2.1. *Якщо в якості початкового розв'язку в формулах (2.16), (2.17) вибрати тривіальний розв'язок рівняня синус-Гордон* $\overset{0}{u}=0$, *то для системи (2.17) справедлива формула*

$$\overset{n+1}{\tau}_0(y,z) = \overset{n}{\tau}_3(-y,-z), \tag{2.18}$$

де $\overset{n}{\tau}_3(y,z)$ *— загальний розв'язок системи (2.17) на n-му кроці при спеціальному виборі сталої інтегрування,* $\overset{n+1}{\tau}_0(y,z)$ *— частинний розв'язок системи (2.17) на* $(n+1)$*-му кроці,* $n = 1, 2, 3$.

Опишемо знаходження точних розв'язків рівняння (2.1).

1-крок. $n = 1$:

$$\overset{0}{u} = 0, \tag{2.19}$$

тоді

$$\overset{1}{u} = 4\arctan\overset{1}{\tau}, \tag{2.20}$$

де функціональний параметр $\overset{1}{\tau}$ є розв'язком наступної системи диференціальних рівнянь із відокремлюваними змінними

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\tau}_y = \overset{1}{\tau}, \\ &\overset{1}{\tau}_z = \overset{1}{\tau}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

розв'язавши яку, одержимо

$$\overset{1}{\tau} = e^{y+z+c_1}. \tag{2.22}$$

Тоді

$$\overset{1}{u} = 4\arctan e^{y+z+c_1}, \tag{2.23}$$

c_1 — стала інтегрування. Цей розв'язок в літературі відомий як односолітонний розв'язок рівняння СГ [28].

Враховуючи перетворення (2.4) сталу інтегрування c_1 у формулах (2.22), (2.23) можна опустити. Отже,

$$\overset{1}{\tau} = e^{y+z}, \tag{2.24}$$

$$\overset{1}{u} = 4 \arctan e^{y+z}. \tag{2.25}$$

2-крок. $n = 2$:

$$\overset{1}{u} = 4 \arctan e^{y+z}, \tag{2.26}$$

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4 \arctan \overset{2}{\tau}, \tag{2.27}$$

де параметр $\overset{2}{\tau}$ є розв'язком системи рівнянь Ріккаті наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\tau}_y &= M((\overset{2}{\tau})^2 + 1) + \overset{2}{\tau}, \\ \overset{2}{\tau}_z &= N((\overset{2}{\tau})^2 - 1) + L\,\overset{2}{\tau}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

де $M = -\frac{1}{\cosh(y+z)}$, $N = \frac{\sinh(y+z)}{\cosh^2(y+z)}$, $L = 2\tanh^2(y+z) - 1$. Використавши лему, маємо

$$\overset{2}{\tau}_0(y, z) = \overset{1}{\tau}_3(-y, -z) = e^{-(y+z)}. \tag{2.29}$$

Зробивши заміну:

$$\overset{2}{\tau} = w + e^{-(y+z)}, \tag{2.30}$$

де $w = w(y, z)$ — нова невідома функція, систему (2.28) зводимо до системи рівнянь Бернуллі

$$\begin{aligned} \cosh(y+z)w_y &= (\sin(y+z) - 1)w - w^2, \\ \cosh^2(y+z)w_z &= (\sin^2(y+z) - 1)w + \sinh(y+z)w^2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Загальний розв'язок системи (2.31) має вигляд

$$w = \frac{2\cosh^2(y+z)}{e^{y+z}(y - z + c_2) - \cosh(y+z))}. \tag{2.32}$$

Отже, використавши (2.32), одержуємо, що

$$\overset{2}{\tau}= \frac{(y-z+c_2)e^{-(y+z)}+\cosh(y+z)}{y-z+c_2-e^{-(y+z)}\cosh(y+z)}, \tag{2.33}$$

де c_2 — стала інтегрування. Підставивши $\overset{2}{\tau}$, $\overset{1}{u}$, що задані формулами (2.33), (2.26) відповідно, у формулу (2.27), одержуємо

$$\overset{2}{u}= 4\arctan\frac{-(y-z+c_2)}{\cosh(y+z)}. \tag{2.34}$$

Аналогічно, як і у формулах (2.22), (2.23), з точністю до перетворень (2.4), можна вважати $c_2 = 0$. Отже,

$$\overset{2}{\tau}= \frac{(y-z)e^{-(y+z)}+\cosh(y+z)}{y-z-e^{-(y+z)}\cosh(y+z)}, \tag{2.35}$$

$$\overset{2}{u}= 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)}. \tag{2.36}$$

Зауважимо, що розв'язок (2.36) одержаний в [40] із двохсолітонного розв'язку (2.11), якщо в ньому перейти до границі при $\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1$.

3-крок. $n = 3$:

$$\overset{2}{u}= 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)}, \tag{2.37}$$

$$\overset{3}{u}=\overset{2}{u}+4\arctan\overset{3}{\tau}. \tag{2.38}$$

Система рівнянь Ріккаті для знаходження $\overset{3}{\tau}$ має вигляд

$$\begin{aligned}\overset{3}{\tau}_y&= -\tfrac{2((y-z)\sinh(y+z)-\cosh(y+z))}{B}((\overset{3}{\tau})^2+1)+\overset{3}{\tau},\\ \overset{3}{\tau}_z&= \tfrac{2(y-z)\cosh(y+z)A}{B^2}((\overset{3}{\tau})^2-1)+\tfrac{A^2-4(y-z)^2\cosh^2(y+z)}{B^2}\,\overset{3}{\tau},\end{aligned} \tag{2.39}$$

де $A = \cosh^2(y+z) - (y-z)^2$, $B = \cosh^2(y+z) + (y-z)^2$.
Використавши лему, маємо

$$\overset{3}{\tau}_0(y,z) =\overset{2}{\tau}_3(-y,-z) = \frac{(y-z)e^{y+z}-\cosh(y+z)}{y-z+e^{y+z}\cosh(y+z)}. \tag{2.40}$$

Зробивши заміну

$$\overset{3}{\tau} = w + \frac{(y-z)e^{y+z} - \cosh(y+z)}{y-z+e^{y+z}\cosh(y+z)}, \qquad (2.41)$$

де $w = w(y,z)$ — нова невідома функція, систему (2.39) зводимо до системи рівнянь Бернуллі

$$\begin{aligned} &w_y = \tfrac{\beta B - 4\alpha C}{\beta B} w - \tfrac{2C}{B} w^2, \\ &w_z = \tfrac{4(y-z)\alpha A\cosh(y+z) + \beta(A^2 - 4(y-z)^2)\cosh^2(y+z)}{\beta B^2} w + \\ &+ \tfrac{2(y-z)A\cosh(y+z)}{B^2} w^2, \end{aligned} \qquad (2.42)$$

де $\alpha = (y-z)e^{y+z} - \cosh(y+z)$, $\beta = y - z + e^{y+z}\cosh(y+z)$,
$C = (y-z)\sinh(y+z) - \cosh(y+z)$. Розв'язавши (2.42), одержуємо

$$\overset{3}{\tau} = \frac{-2B^2 + \alpha K}{\beta K}, \qquad (2.43)$$

$$\overset{3}{u} = 4\arctan e^{-y-z}\tfrac{P+B}{P-B}, \qquad (2.44)$$

де $K = (y - z + e^{y+z}\cosh(y+z))((y-z)^2 e^{-(y+z)} -$
$- 2(y-z)\cosh(y+z) + f) - 4e^{y+z}\cosh^4(y+z)$,
$f = \cosh(y+z)(e^{2(y+z)} + 2) + (y+z+c)e^{-(y+z)}$,
$P = c + y + z + \cosh(y+z)\sinh(y+z)$.

