МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ,
ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА

М.І. Сєров, Н.В. Ічанська

ЛІЇВСЬКА ТА УМОВНА СИМЕТРІЇ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Монографія

Полтава – 2010

УДК 517.958 ББК 22.311 С32

РЕЦЕНЗЕНТИ:

В. М. Мойсишин — д–р техн. наук, проф. Івано – Франківського національного технічного університету нафти і газу;

В. Г. Самойленко — д–р фіз.-мат. наук, проф. Київського національного університету ім. Тараса Шевченка;

В.М. Федорчук — д–р фіз.-мат. наук, пров. наук. співр. Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

СЄРОВ М.І., Ічанська Н.В.

С32 **Ліївська та умовна симетрії нелінійних еволюційних рівнянь**: монографія / М.І. Сєров, Н.В. Ічанська. — Полтава: ПолтНТУ, 2010. – 144 с.

ISBN 978-966-616-079-2

Монографію присвячено дослідженню симетрійних властивостей нелінійних еволюційних рівнянь та знаходженню їх точних розв'язків. Досліджено Q-умовну симетрію (1+2)-вимірних рівнянь теплопровідності. Книга буде корисна і цікава студентам механіко-математичних спеціальностей, аспірантам, викладачам ВНЗ.

УДК 517.958 ББК 22.311

Рекомендовано до друку Вченою радою Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка (протокол № 16 від 2 липня 2010 року)

ISBN 978-966-616-079-2

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

У формулах індекси, позначені латинськими літерами, змінюються від 1 до n, грецькими — від 0 до n. За індексами, що повторюються, йде сумування. Нижні індекси функцій позначають диференціювання за відповідними змінними.

${}^{0}\eta$, ${}^{ab}\eta$, ${}^{abc}\eta$ — координати продовженого оператора Q.

MAI — максимальна алгебра інваріантності.

$\mathbb{R}^n$ — арифметичний дійсний n-вимірний простір.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множини натуральних та дійсних чисел відповідно.

$\underset{n}{X}$ — n-е продовження інфінітезимального оператора X.

δ_{ab} — символ Кронекера.

$u_{(n)}$ — сукупність всіх похідних функції u по змінній x_1 до порядку n.

$\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ — оператори диференціювання по x_μ.

$\partial_u = \dfrac{\partial}{\partial u}$ — оператор диференціювання по u.

$\triangle u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа від функції u.

Якщо $Q_a = A^a \partial_0 + B^{ab} \partial_b + C^a \partial_u$, то $Q_a u = 0$ означає, що $C^a - A^a u_0 - B^{ab} u_b = 0$.

ВСТУП

При дослідженні різних явищ природи часто приходять до математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь. З виникненням і наступним розвитком теорії диференціальних рівнянь природознавство дістало ефективний засіб моделювання та дослідження різноманітних задач науки та техніки.

Явища, які вивчаються в гідродинаміці, теорії пружності, електродинаміці, теорії теплопровідності, квантовій механіці, атомній фізиці тощо, описуються рівняннями математичної фізики [20]. Методи інтегрування диференціальних рівнянь почали інтенсивно розроблятись після появи "Математичних початків натуральної філософії " І. Ньютона в процесі дослідження проблем всесвітнього тяжіння і теорії світла. Розквіт методів класичної математичної фізики пов'язаний із прізвищами Ж. Лагранжа, Л. Ейлера, Ж.Л. д'Аламбера, П.С. Лапласа, Д. Бернуллі, Ж. Фур'є, М.В. Остроградського, А.М. Ляпунова, С. Лі та багатьох інших. Одним із таких методів є метод оберненої задачі розсіяння (та низка споріднених з ними методів). Цей метод було розроблено у 1967 році в спільній роботі К. Гарднера (C. Gardner), Дж. Гріна (J. Green), М. Крускала (M. Kruskal) і Р. Міури (R. Miura) [80] на прикладі нелінійного рівняння Кортевега–де Фріза. Протягом останніх десятиліть спостерігається потужний розвиток сучасної теорії інтегровності динамічних систем і застосування методів оберненої задачі розсіяння та спорідненим з ним підходів до розв'язання багатьох нелінійних диференціальних рівнянь. Важливу роль при цьому відіграли праці українських математиків, зокрема, В.А. Марченка [25], Ю.М. Березанського, Л.П. Нижника [27, 28], Є.Д. Білоколоса, [4, 5], Є.Я. Хруслова [63].

Не менш поширеним, ніж метод оберненої задачі розсіяння, методом для побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод Софуса Лі, в основі якого лежить принцип симетрії. Даний метод полягає в знаходженні та застосуванні операторів алгебри інваріантності (симетрій Лі) диференціального рівняння для знаходження його точних розв'язків.

Багато дослідників використовували і розвивали теорію С. Лі. Вперше ідеї Лі були застосовані Пуанкаре (1905 р.) до системи рівнянь Максвела. У 1918 році Е. Ньотер довела дві важливі теореми, які пов'язали групи симетрії з законами збереження. Г. Бейтман [68] ефективно використав симетрію лінійного хвильового рівняння для одержання його точних розв'язків. Роботи В.І. Смірнова і С.Л. Соболєва (1932 р.) були присвячені побудові та застосуванню функціонально–інваріантних розв'язків лінійного хвильового рівняння. Тривалий період результати С. Лі щодо групового аналізу диференціальних рівнянь з частинними похідними залишалися маловідомими. Г. Біркгоф першим наголосив на їх важливості і принциповій можливості застосування теорії груп у механіці [6]. Подальший розвиток метод С. Лі набув у роботах Л.В. Овсяннікова [31, 29, 30] і його школи, якими була створена теорія інваріантних і частково-інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь. Важливі результати були одержані Дж. Блуменом та І.Д. Коулом [70, 69], У. Міллером [26], П. Олвером [32, 95, 96, 98], Н.Х. Ібрагімовим [15, 16], П. Вінтерніцем [100, 101, 106]. В Україні перші роботи на цю тему були опубліковані львівським математиком В.Г. Костенком наприкінці 50-их років [19]. Провідну роль у цих дослідженнях відіграла українська школа теоретико-алгебраїчного аналізу, що була заснована В.І. Фущичем. Математичними основами теорії симетрій займалися українські математики П.І. Голод, А.У. Клімик [10].

В.І. Фущичем та А. Г. Нікітіним [49, 48, 47, 50, 51] розроблено новий підхід до дослідження алгебр інваріантності диференціальних рівнянь, головна відмінність якого від класичного полягає в тому, що базисні елементи алгебри інваріантності даних рівнянь є інтегродиференціальними операторами. Цей метод дослідження симетрійних властивостей рівнянь дозволив знайти нові симетрії багатьох добре відомих рівнянь квантової механіки: Дірака [58], Максвела [51], Ламе [59] тощо.

Виявляється, що є цілі класи рівнянь, що широко застосовуються при описані конкретних фізичних процесів, які не володіють лівською симетрією, а це означає, що стандартний метод Лі для них є малоефективним. І тому актуальною стала задача узагальнити метод Лі з метою побудови принципово нових анзаців і точних розв'язків, які не можуть бути отримані стандартним алгоритмом Лі. В 1969 році Дж. Блумен та І.Д. Коул в роботі [69] ввели поняття некласичної симетрії, яка дала можливість знаходити оператори інваріантності диференціальних рівнянь, відмінні від операторів С.Лі. Продовження розвитку ідей Блумена і Коула спостерігається в роботах Олвера та Розенау [98, 99], В.І. Фущича і І.М. Цифри [79]. На основі цих досліджень під керівництвом В.І. Фущича в роботах [49, 62, 57, 61] було розроблено новий метод знаходження симетрій, який отримав назву метод умовної симетрії. За допомогою цього методу можна виділити такі підмножини розв'язків диференціального рівняння, симетрія яких ширша, а іноді і зовсім відрізняється, від симетрії всієї множини його розв'язків. Результати досліджень умовної симетрії деяких конкретних рівнянь представлені в роботах [53, 61, 76, 88, 73].

Принципи симетрії відіграють фундаментальну роль у природознавстві. Закони збереження енергії, імпульсу, моменту кількості руху є наслідком однорідності, ізотропності чотиривимірного простору–часу. По відношенню до диференціальних рівнянь, симетрію можна також розглядати як принцип, за допомогою якого із найрізноманітніших логічно допустимих моделей (рівнянь, співвідношень) відбираються тільки ті, котрі володіють широкою симетрією. Це пов'язано, перш за все, з тим, що основні фізичні закони, рівняння руху, різні математичні моделі володіють явною чи умовною, геометричною чи негеометричною, локальною чи нелокальною симетріями. Усі основні рівняння математичної фізики (рівняння Ньютона, Лапласа, д'Аламбера, Шредінгера, Ліувілля, Дірака, Максвела і т.д.) інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень. Саме ця властивість виділяє їх із множини інших диференціальних рівнянь.

Побудова конструктивного математичного апарату, здатного виявляти різні типи симетрій, — одна з найважливіших задач якісної теорії диференціальних рівнянь. Не менш важливою є задача, в деякому змісті обернена до сформульованої вище: по заданій групі перетворень побудувати математичні моделі (рівняння чи системи), що володіють зазначеною симетрією. Розв'язанню таких актуальних задач і присвячена дана монографія.

Коротко сформулюємо основні поняття та визначення, що використовуються в роботі.

Нехай

$$S\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right) = 0, \quad S = (S^1, S^2, \ldots S^l) \tag{0.1}$$

система диференціальних рівнянь з частинними похідними r–го порядку, де $u = u(x)$; $x = (x_0, \vec{x})$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$; $\underset{k}{u}$ — сукупність похідних k–го порядку функцій u; $k = \overline{1, r}$; $k, n, m, r, l \in \mathbb{N}$.

Наведемо основні поняття групового аналізу згідно [32, 31].

Означення 0.1. *Група Лі локальних перетворень вигляду*

$$\widetilde{x}_\mu = f^\mu(x, u, \theta), \quad \widetilde{u}^k = g^k(x, u, \theta), \tag{0.2}$$

де $\mu = \overline{0, n}$, $k = \overline{1, m}$, $\theta = (\theta_b), b = \overline{1, l}$, називається l-параметричною групою точкових симетрій рівняння (0.1), якщо множина розв'язків (0.1) інваріантна відносно перетворень (0.2).

Означення 0.2. *Алгеброю Лі групи (0.2) називається лінійний векторний простір, базисом якого є диференціальні оператори*

$$X_b = \xi^{b\mu}(x, u)\partial_{x_\mu} + \eta^{bk}(x, u)\partial_{u^k}, \quad \text{де} \;\; \xi^{b\mu} = f^\mu_{\theta^b}\Big|_{\theta=0}, \;\; \eta^{bk} = g^k_{\theta^b}\Big|_{\theta=0}$$

зі стандартною операцією комутування.

Між групами Лі перетворень (0.2) і алгебрами Лі існує взаємнооднозначна відповідність (перша теорема Лі). Щоб відновити групу Лі по її алгебрі Лі, необхідно розв'язати наступну задачу Коші (систему рівнянь Лі):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f^\mu}{\partial \theta^b} = \xi^{b\mu}(f, g), \quad \frac{\partial g^k}{\partial \theta^b} = \eta^{bk}(f, g), \\ &f^\mu|_{\theta=0} = x_\mu, \qquad g^k|_{\theta=0} = u^k. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Сформулюємо алгоритм Лі знаходження алгебри інваріантності системи рівнянь (0.1).

Теорема 0.1. *Диференціальний оператор* $X = \xi^{\mu}(x,u)\partial_{x_\mu} + \eta^k(x,u)\partial_{u^k}$ *є оператором інваріантності (0.1) тоді і тільки тоді, коли*

$$\underset{r}{X} S\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right)\Bigg|_{S=0} \equiv 0, \qquad (0.4)$$

де $\underset{r}{X} = X + {}^{\mu_1}\eta^k \partial_{u^k_{\mu_1}} + \cdots + {}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}\eta^k \partial_{u^k_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}}$,

$${}^{\mu_1}\eta^k = D_{\mu_1}(\eta^k) - u^k_{\nu} D_{\mu_1}(\xi^{\nu}),$$

$${}^{\mu_1\mu_2}\eta^k = D_{\mu_2}({}^{\mu_1}\eta^k) - u^k_{\mu_1\nu} D_{\mu_2}(\xi^{\nu}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$${}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\eta^k = D_{\mu_r}({}^{\mu_1\cdots\mu_{r-1}}\eta^k) - u^k_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{r-1}\nu} D_{\mu_r}(\xi^{\nu}),$$

$$D_{\mu} = \partial_{x_\mu} + u^k_{\mu}\partial_{u^k} + u^k_{\mu\mu_1}\partial_{u^k_{\mu_1}} + \cdots + u^k_{\mu\mu_1\cdots\mu_{r-1}}\partial_{u^k_{\mu_1\cdots\mu_{r-1}}},$$

$$\mu, \mu_1, \ldots \mu_r, \nu = \overline{0, n}, \qquad k = \overline{1, m}.$$

Записавши (0.4) в розгорнутому вигляді, після розщеплення по похідним, отримуємо систему лінійних рівнянь з частинними похідними відносно координат ξ, η оператора X (систему визначальних рівнянь), загальний розв'язок якої визначає максимальну в розумінні Лі алгебру інваріантності рівняння (0.1). Використовуючи формули (0.3), можна визначити локальні групи Лі, що відповідають даній алгебрі.

Використовуючи поняття інваріантності, розв'язується задача опису диференціальних рівнянь, які є інваріантними відносно даної групи [31, 32, 78], будуються широкі класи інваріантних розв'язків (алгоритм редукції та знаходження розв'язків, див. детальніше [31, 32, 78]).

У другому розділі роботи використовується поняття інваріантності рівняння відносно операторів Q-умовної симетрії [62] та відносно інволютивних множин Q-умовних операторів [104].

Означення 0.3. *[115] Множина диференціальних операторів першого порядку*

$$Q_a = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ai}(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_a(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \quad a = 1,\dots,m, \tag{0.5}$$

називається інволютивною, якщо існують гладкі функції

$$\mu_{ab}^{c}(x,u), \quad a,b,c = 1,\dots,m,$$

такі, що

$$[Q_a, Q_b] = \sum_{c=1}^{m} \mu_{ab}^{c}(x,u)Q_c.$$

Означення 0.4. *[104] Диференціальне рівняння з частинними похідними (0.1) ($l = 1$) є Q-умовно інваріантним відносно інволютивної множини диференціальних операторів (0.5), якщо*

$$\left. \underset{r}{Q_a} S \right|_{S=0,\, M} = 0,$$

де M – множина всіх диференціальних наслідків рівнянь $Q_a[u^b] = 0$, порядок яких як диференціальних рівнянь не перевищує порядку рівняння (0.1).

Означення 0.5. *[104] Множини диференціальних операторів першого порядку $Q = \{Q_\alpha\}$ та $\tilde{Q} = \{\tilde{Q}_\alpha\}$ називаються еквівалентними, якщо вони задовольняють умову $\tilde{Q} = A(x,u)Q$, де $A(x,u)$ – невироджена функціональна матриця.*

Означення 0.6. *[34] Дві інволютивні множини називаються еквівалентними відносно групи перетворень, якщо існує перетворення з групи, що перетворює одну інволютивну множину в еквівалентну іншій.*

РОЗДІЛ 1

Q-умовна симетрія нелінійних (1+2)-вимірних рівнянь теплопровідності

У теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними важливу роль відіграють рівняння, яким притаманні нетривіальні симетрійні властивості. Як правило, такі рівняння плідно використовуються для математичного моделювання об'єктів, явищ і процесів у різних наукових галузях, і саме вони стимулюють виникнення та розвиток нових понять і методів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Одним з таких рівнянь є лінійне рівняння теплопровідності. У 1969 році Блумен і Коул [69] саме на прикладі лінійного (1+1)-вимірного рівняння теплопровідності ввели поняття некласичної симетрії диференціального рівняння з частинними похідними. Така симетрія узагальнюється поняттям умовної симетрії, яке введене в [62] (див. також [46, 49, 48, 53, 54, 77, 79, 87, 88, 105]). Метод умовної симетрії дає можливість одержувати такі підмножини розв'язків диференціальних рівнянь, симетрія яких ширша, а іноді зовсім відрізняється від симетрії всієї множини розв'язків.

Задача дослідження Q-умовної інварінтності лінійного рівняння теплопровідності розглядалася багатьма авторами, як (1+1)-вимірного [69, 33, 75, 103, 111] так і n-вимірного [34]. Не менш цікавим для дослідження є нелінійне рівняння теплопровідності. Дослідженню його умовних симетрій присвячена ціла низка робіт. Зокрема, в роботах В.І. Фущича та його учнів[37, 53, 54, 55, 76] були досліджені умовні симетрії нелінійного рівняння теплопровідності у випадку одної просторової змінної x_1.

Q-умовна інваріантність лінійного одновимірного рівняння теплопровідності вивчена в роботах [111, 75, 103]. Задача про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності розв'язана в [34]. У роботах [37, 53, 76, 57] досліджена умовна та Q-умовна симетрія одновимірних (1+1) нелінійних рівнянь теплопровідності

$$H(u)u_0 + u_{11} = F(u). \tag{1.1}$$

Цей розділ присвячений дослідженню Q-умовної симетрії нелінійних (1+2)-вимірних (1+2) рівнянь теплопровідності:

$$H(u)u_0 + \triangle u = F(u), \tag{1.2}$$

де $u = u(x) \in \mathbb{R}^1, x = (x_0, \vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^2, H(u)$ та $F(u)$ — довільні гладкі функції. Будь-яке рівняння (1.2) за допомогою заміни $u \to \int H(u)du$ можна привести до вигляду

$$u_0 + \nabla(g(u)\nabla u) = f(u), \tag{1.3}$$

де g та f виражаються через F та H.

Q-умовну симетрію рівнянь (1.2) будемо вивчати як відносно оператора

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B^a(x,u)\partial_a + C(x,u)\partial_u, \tag{1.4}$$

так і відносно множини двох операторів

$$Q_a = A^a(x,u)\partial_0 + B^{ab}(x,u)\partial_b + C^a(x,u)\partial_u, \tag{1.5}$$

де A, B^a, C, A^a, B^{ab}, C^a — довільні гладкі функції, $a = 1, 2$.

У даному розділі розв'язані задачі повного опису операторів (1.4), відносно яких за умови $H \neq 0$, рівняння (1.2) є Q-умовно інваріантним та дослідження Q-умовної інваріантності даного нелінійного рівняння відносно інволютивної множини двох операторів (1.5).

Будь-який оператор ліївської інваріантності є також оператором Q-умовної інваріантності, з іншого боку дослідження буде проводитися з точки зору перетворень еквівалентності, тому в першому підрозділі наведено результати вичерпної групової класифікації в класі рівнянь (1.2), а в наступних підрозділах знайдені оператори Q-умовної інваріантності, які не є еквівалентними ліївським.

Зазначимо, що функції H та F, при яких рівняння (1.2) зводяться локальною заміною до лінійного рівняння теплопровідності ми також не розглядаємо, оскільки це рівняння досліджено в [34].

1.1. Групова класифікація

Ліївська симетрія нелінійних рівнянь теплопровідності у вигляді (1.3) добре вивчена для довільної кількості просторових змінних n. Цій темі присвячена ціла низка робіт [12, 13, 43, 29], де знайдено МАІ рівнянь (1.3) у залежності від вигляду функцій g, f та значення n. У згаданих вище роботах групова класифікація проводилася лише з точністю до перетворень з основної групи еквівалентності без врахування додаткових перетворень еквівалентності. Для (1+1)-вимірних рівнянь (1.3) групова класифікація разом з додатковими перетвореннями еквівалентності наведена в [85]. У цьому підрозділі проведено групову класифікацію у класі (1+2)-вимірних рівнянь теплопровідності вигляду (1.2) з урахуванням додаткових перетворень еквівалентності.