Випишемо ланцюжок розв'язків рівняння синус-Гордон (2.8), одержаного в результаті застосування рекурентних формул (2.16), (2.17):

$$0 \to 4\arctan e^{y+z} \to 4\arctan \frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)} \to$$

$$\to 4\arctan e^{-(y+z)} \frac{c + y + z + \cosh(y+z)\sinh(y+z) + \cosh^2(y+z) + (y-z)^2}{c + y + z + \cosh(y+z)\sinh(y+z) - \cosh^2(y+z) - (y-z)^2}.$$

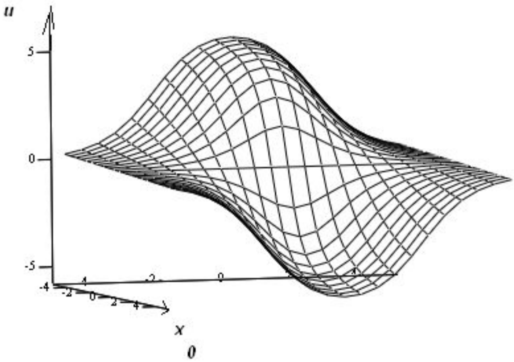
Таким чином, враховуючи зв'язок (2.9) між змінними y, z і x_0, x_1, одержаний нами ланцюжок розв'язків для рівняння СГ (2.1) має вигляд

$$0 \to 4\arctan e^{x_1} \to 4\arctan \frac{-x_0}{\cosh x_1} \to$$

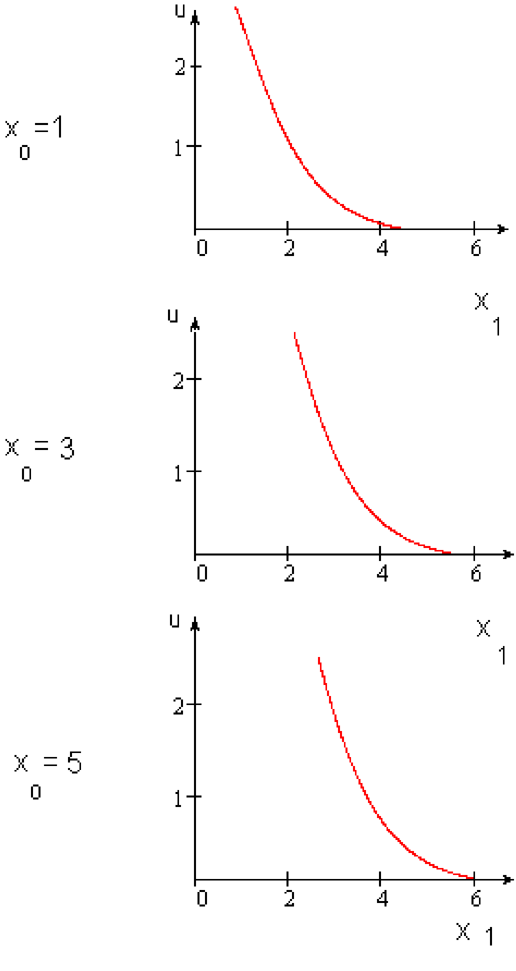
$$\to 4\arctan e^{-x_1} \frac{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + x_0^2}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - x_0^2}.$$

Побудуємо графіки розв'язків $\overset{2}{u}$ і $\overset{3}{u}$ та їх графіки при фіксованих значеннях змінної x_0.

Мал. 4. Графік функції $\overset{2}{u} = 4\arctan\frac{-x_0}{\cosh x_1}$.

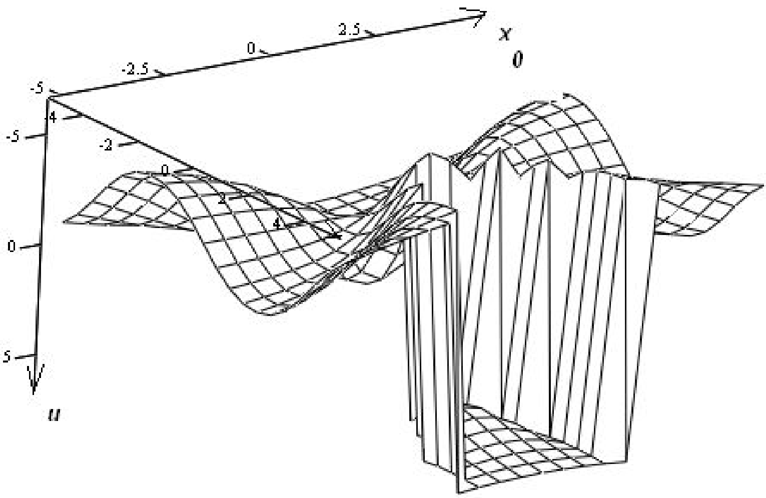


Мал. 5. Графіки функції $\overset{2}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.



Мал. 6. Графік функції

$$\overset{3}{u} = 4 \arctan e^{-x_1} \frac{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + x_0^2}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - x_0^2}.$$



Мал. 7. Графіки функції $\overset{3}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.

Оскільки побудовані графіки одержаних розв'язків $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$ зберігають форму єдиної хвилі з ростом часової змінної x_0, то можна припустити, що ці розв'язки є розв'язками солітонного типу рівняння синус-Гордон.

З кожним наступним кроком процедури розмноження розв'язків рівняння СГ, запропонованої в теоремі (2.1) різко зростає громіздкість перетворень даного алгоритму. Тому було природньо наступні кроки доручити ЕОТ.

За допомогою програми Maple нам вдалося проробити ще два кроки вказаного алгоритму. в результаті одержали наступні результати

$$\overset{4}{u}= 4\arctan\frac{(\frac{2}{3}x_0^3+2x_0+c_4)\cosh x_1-2x_0x_1\sinh x_1}{\frac{1}{3}x_0^4-c_4x_0+x_1^2+\cosh^2 x_1}, \tag{2.45}$$

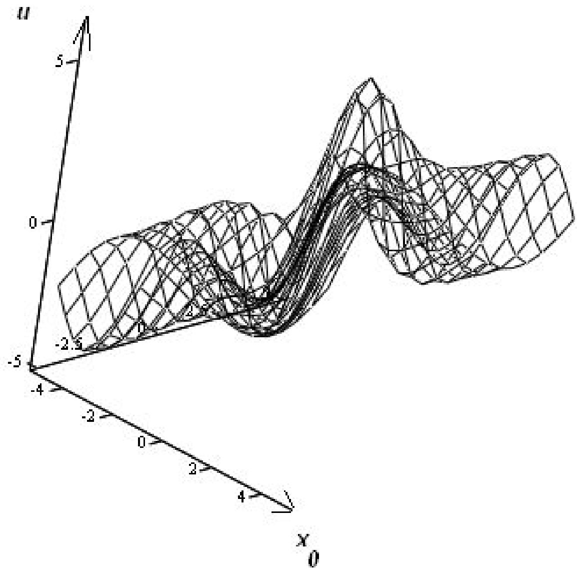
$$\overset{5}{u}= 4\arctan e^{x_1}\frac{(\cosh^2 x_1+A-B)e^{2x_1}+C+D}{\cosh^2 x_1+A+B+(C-D)e^{2x_1}}, \tag{2.46}$$

де $A=\frac{1}{9}x_0^6+\frac{1}{6}x_0^4+\frac{3}{2}x_0^2+x_0^2x_1^2-\frac{1}{2}x_1^2+2c_5x_1$,
$B=\frac{1}{3}x_0^4x_1+2x_0^2(x_1+c_5)-x_1(x_1^2+1)+c_5$,
$C=\frac{1}{6}x_0^4+\frac{3}{2}x_0^2+\frac{1}{2}x_1^2$, $D=(x_0^2+1)x_1-c_5$.