Теорема 1.1. *Максимальною локальною групою $G^{\sim}$ точкових перетворень еквівалентності рівнянь (1.2) є група, що задається перетвореннями*

$$\begin{aligned} &x_0 \to \beta_0 x_0 + \alpha_0, \;\; x_a \to \beta_1 x_a + \gamma_{ab} x_b + \alpha_a, \;\; u \to \beta_2 u + \alpha_3, \\ &H \to \beta_0 \beta_1^{-2} H, \qquad F \to \beta_2 \beta_1^{-2} F, \end{aligned} \tag{1.6}$$

де $\beta_0, \beta_2 \neq 0$, $\beta_1 > 0$, α_l, γ_{ab} — сталі, $(\gamma_{ab}) \in O(2)$, $a, b = 1, 2$, $l = \overline{0, 3}$.

Доведення. Оскільки функції H та F залежать тільки від u, то для них справедливі умови

$$H_{x_\mu} = 0, \quad F_{x_\mu} = 0, \quad H_{u_\mu} = 0, \quad F_{u_\mu} = 0. \tag{1.7}$$

Розглянемо оператор еквівалентності

$$E = \xi^0 \partial_0 + \xi^a \partial_a + \eta \partial_u + \zeta^1 \partial_H + \zeta^2 \partial_F,$$

ξ^μ, η — функції від x, u, ζ^a — функції від x, u, H, F. З умови інваріантності (1.2) та (1.7) відносно оператора E, одержуємо систему визначальних рівнянь на коефіцієнти цього оператора:

$$\begin{aligned} &\xi^0_a = 0, \; \xi^0_u = 0, \; \xi^a_0 = \xi^a_u = 0, \; \xi^1_1 = \xi^2_2, \; \xi^1_2 = -\xi^2_1, \; \eta_{uu} = 0, \eta_\mu = 0, \\ &\zeta^a_\mu = 0, \; \zeta^1 = (\xi^0_0 - 2\xi^1_1)H, \; \zeta^2 = (\eta_u - 2\xi^1_1)F. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Загальним розв'язком системи (1.8) є функції

$$\begin{aligned} &\xi^0 = \varkappa_0 x_0 + d_0, \; \xi^a = \varkappa_1 x_a + c_{ab} x_b + d_a, \; \eta = \varkappa_2 u + d_3, \; c_{ab} + c_{ba} = 0, \\ &\zeta^1 = (\varkappa_0 - 2\varkappa_1)H, \; \zeta^2 = (\varkappa_2 - 2\varkappa_1)F. \end{aligned}$$

Отже, алгеброю Лі групи $G^{\sim}$ є алгебра

$$A^{\sim} = \langle \partial_0, \; \partial_a, \; J_{12}, \; x_0\partial_0 + H\partial_H, \; x_a\partial_a - 2F\partial_F, \; u\partial_u + F\partial_F . \rangle$$

Це означає, що зв'язна компонента одиниці в $G^{\sim}$ задається перетвореннями

$$
\begin{aligned}
&x_0 \to e^{\theta_5} x_0 + \theta_1,\\
&x_1 \to e^{\theta_6}(x_1 \cos\theta_8 - x_2 \sin\theta_8) + \theta_2,\\
&x_2 \to e^{\theta_6}(x_1 \sin\theta_8 + x_2 \cos\theta_8) + \theta_3,\\
&u \to e^{\theta_7} u + \theta_4, \;\; H \to e^{\theta_5 - 2\theta_6} H, \;\; F \to e^{\theta_7 - 2\theta_6} F.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Крім неперервних перетворень еквівалентності (1.9), клас рівнянь (1.2) також допускає наступні дискретні перетворення:

$$
\begin{aligned}
&x_0 \to x_0, \quad x_1 \to -x_1, \quad x_2 \to x_2, \quad u \to u, \quad H \to H, \quad F \to F;\\
&x_0 \to x_0, \quad x_a \to x_a, \quad u \to -u, \quad H \to H, \quad F \to -F;\\
&x_0 \to -x_0, \quad x_a \to x_a, \quad u \to u, \quad H \to -H, \quad F \to F.
\end{aligned}
$$

Разом неперервні та дискретні перетворення задають перетворення вигляду (1.6), які вичерпно описують всі перетворення групи еквівалентності $G^{\sim}$.

Теорему 1.1 доведено.

Використовуючи результати одержані в роботах [13, 85] для рівнянь (1.3), ми можемо отримати групову класифікацію для класу рівнянь (1.2). Результати цієї класифікації наведемо в вигляді наступної теореми.

Теорема 1.2. *Для будь-яких значень функцій H та F з точністю до групи еквівалентності (1.6) групова класифікація нелінійних рівнянь (1.2) вичерпно описується випадками, що наведені в таблиці 2.1.*

Таблиця 2.1

№	$H(u)$	$F(u)$	Лiївська симетрія	Зауваження
1	$\forall$	$\forall$	$A=\langle\partial_0,\ \partial_a,\ J_{12}=x_1\partial_2-x_2\partial_1\rangle$	
2	$\forall$	0	$A+\langle D=2x_0\partial_0+x_a\partial_a\rangle$	
3	e^{ku}	λe^{mu}	$A+\langle D_1=2(m-k)x_0\partial_0+mx_a\partial_a-2\partial_u\rangle$	$m\neq k$
3a	e^u	$\lambda_0e^u+\lambda$	$A+\langle D_4=e^{\lambda_0x_0}(\partial_0+\lambda_0\partial_u)\rangle$	$\lambda\neq 0$
4	u^k	λu^m	$A+\langle D_2=2(m-k-1)x_0\partial_0+(m-1)x_a\partial_a-2u\partial_u\rangle$	$(k,m)\neq(0,0)$, $m\neq k+1$
4a	u^k	$\lambda_0u^{k+1}+\lambda u$	$A+\langle D_5=e^{-\lambda_0kx_0}(\partial_0-\lambda_0u\partial_u)\rangle$	$\lambda\neq 0$
5	1	$\lambda u\ln u$	$A+\langle e^{\lambda x_0}(\partial_a+\frac{\lambda}{2}x_au\partial_u),\ e^{\lambda x_0}u\partial_u\rangle$	
6	u^k	0	$A+\langle D,\ D_3=kx_a\partial_a-2u\partial_u\rangle$	$k\neq 0$
6a	u^k	λ_0u^{k+1}	$A+\langle D_3,\ D_5\rangle$	$k\neq 0$
7	e^u	0	$\langle\partial_0,\ x_0\partial_0+\partial_u,\ \xi^a(\vec{x})\partial_a-2\xi^1_1\partial_u\rangle$	$\xi^1_2+\xi^2_1=0$, $\xi^1_1=\xi^2_2$
7a	e^u	λ_0e^u	$A+\langle D_4,\ \xi^a(\vec{x})\partial_a-2\xi^1_1\partial_u\rangle$	$\xi^1_2+\xi^2_1=0$, $\xi^1_1=\xi^2_2$

Тут $\lambda_0\neq 0,\lambda\neq 0,m,k$ — сталі, $\lambda\in\{-1;1\}\bmod G^\sim$. У випадку 3 стала $k\in\{0;1\}\bmod G^\sim$ та $m\in\{0;1\}\bmod G^\sim$. У випадках 1 та 2, наведені алгебри є максимальними, якщо рівняння не є еквівалентним рівнянням, наведеним у випадках 3–7.

Зауваження. Зазначимо також, що локальними перетвореннями

$$u\to e^{\lambda_0x_0}u,\ x_0\to\frac{1}{\lambda_0k}e^{\lambda_0kx_0}\quad\text{та}\quad u\to u-\lambda_0x_0,\ x_0\to-\frac{1}{\lambda_0}e^{-\lambda_0x_0}\tag{1.10}$$

рівняння

$$u^ku_0+\triangle u=\lambda_0u^{k+1}+\lambda u,\quad e^uu_0+\triangle u=\lambda_0e^u+\lambda\tag{1.11}$$

зводяться, відповідно, до рівнянь $u^ku_0+\triangle u=\lambda u,\quad e^uu_0+\triangle u=\lambda.$ Тому в таблиці 2.1 випадки, що мають один номер зводяться один до другого, а саме $3a \to 3\,(k = 1,\, m = 0)$, $4a \to 4\,(m = 1)$, $6a \to 6$, $7a \to 7$.

1.2. Класифікація операторів Q-умовної симетрії

Дослідимо спочатку Q-умовну симетрію рівнянь вигляду (1.2) відносно операторів (1.4) (тобто інволютивних множин, що складаються з одного оператора).

З точністю до відношення еквівалентності на операторах Q-умовної симетрії та перетворень з ядра основних груп рівнянь (1.2) (поворотів змінних x_1 і x_2) можна вирізняти два класи:

$$Q = \partial_0 + B^a(x,u)\partial_a + C(x,u)\partial_u, \tag{1.12}$$

$$Q = \partial_1 + B(x,u)\partial_2 + C(x,u)\partial_u, \tag{1.13}$$

де B^a, C, B — довільні гладкі функції, $a = 1, 2$. Достатньо вважати, що коефіцієнт при ∂_1 не дорівнює нулю, оскільки будь-яке рівняння з нашого класу є інваріантним відносно поворотів.

Теорема 1.3. *Рівняння (1.2) є Q-умовно інваріантним відносно оператора (1.12), якщо функції B^a, C задовольняють наступним умовам*

$$\begin{gathered} B^a_u = 0, \quad C_{uu} = 0, \quad B^1_1 = B^2_2, \quad B^1_2 = -B^2_1, \\ \dot{H}C^2 - \dot{F}C + HC_0 + \triangle C + FC_u - 2B^2_2(F - HC) = 0, \\ \dot{H}CB^a + HB^a_0 - 2C_{au} + 2HB^aB^1_1 = 0 \end{gathered} \tag{1.14}$$

та оператора (1.13), якщо

$$
\begin{aligned}
&B_u = 0, C_{uu} = 0, (B^2+1)C\dot{H} = 2(BB_1 - B_2)H,\\
&B_0H = -2BC_{1u} + 2C_{2u} + 2B_1C_u - \triangle B +\\
&+\frac{2}{B^2+1}[BB_aB_a - 2(B_1 + BB_2)C_u],\\
&C\dot{F} - C_uF = C_0H + 2CC_{1u} + \triangle C -\\
&-\frac{2}{B^2+1}[(C_1 + CC_u - F)(BB_1 - B_2) + (B_1 + BB_2)C_2].
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Доведення грунтується на критерії Q-умовної інваріантності (див. означення 0.4). В цьому випадку функція $S = Hu_0 + \triangle u - F$, а множина диференціальних наслідків складається з трьох рівнянь. Оскільки функції B^a, C, H, F не залежать від похідних, то ми можемо розщепити по незв'язним похідним. Розщеплення суттєво розрізняється для операторів (1.12) та (1.13). Після стандартних перетворень, в результаті одержимо рівності (1.14) та (1.15).

Теорема 1.3 доведена.

Для того, щоб отримати остаточні результати, нам треба знайти загальні розв'язки систем (1.14) та (1.15) з точністю до перетворень еквівалентності (1.6).

Має місце наступне твердження.

Теорема 1.4. *Будь-який оператор (1.4) Q-умовної симетрії нелінійного рівняння теплопровідності (1.2) або є еквівалентним оператору ліївської симетрії цього рівняння, або з точністю до перетворень з групи еквівалентності (1.6) та додаткових перетворень (1.10) є еквівалентним одному з операторів, що наведені в таблиці 2.2.*

Таблиця 2.2

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори	Зауваження
1	$\forall$	$(\lambda_1 u + \lambda_2)[H + \lambda_0]$	$Q = \partial_0 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u$	$(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$
2	u	$\lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$	$Q = \partial_0 + [\lambda_2 u - b(\vec{x})]\partial_u$	$\triangle b = b^2 + \lambda_1 b + \lambda_2 \lambda_0$
3	1	$\lambda u \ln u$, $\lambda \neq 0$	$Q = \partial_1 + a(x_0, x_1)u\partial_u$	$a_0 + a_{11} = -2aa_1 + \lambda a$

Тут λ, λ_0, λ_1, λ_2 — довільні сталі.

Доведення теореми 1.4 є громіздким, тому його викладу присвячено два наступних підрозділи. При цьому в першому підрозділі розглянуто оператори вигляду (1.12), а в другому — (1.13).

Теорема 1.4 дає повне розв'язання задачі опису операторів (1.4) Q-умовної інваріантності рівняння (1.2) за умови $H \neq 0$. Зауважимо, що раніше ця задача розглядалася в роботі [82] тільки для класу операторів вигляду (1.12). Результати з [82] не є вичерпними і містяться серед результатів отриманих в цьому підрозділі.

1.3. Доведення для першого класу операторів

Щоб побудувати всі можливі оператори (1.12) Q-умовної інваріантності рівняння (1.2), потрібно знайти загальні розв'язки системи (1.14). Перепишемо систему (1.14) у такому вигляді

$$B^a = B^a(x), \quad C = \alpha(x)u + b(x), \quad B_1^1 = B_2^2, \quad B_2^1 = -B_1^2, \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} &(\alpha u + b)B^a \dot{H} + (B_0^a + 2B_1^1 B^a)H = 2\alpha_a, \\ &(\alpha u + b)\dot{F} + (2B_1^1 - \alpha)F = (\alpha u + b)^2 \dot{H} + \\ &+[(\alpha_0 + 2B_1^1\alpha)u + b_0 + 2B_1^1 b]H + u\triangle\alpha + \triangle b. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Проаналізуємо структуру рівнянь системи (1.17) по змінній u. Оскільки функції, що входять до цієї системи залежать від різних невідомих, то, ввівши припущення

$$
\begin{aligned}
&\alpha B^a = s_1\Phi^a(x),\ bB^a = s_2\Phi^a(x),\\
&B_0^a + 2B_1^1 B^a = -s_3\Phi^a(x),\ 2\alpha_a = s_4\Phi^a(x),\\
&\alpha = m_1\varphi(x),\ b = m_2\varphi(x),\ 2B_1^1 - \alpha = -m_3\varphi(x) + k_3\varphi^2(x),\\
&\alpha_0 + 2B_1^1\alpha = m_4\varphi(x) + k_4\varphi^2(x),\ b_0 + 2B_1^1 b = m_5\varphi(x) + k_5\varphi^2(x),\\
&\triangle\alpha = m_6\varphi(x) + k_6\varphi^2(x),\ \triangle b = m_7\varphi(x) + k_7\varphi^2(x),
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

де s_i, m_i, k_i — довільні сталі, а $\varphi(x), \Phi^a(x)$ — довільні гладкі функції, $i = \overline{1,5}$, отримаємо рівняння

$$
\begin{aligned}
&(s_1u + s_2)\dot{H} - (s_3H + s_4) = 0,\\
&(m_1u + m_2)\dot{F} - m_3F - (m_4u + m_5)H - m_6u - m_7 =\\
&= \varphi(x)[-k_3F + (m_1u + m_2)^2\dot{H} + (k_4u + k_5)H + k_6u + k_7],
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

які ми назвемо структурними для функцій $H(u)$ та $F(u)$.

Проаналізувавши перше рівняння системи (1.19), ми бачимо, що у випадку довільної функції H необхідно накласти умови

$$
s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0. \tag{1.20}
$$

З (1.18) випливає, що умови (1.20) можливі в двох випадках $\alpha = b = 0$ або $B^a = \alpha_a = 0$. Друге рівняння (1.19) не залежить від змінної x у випадках $(\alpha, b) = \mathrm{const}$ або $H = \mathrm{const}$. В протилежному випадку друге рівняння (1.19) розіб'ється на систему двох рівнянь

$$
\begin{aligned}
&(m_1u + m_2)\dot{F} - m_3F = (m_4u + m_5)H + m_6u + m_7,\\
&k_3F = (m_1u + m_2)^2\dot{H} + (k_4u + k_5)H + k_6u + k_7.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Таким чином розв'язання системи рівнянь (1.19) зводиться до п'яти різних випадків:

I. $\alpha = b = 0$;

II. $B^a = \alpha_a = 0$;

III. $(\alpha, b) = \mathrm{const}$, будемо вважати, що $(\alpha, b) \neq (0, 0)$, $B^a \neq 0$, бо це окремі випадки;

IV. $H = \mathrm{const}$, так як рівняння $\lambda u_0 + \triangle u = F(u)$ заміною $x_0 \to \lambda x_0$ зводиться до рівняння $u_0 + \triangle u = F(u)$, то можна вважати $H = 1$;

V. $H \neq \mathrm{const}$, $(\alpha, b) \neq \mathrm{const}$.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

I. Нехай $\alpha = b = 0$. Тоді система рівнянь (1.16)–(1.17) зводиться до системи

$$B_1^1 = B_2^2,\ B_2^1 = -B_1^2,\ B_0^a + 2B_1^1 B^a = 0,\ B_1^1 F = 0, \tag{1.22}$$

розв'язки якої залежать від значення функції F.

При $F \neq 0$ рівняння (1.22) задають систему $B_1^1 = B_2^2 = 0$, $B_0^a = 0$, $B_2^1 = -B_1^2$. Легко перевірити, що загальним розв'язком цієї системи є такі функції B^a, які породжують лінійну комбінацію ліївських операторів, а саме зсувів та поворотів по просторових координатах.

При $F = 0$ систему рівнянь (1.22) перепишемо наступним чином:

$$B_1^1 = B_2^2,\ B_2^1 = -B_1^2, \tag{1.23}$$

$$B_0^a + 2B_1^1 B^a = 0. \tag{1.24}$$

Загальний розв'язок системи рівнянь (1.24) має вигляд:

$$\varkappa(2x_0 B^1 - x_1) = \varphi^1(x_2,\ B^1), \quad \varkappa(2x_0 B^2 - x_2) = \varphi^2(x_1,\ B^2), \tag{1.25}$$

де φ^1, φ^2 — довільні гладкі функції, $\varkappa$ — довільна стала. Підставивши (1.25) в рівняння (1.23), одержимо

$$\varphi^a = -d_0 B^a + C_{ab} x_b + d_a, \tag{1.26}$$

де $d_0, d_a, C_{ab} = -C_{ba}$ — довільні сталі, $a, b = 1, 2$, $a \neq b$. З (1.25) та (1.26) одержуємо загальний розв'язок системи (1.23)–(1.24) у вигляді

$$B^a = \frac{\varkappa x_a + C_{ab}x_b + d_a}{2\varkappa x_0 + d_0}. \tag{1.27}$$

Після підстановки знайдених функцій B^a в (1.12) отримаємо Q-умовний оператор, який є еквівалентний лінійній комбінації ліївських операторів $Q = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + C_{12}J_{12} + \varkappa D$, наведених у таблиці 2.1.