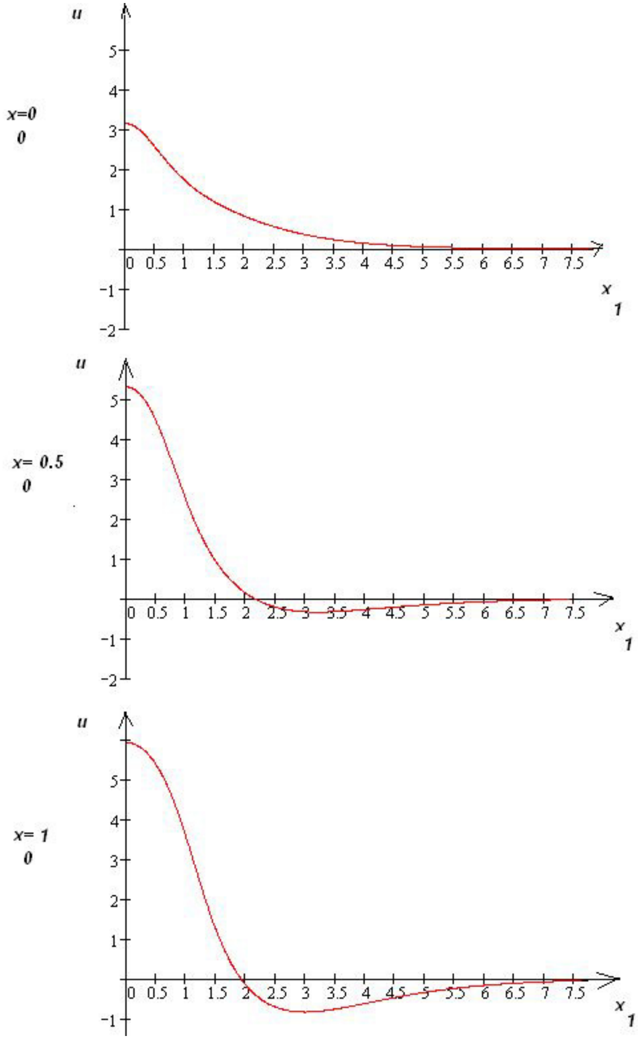
Побудуємо графіки розв'язків $\overset{4}{u}$ і $\overset{5}{u}$.

Мал. 8. Графік функції

$$\overset{4}{u} = 4\arctan\frac{(\frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0 + c_4)\cosh x_1 - 2x_0x_1\sinh x_1}{\frac{1}{3}x_0^4 - c_4x_0 + x_1^2 + \cosh^2 x_1}.$$

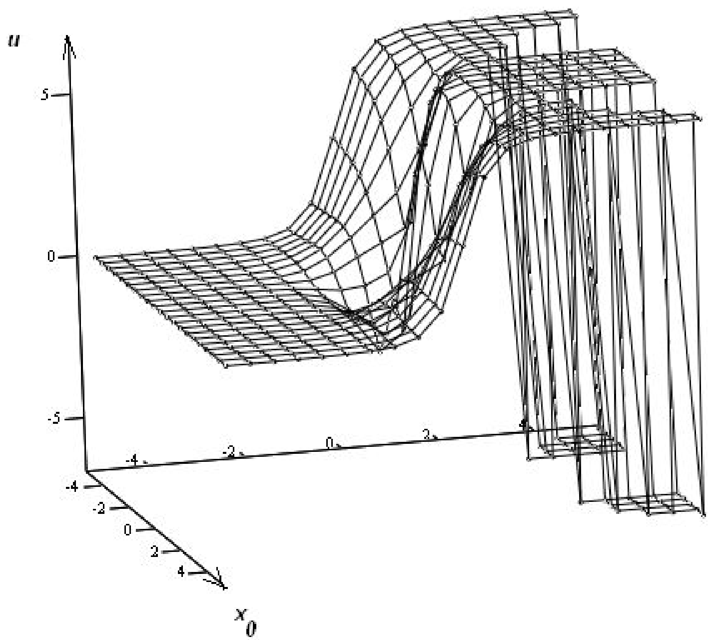


Мал. 9. Графіки функції $\overset{4}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.

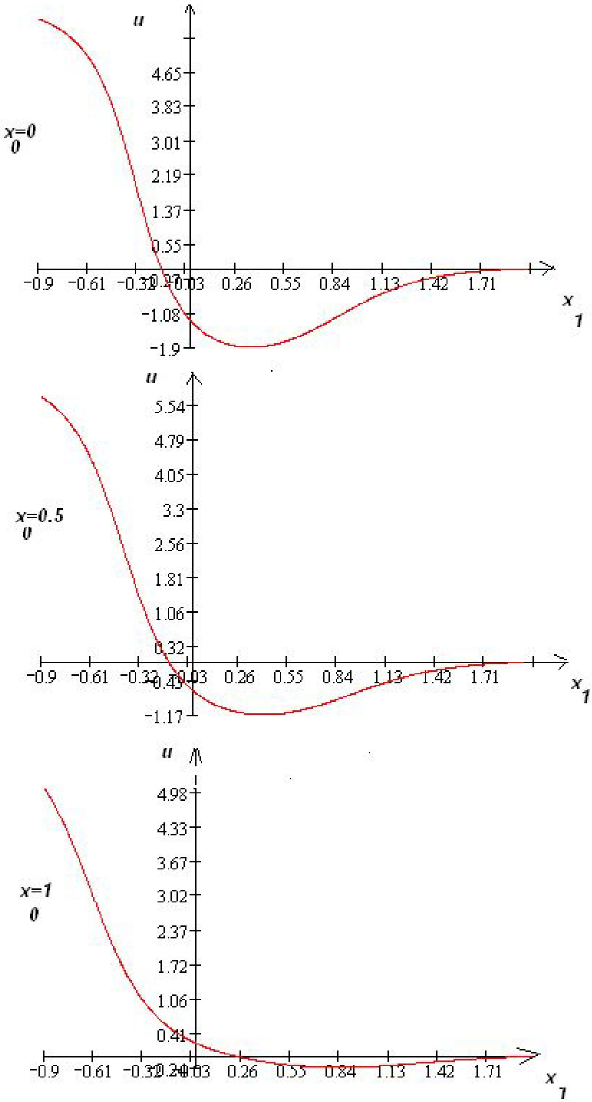


Мал. 10. Графік функції

$$\overset{5}{u} = 4\arctan e^{x_1}\frac{(\cosh^2 x_1 + A - B)e^{2x_1} + C + D}{\cosh^2 x_1 + A + B + (C - D)e^{2x_1}}.$$



Мал. 11. Графіки функції $\overset{5}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.



Проаналізувавши графіки одержаних розв'язків та їх проекцій, ми бачимо, що всі вони мають вигляд хвилі, що не змінює свою форму зі зміною часу. У звязку з цим можна зробити висновок, що знайдені нами розв'язки $\overset{2}{u}$ — $\overset{5}{u}$, як і $\overset{1}{u}$, є односолітонними розв'язками рівняння синус-Гордон.

2.2. Умовна інваріантність одновимірного рівняння синус-Гордон

Проаналізуємо, чи можна знайдені в попередньому підрозділі розв'язки отримати за допомогою лієвської симетрії рівняння СГ. Розв'язок

$$\overset{1}{u}= 4\arctan e^{x_1} \tag{2.47}$$

є інваріантним відносно алгебри (2.3). Умова інваріантості розв'язку

$$\Phi(x_0, x_1, u) = u - 4\arctan e^{x_1} = 0 \tag{2.48}$$

відносно оператора

$$X = c_0\partial_0 + c_1\partial_1 + k(x_1\partial_0 + x_0\partial_1)$$

має вигляд

$$X\Phi|_{\Phi=0} = 0, \tag{2.49}$$

тобто

$$X\Phi = -4(c_1 + kx_0)\frac{e^{x_1}}{1 + e^{2x_1}} = 0,$$

звідки $c_1 = k = 0$, $X = \partial_0$. Отже, розв'язок $\overset{1}{u}$, що має вигляд (2.47) можна отримати за допомогою лієвської симетрії. Розв'язки

$$\overset{2}{u}= 4\arctan\frac{-x_0}{\cosh x_1} \tag{2.50}$$

і

$$\overset{3}{u}= 4\arctan e^{-x_1}\frac{x_1 + \cosh x_1\sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + x_0^2}{x_1 + \cosh x_1\sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - x_0^2} \tag{2.51}$$

не можна отримати з лієвської симетрії, оскільки умова (2.49) для них виконується лише при $c_0 = c_1 = k = 0$. Дослідимо, чи можна отримати дані розв'язки із умовної симетрії (поняття умовної симетрії введено в [58]). Узагальнимо розв'язок $\overset{2}{u}$ наступним чином

$$u = 4\arctan\frac{\varphi(x_0)}{\cosh x_1}, \tag{2.52}$$

де $\varphi(x_0)$ — довільна гладка функція. Формулу (2.52) можна розглядати як анзац, побудований по деякому диференціальному оператору першого порядку, який ми запишемо у вигляді

$$Q = A\partial_0 + B\partial_1 + C\partial_u, \tag{2.53}$$

де $A = A(x_0, x_1, u)$, $B = B(x_0, x_1, u)$, $C = C(x_0, x_1, u)$ — довільні гладкі функції. З умови (2.49) інваріантості розв'язку (2.52) відносно оператора Q одержимо $\Phi(I_0, I_1) = 0$, або $I_1 = \varphi(I_0)$, де

$$I_0 = x_0, \quad I_1 = \cosh x_1 \tan\frac{u}{4}. \tag{2.54}$$

Внаслідок того, що I_0, I_1 є інваріантами оператора Q, то

$$\begin{aligned} QI_0 &= 0, \\ QI_1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Розв'язком системи (2.55) є функції

$$A = 0, \quad C = -2B\tanh x_1 \sin\frac{u}{2}. \tag{2.56}$$

Отже, $Q = B(\partial_1 - 2\tanh x_1 \sin\frac{u}{2}\partial_u)$. Нехай $B = 1$, тоді один із операторів, що породжує анзац (2.52), має вигляд

$$Q = \partial_1 - 2\tanh x_1 \sin\frac{u}{2}\partial_u. \tag{2.57}$$

Розв'язок (2.47) узагальнимо наступним чином

$$u = 4\arctan(e^{x_1}\varphi(x_0)). \tag{2.58}$$

Не важко переконатися, що анзац (2.58) породжується оператором

$$Q = \partial_1 + 2\sin\frac{u}{2}\partial_u. \tag{2.59}$$

Анзац

$$u = 4\arctan e^{-x_1}\frac{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + \varphi^2(x_0)}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - \varphi^2(x_0)}, \tag{2.60}$$

який узагальнює розв'язок $\overset{3}{u}$, породжується оператором

$$Q = \partial_1 + \eta\partial_u, \tag{2.61}$$

де

$$\eta = -2(\sin\frac{u}{2} - 2\cosh x_1 \frac{\cos\frac{u}{2} + \sinh x_1 \sin\frac{u}{2}}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1}). \tag{2.62}$$

Оператори (2.57), (2.59), (2.61) є операторами умовної симетрії рівняння СГ. Це випливає із наступної теореми.

Теорема 2.2. *Рівняння (2.1) інваріантне відносно оператора*

$$Q = \partial_1 + \eta(x_1, u)\partial_u \tag{2.63}$$

при додаткових умовах

$$u_0^2 - u_1^2 + \Phi(x_1, u) = 0, \tag{2.64}$$

$$Qu = u_1 - \eta = 0, \tag{2.65}$$

де

$$\Phi = \frac{1}{\eta_{uu}}T, \quad \eta_{uu} \neq 0, \tag{2.66}$$

$$T = \eta\cos u - \eta_u \sin u - 2\eta\eta_{1u} - \eta_{11}, \tag{2.67}$$

$$\Phi_1 + \eta\Phi_u - 2\eta_u\Phi - 2\eta\eta_1 = 0. \tag{2.68}$$

Доведення. Для доведення теореми використаємо означення умовної інваріантності [58], згідно якого необхідно довести, що

$$\tilde{Q}S = f^1 S + f^2 S_1 + f^3 S_2, \quad \tilde{Q}S_1 = f^4 S + f^5 S_1 + f^6 S_2, \tag{2.69}$$

де f^i — деякі неперервно-диференційовані функції, $i = \overline{1,6}$, $\tilde{Q}$ — продовження оператора Q. В нашому випадку

$S = \Box u + \sin u,$
$S_1 = u_0^2 - u_1^2 + \Phi,$
$S_2 = Qu = u_1 - \eta.$
Подіявши оператором $\tilde{Q}$ на S та S_1 одержимо

$$\begin{aligned} &\tilde{Q}S = \eta_u S + \eta_{uu} S_1 + 2\eta_{1u} S_2 - \\ &-(\eta_{uu}\Phi - \eta\cos u + \eta_u \sin u + 2\eta\eta_{1u} + \eta_{11}), \\ &\tilde{Q}S_1 = -2\eta_u S_1 - 2\eta_1 S_2 + (\Phi_1 + \eta\Phi_u - 2\eta_u\Phi - 2\eta\eta_1). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Звідки
$\eta_{uu}\Phi - \eta\cos u + \eta_u \sin u + 2\eta\eta_{1u} + \eta_{11} = 0,$
$\Phi_1 + \eta\Phi_u - 2\eta_u\Phi - 2\eta\eta_1 = 0.$
Будемо вважати, що $\eta_{uu} \neq 0$, так як в протилежному випадку оператор (2.63) буде оператором лієвської симетрії рівняння (2.1). В результаті отримаємо формули (2.66)–(2.68).

Теорему 2.2 доведено.

Зауваження 2.2. Неважко переконатися, що оператори (2.57), (2.59), (2.61) задовольняють умовам теореми 3.2 і тому є операторами умовної інваріантності рівняння (2.1).

Знайдені оператори Q задовольняють умові

$$\eta_{uu} = -\frac{1}{4}\eta, \tag{2.71}$$

тобто

$$\eta = C_1(x_1)\cos\frac{u}{2} + C_2(x)\sin\frac{u}{2}, \tag{2.72}$$

звідки, враховуючи (2.66)–(2.68), одержимо:

$$\ddot{C}_1 = (\frac{\vec{C}^2}{2} + k)C_1, \quad \ddot{C}_2 = (\frac{\vec{C}^2}{2} + k - 1)C_2 \tag{2.73}$$

при умові $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.