II. Нехай $B^a = 0,\ \alpha = \alpha(x_0)$**.** З системи (1.17) одержимо

$$(\alpha u + b)\dot{F} - \alpha F = (\alpha u + b)^2\dot{H} + (\dot{\alpha}u + b_0)H + \triangle b, \tag{1.28}$$

де $b = b(x_0, x_1, x_2)$, $F = F(u)$, $H = H(u)$ — довільні гладкі функції, що підлягають визначенню. Друге рівняння системи (1.19) набуде вигляду

$$\begin{aligned}&(m_1u + m_2)\dot{F} - m_1F - (m_4u + m_5)H - m_7 = \\ &= \varphi(x)[(m_1u + m_2)^2\dot{H} + (k_4u + k_5)H + k_7].\end{aligned} \tag{1.29}$$

Аналогічно як і для системи (1.19) можливі такі випадки:

II.1. $(\alpha, b) = (\lambda_1, \lambda_2) = \text{const}$. Тоді рівняння (1.29) має вигляд диференціального лінійного рівняння першого порядку відносно функції F

$$(\lambda_1u + \lambda_2)\dot{F} - \lambda_1F = (\lambda_1u + \lambda_1)^2\dot{H},$$

яке інтегрується при довільній функції H: $F = (\lambda_1u + \lambda_2)(H + \lambda_0)$, де λ_0 — стала інтегрування. Оператор (1.12) має вигляд

$$Q = \partial_0 + (\lambda_1u + \lambda_2)\partial_u,$$

що відповідає пункту 1 таблиці 2.2.

II.2. $(\alpha, b) \neq \text{const}$. Тоді з рівняння (1.29) випливають умови

$$\begin{aligned}&(m_1u + m_2)\dot{F} - m_1F - (m_4u + m_5)H - m_7 = 0, \\ &(m_1u + m_2)^2\dot{H} + (k_4u + k_5)H + k_7 = 0.\end{aligned} \tag{1.30}$$

Розв'язки системи рівнянь (1.30) з точністю до локальних перетворень (1.6), (1.10) задають такі суттєво різні випадки:

$$
\begin{array}{ll}
H = 1, & F = \lambda u \ln u, \quad \lambda \neq 0; \\
H = e^u + \lambda_1, & F = \lambda_2 e^u + \lambda_3 u + \lambda_4; \\
H = u, & F = \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0, \quad \lambda_2 \neq 0; \\
H = u^m, \quad m \neq 0, 1, & F = \lambda u.
\end{array}
$$

Для кожного з випадків, підставивши відповідні функції H та F в рівняння (1.28), отримаємо системи рівнянь відносно функцій α та b.

Для першого випадку функції α та b повинні задовольняти рівняння $b = 0$, $\dot{\alpha} = \lambda\alpha$, розв'язком яких є функції $b = 0$, $\alpha = \lambda_1 e^{\lambda x_0}$, що задають оператор $Q = \partial_0 + \lambda_1 e^{\lambda x_0} u \partial_u$, який є ліївським (див. пункт 8 в таблиці 2.1).

У другому випадку після підстановки відповідних функцій H та F в (1.28), отримаємо рівняння

$$\alpha = 0, \quad b_0 + (b - \lambda_2) b = 0, \quad \lambda_1 b_0 + \triangle b = \lambda_3 b,$$

розв'язок яких залежить від значення сталої λ_2. Тому отримуємо:

1. При $\lambda_2 = 0$, $\alpha = 0$, $b = \frac{1}{x_0 + d_0}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$,
   $H = e^u$, $F = \lambda_4$, $Q = (x_0 + d_0)\partial_0 + \partial_u$;
2. При $\lambda_2 \neq 0$, $\alpha = 0$, $b = \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_5 e^{-\lambda_2 x_0}}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$,
   $H = e^u$, $F = \lambda_2 e^u + \lambda_4$, $Q = (1 + \lambda_5 e^{-\lambda_2 x_0})\partial_0 + \lambda_2 \partial_u$.

Знайдені оператори з точністю до локальних перетворень (1.10), (1.6) є ліївські (пункт 4 в таблиці 2.1).

Коли $H = u$, $F = \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$, з системи (1.28) отримуємо рівняння $\dot{\alpha} + (\alpha - \lambda_2)\alpha = 0$, $b_0 + 2(\alpha - \lambda_2) b = 0$, $\triangle b + b^2 = \lambda_1 b - \lambda_0 \alpha$ після розв'язання яких маємо:

1. $\alpha = \dfrac{1}{x_0 + d_0}$, $b = 0$, $\lambda_2 = \lambda_0 = 0$: $Q = (x_0 + d_0)\partial_0 + u\partial_u$. Отриманий оператор є еквівалентним ліївському з таблиці 2.1 (пункт 6);

2. $\alpha=\lambda_2$, $b=-b(\vec{x})$: $Q=\partial_0+[\lambda_2 u-b(\vec{x})]\partial_u$, де b — розв'язок рівняння $\triangle b=b^2+\lambda_1 b+\lambda_0\lambda_2$. Отриманий оператор є Q-умовним, який наведено в таблиці 2.2 пункт 2.

Залишилося розглянути пару функцій $H=u^m$, $F=\lambda u$, де $m\neq 0,1$. З (1.28) отримуємо рівняння $b=0$, $\dot{\alpha}+m\alpha^2=0$. Розв'язок яких з врахуванням формул (1.12) породжує оператор еквівалентний ліївському $Q=(mx_0+d_0)\partial_0+u\partial_u$, що наведений в таблиці 2.1 пункт 6.

III. Нехай $(\alpha,b)=(m_1,m_2)=$ **const.** Система рівнянь (1.17) у даному випадку зводиться до системи

$$\begin{aligned}&B_1^1=B_2^2,\ B_2^1=-B_1^2,\\&(m_1u+m_2)B^a\dot{H}+(B_0^a+2B_1^1B^a)H=0,\end{aligned}\tag{1.31}$$

$$(m_1u+m_2)[\dot{F}-(m_1u+m_2)\dot{H}]-m_1F=2B_1^1[(m_1u+m_2)H-F].$$

Останнє рівняння системи (1.31) після заміни

$$G(u)=F-(m_1u+m_2)H$$

набуде вигляду $(m_1u+m_2)\dot{G}=(m_1-2B_1^1)G$. Якщо розділити змінні та проінтегрувати це рівняння, то отримаємо такі суттєво різні підвипадки:

III.1. $G\neq 0$. Тоді $2B_1^1=-\lambda$, $(m_1u+m_2)\dot{G}=(m_1+\lambda)G$, де λ — довільна стала. У залежності від співвідношень між m_1 і m_2 з врахуванням введеної заміни, перетворень еквівалентності (1.6) та додаткових перетворень (1.10), отримуємо загальні розв'язки останнього рівняння системи (1.31):

$F=\lambda e^{mu}$, $H=e^u,(m\neq 1)$ та $F=\lambda u^k$, $H=u^k,(k\neq 0)$, підставивши які в систему (1.31) одержуємо рівняння

$$B_1^1=B_2^2=-\frac{\lambda}{2},B_2^1=-B_1^2,B_0^a+(\lambda_2-\lambda)B^a=0.$$

III.2. $G = 0$. Тоді $F = (m_1 u + m_2)H$, а система рівнянь (1.31) має вигляд

$$B^1_1 = B^2_2, \quad B^1_2 = -B^2_1, \quad (m_1 u + m_2)B^a \dot{H} + (B^a_0 + 2B^1_1 B^a)H = 0.$$

У залежності від вигляду функції H, розв'язки цих рівнянь наступні:

$$\begin{aligned} &H = e^u \quad m_1 = 0, m_2 \neq 0, \\ &\qquad\qquad B^1_1 = B^2_2,\ B^1_2 = -B^2_1,\ B^a_0 + (2B^1_1 + m_2)B^a = 0; \\ &H = u^m, \ \ m_1 \neq 0, m_2 = 0, \\ &\qquad\qquad B^1_1 = B^2_2,\ B^1_2 = -B^2_1,\ B^a_0 + (2B^1_1 + mm_1)B^a = 0. \end{aligned}$$

Слід зазначити, що при $H = 1$ одержимо $F = m_1 u + m_2$, що приводить до лінійного рівняння (1.2), тому його ми не розглядаємо.

Розв'язавши отримані рівняння для випадків III.1 та III.2 та використавши відповідний вигляд функцій H та F, отримаємо загальні розв'язки системи рівнянь (1.31), які породжують тільки оператори еквівалентні ліївським з таблиці 2.1.

IV. Нехай $H = \lambda =$ const. Тоді система (1.17) набуде вигляду

$$B^1_1 = B^2_2,\ B^1_2 = -B^2_1,\ B^a_0 + 2B^1_1 B^a = 2a_a, \tag{1.32}$$

$$(\alpha u + b)\dot{F} + (2B^1_1 - \alpha)F = (\alpha_0 + 2B^1_1 \alpha + \triangle\alpha)u + b_0 + 2B^1_1 b + \triangle b.$$

Проаналізувавши структуру рівнянь (1.32), приходимо до висновку, що з точністю до перетворень (1.6) можливі такі суттєво різні випадки:

$$\begin{aligned} &F = \lambda_1 e^u + \lambda_2, \quad \lambda_1 \neq 0; \\ &F = \lambda u \ln u, \quad \lambda \neq 0; \\ &F = \lambda_1 u^m + \lambda_2 u, \quad \lambda_1 \neq 0, m \neq 0, 1. \end{aligned}$$

Для кожного з випадків знайдемо загальний розв'язок рівнянь (1.32). Підставивши відповідний вигляд функції F в систему (1.32), отримаємо диференціальні рівняння для визначення функцій α, b, B^a.

При $F = \lambda_1 e^u + \lambda_2,\ \lambda_1 \neq 0$ система (1.32) є еквівалентною (1.23), (1.24) та рівнянням

$$\alpha = 0, \quad b \neq 0, \quad b = -2B_1^1, \quad b_0 + \triangle b = (b - \lambda_2)b.$$

Використовуючи вже доведене, що загальний розв'язок системи (1.23), (1.24) задається формулою (1.27), остаточно отримуємо такі розв'язки системи рівнянь (1.32) :

$$\lambda_2 = 0, b = \frac{1}{\beta(\vec{x}) - x_0}, B^a = \frac{\varkappa x_a + C_{ab}x_b + d_a}{2\varkappa x_0 + d_0}, \alpha = 0, b = -\frac{2\varkappa}{2\varkappa x_0 + d_0}.$$

Після підстановки яких в формулу (1.12) отримуємо оператор, який є еквівалентним лііівському (див. пункт 7 в таблиці 2.1):

$$Q = (2\varkappa x_0 + d_0)\partial_0 + (\varkappa x_a + C_{ab}x_b + d_a)\partial_a - 2\varkappa\partial_u.$$

Якщо $F = \lambda u \ln u$, то знайдемо загальний розв'язок системи

$$B_0^a = 2\alpha_a, \quad b = B_1^1 = B_2^2 = 0, \quad B_2^1 = -B_1^2, \quad \alpha_0 + \triangle\alpha = \lambda\alpha. \quad (1.33)$$

З двох перших рівнянь системи (1.33) отримуємо, що $\triangle\alpha = 0$, а це дає змогу проінтегрувати по x_0 останнє рівняння і отриманий результат підставити знову в перше рівняння. Після використання рівнянь, що залишилися остаточно отримуємо функції $B^a = \frac{2k_a}{\lambda}e^{\lambda x_0} + C_{ab}x_b + d_a$, $\alpha = (k_a x_a + \lambda_1)e^{\lambda x_0}$, $b = 0$, які задають тільки ліівські оператори (див. пункт 8 в таблиці 2.1).

Розглянемо випадок, коли $F = \lambda_1 u^m + \lambda_2 u,\ \lambda_1 \neq 0,\ m \neq 0, 1$, який розбивається на підвипадки $m = 2$ та $m \neq 2$. Але в обох випадках в результаті розв'язання системи (1.32) отримуються функції, які породжують або ліівські оператори, або оператори еквівалентні ліівським. Покажемо це для випадку, коли $m = 2$. Випадок $m \neq 2$ доводиться аналогічно.

При $F = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 u$ система (1.32) набуває вигляду

$$-\frac{1}{2}\alpha = B_1^1 = B_2^2, \quad B_2^1 = -B_1^2, \quad (1.34)$$

$$B_0^a + 2B_1^1 B^a = 2\alpha_a, \tag{1.35}$$

$$\alpha_0 + 2B_1^1(\alpha - \lambda_2) = 2\lambda_1 b, \tag{1.36}$$

$$b_0 + \triangle b + (2B_1^1 - \lambda_2)b = 0. \tag{1.37}$$

З рівняння (1.34) випливає, що $\triangle B^a = 0$, $\triangle\alpha = 0$. Якщо подіяти оператором Лапласа на рівняння (1.35), то отримаємо, що $\triangle(B_1^1 B^a) = 0$, або $B_{1b}^1 B_b^a = 0$. Одержали два рівняння:

$$B_1^1 B_{11}^1 + B_2^1 B_{12}^1 = 0, \quad B_1^2 B_{11}^1 + B_2^2 B_{12}^1 = 0. \tag{1.38}$$

З системи (1.38) випливає, що $B_{11}^1 = B_{12}^1 = 0$, тоді $B_1^1 = \mu(x_0)$. Таким чином $\alpha = -2\mu(x_0)$, при цій умові рівняння (1.34) та (1.35) мають вигляд (1.23), (1.24), розв'язок яких задається формулами (1.27). Підставивши (1.27) в рівняння (1.34) та (1.36), одержимо:

$$\alpha = \frac{-2\varkappa}{2\varkappa x_0 + d_0}, \quad b = -\frac{\lambda_2 \varkappa}{\lambda_1(2\varkappa x_0 + d_0)}. \tag{1.39}$$

Підставивши (1.39) в рівняння (1.37), отримаємо, що $\lambda_2 = 0$.

Отже, шуканий оператор є еквівалентним оператору

$$Q = (2\varkappa x_0 + d_0)\partial_0 + (\varkappa x_a + C_{ab}x_b + d_a)\partial_a - 2\varkappa u\partial_u,$$

який є лінійною комбінацією ліївських операторів, що наведені в пункті 9 таблиці 2.1.

V. Нехай $H \neq$ **const,** $(\alpha, b) \neq$ **const.** Тоді система (1.19) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
&(s_1 u + s_2)\dot{H} = s_3 H + s_4,\\
&(m_1 u + m_2)\dot{F} = m_3 F + (m_4 u + m_5)H + m_6 u + m_7,\\
&k_3 F = (m_1 u + m_2)^2 \dot{H} + (k_4 u + k_5)H + k_6 u + k_7.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Розв'язання (1.40) почнемо з інтегрування першого рівняння цієї системи. Можливі два нееквівалентні випадки $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$ та $s_1 \neq 0$, $s_2 = 0$.

V.1. Нехай $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$. Так як $B^a \neq 0$, то з першої рівності (1.18) отримуємо $\alpha = 0$. Тоді з інших рівностей (1.18) маємо $m_1 = m_4 = k_4 = m_6 = k_6 = m_6 = s_4 = 0$, $m_2 \neq 0$, $s_2 \neq 0$. Розв'язком першого рівняння системи (1.40) є функція $H = e^u$, а останні два рівняння системи запишуться так

$$m_2\dot{F} = m_3F + m_5e^u + m_7, \quad k_3F = m_2^2e^u + k_5e^u + k_7.$$

Розв'язки цих рівнянь залежать від значення числового параметра k_3. З точністю до локальних перетворень (1.10), (1.6) одержуємо наступні нееквівалентні вигляди функції F:

$$F = \lambda;$$

$$F = \lambda_1e^u + \lambda_2u, \quad \lambda_2 \neq 0;$$

$$F = \lambda_1ue^u + \lambda_3, \quad \lambda_1 \neq 0;$$

$$F = \lambda_1e^u + \lambda_2e^{mu} + \lambda_3, \quad m \neq 0, 1, \lambda_2 \neq 0.$$

V.2. Нехай $s_1 \neq 0$, $s_2 = 0$. Оскільки $B^a \neq 0$, то з другої рівності (1.18) отримуємо $b = 0$. Тоді з інших рівностей (1.18) маємо

$$m_2 = m_5 = k_5 = m_7 = k_7 = 0,$$

а система (1.40) запишеться у вигляді

$$s_1u\dot{H} = s_3H + s_4,$$

$$m_1u\dot{F} = m_3F + m_4uH + m_6u,$$

$$k_3F = m_1^2u^2\dot{H} + k_4uH + k_6u.$$

У залежності від співвідношень між коефіцієнтами s_1, s_3, s_4 та k_3, розв'язки цієї системи, з точністю до локальних перетворень (1.6), (1.10) задають нееквівалентні пари функцій H та F, підставивши які в рівняння (1.16)–(1.17), отримуємо системи диференціальних рівнянь на функції B^a, α, b, що містять рівняння (1.23) та рівняння наведені в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

№	$H(u)$	$F(u)$	Визначальна система
1	$\ln u$	$uP_2(\ln u)$ $P_2(z)=\lambda_1 z^2+\lambda_2 z+\lambda_3$	$B^a_0+2B^1_1B^a=0,\ b=0,\ \alpha B^a=2\alpha_a,$ $\lambda_1 B^1_1=0,\ \ \alpha_0+2\alpha B^1_1=2\lambda_2 B^1_1+2\alpha\lambda_1,$ $\triangle\alpha+\alpha^2=\lambda_2\alpha+2\lambda_3 B^1_1$
2	$\ln u$	$\lambda_1 u\ln u+\lambda_2 u^m+\lambda_3 u$	$B^a_0+2B^1_1B^a=0,\ b=0,\ \alpha B^a=2\alpha_a,$ $\lambda_2[2B^1_1+(m-1)\alpha]=0,\ \ \alpha_0+2\alpha B^1_1=2\lambda_1 B^1_1,$ $\triangle\alpha+\alpha^2=\lambda_1\alpha+2\lambda_3 B^1_1$
3	$\ln u$	$\lambda_1 u\ln u+\lambda_2 u+\lambda_3$	$B^a_0+2B^1_1B^a=0,\ b=0,\ \alpha B^a=2\alpha_a,$ $\lambda_3[2B^1_1-\alpha]=0,\ \ \alpha_0+2\alpha B^1_1=2\lambda_1 B^1_1,$ $\triangle\alpha+\alpha^2=\lambda_1\alpha+2\lambda_2 B^1_1$
4	e^u	λ	$B^a_0+(2B^1_1+b)B^a=0,\ b_0+(2B^1_1+b)b=0,$ $\alpha=0,\ \ \triangle b=2\lambda B^1_1$
5	e^u	$\lambda_1 e^u+\lambda_2 u$ $\lambda_2\neq 0$	$B^a_0+bB^a=0,\ b_0+b(b-\lambda_1)=0,$ $\alpha=0,\ \ B^1_1=0,\ \ \triangle b=\lambda_2 b$
6	e^u	$\lambda_1 ue^u+\lambda_2,$ $\lambda_1\neq 0$	$B^a_0+(2B^1_1+b)B^a=0,\ 2B^1_1+b=0,$ $\alpha=0,\ b_0=\lambda_1 b,\ \ \triangle b=2\lambda_2 B^1_1$
7	e^u	$\lambda_1 e^u+\lambda_2 e^{mu}+\lambda_3,$ $\lambda_2\neq 0,\ m\neq 0,1$	$B^a_0+(2B^1_1+b)B^a=0,\ b_0+(2B^1_1+b)(b-\lambda_1)=0,$ $\alpha=0,\ 2B^1_1+mb=0,\ \ \triangle b=2\lambda_3 B^1_1$
8	u	$\lambda_1 u^2+\lambda_2 u+\lambda_3,$	$B^a_0+(2B^1_1+\alpha)B^a=0,\ bB^a=2\alpha_a,$ $b_0+(2B^1_1+\alpha)b=2\lambda_1 b+2\lambda_2 B^1_1-\alpha b-\triangle\alpha,$ $\alpha_0+(2B^1_1+\alpha)(\alpha-\lambda_1)=0,$ $\triangle b+b^2=\lambda_2 b+\lambda_3(2B^1_1-\alpha)$
9	u	$\lambda_1 u^3+\lambda_2 u^2+\lambda_3 u+\lambda_4,$ $\lambda_1\neq 0$	$B^a_0+(2B^1_1+\alpha)B^a=0,\ bB^a=2\alpha_a,$ $b_0=2\lambda_2 b+2\lambda_3 B^1_1-\triangle\alpha,\ \alpha+B^1_1=0,$ $\alpha_0+(2B^1_1+\alpha)(\alpha-\lambda_1)=3\lambda_1 b,$ $\triangle b+b^2=\lambda_3 b+\lambda_4(2B^1_1-\alpha)$
10	$u+\lambda$	$\lambda_1 u^2+\lambda_2 u^m+\lambda_3 u,$ $\lambda_2\neq 0,\ m\neq 0,1,2,3$	$B^a_0+(2B^1_1+\alpha)B^a=0,\ b=0,\ -\lambda\alpha B^a=2\alpha_a,$ $(m-1)\alpha+2B^1_1=0,\ \ \alpha_0+(2B^1_1+\alpha)(\alpha-\lambda_1)=0,$ $\triangle\alpha-\lambda\alpha^2=2\lambda_3 B^1_1-\lambda_1\lambda(2B^1_1+\alpha)$
11	$u+\lambda$	$\lambda_1\ln u+\lambda_2 u+\lambda_3,$ $\lambda_1\neq 0$	$B^a_0+(2B^1_1+\alpha)B^a=0,\ b=0,\ -\lambda\alpha B^a=2\alpha_a,$ $(\lambda_1-\lambda_3)\alpha+2\lambda_3 B^1_1=0,\ \ \alpha_0+(2B^1_1+\alpha)\alpha=0,$ $\triangle\alpha-\lambda\alpha^2=2\lambda_2 B^1_1$

Продовження таблиці 2.3.