Нехай

$$C_2 = C_1 \sinh x_1 - 2. \tag{2.74}$$

Тоді (2.73) зводиться до рівняння Ріккаті

$$\dot{C}_1 = -\frac{1}{2}C_1^2 \cosh x_1 + C_1 \tanh x_1 - \frac{k+1}{\cosh x_1}. \tag{2.75}$$

Якщо $k = -1$, то (2.75) — рівняння Бернуллі. Його загальний розв'язок приводить до операторів (2.61), (2.62).

Якщо $k \neq -1$. Частинний розв'язок (2.75) шукаємо у вигляді

$$C_1 = \frac{a}{\sinh x_1}, \quad a = \text{const}. \tag{2.76}$$

Після підстановки (2.76) в (2.75) одержимо

$$-\frac{a \cosh x_1}{\sinh^2 x_1} = -\frac{a^2 \cosh x_1}{2 \sinh^2 x_1} + \frac{a}{\cosh x_1} - \frac{k+1}{\cosh x_1}. \tag{2.77}$$

Рівність (2.77) можлива лише при $a = 2, \quad k = 1$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (2.75) має вигляд

$$C_1 = \frac{2(x_1 + C)}{(x_1 + C)\sinh x_1 - \cosh x_1}, \quad c = \text{const}. \tag{2.78}$$

Тоді з (2.74) при умові (2.78) знаходимо

$$C_2 = \frac{2\cosh x_1}{(x_1 + C)\sinh x_1 - \cosh x_1}. \tag{2.79}$$

Отже, ми одержали новий оператор:

$$Q = \partial_1 + 2\frac{(x_1 + C)\cos\frac{u}{2} + \cosh x_1 \sin\frac{u}{2}}{(x_1 + C)\sinh x_1 - \cosh x_1}\partial_u. \tag{2.80}$$

Щоб побудувати анзац по оператору (2.80) необхідно розв'язати рівняння

$$\frac{d(\frac{u}{2})}{dx_1} = \frac{(x_1 + C)\cos\frac{u}{2} + \cosh x_1 \sin\frac{u}{2}}{(x_1 + C)\sinh x_1 - \cosh x_1}, \tag{2.81}$$

яке заміною

$$w = \tan\frac{u}{4}, \tag{2.82}$$

зводиться до рівняння Ріккаті

$$w' = \frac{1}{2}\frac{(x_1 + C)(1 - w^2) + 2w\cosh x_1}{(x_1 + C)\sinh x_1 - \cosh x_1}. \tag{2.83}$$

2.3. Умовна інваріантність багатовимірного рівняння синус-Гордон

Розглянемо багатовимірне рівняння СГ

$$\Box u + \sin u = 0, \tag{2.84}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Аналогічно, як і для одновимірного рівняння СГ, доводиться наступне твердження.

Теорема 2.3. *Рівняння (2.84) інваріантне відносно оператора*

$$Q = \partial_n + \eta(x_n, u)\partial_u \tag{2.85}$$

при додаткових умовах

$$u_\mu u^\mu + \Phi(x_n, u) = 0, \tag{2.86}$$

$$Qu = u_n - \eta = 0, \tag{2.87}$$

де

$$\Phi = \frac{1}{\eta_{uu}} T, \quad \eta_{uu} \neq 0, \tag{2.88}$$

$$T = \eta \cos u - \eta_u \sin u - 2\eta\eta_{nu} - \eta_{nn}, \tag{2.89}$$

$$\frac{1}{\eta_{uu}^2}(\eta_{nuu} + \eta\eta_{uuu} + 2\eta_u\eta_{uu})T - \frac{1}{\eta_{uu}}(T_n + \eta T_u) + 2\eta\eta_n = 0. \tag{2.90}$$

Зауваження 2.3. За допомогою прямої перевірки можна переконатися, що оператори

$$Q = \partial_n + 2\sin\frac{u}{2}\partial_u, \tag{2.91}$$

$$Q = \partial_n - 2\tanh x_n \sin\frac{u}{2}\partial_u, \tag{2.92}$$

$$Q = \partial_n + \eta\partial_u, \;\; \eta = -2(\sin\frac{u}{2} - 2\cosh x_n \frac{\cos\frac{u}{2} + \sinh x_n \sin\frac{u}{2}}{c + x_n + \cosh x_n \sinh x_n}) \tag{2.93}$$

задовольняють умови теореми 3.3, тобто є операторами умовної симетрії рівняння (2.84).

Оператору (2.91) відповідає анзац

$$u = 4\arctan(e^{x_n}\varphi(x_0, ..., x_{n-1})), \tag{2.94}$$

який редукує рівняння (2.84) до системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\Box\varphi = 0, \\ &\varphi_s\varphi^s = 0, s = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Оператору (2.92) відповідає анзац

$$u = 4\arctan\frac{\varphi(x_0, ..., x_{n-1})}{\cosh x_n}, \tag{2.96}$$

який редукує рівняння (2.84) до системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\Box\varphi = 0, \\ &\varphi_s\varphi^s - 1 = 0, s = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Оператору (2.93) відповідає анзац

$$u = 4\arctan e^{-x_n}\frac{c + x_n + \cosh x_n \sinh x_n + \cosh^2 x_n + \varphi^2}{c + x_n + \cosh x_n \sinh x_n - \cosh^2 x_n - \varphi^2}, \tag{2.98}$$

де $\varphi = \varphi(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$. Анзац (2.98) редукує рівняння (2.84) також до системи рівнянь (2.97).

Узагальнимо анзаци (2.94), (2.96) наступним чином

$$u = 4\arctan\varphi\psi, \tag{2.99}$$

де $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$, $\psi = \psi(x_n)$ — невідомі функції. Підставивши (2.99) у рівняння (2.84), одержимо

$$\varphi^2\Box\varphi - 2\varphi\varphi_s\varphi^s - \varphi^3 + \frac{1}{\psi^2}(\Box\varphi + \varphi) - \frac{\ddot{\psi}}{\psi^3}\varphi + (2\frac{\dot{\psi}^2}{\psi^2} - \frac{\ddot{\psi}}{\psi})\varphi^3 = 0, \tag{2.100}$$

де $s = \overline{0, n-1}$. Врахувавши, що функції ϕ, ψ залежать від різних аргументів, з рівняння (2.100) отримуємо два суттєво різні випадки:

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi} - 2\lambda_1\psi^3 = 0, \\ &\psi\ddot{\psi} - 2\dot{\psi}^2 + 2\lambda_2 = 0, \\ &S_3 - 2\lambda_1\varphi = 0, \\ &S_4 + 2\lambda_2\varphi^3 = 0; \end{aligned} \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi} - 2\lambda_1\psi = 0, \\ &\psi\ddot{\psi} - 2\dot{\psi}^2 + 2\lambda_2\psi^2 = 0, \\ &S_3 + 2\lambda_2\varphi^3 = 0, \\ &S_4 - 2\lambda_1\varphi = 0, \end{aligned} \tag{2.102}$$

де λ_1, λ_2 — довільні сталі, $S_3 = \varphi^2\Box\varphi - 2\varphi\varphi_s\varphi^s - \varphi^3$, $S_4 = \Box\varphi + \varphi$. Розглянемо кожен із отриманих випадків окремо. Із (2.101) випливає, що вигляд функції ψ визначаємо, як

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{\lambda_1\psi^4 + \lambda_2}} = x_n. \tag{2.103}$$

Зробивши заміну

$$w = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\lambda_2\varphi^4 + \varphi^2 + \lambda_1}} \tag{2.104}$$

з двох останніх рівнянь системи (2.101), одержимо

$$\begin{aligned} &\Box w = 0, \\ &w_s w^s + 1 = 0, s = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Зауваження 2.4. Якщо у формулах (2.103), (2.104) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, то одержимо розв'язок рівняння СГ, який виражається через елементарні функції та функцію w за формулою

$$u = -4\arctan\frac{\sinh w}{x_n}. \tag{2.106}$$

Якщо ж в формулах (2.103), (2.104) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, то одержимо розв'язок вигляду

$$u = -4\arctan\frac{x_n}{\sinh w}, \tag{2.107}$$

який за допомогою перетворень (2.5), (2.6) зводиться до (2.106). При всіх інших значеннях параметрів λ_1, λ_2 розв'язки рівняння СГ вигляду (2.99) виражаються через еліптичні функції (див., наприклад, [3]).