№	$H(u)$	$F(u)$	Визначальна система
12	$u+\lambda$	$\lambda_1 u^2\ln u+\lambda_2 u^2+\lambda_3 u$, $\lambda_1\neq 0$	$B^a_0+(2B^1_1+\alpha)B^a=0$, $b=0$, $-\lambda\alpha B^a=2\alpha_a$, $\alpha+2B^1_1=0$, $\alpha_0+(2B^1_1+\alpha)(\alpha-\lambda_2)=\lambda_1\alpha$, $\triangle\alpha-\lambda\alpha^2=2\lambda_3 B^1_1-\lambda(\lambda_1+\lambda_2)\alpha$
13	$u+\lambda$	$\lambda_1 u\ln u+\lambda_2 u^2+\lambda_3 u$, $\lambda_1\neq 0$	$B^a_0+\alpha B^a=0$, $b=0$, $-\lambda\alpha B^a=2\alpha_a$, $B^1_1=0$, $\alpha_0+\alpha(\alpha-\lambda_2)=0$, $\triangle\alpha-\lambda\alpha^2=(\lambda_1-\lambda\lambda_2)\alpha$
14	$u^m+\lambda$	$\lambda_1 u+\lambda_2$, $m\neq 0,1$	$B^a_0+(2B^1_1+m\alpha)B^a=0$, $b=0$, $-\lambda m\alpha B^a=2\alpha_a$, $\lambda_2(\alpha-2B^1_1)=0$, $\alpha_0+(2B^1_1+m\alpha)\alpha=0$, $\triangle\alpha-\lambda m\alpha^2=2\lambda_1 B^1_1$
15	$u^m+\lambda$	$\lambda_1 u^{m+1}\ln u+\lambda_2 u$, $\lambda_1\neq 0$	$B^a_0+(2B^1_1+m\alpha)B^a=0$, $b=0$, $-\lambda m\alpha B^a=2\alpha_a$, $m\alpha+2B^1_1=0$, $\alpha_0+(2B^1_1+m\alpha)\alpha=\lambda_1\alpha$, $\triangle\alpha-\lambda m\alpha^2=2\lambda_2 B^1_1-\lambda\lambda_1\alpha$
16	$u^m+\lambda$	$\lambda_1 u\ln u+\lambda_2 u^{m+1}$, $\lambda_1\neq 0$	$B^a_0+m\alpha B^a=0$, $b=0$, $-\lambda m\alpha B^a=2\alpha_a$, $B^1_1=0$, $\alpha_0+m\alpha(\alpha-\lambda_2)=0$, $\triangle\alpha-\lambda m\alpha^2=(\lambda_1-m\lambda\lambda_2)\alpha$
17	$u^m+\lambda$	$\lambda_1 u^{m+1}+\lambda_2 u^{m_1}+\lambda_3 u$, $\lambda_1\neq 0$, $m\neq 0,1$, $m_1\neq m+1$, $m_1\neq 1$	$B^a_0+(2B^1_1+m\alpha)B^a=0$, $b=0$, $-\lambda m\alpha B^a=2\alpha_a$, $\lambda_2[(m_1-1)\alpha+2B^1_1]=0$, $\alpha_0+(2B^1_1+m\alpha)(\alpha-\lambda_1)=0$, $\triangle\alpha-\lambda m\alpha^2=2\lambda_3 B^1_1-\lambda\lambda_1(2B^1_1+m\alpha)$

Визначальні системи для випадків 1–3 (див. таблицю 2.3) містять рівняння (1.23), (1.24), розв'язком яких є функції (1.27).

Розв'яжемо систему для випадку 1 в таблиці 2.3, системи для випадків 2 та 3 розв'язуються аналогічно.

З визначальної системи випливає, що існує два нееквівалентні випадки $B^1_1=0$ та $B^1_1\neq 0$. Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

Якщо $B^1_1=0$, то враховуючи (1.27), одержимо систему:

$$B^a=\frac{C_{ab}x_b+d_a}{d_0},\ b=0,\ \alpha B^a=2\alpha_a,\ \alpha_0=2\alpha\lambda_1,\ \ \triangle\alpha+\alpha^2=\lambda_2\alpha.$$

Якщо розв'язати всі, крім останнього, рівняння цієї системи, то отримаємо: $\alpha=C_1\exp(2\lambda_1 x_0+\dfrac{\vec{d}\vec{x}}{2d_0})$, де C_1 — довільна стала. Підставивши α в останнє рівняння, маємо, що $C_1=0$. Тому $\alpha=0$, що неможливо оскільки $\alpha \neq \mathrm{const}$.

При $B_1^1 \neq 0$ маємо, що $\lambda_1 = 0$. Тоді, враховуючи (1.27), визначальну систему запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} &B^a = \frac{\varkappa x_a + C_{ab}x_b + d_a}{2\varkappa x_0 + d_0}, \ b = 0, \ \alpha B^a = 2\alpha_a, \\ &\alpha_0 + 2B_1^1(\alpha - \lambda_2) = 0, \ \triangle\alpha + \alpha^2 = \lambda_2\alpha + 2\lambda_3 B_1^1. \end{aligned} \tag{1.41}$$

З системи (1.41) випливає, що $\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}\varkappa\lambda_2\vec{x}^{\,2} + \lambda_2\vec{d}\vec{x} + C_1}{2\varkappa x_0 + d_0} + \lambda_2$, де C_1 — довільна стала. Підставивши α в останнє рівняння (1.41), отримаємо, що $\varkappa = 0$, а це означає, що $B_1^1 = 0$, що протирічить початковому припущенню. Тому, для випадку 1 визначальна система є несумісною.

Визначальні системи кожного з випадків 4–17 містять рівняння

$$\frac{B_0^1}{B^1} = \frac{B_0^2}{B^2}. \tag{1.42}$$

Розв'язування яких суттєво спрощує наступна лема.

Лема 1. *Розв'язком рівнянь (1.23) та (1.42) є функції*

$$B^a = \psi(x_0)\varphi^a(\vec{x}).$$

Доведення. Розв'яжемо рівняння (1.42), використовуючи рівняння (1.23). З рівнянь (1.42) випливає, що

$$B^2 = \alpha(\vec{x})B^1. \tag{1.43}$$

Продиференціювавши (1.43) по x_1 та x_2, і використавши рівняння (1.23), отримаємо

$$\frac{B_1^1}{B^1} = V(\vec{x}), \quad \frac{B_2^1}{B^1} = W(\vec{x}), \tag{1.44}$$

де $V(\vec{x})$, $W(\vec{x})$ — довільні гладкі функції, які не залежать від змінної x_0. З умови сумісності системи (1.44), одержимо

$$V_2 = W_1, \quad \int V_2 dx_1 = W - \gamma(x_2), \tag{1.45}$$

де $\gamma(x_2)$ — довільна гладка функція. Проінтегрувавши перше рівняння системи (1.44) по x_1, отримаємо

$$\ln B^1 = \int V dx_1 + \ln \varphi(x_0, x_2), \tag{1.46}$$

де $\varphi(x_0, x_2)$ — довільна гладка функція. Продиференціювавши рівняння (1.46) по x_2 і використавши друге рівняння системи (1.44) та (1.45), одержимо

$$\int V_2 dx_1 + \frac{\varphi_2}{\varphi} = W, \quad \Rightarrow \frac{\varphi_2}{\varphi} = \gamma(x_2). \tag{1.47}$$

Проінтегрувавши друге рівняння системи (1.47) по x_2, отримаємо

$$\varphi = \psi(x_0) e^{\int \gamma dx_2}, \quad \Rightarrow B^1 = \psi(x_0) e^{\int V(x_1, x_2) dx_1 + \int \gamma(x_2) dx_2}. \tag{1.48}$$

З формул (1.48) та (1.43) випливає, що

$$B^a = \psi(x_0) \varphi^a(\vec{x}), \tag{1.49}$$

де $\psi(x_0), \varphi^a(x_1)$ — довільні гладкі функції. Лему 1 доведено.

Застосуємо лему 1 на прикладі визначальної системи отриманої для випадку 4, тобто при $H = e^u$ і $F = \lambda$. Перепишемо визначальну систему для випадку 4 у вигляді

$$B_1^1 = B_2^2,\ B_2^1 = -B_1^2,\ \frac{B_0^1}{B^1} = \frac{B_0^2}{B^2} = \frac{b_0}{b} = -(2B_1^1 + b),$$
$$\alpha = 0, \triangle b = 2\lambda B_1^1.$$

Згідно (1.49) з неї випливає, що

$$\begin{aligned} &B^a = \psi(x_0)\varphi^a(\vec{x}),\ \ b = \psi(x_0)\beta(\vec{x}),\ \ \varphi_1^1 = \varphi_2^2,\ \ \varphi_2^1 = -\varphi_1^2, \\ &\triangle\varphi^a = 0,\ \ b = -2\psi\varphi_1^1 - \frac{\psi_0}{\psi},\ \ \triangle\beta = 0,\ \ \lambda\varphi_1^1 = 0. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Тому розглянемо два випадки:

I. Якщо $\lambda \neq 0$, $\varphi_1^1 = 0$, тоді з рівнянь (1.50) одержуємо

$$\varphi^a = C_{ab} x_b + d_a, \quad \psi = \frac{2\varkappa}{2\varkappa x_0 + d_0}, \quad \beta = 2\varkappa. \tag{1.51}$$

де d_0, d_a, $C_{ab} = -C_{ba}$ — довільні сталі. Підставивши (1.51) в (1.12), отримаємо оператор, який є еквівалентний лiївському (див. пункт 3 в таблиці 2.1) $Q = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + C_{12}J_{12} + \varkappa D_1$.

II. Нехай $\lambda = 0$, $\varphi_1^1 \neq 0$. З системи (1.50) випливає рівняння

$-\dfrac{\psi_0}{\psi} = \beta + 2\varphi_1^1.$

Оскільки права та ліва частини рівняння залежать від різних змінних, то після інтегрування, отримуємо

$\psi = (2\varkappa x_0 + d_0)^{-1}, \; \beta = 2(\varkappa - \varphi_1^1).$

Використавши φ, β та (1.50), одержимо

$$B^a = \frac{\varphi^a(\vec{x})}{2\varkappa x_0 + d_0}, \; b = \frac{2(\varkappa - \varphi_1^1)}{2\varkappa x_0 + d_0}, \; \varphi_1^1 = \varphi_2^2, \; \varphi_2^1 = -\varphi_1^2, \; \alpha = 0. \quad (1.52)$$

Підставивши (1.52) в (1.12), знаходимо оператор, який є еквівалентним лiївському, наведеному в таблиці 2.1 за номером 3.

Отже, всі розв'язки визначальної системи, яка відповідає випадку 4 (див. таблицю 2.3) задають тільки лiївські оператори. Визначальні системи для випадків 5–17 з таблиці 2.3 розв'язуються аналогічно. Їх розв'язки породжують тільки лiївські та їм еквівалентні оператори.

Теорему 1.4 для операторів, що мають вигляд (1.12) доведено.

1.4. Доведення для другого класу операторів

Щоб описати всі оператори вигляду (1.13) Q-умовної інваріантності рівняння (1.2), потрібно знайти загальні розв'язки системи (1.15). Враховуючи, що $C = a(x)u + b(x)$, перепишемо систему (1.15) у вигляді

$$HB_0 + \triangle B = -2a_1B + 2a_2 + \left(4B\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1} - 2B_1\right)a + \frac{2BB_aB_a}{B^2+1},$$

$$
\begin{aligned}
&(au+b)\dot{H} = 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1}H,\\
&(au+b)\dot{F} - \left(a + 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1}\right)F = (a_0u+b_0)H+\\
&+\left(\triangle a + 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1}(Ba_2 - a_1 - a^2) + 2aa_1 - 2a_2B_1\right)u+\\
&+\triangle b + 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1}(Bb_2 - b_1 - ab) + 2ba_1 - 2b_2B_1.
\end{aligned}
\tag{1.53}
$$

Проаналізувавши структуру рівнянь (1.53) по змінній u, з точністю до локальних перетворень (1.6), (1.10) одержимо нееквівалентні пари функцій H і F та відповідні визначальні системи для функцій B, a, b, які наведено в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

№	$H(u)$	$F(u)$	Визначальна система
1	$\forall$	$\forall$	$a=b=0,\ B_0=0,\ BB_1-B_2=0,\ \triangle B = 2BB_1^2$
2	1	$\forall$	$a=b=0,\ BB_1-B_2=0,\ B_0+\triangle B = 2BB_1^2$
3	1	$\lambda u \ln u,\ \ \lambda\neq 0$	$b=0,\ BB_1-B_2=0,$ $B_0+\triangle B = -2a_1B+2a_2-2aB_1+2BB_1^2,$ $a_0+\triangle a = -2aa_1+2a_2B_1+\lambda a$
4	e^u	λ	$a=0,\ B_0=b_0=0,\ b=\frac{2(BB_1-B_2)}{B^2+1},$ $\triangle B = \frac{2BB_aB_a}{B^2+1},\ \triangle b = bb_1 + \frac{2(BB_2+B_1)}{B^2+1}b_2 - \lambda b$
5	u^k	$\lambda u,\ k\neq 0$	$b=0,\ B_0=a_0=0,\ a=\frac{2(BB_1-B_2)}{k(B^2+1)},$ $\triangle B = \frac{2BB_aB_a}{B^2+1}+2a(kaB-B_1)-2Ba_1+2a_2,$ $\triangle a = (k-2)aa_1+(2B_1-kaB)a_2+ka^3-k\lambda a$

Спочатку розв'яжемо визначальну систему для **першого випадку** з таблиці 2.4. З умов сумісності останніх двох рівнянь одержуємо, що $B_{11}=0$. Не важко переконатися, що тоді $B = \dfrac{x_1+d_2}{-x_2+d_1}$. Остаточно отримуємо оператор, який є еквівалентний ліївському $Q = (-x_2+d_1)\partial_1 + (x_1+d_2)\partial_2$ (див. таблицю 2.1, пункт 1).

Використовуючи умови сумісності останніх двох рівнянь визначальної системи в **другому випадку** отримаємо, що $B_0 = 0$. А це означає, що визначальні системи для першого та другого випадків співпадають, що повністю зводить другий випадок до першого.

З визначальної системи для **третього випадку** в таблиці 2.4 випливає, що можливі два нееквівалентні випадки: $B_1 \neq 0$; $B_1 = 0$.

Розглянемо спочатку випадок $B_1 \neq 0$. Щоб розв'язати систему

$$BB_1 - B_2 = 0, \tag{1.54}$$

$$B_0 + \triangle B = -2a_1 B + 2a_2 - 2aB_1 + 2BB_1^2, \tag{1.55}$$

$$a_0 + \triangle a = -2aa_1 + 2a_2 B_1 + \lambda a \tag{1.56}$$

застосуємо перетворення годографа:

$$x_0 \to t,\ x_1 \to v,\ x_2 \to y,\ B \to x, a \to w,$$

де $v = v(t,x,y)$, $w = w(t,x,y)$ — нові невідомі функції, t, x, y — нові незалежні змінні.

Перерахувавши похідні, одержимо

$$\begin{aligned}
&B_0 = -\frac{v_t}{v_x}, \quad B_1 = \frac{1}{v_x}, \quad B_2 = -\frac{v_y}{v_x}, \quad B_{11} = -\frac{v_{xx}}{v_x^3},\\
&B_{22} = -\frac{v_y^2 v_{xx} - 2v_x v_y v_{xy} + v_x^2 v_{yy}}{v_x^3}, \quad a_0 = w_t - \frac{v_t}{v_x} w_x, \quad a_1 = \frac{w_x}{v_x},\\
&a_2 = w_y - \frac{v_y}{v_x} w_x, \quad a_{11} = \frac{v_x w_{xx} - w_x v_{xx}}{v_x^3},\\
&a_{22} = w_{yy} - \frac{w_x}{v_x} v_{yy} - 2\frac{v_y}{v_x}\left(w_{xy} - \frac{w_x}{v_x} v_{xy}\right) + \frac{v_y^2}{v_x^2}\left(w_{xx} - \frac{w_x}{v_x} v_{xx}\right).
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Підставивши (1.57) в (1.54), після інтегрування, отримаємо

$$v = -xy + \varphi, \tag{1.58}$$

де $\varphi = \varphi(t, x)$ — довільна гладка функція. Підставивши (1.57), (1.58) в (1.55), одержимо

$$w_y = -\frac{w}{y-\varphi_x} + \frac{\varphi_t}{2(y-\varphi_x)} + \frac{x^2+1}{2(y-\varphi_x)^3}\,\varphi_{xx}.$$

Проінтегрувавши це рівняння по змінній y, враховуючи, що функція φ не залежить від y, маємо

$$w = \frac{1}{2}\left(\varphi_t - \frac{\psi}{y-\varphi_x} - \frac{x^2+1}{(y-\varphi_x)^2}\,\varphi_{xx}\right), \tag{1.59}$$

де $\psi = \psi(t, x)$ — довільна гладка функція.

Підставивши (1.57), (1.58), (1.59) в рівняння (1.56) та розщепивши його по різних степенях змінної y, одержуємо наступну систему для визначення функцій φ, ψ:

$$\begin{gathered}\varphi_{xx} = 0,\ \ \psi\varphi_{tx} = 0,\ \ (x^2+1)\varphi_{xx} + (2x+\psi)\psi_x - 4\psi = 0,\\ \psi_t = \lambda\varphi,\ \ \varphi_{tt} = \lambda\varphi_t.\end{gathered} \tag{1.60}$$

Розв'язання системи (1.60) розбивається на два підвипадки: $\psi = 0$, $\varphi_{tx} = 0$. При $\psi = 0$ розв'язком системи (1.60) є функція

$$\varphi = (C_1 + C_2 e^{\lambda t})x + C_3 + C_4.$$

У другому випадку, коли $\varphi_{tx} = 0$, загальний розв'язок системи (1.60) має вигляд $\varphi = C_1 x + C_3 + C_4 e^{\lambda t}$, $\psi = C_5 e^{\lambda t}$, де $C_1, \ldots, C_5$ — довільні сталі.

Підставляючи одержані результати в формули (1.58), (1.59) та враховуючи перетворення годографа, знаходимо функції B та a:

$$1) B = -\frac{x_1 - C_3 - C_4 e^{\lambda x_0}}{x_2 - C_1 - C_2 e^{\lambda x_0}},\ \ a = \frac{\lambda}{2}\,e^{\lambda x_0}\frac{-C_2 x_1 + C_4 x_2 + C_2 C_3 - C_1 C_4}{x_2 - C_1 - C_2 e^{\lambda x_0}};$$

$$2) B = -\frac{x_1 - C_3 - C_4 e^{\lambda x_0}}{x_2 - C_1},\ \ a = \frac{\lambda}{2}\,e^{\lambda x_0}\frac{C_4 x_2 - C_1 C_4 - C_5}{x_2 - C_1}.$$

Обидва випадки приводять до лінійної комбінації ліївських операторів рівняння

$$u_0 + \triangle u = \lambda u \ln u,\ \ \lambda \neq 0. \tag{1.61}$$

У випадку $B_1 = 0$, як випливає з рівняння (1.54), $B = \beta(x_0)$, а рівняння (1.55), (1.56) мають вигляд:

$$\dot{\beta} = -2a_1\beta + 2a_2,\ \ a_0 + \triangle a = -2aa_1 + \lambda a. \tag{1.62}$$

Розв'язком першого рівняння системи (1.62) є функція

$$a = \varphi(x_0, \omega) + \frac{1}{2}\dot{\beta}x_2,\ \ \omega = x_1 + \beta x_2, \tag{1.63}$$

де φ — довільна гладка функція. Підставивши функцію (1.63) в друге рівняння системи (1.62), після розщеплення по змінній x_2, отримаємо:

$$\begin{aligned} &4\dot{\beta}\varphi_\omega = \lambda\dot{\beta} - \ddot{\beta}, \\ &\varphi_0 + (1 + \beta^2)\varphi_{\omega\omega} = -2\varphi\varphi_\omega + \lambda\varphi. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Розв'язок першого рівняння системи (1.64) залежить від значення функції β.

Коли $\dot{\beta} = 0$, то $B = \beta = \lambda_1$, λ_1 — довільна стала. Формула (1.63) при цьому має вигляд $a = \varphi(x_0, \omega)$, $\omega = x_1 + \lambda_1 x_2$, де φ — довільний розв'язок другого рівняння системи (1.64). Оскільки задане рівняння інваріантне відносно поворотів, то не втрачаючи загальності можна вважати $\lambda_1 = 0$. Отже, рівняння (1.61) є Q-умовно інваріантним відносно оператора $Q = \partial_1 + \varphi(x_0, \omega)u\partial_u$, де φ — довільний розв'язок другого рівняння системи (1.64), який наведено в пункті 3 таблиці 2.2.

При $\beta \neq \mathrm{const}$, розв'язком рівняння (1.64) є функція

$$\varphi = \frac{\lambda\dot{\beta} - \ddot{\beta}}{4\dot{\beta}}\omega + \gamma(x_0), \tag{1.65}$$

де γ — довільна гладка функція. Після підстановки (1.65) в друге рівняння системи (1.64), отримаємо рівняння: $\lambda\dot{\beta} - \ddot{\beta} = 0$, $\lambda\gamma - \dot{\gamma} = 0$, розв'язавши які, з урахуванням формул (1.63), (1.65) одержимо: $\beta = C_1 e^{\lambda x_0} + C_2$, $\gamma = C_3 e^{\lambda x_0}$, $a = \frac{1}{2}C_1\lambda e^{\lambda x_0}x_2 + C_3 e^{\lambda x_0}$, де C_1, C_2,

C_3 — довільні сталі. Тому рівняння (1.61) є інваріантним відносно оператора

$$Q = \partial_1 + (C_1 e^{\lambda x_0} + C_2)\partial_2 + \left[\frac{1}{2} C_1 \lambda e^{\lambda x_0} x_2 + C_3 \lambda e^{\lambda x_0}\right] u\partial_u,$$

який є лінійною комбінацією лiївських операторів (пункт 8 табл. 1).

Якщо в останнє рівняння визначальної системи з **випадку 4** таблиці 2.4 підставити вираз $b = 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1}$ (четверте рівняння цієї системи), то одержимо умову $\lambda = 0$. Тому рівняння $e^u u_0 + \triangle u = 0$ є Q-умовно інваріантним відносно оператора

$$Q = \partial_1 + B(\vec{x})\partial_2 + 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2 + 1}\partial_u, \tag{1.66}$$

де B — довільна функція така, що $\triangle B = \frac{2BB_a B_a}{B^2+1}$.

Лема 2. *Оператор (1.66) є еквівалентним оператору лiївської симетрії рівняння* $e^u u_0 + \triangle u = 0$.

Доведення. Достатньо довести існування такої функції $\mu(\vec{x}) \neq 0$, після домноження на яку оператор Q співпадає з лiївським оператором з таблиці 2.1 (випадок 7). Після заміни

$$B = \mathrm{tg}\; w(\vec{x})$$

оператор Q набуде вигляду

$$Q = \partial_1 + \ \mathrm{tg}\; w\, \partial_2 + 2(w_1\ \mathrm{tg}\; w - w_2)\partial_u,$$

де w — довільний розв'язок рівняння $\triangle w = 0$. Розглянемо оператор

$$Q' = \mu\partial_1 + \mu\ \mathrm{tg}\; w\, \partial_2 + 2\mu(w_1\ \mathrm{tg}\; w - w_2)\partial_u,$$

для якого $\xi^1 = \mu$, $\xi^2 = \mu\ \mathrm{tg}\; w$, $\eta = 2\mu(w_1\ \mathrm{tg}\; w - w_2)$. Підберемо функцію μ таким чином, щоб задовольнити систему

$$\xi_1^1=\xi_2^2,\ \xi_2^1=-\xi_1^2,\ \eta=-2\xi_1^1, \text{ тобто}$$

$$\mu_1=\mu_2\ \mathrm{tg}\ w+\mu\frac{w_2}{\cos^2 w},\quad -\mu_2=\mu_1\ \mathrm{tg}\ w+\mu\frac{w_1}{\cos^2 w},$$

$$\mu(w_1\ \mathrm{tg}\ w-w_2)=-\mu_1,$$

звідки

$$\frac{\mu_1}{\mu}=w_2-w_1\ \mathrm{tg}\ w,\quad \frac{\mu_2}{\mu}=-w_1-w_2\ \mathrm{tg}\ w.$$

Ця система відносно функції μ сумісна , оскільки $\triangle w=0$.

Лему 2 доведено.

Тому в випадку 3 загальні розв'язки визначальної системи задають тільки оператори, що є еквівалентні ліївським.

Для **п'ятого випадку**, коли $H=u^k,\ k\neq 0$, маємо рівняння

$$u^k u_0+\triangle u=\lambda u, \tag{1.67}$$

яке є Q-умовно інваріантним відносно оператора

$$Q=\partial_1+B(\vec{x})\partial_2+\frac{2(BB_1-B_2)}{k(B^2+1)}u\partial_u, \tag{1.68}$$

де B — довільна функція, що задовольняє визначальну систему

$$\triangle B=\frac{2BB_aB_a}{B^2+1}+\frac{4(2BB_{12}-B^2B_{11}-B_{22})}{k(B^2+1)}-\frac{8B_1(BB_1-B_2)}{k(B^2+1)}+ +\frac{16B(BB_1-B_2)^2}{k(B^2+1)^2};$$

$$B_1\triangle B+2B_aB_{1a}+B\triangle B_1-\triangle B_2+\frac{12B^2B_aB_a(BB_1-B_2)}{(B^2+1)^2}- -\frac{2(BB_1-B_2)(B\triangle B+B_aB_a)+4BB_a(B_1B_a+BB_{1a}-B_{2a})}{B^2+1}= \tag{1.69}$$

$$=\frac{2(B_1+BB_2)}{B^2+1}(B_1B_2+BB_{12}-B_{22})+2(BB_1-B_2)\left[B_1^2+BB_{11}- -B_{12}-2B^3B_1\frac{(BB_1-B_2)}{(B^2+1)^2}\right]-\frac{4}{k}(BB_1-B_2)\left[B_1^2+BB_{11}- -B_{12}-\frac{2BB_1(BB_1-B_2)}{(B^2+1)}-\frac{(BB_1-B_2)^2}{(B^2+1)^2}\right]-\lambda k(BB_1-B_2).$$

Розв'язки системи (1.69) задають Q-умовні оператори інваріантності рівняння (1.67), що є еквівалентні лїівським.

Теорему 1.4 доведено.

1.5. Редукції відносно Q-умовних операторів

Використаємо оператори наведені в таблиці 2.2 для редукції відповідних рівнянь вигляду (1.2) до диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними. Кожен з цих випадків має свої цікаві особливості, тому буде розглянутий окремо.

1. Для довільної гладкої функції $H = H(u)$ та довільних сталих λ_0, λ_1, λ_2, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$, рівняння

$$Hu_0 + \triangle u = (\lambda_1 u + \lambda_2)(H + \lambda_0) \tag{1.70}$$

є Q-умовно інваріантним відносно оператора $Q = \partial_0 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u$. У залежності від співвідношень між коефіцієнтами λ_1 та λ_2 маємо такі два нееквівалентних випадки для побудови анзаців:

1. $\lambda_1 \neq 0$, тому $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0 \mod G^{\sim}$: $\quad u = e^{x_0}\varphi(\vec{x})$;

2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, тому $\lambda_2 = 1 \mod G^{\sim}$: $\quad u = x_0 + \varphi(\vec{x})$.

Тут $\varphi = \varphi(\vec{x})$ — нова невідома функція. Після підстановки анзаців у рівняння (1.70) отримаємо редуковане рівняння $\triangle\varphi = \lambda_0$.

Отже, для цього випадку можемо підсумувати:

— це єдиний випадок для рівнянь вигляду (1.2), коли нетривіальна Q-умовна симетрія є для класу рівнянь з функціональною довільністю в нелінійності;

— він узагальнює стаціонарні ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) розв'язки, що є лїівськими;

— нелінійне рівняння (1.70) для довільної функції H редукується до лінійного рівняння, яке заміною $\varphi \to \varphi - \lambda_0 x_1^2/2$ зводиться до (1+1)-вимірного рівняння Лапласа.

2. Для довільних сталих λ_0, λ_1, λ_2 рівняння

$$uu_0 + \triangle u = \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$$

є Q-умовно інваріантним відносно оператора $Q = \partial_0 + (\lambda_2 u - b(\vec{x}))\partial_u$, де $b = b(\vec{x})$ — довільний розв'язок рівняння $\triangle b = b^2 + \lambda_1 b + \lambda_2\lambda_0$. У залежності від значення λ_2 отримуємо такі нееквівалентні анзаци та редуковані рівняння:

1. $\lambda_2 \neq 0$, тому $\lambda_2 = 1 \bmod G^{\sim}$:
   $u = e^{x_0}\varphi(\vec{x}) + b(\vec{x}), \quad \triangle\varphi = (\lambda_1 + b)\varphi;$
2. $\lambda_2 = 0$: $\quad u = \varphi(\vec{x}) - b(\vec{x})x_0, \quad \triangle\varphi = (\lambda_1 + b)\varphi + \lambda_0.$

Тут $\varphi = \varphi(\vec{x})$ — нова невідома функція. Побудовані анзаци допускають також іншу інтерпретацію. Якщо не задавати a priori функцію b як розв'язок рівняння $\triangle b = b^2 + \lambda_1 b + \lambda_2\lambda_0$, то після підстановки у вихідне рівняння побудовані вище анзаци приводять до так званої *антиредукції*. А саме, після розщеплення за змінною x_0 (одне) вихідне рівняння зводиться до системи двох рівнянь відносно двох нових невідомих функцій b та φ, які однак залежать від меншої кількості змінних порівняно з старою невідомою u.

3. Для будь-якого розв'язку $a = a(x_0, x_1)$ рівняння

$$a_0 + a_{11} = -2aa_1 + \lambda a$$

оператор $Q = \partial_1 + a(x_0, x_1)u\partial_u$ є оператором Q-умовної інваріантності рівняння

$$u_0 + \triangle u = \lambda u \ln u. \qquad (1.71)$$

Тут λ — деяка ненульова стала. Рівняння на функцію a за допомогою заміни Коула–Хопфа $a = (\ln v)_1$ зводиться до (1+1)-вимірного аналога рівняння (1.71) відносно функції $v = v(x_0, x_1)$. А саме, можна вважати, що v задовольняє рівняння

$$v_0 + v_{11} = \lambda v \ln v. \tag{1.72}$$

Використовуючи оператор Q, побудуємо анзац

$$u = v(x_0, x_1)\varphi(x_0, x_2), \tag{1.73}$$

який редукує (1.71) до рівняння

$$\varphi_0 + \varphi_{22} = \lambda\varphi \ln \varphi. \tag{1.74}$$

Підкреслимо, що (1.72) та (1.74) — це (1+1)-вимірні нелінійні рівняння теплопровідності з тою ж нелінійністю, що й вихідне рівняння (1.71). Обидві функції $v = v(x_0, x_1)$ та $\varphi = \varphi(x_0, x_2)$ зберігають залежність від x_0, тобто анзац (1.73) визначає *неповне розділення змінних* — тільки за просторовими змінними. Розв'язки (1+1)-вимірного рівняння (1.71) добре вивчені, їх знаходженню присвячено цілу низку робіт [9]. Підставляючи в анзац (1.73) вже відомі розв'язки (1+1)-вимірного рівняння, можна побудувати значну кількість точних розв'язків (1+2)-вимірного рівняння (1.71).

Зауваження. Неповне розділення змінних, визначене анзацом (1.73), може бути очевидно узагальнене на багатовимірний випадок. А саме, зображення розв'язку $u = u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ рівняння (1.71), де $\triangle$ — n-вимірний оператор Лапласа, у вигляді $u = u^1 u^2$ дає неповне розділення змінних, причому $u^1(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ і $u^2(x_0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ задовольняють відповідно k- і $n-k$-вимірні рівняння вигляду (1.71).

1.6. Інволютивні множини з двох операторів Q-умовної інваріантності

З точністю до еквівалентності множин операторів Q-умовної симетрії можливі три різні випадки :

1. Якщо координати операторів Q_a пропорційні, то множина (1.5) еквівалентна одному оператору (1.4);

2. Якщо $\triangle = \begin{vmatrix} B^{11} & B^{12} \\ B^{21} & B^{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то множина (1.5) еквівалентна множині операторів вигляду

$$\vec{Q} = \vec{A}\partial_0 + \vec{\partial} + \vec{C}\partial_u, \tag{1.75}$$

   де $\vec{A} = \vec{A}(x,u)$, $\vec{C} = \vec{C}(x,u)$ — довільні гладкі функції;

3. Якщо $\triangle = 0$, то множина (1.5) еквівалентна множині операторів

$$Q_1 = \partial_0 + C\partial_u, \quad Q_2 = B\partial_1 + \partial_2 + D\partial_u, \tag{1.76}$$

   де $C = C(x,u)$, $B = B(x,u)$, $D = D(x,u)$ — довільні гладкі функції.

Дослідимо інваріантність рівняння (1.2) відносно множини операторів (1.75).

Теорема 1.5. *Рівняння (1.2) є Q-умовно інваріантним відносно множини операторів (1.75), якщо*

$$A_u^b(\vec{A}^2)_u = \vec{A}^2 A_{uu}^b,$$

$$C^1C_u^2 + C_1^2 + A^1C_0^2 = C^2C_u^1 + C_2^1 + A^2C_0^1,$$

$$C^1A_u^2 + A_1^2 + A^1A_0^2 = C^2A_u^1 + A_2^1 + A^2A_0^1,$$

$$\vec{A}^2C^a_{uu}+2A^bA^a_{bu}+2\vec{A}\vec{C}A^a_{uu}+2(A^a_b+C^bA^a_u)[A^b_u-\tfrac{A^b}{\vec{A}^2}(\vec{A}^2)_u]-$$
$$-2A^a_u[(\vec{A}\vec{C})_u+A^b_b-H]=0,$$
$$C^a\dot{H}-A^a_0H=3A^a_uF-2C^b_bA^a_u+2A^a_bC^b_u-2A^a_bA^b_0- \tag{1.77}$$
$$-2A^a_u\vec{A}_0\vec{C}+\tfrac{2A^b}{\vec{A}^2}(A^a_b+C^bA^a_u)[H-A^d_d+\tfrac{1}{2}(\vec{A}^2)_0-(\vec{A}\vec{C})_u-$$
$$-\vec{A}\vec{C}_u]+\triangle A^a+2C^bA^a_{bu}+\vec{C}^2A^a_{uu}+2A^bC^a{}_{bu}+2\vec{A}\vec{C}C^a_{uu},$$
$$C^a\dot{F}-C^a_uF=C^a_0H+(A^a_b+C^bA^a_u)[\tfrac{2A^b}{\vec{A}^2}(F-C^d_d-\tfrac{1}{2}(\vec{C}^2)_u+\vec{A}\vec{C}_0)-$$
$$-2C^b_0]+\triangle C^a+2C^bC^a_{bu}+\vec{C}^2C^a_{uu},\quad a,b,d=1,2.$$

Доведення. Умови Q-умовної інваріантності рівняння (1.2) відносно операторів (1.75) мають вигляд

$$\underset{2}{Q}_aS\Big|_{D^k(Q_au)=0,\ S=0}=0,\quad \underset{1}{Q}_a(Q_bu)\Big|_{Q_cu=0}=0,$$

де $S=Hu_0+\triangle u-F$. Якщо використати формули продовження, диференціальні наслідки рівнянь $Q_au=0$, порядок яких не перевищує порядку рівняння (1.2) та взяти до уваги те, що функції $\vec{A}$, $\vec{C}$, H та F не залежать від похідних функції u, то одержимо рівності (1.77).

Теорема 1.5 доведена.

У тому випадку, коли функції A^a та C^a залежать тільки від u, система визначальних рівнянь (1.77) значно спрощується і стає можливим знайти її загальний розв'язок.

Теорема 1.6. *Будь-яка множина операторів*

$$\vec{Q}=\vec{A}(u)\partial_0+\vec{\partial}+\vec{C}(u)\partial_u \tag{1.78}$$

Q-умовної симетрії нелінійного рівняння теплопровідності (1.2) або є еквівалентною множині операторів ліївської симетрії цього рівняння, або з точністю до перетворень з групи еквівалентності

(1.6) та додаткових перетворень (1.10) є еквівалентною одній з множин, які наведені в таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори	Зауваження
1	$-\left(\frac{G_u}{u}+\frac{1}{2}G_{uu}\right)$	$G\left(G_u+\frac{\lambda_0}{u^2}\right)$	$\vec{Q}=-\frac{\vec{a}}{u}\partial_0+\vec{\partial}+\vec{a}G\partial_u,$	$G(u)=\frac{1}{u}P_3(u)$
2	$G_u\ \text{tg}\ u-\frac{1}{2}G_{uu}$	$G\left(G_u-\frac{\lambda_0}{\cos^2 u}\right)$	$\vec{Q}=(\vec{a}t+\vec{b})\partial_0+\vec{\partial}+\vec{a}G\partial_u,$	$G(u)=\frac{1}{1+t^2}P_3(t),$ $t=\text{tg}\ u$

Тут $\vec{a},\vec{b}$ — сталі вектори такі, що $\vec{a}^2=\vec{b}^2=1$, $\vec{a}\vec{b}=0$; $P_3(\tau)=\lambda_0+\lambda_1\tau+\lambda_2\tau^2+\lambda_3\tau^3$ — довільний многочлен третього порядку відносно τ.