З (2.102) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ одержимо наступний розв'язок

$$u = 4\arctan e^{x_n}\varphi(x_0, ..., x_{n-1}), \tag{2.108}$$

де функція φ виражається з (2.104), а функція w є розв'язком системи

$$\begin{aligned} &\Box w = 0, \\ &w_s w^s = 0, s = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Повний аналітичний опис множини гладких розв'язків систем (2.95), (2.97), (2.105), (2.109) у випадку $n = 4$ зроблений в роботі [50]. Відомо (див. [50]), що загальний розв'язок системи (2.95) задається однією із формул

$$\varphi(x) = A^s(\tau_1, \tau_2)x^s + B(\tau_1, \tau_2), \qquad s = \overline{0, 3}, \tag{2.110}$$

де функції $\tau_k = \tau_k(x)$, $k = 1, 2$, визначаються неявно:

$\frac{\partial A^s(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_k}x^s + \frac{\partial B(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_k}=0, \quad k = 1, 2,$

$A^s(\tau_1, \tau_2)$, $B(\tau_1, \tau_2)$ — довільні функції, що пов'язані співвідношеннями

$A_s A^s = 0$, $\frac{\partial A_s(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_k}\frac{\partial A^s(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_n} = 0$, $k, n = 1, 2$;

$$G(u, A^s(u)x^s, B^s(u)x^s) = 0, \tag{2.111}$$

де $G \in \mathbb{C}^1$ — довільна функція, $A^s(u)$, $B^s(u)$ — довільні гладкі функції, які пов'язані співвідношеннями

$A_s A^s = B_s B^s = A_s B^s = 0.$

Загальний розв'язок систем (2.97), (2.105) (див. [50]) має вигляд

$$\varphi(x) = A^s(\tau)x^s + R^1(\tau), \quad s = \overline{0, 3}, \tag{2.112}$$

де функція $\tau = \tau(x)$ визначається неявно $B^s(\tau)x^s + R^2(\tau) = 0$, функції $A^s(\tau)$, $B^s(\tau)$, $R^1(\tau)$, $R^2(\tau)$ пов'язані співвідношеннями

$A_s A^s = \pm 1$, $\dot{A}_s B^s = 0$, $A_s B^s = 0$, $B_s B^s = 0$.

Повний аналітичний опис множини гладких розв'язків систем (2.95), (2.97), (2.105), (2.109) проведений також у роботах [99, 100], [67]. У результаті цього в даному підрозділі отримано цілі класи точних розв'язків багатовимірного рівняння синус-Гордон.

Список використаних джерел

[1] Абловиц М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. — М. : Мир, 1987. — 480 с.

[2] Алгебро–геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений / Е. Д. Белоколос, А. И. Бобенко, В. Б. Матвеев, В. З. Эпольский // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, № 2. — С. 3–42.

[3] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1970. — 304 с.

[4] Баранник Л. Ф. О симметричной редукции и точных решениях уравнения Лиувилля / Л. Ф. Баранник // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 12. — С. 3–5.

[5] Баранник Л. Ф. О точных решениях нелинейного уравнения Шредингера в пространстве Минковского $R_{1,2}$ / Л. Ф. Баранник, В. А. Марченко // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 9. — С. 5–8.

[6] Барбашов Б. М. Модель релятивистской струны в физике адронов / Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 176 с.

[7] Барбашов Б. М. Решение и квантование нелинейной двумерной модели типа Борна-Инфельда / Б. М. Барбашов, Н. А. Черников // Журн. эксперим. и теорет. физики. — 1966. — Т. 60, № 5. — С. 1296–1308.

[8] Белоколос Е. Д. О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравнениний в частных производных, интегрируемых

методом обратной задачи теории рассеяния / Е. Д. Белоколос, В. З. Эпольский // Успехи мат. наук. — 1982. — Т. 37, № 4. — С. 89–120.

[9] Березанский Ю. М. Развитие методов обратной спектральной задачи интегрирования нелинейных разностных уравнений / Ю. М. Березанский // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, № 4. — С. 196–197.

[10] Березанский Ю. М. Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых разностных уравнений / Ю. М. Березанский, М. И. Гехтман, М. Е. Шмойш // Укр. мат. журн. — 1986. — Т. 38, № 1. — С. 84–89.

[11] Биркгоф Г. Гидродинамика / Г. Биркгоф. — М. : Иностранная литература, 1963. — 400 с.

[12] Блажко Л. М. Інваріантність квазілінійного рівняння другого порядку відносно конформної алгебри / Л. М. Блажко // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 40–44.

[13] Блажко Л. М. Нелокальні формули розмноження розв'язків рівняння синус-Гордона / Л. М. Блажко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — Т. 3. — С. 31–38.

[14] Блажко Л. М. Умовна інваріантність рівняння синус–Гордон / Л. М. Блажко // Доп. наук. конф. ПНТУ. — 2008. — С. 56–63.

[15] Глеба А. В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей–інваріантних рівнянь : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.03 / Глеба Аліна Володимирівна. — К., 2003. — 120 с.

[16] Жадан Т. О. Інваріантність системи рівнянь дифузії-конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея / Т. О. Жадан // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. : математика, механіка. — 2004. — Вип. 12. — С. 70–75.

[17] Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике / Н. Х. Ибрагимов // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, вып. 4 (286). — С. 83–144.

[18] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М. : Наука, 1983. — 280 с.

[19] Ічанська Н. В. Ліївська та умовна симетрії деяких нелінійних еволюційних рівнянь : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02 / Ічанська Наталія Василівна. — Полтава, 2005. — 148 с.

[20] Костенко В. Г. Інтегрування деяких диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом / В. Г. Костенко. — Л. : Львів. держ. ун-т, 1959. — 22 с.

[21] Лагно В. І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу / В. І. Лагно, С. В. Спічак, В. І. Стогній. // Праці Ін-ту математики НАН України : Мат-ка та її застосування. — К., 2002. — Т. 45. — 359 с.

[22] Лагно В. Про інваріантність квазілінійних рівнянь гіперболічного типу відносно тривимірних алгебр Лі / В. Лагно, О. Магда, Р. Жданов // Праці Ін-ту математики НАН України : Групові та аналітичні методи в математичній фізиці. — К., 2001. — Т. 36. — С. 136–158.

[23] Магда О. В. Симетрійна класифікація одного класу хвильових рівнянь / О. В. Магда // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 2. — С. 201–210.

[24] Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — К. : Наук. думка, 1977. — 331 с.