Доведення. У тому випадку, коли функції A^a та C^a залежать тільки від u, система визначальних рівнянь (1.77) має вигляд

$$C^1C^2_u=C^2C^1_u,\quad C^1A^2_u=C^2A^1_u,\quad A^a_u(\vec{A}^2)_u=\vec{A}^2A^a_{uu}, \tag{1.79}$$

$$\vec{A}^2C^a_{uu}+2\vec{A}\vec{C}A^a_{uu}+2A^a_u[\vec{C}\vec{A}_u-\tfrac{\vec{A}\vec{C}}{\vec{A}^2}(\vec{A}^2)_u]=2A^a_u[(\vec{A}\vec{C})_u-H], \tag{1.80}$$

$$C^a\dot{F}-C^a_uF=2A^a_u\tfrac{\vec{A}\vec{C}}{\vec{A}^2}[F-\tfrac{1}{2}(\vec{C}^2)_u]+\vec{C}^2C^a_{uu}, \tag{1.81}$$

$$C^a\dot{H}=3A^a_uF+2A^a_u\tfrac{\vec{A}\vec{C}}{\vec{A}^2}[H-(\vec{A}\vec{C})_u-\vec{A}\vec{C}_u]+\vec{C}^2A^a_{uu}+2\vec{A}\vec{C}C^a_{uu}. \tag{1.82}$$

Після інтегрування рівнянь (1.79) маємо:

$$C^2=k_1C^1,\quad A^2=k_1A^1+k_2,\quad {A_u}^a=m_a(\vec{A})^2, \tag{1.83}$$

де k_a, m_a — довільні сталі. Інтегрування останнього рівняння (1.83) задає два різні випадки: $\vec{A}=-\frac{\vec{a}}{u}$ та $\vec{A}=\vec{a}\ \text{tg}\ u+\vec{b}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$ — сталі вектори такі, що $\vec{a}^{\,2}=\vec{b}^{\,2}=1$, $\vec{a}\,\vec{b}=0$.

Розглянемо перший випадок, для другого випадку доведення проводиться аналогічно. Підставивши $\vec{A}=-\frac{\vec{a}}{u}$ в рівняння (1.79), одержуємо $\vec{C} = \vec{a}\, G(u)$, де $G(u)$ — довільна гладка функція. Після підстановки функцій $\vec{A}$, $\vec{C}$ в рівняння (1.80) та (1.81) отримаємо $H = -\frac{1}{2}\left(G_{uu} + \frac{2}{u}G_u\right)$, $\quad F = G\left(G_u + \frac{\lambda_0}{u^2}\right)$, де λ_0 — довільна стала. Підставивши знайдені H та F в рівняння (1.82), одержуємо $G_{uuu} = -\dfrac{6\lambda_0}{u^4}$. Звідки остаточно отримуємо вигляд функції G з пункту 1 таблиці 2.5:

$G = \frac{1}{u}P_3(u)$, де $P_3(u) = \lambda_0 + \lambda_1\tau + \lambda_2\tau^2 + \lambda_3\tau^3$ — довільний поліном третього степеня. Теорему 1.6 доведено.

Крім розв'язків системи (1.77), наведених в таблиці 2.5, можна знайти й інші, коли функції A^a та C^a залежать не тільки від u. Так, наприклад,

$$H(u) = 2\ln u,\ \ F(u) = u(\ln u - \ln^2 u + \lambda),\ \ \lambda = \mathrm{const}$$

$$A^1 = 1,\ \ A^2 = 1,\ \ C^1 = 0,\ \ C^2 = -e^{x_1 - x_0}u.$$

В результаті одержимо Q-умовні оператори

$$Q_1 = \partial_0 + \partial_1,\ \ Q_2 = \partial_0 + \partial_2 - e^{x_1 - x_0}u\partial_u \tag{1.84}$$

для рівняння

$$2\ln u\ u_0 + \triangle u = u(\ln u - \ln^2 u + \lambda). \tag{1.85}$$

Дослідимо симетрію рівняння (1.2) відносно операторів (1.76). Справедливе наступне твердження.

Теорема 1.7. *Рівняння (1.2) є Q-умовно інваріантним відносно операторів (1.76), якщо виконуються наступні умови:*

$$B_0 + CB_u = 0,\ \ (B^2+1)B_{uu} = 2BB_u^2,$$
$$BC_1 + C_2 - D_0 = CD_u - C_uD;$$

$$(B^2+1)D_{uu} = 2BB_uD_u - 2(BB_{2u} - B_{1u}) + \tfrac{4BB_u}{B^2+1}(BB_2 - B_1);$$

$$C_{uu} = 0,\ \ C_{1u} = BC_{2u},\ \ C\dot{F} - FC_u = C^2\dot{H} + C_0H + \triangle C + 2DC_{2u};$$

$$3(F-HC)B_u+\triangle B-\tfrac{2BB_aB_a}{B^2+1}=2(D_2B_u-BD_{2u}+D_{1u})+$$
$$+\tfrac{2D}{B^2+1}[2B(BB_{2u}-B_{1u})-(B^2+1)B_{2u}]-$$
$$-\tfrac{2}{(B^2+1)^2}[2DBB_u-(B^2+1)D_u][2B(BB_2-B_1)-(B^2+1)B_2];$$
$$(1.86)$$

$$D(\dot F-C\dot H)-D_uF-D_0H=\triangle D+2DD_{2u}+D^2D_{uu}-\tfrac{2}{B^2+1}[(B_2+$$
$$+BB_1+DB_u)D_1+(BB_2-B_1+DBB_u)(D_2+DD_u+CH-F)].$$

Доведення. З рівностей $Q_au=0$ випливає, що

$$u_0=C,\ \ u_2=D-Bu_1. \tag{1.87}$$

Якщо використати умови інваріантності (1.87), диференціальні наслідки від (1.87), які не перевищують порядок рівняння (1.2),

$$u_{22}=F-Hu_0-u_{11},$$

формули продовження та взяти до уваги те, що функції $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$, H та F не залежать від похідних функції u, то одержимо рівності (1.86). Теорема 1.7 доведена.

У випадку, коли $D=0$, система визначальних рівнянь (1.86) спрощується і стає можливим знайти її загальний розв'язок. Тоді всі оператори класу (1.76) описуються множиною операторів

$$Q_1=\partial_0+C(x,u)\partial_u,\quad Q_2=B(x,u)\partial_1+\partial_2, \tag{1.88}$$

а визначальна система (1.86) набуває вигляду:

$$B_0+CB_u=0,\ \ BC_1+C_2=0,\ \ C_{uu}=0,\ \ C_{1u}=BC_{2u};$$
$$B_{uu}(1+B^2)=2BB_u^2,\ \ B_{1u}-BB_{2u}=\tfrac{2(B_1-BB_2)BB_u}{B^2+1};$$
$$(B_1-BB_2)(F-HC)=0,\ \ \dot FC-FC_u=C^2\dot H+C_0H+\triangle C;$$
$$3B_u(F-HC)+\triangle B=\tfrac{2BB_aB_a}{B^2+1}.$$
$$(1.89)$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1.8. *Будь-яка множина двох операторів Q-умовної симетрії вигляду (1.88) нелінійного рівняння теплопровідності (1.2) або є еквівалентною множині операторів ліївської симетрії цього рівняння, або з точністю до перетворень групи еквівалентності (1.6) та додаткових перетворень (1.10) є еквівалентною одній з множин з таблиці 2.6.*

Доведення. З сьомого рівняння системи (1.89) одержуємо, що можливі два різні випадки: $F = CH, \quad F \neq CH.$

Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

Таблиця 2.6

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори	Зауваження
1	$\forall$	$\lambda_2 H$	$Q_1 = \partial_0 + \lambda_2\partial_u$, $Q_2 = \operatorname{tg}\,[\lambda_3\omega + \beta(\vec{x})]\partial_1 + \partial_2$	$\triangle\beta = 0$ $\omega = u - \lambda_2 x_0$
2	$\forall$	$(\lambda_1 u + \lambda_2)H$	$Q_1 = \partial_0 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u$, $Q_2 = \operatorname{tg}\,[\lambda_3\omega + \beta(\vec{x})]\partial_1 + \partial_2$	$\triangle\beta = 0,\ \lambda_1 \neq 0$ $\omega = (\lambda_1 u + \lambda_2)e^{-\lambda_1 x_0}$
3	$\forall$	$(\lambda_1 u + \lambda_2)(H + \lambda_0)$	$Q_1 = \partial_0 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u$, $Q_2 = (C_{ab}x_b + d_a)\partial_a$	$C_{ab} + C_{ba} = 0,\ a = 1, 2$ $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$
4	u	$\lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$	$Q_1 = \partial_0 + (\lambda_2 u + z(\omega))\partial_u$, $Q_2 = C_{12}J_{12} + d_a\partial_a$	$(2C_{12}\omega + \vec{d}^{\,2})\ddot{z} + 2C_{12}\dot{z} =$ $= \lambda_1 z - z^2 - \lambda_2\lambda_0$, $\omega = \frac{C_{12}}{2}\vec{x}^{\,2} + \vec{d}^{\,\perp}\vec{x}$
5	u	λu	$Q_1 = \partial_0 + z(\omega)\partial_u$, $Q_2 = d_a\partial_a$	$\dot{z}^2 = C_1 + \lambda z^2 - \frac{2}{3}z^3$ $\omega = \vec{d}^{\,\perp}\vec{x},\ C_1 \neq 0$
6	u	0	$Q_1 = \partial_0 - \wp(\omega)\partial_u$, $Q_2 = d_a\partial_a$	$\ddot{\wp} = \wp^2,\ \omega = \vec{d}^{\,\perp}\vec{x}$ $\wp$ — функція Вейєрштрасса
7	u	u	$Q_1 = (\operatorname{ch}\omega + 1)\partial_0 + 3\partial_u$, $Q_2 = d_a\partial_a$	$\omega = \vec{d}^{\,\perp}\vec{x}$
8	u	$-u$	$Q_1 = (\cos\omega - 1)\partial_0 + 3\partial_u$, $Q_2 = d_a\partial_a$	$\omega = \vec{d}^{\,\perp}\vec{x}$

Тут λ, λ_0, λ_1, λ_2, C_1, C_{ab}, d_a, $d_a^{\perp}$ — довільні сталі, z — гладка функція, $\vec{d}, \vec{d}^{\,\perp}$ — ортогональні вектори.

I. Нехай $F = CH$, а це означає, що $C = C(u)$. З третього рівняння системи (1.89) маємо $C = \lambda_1 u + \lambda_2$, де λ_1, λ_2 — довільні сталі. Тоді система (1.89) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 u + \lambda_2)\dot{F} - \lambda_1 F = (\lambda_1 u + \lambda_2)^2 \dot{H}, \ \ B_0 + (\lambda_1 u + \lambda_2)B_u = 0;\\
&B_{uu}(1 + B^2) = 2BB_u^2, \ \ B_{1u} - BB_{2u} = \frac{2(B_1 - BB_2)BB_u}{B^2 + 1};\\
&\triangle B = \frac{2BB_a B_a}{B^2 + 1}.
\end{aligned} \tag{1.90}$$

При $F = (\lambda_1 u + \lambda_2)H$ перше рівняння системи (1.90) перетворюється в тотожність. Загальний розв'язок другого рівняння цієї системи в залежності від значення сталої λ_1 має вигляд $B = B(\omega, \vec{x})$, де

$$\omega = u - \lambda_2 x_0, \qquad \text{при } \lambda_1 = 0; \tag{1.91}$$

$$\omega = (\lambda_1 u + \lambda_2)e^{-\lambda_1 x_0}, \qquad \text{при } \lambda_1 \neq 0. \tag{1.92}$$

Підставивши B в третє рівняння системи (1.90) отримаємо

$$B = \operatorname{tg}\,\alpha, \qquad \alpha = \gamma(\vec{x})\omega + \beta(\vec{x}), \tag{1.93}$$

де γ, β — довільні гладкі функції, ω має вигляд (1.91) або (1.92). Після підстановки (1.93) в четверте та п'яте рівняння системи (1.90) отримаємо, що $\gamma = \lambda_3 = \text{const}$, $\triangle\beta = 0$.

Формули (1.93), (1.91), (1.92) в залежності від ω задають оператори з пунктів 1 та 2 таблиці 2.6 (відповідно).

II. Нехай $B_1 = BB_2$, тоді з шостого рівняння системи (1.89) отримаємо рівняння $B_2 B_u = 0$.

Якщо припустити, що $B_u \neq 0$, тоді $B_2 = B_1 = 0$. З останнього рівняння системи (1.89) випливає, що $B_u(F - HC) = 0$. Оскільки в цьому випадку $F - HC \neq 0$ і $B_u \neq 0$, то система (1.89) несумісна.

Отже, $B_u = 0$, тоді з третього рівняння системи (1.89) отримаємо, що $C = y(x)u + z(x)$, де y, z — довільні гладкі функції.

Диференціальний наслідок першого порядку по змінній u з другого рівняння разом з четвертим рівнянням системи (1.89) задають умову $y = y(x_0)$. Тоді з (1.89) випливає:

$$\begin{aligned} &B_0 = 0,\ \ B_1 = BB_2,\ \ Bz_1 + z_2 = 0,\ \ \triangle B = 2B_1B_2, \\ &(yu+z)\dot{F} - yF = (yu+z)^2\dot{H} + (\dot{y}u + z_0)H + \triangle z. \end{aligned} \tag{1.94}$$

З умов сумісності другого та четвертого рівнянь системи (1.94) одержуємо умову $B_{22} = 0$, тоді $B = \alpha(x_1)x_2 + \beta(x_1)$, де α, β — довільні гладкі функції. Підставивши B в друге рівняння системи (1.94) отримаємо

$$B = \frac{C_{12}x_2 + d_2}{-C_{12}x_1 - d_1}, \tag{1.95}$$

де C_{12}, d_a — довільні сталі, $a = 1, 2$. Використання (1.95) дає змогу проінтегрувати третє рівняння системи (1.94):

$$z = z(x_0,\ \omega), \qquad \omega = \frac{1}{2}\,C_{12}\,\vec{x}^{\,2} + d_a x_a. \tag{1.96}$$

Оскільки функції, що входять до останнього рівняння (1.94) залежать від різних невідомих, то, ввівши припущення:

$$\begin{aligned} &y = m_1\varphi(x),\ \ z = m_2\varphi(x),\ \ \dot{y} = m_3\varphi(x) + k_3\varphi^2(x), \\ &z_0 = m_4\varphi(x) + k_4\varphi^2(x),\ \ \triangle z = m_5\varphi(x) + k_5\varphi^2(x), \end{aligned} \tag{1.97}$$

де m_i, k_i — довільні сталі, а $\varphi(x)$ — довільна гладка функція, $i = \overline{1, 5}$, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} &(m_1u + m_2)\dot{F} - m_1F - (m_3u + m_4)H - m_5 = \\ &= \varphi(x)[(m_1u + m_2)^2\dot{H} + (k_3u + k_4)H + k_5]. \end{aligned}$$

Це рівняння не залежить від змінної x в випадках $(y, z) = \mathrm{const}$ або $H = \mathrm{const}$. В протилежному випадку, після його розщеплення по функції $\varphi(x)$, одержимо систему двох диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} &(m_1u+m_2)\dot{F}=m_1F+(m_3u+m_4)H+m_5, \\ &(m_1u+m_2)^2\dot{H}+(k_3u+k_4)H+k_5=0. \end{aligned} \tag{1.98}$$

В результаті отримаємо такі суттєво різні випадки:

$$(y,z)=\mathrm{const}; \qquad H=\mathrm{const}; \qquad (y,z)\neq\mathrm{const}, \quad H\neq\mathrm{const}.$$

Розглянемо кожен з отриманих випадків окремо.

1. Нехай $(y,z)=(\lambda_1,\lambda_2)=\mathrm{const}$, тоді останнє рівняння системи (1.94) має вигляд $(\lambda_1u+\lambda_2)\dot{F}-\lambda_1F=(\lambda_1u+\lambda_2)^2\dot{H}$, яке інтегрується при довільній функції H: $F=(\lambda_1u+\lambda_2)(H+\lambda_0)$, де λ_0 — стала інтегрування. Оператори (1.88) еквівалентні наступним операторам $Q_1=\partial_0+(\lambda_1u+\lambda_2)\partial_u$, $Q_2=(C_{ab}x_b+d_a)\partial_a$, що відповідає пункту 3 таблиці 2.6.

2. Нехай $H=\mathrm{const}$, не втрачаючи загальності, вважатимемо $H=1$. Останнє рівняння системи (1.94) має вигляд

$$(yu+z)\dot{F}-yF=\dot{y}u+z_0+\triangle z.$$

Проаналізувавши його структуру відносно змінної u, отримаємо два різні випадки: 1. F – довільна гладка функція та 2. $F=\lambda u\ln u$:

1. $y=z=0,\qquad Q_1=\partial_0,\quad Q_2=C_{ab}x_b+d_a\partial_a.$
2. $z=0, y=C_1e^{\lambda x_0},\quad Q_1=\partial_0+C_1e^{\lambda x_0}\partial_u, Q_2=C_{ab}x_b+d_a\partial_a.$

Знайдені оператори — це лінійна комбінація ліївських операторів.

3. Нехай $H\neq\mathrm{const}$, $(y,z)\neq\mathrm{const}$. Проаналізувавши структуру другого рівняння системи (1.98) відносно змінної u, (потрібно провести міркування аналогічні проведеним в доведенні теореми 1.4 при дослідженні системи (1.19)) отримаємо такі пари функцій:

$$H=e^u+\lambda_1, \qquad F=\lambda_2e^u+\lambda_3u+\lambda_4; \tag{1.99}$$

$$H = \lambda u^m, \qquad F = \lambda u, \qquad m \neq 0, 1; \tag{1.100}$$

$$H = u, \qquad F = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 u + \lambda_3. \tag{1.101}$$

Розглянемо кожну пару функцій окремо.

3.1. Підставивши функції (1.99), (1.96) в останнє рівняння системи (1.94) та розщепивши по степенях змінної u, отримуємо рівняння $y = 0$, $z_0 + z^2 = \lambda_2 z$ та $\lambda_1 z_0 + (2C_{12}\omega + (\vec{d}\,)^2) z_{\omega\omega} + 2C_{12} z_\omega = \lambda_3 z$. Проінтегрувавши друге рівняння, знайдемо $z = \lambda_2(1 + \beta(\omega)e^{\lambda_2 x_0})^{-1}$, де β — довільна гладка функція. Підставивши z в третє рівняння, отримаємо умови $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\dot{\beta} = 0$, які разом з (1.99) задають рівняння $e^u u_0 + \triangle u = \lambda_2 e^u + \lambda_4$, що перетвореннями (1.6), (1.10) зводиться до рівняння $e^u u_0 + \triangle u = \lambda_4$. Отримані оператори з точністю до (1.6), (1.10) породжують лінійну комбінацію тільки ліївських операторів.

3.2. Підставивши функції (1.100), (1.96) в останнє рівняння системи (1.94), отримаємо

$$\lambda z = m(yu + z)^2 u^{m-1} + (\dot{y}u + z_0)u^m + (2C_{12}\omega + (\vec{d}\,)^2) z_{\omega\omega} + 2C_{12} z_\omega. \tag{1.102}$$

При розщепленні рівняння (1.102) по степеням змінної u виникають особливі степені $m = -1$ та $m = 1$.