[25] Миллер У. мл. Симметрия и разделение переменных / У. мл. Миллер. — М. : Мир, 1981. — 342 с.

[26] Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача рассеяния / Л. П. Нижник. — К. : Наук. думка, 1973. — 182 с.

[27] Нижник Л. П. Интегрирование пространственно–двумерного уравнения Шредингера методом обратной задачи / Л. П. Нижник, М. Д. Починайко // Функц. анализ. — 1982. — Т. 16, вып. 1. — С. 80–82.

[28] Новиков С. П. Солитоны / С. П. Новиков. — М. : Мир, 1983. — 408 с.

[29] Новокшенов В. Ю. Математические модели в естествознании / В. Ю. Новокшенов. — Уфа : УГАТ ун-т, 1999. — 98 с.

[30] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. — М. : Мир, 1989. — 323 с.

[31] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations / L. V. Ovsiannikov. — New York : Academic Press, 1982. — 400 p.

[32] Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности / Л. В. Овсянников // ДАН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.

[33] Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений С. А. Чаплыгина / Л. В. Овсянников // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1960. — № 3. — С. 126–145.

[34] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — М. : Мир, 1989. — 581 с.

[35] Панчак О. А. Симетрія хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами / О. А. Панчак // Доп. НАН України. — 1998. — № 4. — С. 45–47.

[36] Позняк Э. Г. Уравнение синус-Гордона : геометрия и физика / Э. Г. Позняк, А. Г. Попов. — М. : Знание, 1991. — 48 с.

[37] Сєров М. І. Симетрійна редукція двовимірного і тривімірного рівняння Борна-Інфельда / М. І. Сєров, Л. М. Блажко // Вісн. Харків. нац. ун-ту. — 2000. — № 475. — С. 394–399.

[38] Сєров М. І. Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування / М. І. Сєров, Т. О. Жадан, Л. М. Блажко // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, № 8. — С. 1128–1145.

[39] Сєрова М. М. Симетрія деяких рівнянь електродинаміки відносно конформної алгебри / М. М. Сєрова, Л. М. Блажко // Вісн. Київ. ун-ту. — 2000. — № 2. — С. 113–118.

[40] Теория солитонов. Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. — М. : Наука, 1980. — 324 с.

[41] Уизем Д. Линейные и нелинейные волны / Д. Уизем. — М. : Мир, 1977. — 622 с.

[42] Филиппов А. Т. Многоликий солитон / А. Т. Филиппов. — М. : Наука, 1990. — 288 с.

[43] Френкель Я. О теории пластической деформации и двойникования / Я. Френкель, Т. Конторова // Физ. журн. — 1939. — № 1. — С. 137–145.

[44] Фущич В. И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? / В. И. Фущич // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. — К. : Ин-т математики, 1987. — С. 4–16.

[45] Фущич В. И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики / В. И. Фущич // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 246, № 4. — С. 846–850.

[46] Фущич В. И. Симметрия в задачах математической физики / В. И. Фущич // Теоретико–алгебраические исследования в математической физике. — К. : Ин–т математики, 1981. — С. 6–28.

[47] Фущич В. И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики / В. И. Фущич // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1456–1470.

[48] Фущич В. І. Диференціальні інваріанти алгебри Пуанкаре та конформної алгебри / В. І. Фущич, І. А. Егорченко // Доп. НАН України. — 1989. — № 5. —С. 21–22.

[49] Фущич В. И. О симметрийных свойствах комплекснозначных волновых уравнений / В. И. Фущич, И. А. Егорченко // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 298, № 2. — С. 347–351.

[50] Фущич В. И. Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала / В. И. Фущич, Р. З. Жданов, И. В. Ревенко // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1471–1487.

[51] Фущич В. И. Симметрия уравнений квантовой механики / В. И. Фущич, А. Г. Никитин. — М. : Наука, 1990. — 400 с.

[52] Фущич В. И. Симметрия уравнений Максвелла / В. И. Фущич, А. Г. Никитин. — К. : Наук. думка, — 1983. — 199 с.

[53] Фущич В. И. О точных решениях уравнения Борна-Инфельда / В. И. Фущич, Н. И. Серов // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 263, № 3. — С. 582–586.

[54] Фущич В. И. Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа-Ампера / В. И. Фущич, Н. И. Серов // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 273, № 3. — С. 543–546.

[55] Фущич В. И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности / В. И. Фущич, Н. И. Серов // Докл. АН УССР. — 1990. — Сер. А, № 7. — С. 24–27.

[56] Фущич В. И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности / В. И. Фущич, Н. И. Серов, В. И. Чопик // Докл. АН УССР. — 1988. — Сер. А, № 9. — С. 17–20.

[57] Фущич В. И. О некоторых точных решениях многомерных нелинейных уравнений Д'Аламбера, Лиувилля, эйконала и Дирака / В. И. Фущич, Н. И. Серов, В. М. Штелень // Теоретико–групповые методы в физике : труды 2-го междунар. семинара (Звенигород, 1982). — М. : Наука, 1983. — С. 100–105.

[58] Фущич В. И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов. — К. : Наук. думка, 1989. — 339 с.

[59] Фущич В. И. О нелинейном галилей-инвариантном обобщении уравнений Ламе / В. И. Фущич, С. Л. Славуцкий // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 287, № 2. — С. 320–323.

[60] Фущич В. И. О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований / В. И. Фущич, В. А. Тычинин. — К., 1982. — 53 с. — (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики ; № 82.33).

[61] Фущич В. И. Формула размножения решений уравнений Кортевега — де Фриза / В. И. Фущич, В. А. Тычинин, Н. И. Серов // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 5. — С. 716–720.

[62] Фущич В. И. О симметрии нелинейных уравнений электродинамики / В. И. Фущич, И. М. Цифра // Теоретическая и математическая физика. — 1985. — Т. 64, № 1. — С. 41–50.

[63] Фущич В. І. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь / В. І. Фущич, В. І. Чопик // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, № 10. — С. 1433–1443.

[64] Хруслов Е. Я. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза со ступенчастыми начальными данными / Е. Я. Хруслов // Мат. сб. — 1976. — Т. 99. — С. 261–281.

[65] Ames W. F. Group properties of $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$ / W. F. Ames, E. Adams, R. J. Lohner // Int. J. Non-Linear Mech. — 1981. — Vol. 16, № 5-6. — P. 439–447.

[66] Barone A. Theory and applicationcs of the sine-Gordon equatoin / A. Barone, F. Eposito, C. Magee, A. Scott // Riv. Nuovo cimento. — 1971. — № 1. — P. 227–267.

[67] Barannyk A. On a new method for constructing exact solitions of the nonlinear differential equations of mathematical physics / A. F. Barannyk, I. I. Yurik // J. Phys. A : Math. Gen. — 1998. — Vol. 31. — P. 4899–4907.

[68] Basarab-Horwath P. Preliminary group classification of the general quasi-linear ware equation / P. Basarab-Horwath, V. Lagno // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 2. — С. 9–30.

[69] Bateman H. The transformations of electrodynamical equations / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. — 1909. — Vol. 8. — P. 223-264.

[70] B*ä*clund A. V. Om Ytor med konstant negativ Kr*ö*kning / A. V. B*ä*clund // Lund Universitets Arsskrift. — 1883. — Vol. 19. — P. 1–48

[71] Bluman G. W. The general similarity solution of the heat equation / G. W. Bluman, J. D. Cole // J. Math. Mech. — 1969. — Vol. 18, № 11. — P. 1025–1042.