Нехай $H = \lambda u^{-1}$. Тоді з (1.102) маємо $z = 0$, $y = -(x_0 + d_0)^{-1}$, де d_0 — довільна стала. Підставивши z та y в (1.88), отримаємо оператори які з точністю до перетворень (1.6), (1.10) еквівалентні ліївським операторам $Q_1 = (x_0 + d_0)\partial_0 - \partial_u$, $Q_2 = (C_{ab}x_b + d_b)\partial_a$.

Нехай $H = \lambda u$. Тоді з рівняння (1.102) отримуємо

$$\dot{y} + y^2 = 0, \; z_0 + 2yz = 0, \; \lambda z = z^2 + (2C_{12}\omega + (\vec{d}\,)^2) z_{\omega\omega} + 2C_{12} z_\omega. \tag{1.103}$$

Розв'язком першого рівняння з (1.103) є $y = 0$ або $y = (x_0 + d_0)^{-1}$.

При $y = 0$ з (1.103) випливає, що $z_0 = 0$, а також

$$\left(2C_{12}\omega + (\vec{d}\,)^2\right) \ddot{z} + 2C_{12}\dot{z} = \lambda z - z^2. \tag{1.104}$$

В залежності від співвідношень між коефіцієнтами C_{12} та d_a інтегрування рівняння (1.104) зводиться до інтегрування рівнянь

$$\begin{aligned} &\text{при } C_{12} \neq 0,\ \vec{d}\ = 0, \qquad 2C_{12}(\omega\ddot{z} + \dot{z}) = \lambda z - z^2; \\ &\text{при } C_{12} = 0,\ (\vec{d}\ )^2 \neq 0,\ \ (\vec{d}\ )^2\ddot{z} = \lambda z - z^2. \end{aligned} \tag{1.105}$$

Розв'язки рівнянь (1.105) задають Q-умовні оператори інваріантності рівняння (1.2), які наведено в таблиці 2.6 в пунктах 4–8.

Коли $y = (x_0 + d_0)^{-1}$, з другого рівняння системи (1.103) отримуємо $z = \beta(\omega)(x_0 + d_0)^{-2}$, де β — довільна гладка функція. Підставивши z в третє рівняння системи (1.103) одержимо, що $\beta = 0$, а це означає, що $z = 0$ і оператори (1.88) є еквівалентні ліївським, які наведено в таблиці 2.1 в пункті 6.

Нехай $H = \lambda u^m$, $m \neq 0, \pm 1$. Тоді з рівняння (1.102) знаходимо $z = 0$, $y = (mx_0 + d_0)^{-1}$, де d_0 — довільна стала, підставивши які в (1.88), отримаємо оператори що еквівалентні ліївським

$$Q_1 = (mx_0 + d_0)\partial_0 + \partial_u, \quad Q_2 = (C_{ab}x_b + d_b)\partial_a.$$

3.3. Підставивши функції (1.101), (1.96) в останнє рівняння системи (1.94) та розщепивши по степенях змінної u, отримуємо

$$\dot{y} + (y - \lambda_1)y = 0, \ \ z_0 + 2(y - \lambda_1)z = 0, \tag{1.106}$$

$$(2C_{12}\omega + (\vec{d}\ )^2)z_{\omega\omega} + 2C_{12}z_\omega + z^2 + \lambda_3 y = \lambda_2 z. \tag{1.107}$$

Якщо $y = \text{const}$, то з (1.106) отримуємо, що $y = \lambda_1$, $z_0 = 0$, при цьому функція $z = z(\omega)$ повинна задовольняти наступне звичайне диференціальне рівняння

$$\left(2C_{12}\omega + (\vec{d}\ )^2\right) z_{\omega\omega} + 2C_{12}z_\omega + z^2 + \lambda_3\lambda_1 = \lambda_2 z. \tag{1.108}$$

Формули (1.108) після підстановки в (1.88) задають оператори наведені в пункті 4 таблиці 2.6.

Припустимо, що $y \neq \mathrm{const}$. Якщо додати перше рівняння (1.106) домножене на $2z$ та друге рівняння (1.106) домножене на $-y$, то, після інтегрування по змінній x_0, отримаємо $z = \beta(\omega)y^2$. Підставивши z в (1.107) та розділивши змінні, отримаємо $z = \mathrm{const}$ та $y = \mathrm{const}$, що протирічить нашому припущенню.

Теорема 1.8 доведена.

При $D \neq 0$ знайдено деякі частинні розв'язки системи (1.86), підставивши які в оператори (1.76), отримано двовимірні Q-умовні множини операторів рівняння (1.2). Одержані результати наведено в таблиці 2.7.

В таблиці 2.7 f, α, β, Ψ, w, g — гладкі функції, λ_1, λ_2, λ_3, C, C_1, C_3, C_4 — довільні сталі, $\lambda = 0, \pm 1$, функції Ψ_λ, ψ_λ, y_λ, z_λ, v_λ, φ_λ в залежності від λ можуть набувати наступних значень:

$$\Psi_\lambda = \begin{cases} \frac{1}{x_2}(C_3 x_2^2 + C_4 + \frac{k_1 x_2^2}{2}), \ \lambda = 0, \\ \frac{1}{x_2}[C_3(x_2 - 1)e^{x_2} + C_4(x_2 + 1)e^{-x_2} + k_1], \ \lambda = 1, \\ \frac{1}{x_2}[(C_3 x_2 - C_4)\sin x_2 + (C_3 + C_4 x_2)\cos x_2 - k_1], \\ \lambda = -1; \end{cases} \tag{1.109}$$

$$\psi_\lambda = \begin{cases} C_3 x_2 + C_4, \ \lambda = 0, \\ C_3 e^{x_2} + C_4 e^{-x_2}, \ \lambda = 1, \\ C_3 \sin x_2 + C_4 \cos x_2, \ \lambda = -1; \end{cases} \tag{1.110}$$

$$y_\lambda = \begin{cases} C_3 x_2 + C_4 - \frac{k_1 x_2^2}{2}, \ \lambda = 0, \\ C_3 \operatorname{sh} x_2 + C_4 \operatorname{ch} x_2 + k_1, \ \lambda = 1, \\ C_3 \sin x_2 + C_4 \cos x_2 - k_1, \ \lambda = -1; \end{cases} \tag{1.111}$$

$$z_\lambda = \begin{cases} (C_3 + C_4x_2 - \frac{k_1x_2^2}{2}) \operatorname{cth} x_2 + k_1x_2 - C_4, \;\; \lambda = 0, \\ \frac{C_3+C_4x_2}{\operatorname{sh} x_2} + C_4 \operatorname{ch} x_2 + k_1 \operatorname{cth} x_2, \;\; \lambda = 1, \\ (C_3 \operatorname{cth} x_2 + C_4) \sin x_2 + (C_4 \operatorname{cth} x_2 - C_3) \cos x_2 - \\ -k_1 \operatorname{cth} x_2, \;\; \lambda = -1; \end{cases} \tag{1.112}$$

$$v_\lambda = \begin{cases} (C_3 - C_4x_2 - \frac{k_1x_2^2}{2}) \tanh x_2 + k_1x_2 + C_4, \;\; \lambda = 0, \\ \frac{C_3+C_4x_2}{\operatorname{ch} x_2} + C_4 \operatorname{sh} x_2 + k_1 \tanh x_2, \;\; \lambda = 1, \\ (C_3 \tanh x_2 + C_4) \sin x_2 + (C_4 \tanh x_2 - C_3) \cos x_2 - \\ -k_1 \tanh x_2, \;\; \lambda = -1; \end{cases} \tag{1.113}$$

$$\varphi_\lambda = \begin{cases} (C_3x_2 + C_4 + \frac{k_1x_2^2}{2}) \operatorname{tg} x_2 + k_1x_2 + C_3, \;\; \lambda = 0, \\ (C_3 \operatorname{tg} x_2 + C_4) \operatorname{sh} x_2 + (C_4 \operatorname{tg} x_2 + C_3) \operatorname{ch} x_2 - \\ -k_1 \operatorname{tg} x_2, \;\; \lambda = 1, \\ \frac{C_3+C_4x_2}{\cos x_2} + C_4 \sin x_2 + k_1 \operatorname{tg} x_2, \;\; \lambda = -1. \end{cases} \tag{1.114}$$

По отриманих Q-умовних операторах, наведених в таблицях 2.2, 2.5–2.7 можна побудувати інваріантні анзаци та провести редукцію рівняння (1.2) до рівнянь з меншою кількістю невідомих. Покажемо це на прикладі деяких із знайдених операторів.

I. Оператори наведені в таблиці 2.7 в пункті 5 задають анзац

$u = e^{kx_1+x_0}\varphi(\omega), \quad \omega = mx_1 - x_2$

та редуковане рівняння

$(1 + m^2)\ddot{\varphi} + 2km\dot{\varphi} + (k^2 - \lambda)\varphi = 0.$

Розв'язками редукованого рівняння будуть функції:

а) $\varphi = C_1 \exp(\sigma_1\omega) + C_2 \exp(\sigma_2\omega)$, якщо $\lambda(m^2 + 1) > k^2$,

б) $\varphi = (C_1\omega + C_2) \exp(\sigma\omega)$, якщо $\lambda(m^2 + 1) = k^2$,

в) $\varphi = \exp(\sigma_1\omega)(C_1 \cos(\sigma_2\omega) + C_2 \sin(\sigma_2\omega))$, якщо $\lambda(m^2 + 1) < k^2$, де функції σ, σ_1, σ_2 є розв'язками рівняння:

$$(1+m^2)\sigma^2 + 2km\sigma + (k^2-\lambda) = 0, \text{ а } C_1, C_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Таблиця 2.7

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори	Зауваження
1	$\forall$	$\lambda_1 u + \lambda_2$	$Q_1 = \partial_0,$ $Q_2 = \partial_2 + (\alpha(x_2)u + \beta(\vec{x}))\partial_u$	$\dot\alpha + \alpha^2 = C_1$ $\triangle\beta + 2\dot\alpha\beta = \lambda_1\beta - \lambda_2\alpha$
2	$\forall$	$\lambda_1 u \ln u$	$Q_1 = \partial_0,$ $Q_2 = \partial_2 + (\alpha(x_2)u + \beta(\vec{x}))\partial_u$	$\ddot\alpha + 2\alpha\dot\alpha = \lambda_1\alpha,\ \lambda_1\beta = 0$ $\triangle\beta + 2\dot\alpha\beta = 0$
3	$\forall$	$(u+\lambda_2)(H+\lambda_3)$	$Q_1 = \partial_0 + (u+\lambda_2)\partial_u,$ $Q_2 = \partial_2 + \alpha(x_2)[u + \lambda_2 + \Psi(\vec{x})e^{x_0}]\partial_u$	$\dot\alpha + \alpha^2 = C_1$ $\triangle\Psi + \frac{2\dot\alpha}{\alpha}\Psi_2 = \lambda_3\Psi$
4	$\forall$	$H + \lambda_1$	$Q_1 = \partial_0 + \partial_u,$ $Q_2 = \partial_2 + \Psi(\vec{x})\partial_u$	$\triangle\Psi = 0$
5	$\forall$	$(H+\lambda_1)u$	$Q_1 = \partial_0 + u\partial_u,$ $Q_2 = \partial_1 + m\partial_2 + ku\partial_u$	
6	$u^2\dot f(u)$	$f(u) + u\dot f(u)$	$Q_1 = \partial_0 + u\partial_u,$ $Q_2 = \partial_1 + m\partial_2 + \exp x_0\partial_u$	
7	1	$\lambda_1 u \ln u$	$Q_1 = w\partial_0 + w_0 u\partial_u,$ $Q_2 = w\partial_2 + w_2 u\partial_u$	$w_0 + w_{22} = \lambda_1 w \ln w$ $w = w(x_0, x_2)$
8	u^{-1}	λu	$Q_1 = \partial_0 + \frac{1}{C_1 - x_0}u\partial_u,$ $Q_2 = \partial_2 + [\alpha(x_2)u + \frac{g(\vec{x})}{C_1 - x_0}]\partial_u$	$\dot\alpha = C - \alpha^2,$ $\triangle g = (\lambda - 2\dot\alpha)g + \alpha$
9	u^{-1}	λu	$Q_1 = \partial_0 - \frac{k_1 u}{k_1 x_0 + k_2},$ $Q_2 = \partial_2 + \frac{1}{x_2}[u + \frac{\Psi_\lambda(x_2)}{k_1 x_0 + k_2}]\partial_u$	Ψ_λ задається (1.109)
10	u^{-1}	λu	$Q_1 = \partial_0 - \frac{k_1 u}{k_1 x_0 + k_2}\partial_u,$ $Q_2 = \partial_2 + \frac{\psi_\lambda(x_2)}{k_1 x_0 + k_2}\partial_u$	ψ_λ задається (1.110)
11	u^{-1}	λu	$Q_1 = \partial_0 - \frac{k_1 u}{k_1 x_0 + k_2}\partial_u,$ $Q_2 = \partial_2 + [u + \frac{y_\lambda(x_2)}{k_1 x_0 + k_2}]\partial_u$	y_λ задається (1.111)
12	u^{-1}	λu	$Q_1 = \partial_0 - \frac{k_1 u}{k_1 x_0 + k_2}\partial_u,$ $Q_2 = \partial_2 + [u \operatorname{cth} x_2 + \frac{z_\lambda(x_2)}{k_1 x_0 + k_2}]\partial_u$	z_λ задається (1.112)

Продовження таблиці 2.7.

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори	Зауваження
13	u^{-1}	λu	$Q_1 = \partial_0 - \frac{k_1 u}{k_1 x_0 + k_2}\partial_u$,	v_λ задається (1.113)
			$Q_2 = \partial_2 + [u \tanh x_2 + \frac{v_\lambda(x_2)}{k_1 x_0 + k_2}]\partial_u$	
14	u^{-1}	λu	$Q_1 = \partial_0 - \frac{k_1 u}{k_1 x_0 + k_2}\partial_u$,	φ_λ задається (1.114)
			$Q_2 = \partial_2 + [-u \operatorname{tg} x_2 + \frac{\varphi_\lambda(x_2)}{k_1 x_0 + k_2}]\partial_u$	

Тоді розв'язками відповідного рівняння теплопровідності є:

а) $u = \exp(kx_1 + x_0)[C_1 \exp(\sigma_1\omega) + C_2 \exp(\sigma_2\omega)]$,

б) $u = \exp(kx_1 + x_0)(C_1\omega + C_2)\exp(\sigma\omega)$,

в) $u = \exp(kx_1 + x_0)\exp(\sigma_1\omega)[C_1 \cos(\sigma_2\omega) + C_2 \sin(\sigma_2\omega)]$.

II. Аналогічно для оператора з пункту 6 таблиці 2.7 отримуємо такі результати $u = \exp x_0(x_1 + \varphi(\omega))$, $\omega = mx_1 - x_2$, $\ddot{\varphi} = \dfrac{\lambda}{1+m^2}$. Редуковане рівняння має розв'язок: $\varphi = C_1\omega + C_2 + \frac{\lambda\omega^2}{2(1+m^2)}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^1$. Розв'язком відповідного рівняння теплопровідності є функція

$$u = \exp x_0 \left[x_1 + C_1(mx_1 - x_2) + C_2 + \frac{\lambda(mx_1 - x_2)^2}{2(1+m^2)}\right].$$

III. Якщо за допомогою операторів (1.84) побудувати анзац

$$u = e^{\exp(x_1 - x_0) + \varphi(\omega)}, \quad \omega = x_1 + x_2 - x_0,$$

то він редукує рівняння (1.85) до звичайного диференціального рівняння $\quad \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}\varphi + \frac{1}{2}(\varphi^2 - \varphi - \lambda) = 0.$

IV. Оператори наведені в таблиці 2.5 задають анзаци (далі номер анзацу та розв'язку співпадає з номером пункту):

1. $\int \dfrac{udu}{P_3(u)} = \vec{a}\vec{x} + \varphi(\omega), \qquad \omega = \int \dfrac{du}{P_3(u)} + x_0;$
2. $x_0 - \vec{b}\vec{x} - \int \dfrac{tdt}{P_3(t)} = \varphi(\omega), \quad \omega = \vec{a}\vec{x} - \int \dfrac{dt}{P_3(t)},$

які редукують рівняння (1.2)(з функціями F та H, заданими в пунктах 1 та 2 таблиці 2.5), для обох випадків, до звичайного диференціального рівняння $\ddot{\varphi} = P_3(\dot{\varphi})$. Загальний розв'язок якого записується в параметричній формі

$$\omega = \int \frac{dt}{P_3(t)} + c_1, \quad \varphi = \int \frac{tdt}{P_3(t)} + c_2. \tag{1.115}$$

За розв'язком (1.115) знаходимо розв'язки рівняння (1.2) при $H(u)$ і $F(u)$ заданих в пунктах 1 та 2 таблиці 2.5 відповідно:

1. $x_0 + \int\limits_0^u \frac{d\tau}{P_3(\tau)} = \int \frac{dt}{P_3(t)} + c_1, \ \ \vec{a}\vec{x} - \int\limits_0^u \frac{\tau d\tau}{P_3(\tau)} = \int \frac{tdt}{P_3(t)} + c_2;$

2. $\vec{a}\vec{x} - \int\limits_0^{\operatorname{tg} u} \frac{d\tau}{P_3(\tau)} = \int \frac{dt}{P_3(t)} + c_1, \ \ x_0 - \vec{b}\vec{x} - \int\limits_0^{\operatorname{tg} u} \frac{\tau d\tau}{P_3(\tau)} = \int \frac{tdt}{P_3(t)} + c_2.$

V. Розглянемо оператор наведений в пункті 6 таблиці 2.6. Як випливає з теореми 1.8 рівняння $uu_0 + \triangle u = 0$ є Q-умовно інваріантним відносно множини операторів $Q_1 = \partial_0 - \wp(\omega)\partial_u, \quad Q_2 = d_a\partial_a$, де $\omega = \vec{d}^{\perp}\vec{x}$, $\wp$ — функція Вейєрштрасса, що задовольняє рівняння $\ddot{\wp} = \wp^2$. Анзац, побудований за допомогою операторів Q_1 та Q_2 має вигляд $u = -x_0\wp + \varphi(\omega), \quad \omega = \vec{d^{\perp}}\,\vec{x}$. Підставивши знайдений анзац в вихідне рівняння, отримаємо редуковане рівняння $\ddot{\varphi} - \wp\varphi = 0$, розв'язком якого є функція Ламе $\varphi = \Lambda(\omega)$. Тоді

$$u = \Lambda(\omega) - x_0\wp(\omega), \ \ \omega = \vec{d^{\perp}}\vec{x}$$

розв'язок заданого рівняння.

1.7. Узагальнення результатів для рівнянь більшої розмірності

Одержувати Q-умовні оператори багатовимірних рівнянь (1.2) можна з вже відомих операторів лiївської або Q-умовної симетрії одновимірних рівнянь (1.1) шляхом їх узагальнення. Справедливість застосування одного з таких методів узагальнення доводить наступна теорема.