[72] Bluman G. Symmetries and differential equations / G. Bluman, S. Kumei. — New York : Springer. — Verlag. — 1989. — 142 p.

[73] Caudrey P. J. The sine-Gordon equationas a model field theory / P. J. Caudrey, J. C. Eibeck, J. D. Gibbon // Nuovo Cimento. — 1975. — Vol. 25. — P. 497–512.

[74] Clarkson P. New similarity solutions of the Boussinesq equation / P. Clarkson, M. D. Kruskal // J. Math. Phys. — 1989. — Vol. 30, № 10. — P. 2201–2213.

[75] Fedorchuk V. M. On symmetry reduction and some exact solutions of the multidimensional Born-Infeld equation / V. M. Fedorchuk, O. Leibov // Proceedings of the Third International Conference "Symmetry in Nonliner Mathematical Physics"(Kuiv, 2000). — Kyiv : Institute of Mathematics of NAN Ukraine. — 2000. — Vol. 1. — P. 109–115.

[76] Fushchich W. I. The Conditional Invariance and Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation / W. I. Fushchich, N. I. Serov, L. A. Tulupova // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. — 1993. — № 4. — P. 37–40.

[77] Fushchich W. I. On some exact solutions of the three- dimensional nonlinear Schrodinger equation / W. I. Fushchich, N. I. Serov // J. phys. A : Math. Gen. — 1987. — Vol. 20, № 16. — P. 929–933.

[78] Fushchych W. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics / W. Fushchych, W. Shtelen, N. Serov. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers. — 1993. — 436 p.

[79] Fushchych W. On reduction and exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry / W. Fushchych, I. Tsyfra // J. Phys. A : Math. Gen. — 1987. — Vol. 20. — P. 45–47.

[80] Fushchych W. Nonlinear representations for Poincare and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields / W. Fushchych, I. Tsyfra, V. Boyko // Nonl. Math. Phys. — 1994. — Vol. 1, № 2. — P. 210–221.

[81] Fushchych W. On linear and non-linear representations of the generalized Poincare groups in class of Lie vector fields / W. Fushchych, R. Zhdanov, V. Lahno // Nonl. Math. Phys. — 1994. — Vol. 1, № 3. — P. 295–308.

[82] Gardner C. Method for solving the Korteweg–de Vries equation / C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura // Phys. Rev. Lett. — 1967. — Vol. 19. — P. 1095–1097.

[83] Karczewska A. Statical solutions to turbulent diffusion / A. Karczewska // Pergamon: Nonlinear Analysis. — 1999. — Vol. 37. — P. 635–675.

[84] Lahno V. Realizations of the Poincare algebra and poincare-invariant equations in three-dimensional space-time / V. Lahno // Rep. on Math. Phys. — 2000. — Vol. 46. — P. 137–142.

[85] Lahno V. Group classification of nonlinear wave equations / V. Lahno, R. Zhdanov // J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 46. — P. 1–37.

[86] Levi D. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation / D. Levi, P. Winternitz // J. Phys. A : Math. Gen. — 1989. — Vol. 22, № 15. — P. 2915–2924.

[87] Lutfullin M. On covariant realizations of the Poincare group $AP(1,3)$ / M. Lutfullin // Rep. Math. Phys. — 2002. — Vol. 50. — P. 195–209.

[88] Nikitin A. G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix / A. G. Nikitin // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 332. — P. 666–690.

[89] Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations / P. Olver. — Berlin : Springer. — 1986. — 510 p.

[90] Olver P. Differential invariants and invariant differential equations / P. Olver // Lie Groups Appl. — 1994. — Vol. 1. — P. 177–192.

[91] Olver P. Direct reduction and differential constraints / P. Olver // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1994. — Vol. 444. — P. 509–523.

[92] Olver P. Group-invariant solutions of differential equations / P. Olver, P. Rosenau // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — Vol. 47. — P. 263–278.

[93] Oron A. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations / A. Oron, P. Rosenau // Phys. Lett. A. — 1986. — Vol. 118, № 4. — P. 172–176.

[94] Patera J. Subgroup of the Poincare group and their invariats / J. Patera, R. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenaus // J. Mat. Phys. — 1976. — Vol. 17, № 6. — P. 977–984.

[95] Patera J. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. 1. General method and the Poincare group / J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, № 8. — P. 1597–1624.

[96] Pucci E. Group analysis of the equation $u_{tt}+\lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ / E. Pucci // Riv. Mat. Univ. Parma. — 1987. — Vol. 17, № 4. — P. 71–87.

[97] Rideau G. Nonlinear equations invariant under the Poincare, similitude and confornal groups in two–dimensional spase–time / G. Rideau, P. Winternitz // J. Math. Phys. — 1990. — Vol. 31. — P. 1095–1105.

[98] Skyrme T. H. R. A Non–Linear Theory of Strong Interactuons / T. H. R. Skyrme // Proc. Roy. Soc. — 1958. — Vol. 247, № 1249. — P. 260–278.

[99] Smirnov V. I. New method for solving a plane problem of elastic oscillations / V. I. Smirnov, S. L. Sobolev // Proc. Of the Seismologicalinstitute of the Academi of Sciencer USSR. — 1932. — Vol. 20. — P. 37–42.

[100] Smirnov V. I. On application of a new method to the study of elastic oscillations in a space with the axial symmetry / V. I. Smirnov, S. L. Sobolev // Proc. Of the Seismologicalinstitute of the Academi of Sciencer USSR. — 1933. — Vol. 29. — P. 43–51.

[101] Steurwald R. Uber Ennepersche Flichen und bicklund'sche Transformation / R. Steurwald. — M*ü*nchen. : Abh. Bayer Akad. Wiss., 1936. — Vol. 40. — 105 p.

[102] Suhubi E. S. Group poperties and similarity solitions for a quasilinear ware equation in the plane / E. S. Suhubi, A. Bakkaloglu // Int. J. Non-Liner Mech. —1991. — Vol. 26. — P. 567–584.

[103] Zabusky N. J. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states / N. J. Zabusky, M. D. Kruskal // Phys. Rev. Lett. — 1965. — Vol. 15. — P. 240–243.

[104] Zhdanov R. Z. On covariant Realizations of the euclid group / R. Z. Zhdanov, V. I. Lahno, W. I. Fushchich // Commun. Math. Phys. — 2000. — Vol. 212 — P. 535–556.

[105] Zhdanov R. Z. New scale-invariant nonlinear differential equations for a complex scalar field / R. Z. Zhdanov, W. I. Fushchich, P. V. Marko // Physica D. — 1996. — P. 158–162.

[106] Zhdanov R.Z. A precise definition of reduction of partial differential equations / R. Z. Zhdanov, I. M. Tsyfra, R. O. Popovych // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — Vol. 238, № 1. — P. 101–123.

Сєров Микола Іванович
Блажко Людмила Миколаївна

Симетрійні властивості та точні розв'язки нелінійних рівнянь гіперболічного типу

Наукове видання

Головний редактор	Головний редактор
Технічний редактор	Темник З.М.
Коректор	Коректор
Комп'ютерна верстка	Булига С.О.

Підписано до друку 29.07.2010 р., формат $60 \times 90$1/16.
Папір офсетний. Гарнітура . Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 7,75. Наклад 200 прим., зам. 11111

ISBN 978-9667513-92-4

ТОВ "Кременчуцька міська друкарня "
вул.Перемоги, 34, м. Кременчук, Полтавська облю, Україна
Тел. (05366) 36365, 36254.