Теорема 1.9. *Якщо оператор*

$$Q = A(x_0, \omega, \varphi)\partial_0 + B(x_0, \omega, \varphi)\partial_\omega + C(x_0, \omega, \varphi)\partial_\varphi \tag{1.116}$$

є оператором лиївської або Q-умовної інваріантності (1+1)-вимірного рівняння

$$S\left(\varphi, \varphi_0, \varphi_\omega^2, \varphi_{\omega\omega}\right) = 0, \quad \varphi = \varphi(x_0, \omega), \tag{1.117}$$

то оператори $\vec{Q} = \vec{\alpha}A(x_0, \vec{\alpha}\vec{x}, u)\partial_0 + B(x_0, \vec{\alpha}\vec{x}, u)\vec{\partial} + \vec{\alpha}C(x_0, \vec{\alpha}\vec{x}, u)\partial_u$, *утворюють множину операторів Q-умовної інваріантності (1+n)-вимірного рівняння*

$$S\left(u, u_0, u_a u_a, \triangle u\right) = 0, \tag{1.118}$$

де $u = u(x_0, \vec{x})$, $\vec{\alpha} =$ *const*, $(\vec{\alpha})^2 = 1$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Доведення. Теорема доводиться методом дослідження умовної симетрії, наведеним в [62]. Для цього треба показати, що

$$\underset{2}{Q}_a S = \lambda_1 S + \lambda_2 Q_a u,$$

де λ_1, λ_2 — деякі диференціальні оператори. Подіявши продовженим оператором Q_a на рівняння (1.118) і використавши той факт, що рівняння (1.117) є Q-умовно інваріантним відносно оператора (1.116), тобто $\underset{2}{Q}_a S = \lambda_1 S + \lambda_2 Q\varphi$, одержуємо

$$\begin{aligned}\underset{2}{Q}_a S = \Bigg[&\frac{1}{B}(\triangle B + 2B_{bu}u_b + B_{uu}u_b u_b + B_u \triangle u)\alpha_c S_{\triangle u} + \\ &+ \frac{2}{B}(B_b u_b + B_u u_b u_b)\alpha_c S_{u_a u_a} + \frac{1}{B}(B_0 + B_u u_0)\alpha_c S_{u_0} + \alpha_c - \\ &- 2(B_b + B_u u_b)\partial_c\Bigg](\alpha_c Q_a u - \alpha_a Q_c u) + \alpha_a \lambda_1 S + \lambda_2 Q_a u.\end{aligned}$$

Що і треба було довести.

Використовуючи теорему 1.9, з відомих операторів Q-умовної інваріантності (1+1)-вимірного рівняння теплопровідності (див. [53, 76]) шляхом узагальнення $u = \varphi(x_o, \omega), \quad \omega = \vec{\alpha}\vec{x}, \quad \vec{\alpha}^2 = 1$ одержані нові оператори Q-умовної симетрії для рівняння (1.2).

Крім методу запропонованого в теоремі 1.9, можна застосувати й інші методи, наприклад, якщо використати інваріантність рівняння (1.2) відносно алгебри $AO(3)$. В таблиці 2.8 наведено деякі результати отримані такими способами.

Таблиця 2.8

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори
1	1	λu^3	$Q_a = \frac{1}{3}\alpha_a(\vec{\alpha}\vec{x})\partial_0 + \partial_a + \frac{\alpha_a u}{\vec{\alpha}\vec{x}}\partial_u$
2	1	$F(u)$	$Q_a = \vec{\alpha}\vec{x}\partial_a + \alpha_a F(u)\partial_u, \quad F\ddot{F} = 2(\dot{F} - 1)$
3	1	$2P_3(u)$	$Q_a = \alpha_a\partial_0 + 3u\partial_a + 3\alpha_a P_3(u)\partial_u,$ де $P_3(u) = u^3 + \lambda_1 u + \lambda_0$
4	1	$F(u)$	$Q_a = 2\sqrt{x_0}\partial_a + \alpha_a F(u)\partial_u, \quad F\ddot{F} = 2$
5	$\frac{1}{u}$	$\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u}$	$Q_a = \alpha_a\partial_0 + \frac{u}{\vec{\alpha}\vec{x}}\partial_a + \alpha_a(\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u$
6	$3\lambda_3 + \frac{\lambda_2}{u}$	$\left(2\lambda_3 + \frac{\lambda_2}{u}\right)P_3$	$Q_a = \alpha_a\partial_0 + u\partial_a + \alpha_a P_3(u)\partial_u,$ де $P_3(u) = \lambda_3 u^3 + \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$
7	$\lambda_1 u^2 - \lambda_2$	$\lambda_3 u^3 - 2u$	$Q_a = \frac{1}{3}\alpha_a\lambda_2\partial_0 + \tanh(\vec{\alpha}\vec{x})\partial_a + \frac{\alpha_a u}{\mathrm{ch}^2(\vec{\alpha}\vec{x})}\partial_u$
8	$\frac{1}{u^4}$	$m^2 u + \frac{\lambda}{u^3}$	$Q_a = 2m\alpha_a\exp(-2m\vec{\alpha}\vec{x})\partial_0 + \partial_a + m\alpha_a u\partial_u$
9	$\lambda_1 u^2 + \lambda_2$	$\lambda_3 u^3 + 2u$	$Q_a = \alpha_a\lambda_2\cos^2(\vec{\alpha}\vec{x})\partial_0 - \frac{1}{2}\sin(2\vec{\alpha}\vec{x})\partial_a - \alpha_a u\partial_u$
10	$\lambda_1 u^2 + \lambda_2$	$\lambda_3 u^3$	$Q_a = \frac{\alpha_a}{3}\lambda_2(\vec{\alpha}\vec{x})^2\partial_0 + \vec{\alpha}\vec{x}\partial_a + \alpha_a u\partial_u$
11	e^u	e^u	$Q_a = \vec{\alpha}\vec{x}\partial_a - 2\alpha_a\partial_u$
12	e^u	e^u	$Q_a = \partial_a + \alpha_a\,\mathrm{tg}\,\frac{(\vec{\alpha}\vec{x})}{2}\partial_u$
13	e^u	e^u	$Q_a = \partial_a + \alpha_a\tanh\frac{(\vec{\alpha}\vec{x})}{2}\partial_u$
14	$\lambda_1 u^{\frac{2}{2-n}} + \lambda_2$	$\lambda_3 u^{\frac{4-n}{2-n}}$	$Q_a = \frac{\lambda_2}{4-n}\,x_a\partial_0 + \partial_a + (2-n)\,\frac{x_a}{\vec{x}^2}\,u\partial_u, \quad n \neq 2, 4$
15	$\frac{\lambda_1}{u}$	λ_3	$Q_a = 2kx_a\partial_0 - \partial_a + \frac{2x_a}{\vec{x}^2}u\partial_u,$ де $n = 4$
16	$\lambda_1 u^k$	$\lambda_2 u^{k+1}$	$Q_a = 2x_a\partial_0 - \vec{x}^{\,2}\partial_a + \frac{2x_a}{k}u\partial_u,$ де $n = 2,\ k \neq 0$

Тут m, λ, λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, $\vec{\alpha}$, n, k — довільні сталі.

РОЗДІЛ 2

Еволюційні рівняння, інваріантні відносно розширеної конформної алгебри

Моделювання фізичних процесів — це досить складна і часто довготривала задача. Якщо ж використати результати симетрійної класифікації диференціальних рівнянь, яка дозволяє зі всеможливих математичних моделей відбирати лише ті, що задовольняють принципам відносності Галілея, Пуанкаре–Ейнштейна тощо, то задачу моделювання фізичного процесу можна суттєво полегшити. Це пояснює великий інтерес багатьох математиків до задачі групової класифікації диференціальних рівнянь — однієї з центральних задач сучасного групового аналізу [31]. Ще С. Лі в своїх роботах [89, 90] провів повну групову класифікацію звичайних диференціальних рівнянь другого порядку і цим самим заклав початок історії розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь. Продовження розвитку ідей С. Лі в сучасному формулюванні було запропоноване Л.В. Овсянніковим у статті [29], де він здійснив групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності. Ця стаття була одною з перших в низці робіт присвячених задачам групової класифікації диференціальних рівнянь. Стійкий інтерес до розв'язування задачі групової класифікації спостерігається протягом останніх років (див., наприклад, роботи П. Олвера–Р. Хередеро [83], Р. Вілтшіра–А.Г. Нікітіна [93], Р.М. Черніги [71], Р.З. Жданова–В.І. Лагна [14, 114] та ін.).

Унаслідок свого широкого застосування нелінійні еволюційні рівняння є цікавим об'єктом дослідження. Найбільш відомими рівняннями даного класу є нелінійні рівняння теплопровідності (дифузії)

$$u_0 = \partial_1(f(u)u_1). \tag{2.1}$$

Повний опис симетрій Лі рівнянь класу (2.1) зроблено Л. Овсянніковим у роботі [29]. Ця робота стала класичною, оскільки в ній на прикладі класу рівнянь (2.1), вперше було розв'язано задачу групової класифікації для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. В [29] доведено, що МАІ рівняння (2.1) має найбільшу розмірність у випадку, коли $f(u) = \lambda u^{-\frac{4}{3}}$, $\lambda =$const$\neq 0$. Базисні генератори його максимальної алгебри інваріантності мають вигляд:

$$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1, D_1 = 2x_1\partial_1 - 3u\partial_u, K = x_1^2\partial_1 - 3x_1 u\partial_u. \tag{2.2}$$

Дослідженням симетрійних властивостей узагальнень нелінійного рівняння теплопровідності займалися багато вчених, як українських так і зарубіжних. У 1982 році В. Дородніцин у роботі [12] провів групову класифікацію рівнянь теплопровідності з джерелом (стоком)

$$u_0 = \partial_1(G(u)u_1) + g(u). \tag{2.3}$$

А. Орон, П. Розенау (1986, [99]) та М. Едвардс (1994, [74]) вивчали симетрійні властивості рівнянь дифузії–конвекції

$$u_0 = \partial_1(G(u)u_1) + f(u)u_1. \tag{2.4}$$

У 1987 році І. Ахатов, Р. Газізов і Н. Ібрагімов в роботі [3] класифікували симетрійні властивості рівнянь

$$u_0 = G(u_1)u_{11}. \tag{2.5}$$

У 1997 році в роботах [42, 72] проведений вичерпний опис симетрій Лі нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним та реактивним членами

$$u_0 = \partial_1(G(u)u_1) + f(u)u_1 + g(u). \tag{2.6}$$

Задачу групової класифікації диференціальних рівнянь

$$u_0 = u_{11} + F(x_0, x_1, u, u_{x_1}) \tag{2.7}$$

було розглянуто Р.З. Ждановим та В.І. Лагном, які в роботах [14, 114] використали новий підхід до групової класифікації диференціальних рівнянь і здійснили повну групову класифікацію рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом найбільш загального вигляду. Пізніше, Самойленко А.М., Лагно В.І., Жданов Р.З., Бесараб-Горват П. в роботах [1, 21, 22, 67] з використанням цього методу провели повну групову класифікацію найбільш загальних квазілінійних рівнянь еволюційного типу

$$u_0 = F(x_0, x_1, u, u_1)u_{11} + G(x_0, x_1, u, u_1). \tag{2.8}$$

З точністю до перетворень еквівалентності групову класифікацію рівнянь

$$u_0 = F(u_{11}) \tag{2.9}$$

провели І. Ахатов, Р. Газізов і Н. Ібрагімов [3], симетрійні властивості цих рівнянь досліджував В. Пухначов у роботі [105].

Об'єктом наших досліджень є еволюційні рівняння, що узагальнюють рівняння (2.1), (2.3)–(2.9), вигляду:

$$u_0 = F(x_0, x_1, u, u_{(n)}), \tag{2.10}$$

де F — довільна достатньо гладка функція. Рівняння (2.10) займають важливе місце серед диференціальних рівнянь з частинними похідними. При специфічних виглядах функції F до рівнянь з класу (2.10) приводять різні фізичні задачі, наприклад, задачі опису процесів тепло- та масообміну, механіки суцільного середовища, теорії фільтрації, росту популяцій, фізики моря для опису розподілу коливань температури та солоності моря в глибину тощо. До класу (2.10) належать відомі рівняння Гарі–Діма, Кортевега–де Фріза, Кричевера–Новікова та ін., дослідження яких проводилось в багатьох роботах [44, 95, 108, 110] тощо. У статті [84] розглядаються методи інтегрування деяких рівнянь класу (2.10) при специфічних виглядах функції F.

У цьому розділі розглянуто деякі еволюційні одновимірні рівняння і системи. Серед широкого класу рівнянь та систем еволюційного типу відібрано ті, що є інваріантними відносно розширеної конформної алгебри, для деяких з них знайдено максимальні алгебри інваріантності. Для рівнянь та систем, що мають найбільш широкі симетрії побудовано анзаци, проведено редукцію та знайдено їх точні розв'язки.

2.1. Еволюційні рівняння n-го порядку

Розв'язуючи задачу групової класифікації для нелійного рівняння теплопровідності (2.1) Л.В. Овсянніков у роботі [29] показав, що найбільш широкими симетрійними властивостями це рівняння володіє у випадку, коли $f(u) = \lambda u^{-\frac{4}{3}}$, $\lambda = \mathrm{const}$. МАІ цього рівняння складається з операторів (2.2).

Одним з рівнянь, яке узагальнює рівняння (2.1) є рівняння:

$$u_0 = F(x_0, x_1, u, u_{(n)}), \tag{2.11}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, $n \geq 2$, F — довільна гладка функція.

У даному підрозділі розв'язана задача: з класу рівнянь (2.11) виділити ті, які є інваріантними відносно алгебри:

$$\langle \partial_0,\ \partial_1,\ D = 2x_1\partial_1 + u\partial_u,\ \ K = x_1^2\partial_1 + x_1 u\partial_u \rangle. \tag{2.12}$$

Оператори (2.12) є реалізацією алгебри $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$. Оскільки $sl(2,\mathbb{R})$ є алгеброю конформної групи одновимірного простору, то алгебру $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$ надалі будемо називати розширеною конформною алгеброю і позначати $AC_1(1)$. Оскільки ми розглядаємо конкретну реалізацію (2.12) алгебри $AC_1(1)$, то під інваріантністю рівняння чи системи рівнянь відносно алгебри $AC_1(1)$ ми розуміємо інваріантність відносно її реалізації (2.12).

Зауважимо, що для конкретних рівнянь можуть виникати реалізації подібні до (2.12), де у виразах для D, K при других доданках стоїть ненульовий коефіцієнт m. Але такі реалізації зводяться до (2.12) локальними перетвореннями $u \to u^m$.

Знайдемо такі функції F, при яких рівняння (2.11) є інваріантним відносно розширеної конформної алгебри $AC_1(1)$.

Очевидно, що інваріантність рівняння (2.11) відносно двовимірної алгебри трансляцій з базисними операторами ∂_0, ∂_1, вимагає, щоб (2.11) мало вигляд:

$$u_0 = F(u, u_{(n)}). \tag{2.13}$$

Тому надалі будемо досліджувати рівняння (2.13). Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.1. *Рівняння* (2.13) *інваріантне відносно алгебри* $AC_1(1)$ *тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$u_0 = uf(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}), \tag{2.14}$$

де $\omega^k = (u^2\partial_1)^{k-1}(u^3u_{11})$, $k = \overline{1, n-1}$, f *— довільна гладка функція, відповідних аргументів.*

Доведення. Перепишемо рівняння (2.13) в еквівалентній формі

$$\Phi(u_0, u, u_{(n)}) = 0, \tag{2.15}$$

де Φ — довільна гладка функція така, що $\frac{\partial \Phi}{\partial u_0} \neq 0$. Оскільки рівняння (2.15) інваріантне відносно алгебри зсувів $\langle \partial_0, \partial_1 \rangle$ при довільній функції Φ, то знайдемо вигляд функції Φ при якій дане рівняння інваріантне відносно операторів D і K. Інфінітезимальний оператор має вигляд

$$X = \varkappa D + aK = (ax_1^2 + 2\varkappa x_1)\partial_1 + (ax_1 + \varkappa)u\partial_u, \tag{2.16}$$

де $\varkappa$ і a — довільні параметри. З умови інваріантності

$$\underset{n}{X}\Phi \Bigg|_{\Phi = 0} = 0.$$

рівняння (2.15) відносно оператора (2.16) одержуємо лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними 1-го порядку відносно функції Φ:

$$^0\eta\Phi_{u_0} + \eta\Phi_u + {}^1\eta\Phi_{u_1} + \ldots + {}^n\eta\Phi_{u_n} = 0, \tag{2.17}$$

причому потрібно знайти його загальний розв'язок при умові (2.15). В формулі (2.17) $^0\eta$, $^1\eta$, ... , $^n\eta$ — координати продовженого оператора $\underset{n}{X}$. Загальним розв'язком рівняння (2.17) є функція

$$\Phi = \Phi(J^0, J^1, \ldots, J^{n-1}),$$

де $J^0, J^1, \dots, J^{n-1}$ — перші інтеграли системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du_0}{{}^0\eta} = \frac{du}{\eta} = \frac{du_1}{{}^1\eta} = \ldots = \frac{du_n}{{}^n\eta}. \tag{2.18}$$

В роботі [91] С. Лі (див. також [97, 94]), вивчаючи симетрійні властивості звичайного диференціального рівняння

$$S(u, u_{(n)}) = 0,$$

де $u = u(x_1)$, знайшов перші інтеграли системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du}{\eta} = \frac{du_1}{{}^1\eta} = \ldots = \frac{du_n}{{}^n\eta}, \tag{2.19}$$

в якій η, ${}^1\eta$, … , ${}^n\eta$ — такі, як в системі (2.18). Він показав, що перші інтеграли системи (2.19) мають вигляд

$$J^k = (u^2\partial_1)^{k-1}(u^3 u_{11}), \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{2.20}$$

Залишається знайти інтеграл J^0, який є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{du_0}{{}^0\eta} = \frac{du}{\eta}. \tag{2.21}$$

Оскільки для оператора (2.16)

$$\eta = (ax_1 + \varkappa)u, \quad {}^0\eta = (ax_1 + \varkappa)u_0, \tag{2.22}$$

то підставляючи (2.22) в (2.21), одержимо

$$\frac{du_0}{u_0} = \frac{du}{u}. \tag{2.23}$$

Розв'язуючи рівняння (2.23), знаходимо

$$J^0 = \frac{u_0}{u}. \tag{2.24}$$

Таким чином загальний розв'язок рівняння (2.17) при умові (2.15) має вигляд

$$\Phi\left(\frac{u_0}{u},\ u^3u_{11},\ (u^2\partial_1)(u^3u_{11}),\ \ldots,\ (u^2\partial_1)^{n-2}(u^3u_{11})\right) = 0 \qquad (2.25)$$

або

$$\frac{u_0}{u} = f(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}), \qquad (2.26)$$

де ω^k співпадає з J^k, які задані формулами (2.20). З формул (2.26), (2.20) одержуємо рівняння (2.15).

Теорему 2.1 доведено.

2.2. Групова класифікація рівнянь 2-го та 3-го порядків

У даному підрозділі ми розглянемо рівняння 2-го та 3-го порядків, які належить до класу рівнянь (2.14) і мають вигляд

$$u_0 = uf(\omega^1), \quad \omega^1 = u^3u_{11} \qquad (2.27)$$

та

$$u_0 = uf(\omega^2), \quad \omega^2 = u^2\partial_1(u^3u_{11}) = 3u^4u_1u_{11} + u^5u_{111}. \qquad (2.28)$$

Зауважимо, що заміною $u \to \sqrt{u}$, $f(\frac{1}{2}\alpha) \to \frac{1}{2}g(\alpha)$ рівняння (2.28) зводиться до еквівалентного рівняння вигляду

$$u_0 = ug(\omega^2), \quad \omega^2 = u^2u_{111}, \qquad (2.29)$$

де g — довільна гладка функція. При $g = u^2u_{111}$ рівняння (2.29) є відомим рівнянням Гарі–Діма.

Прокласифікуємо симетрійні властивості рівнянь (2.27) та (2.29) в залежності від вигляду функцій f та g.

Відомо, що груповий аналіз одного рівняння виявляється груповим аналізом цілого класу рівнянь, які отримуються з даного рівняння локальною заміною змінних і мають ізоморфні групи симетрії [31, 30]. Тому перед тим, як розв'язувати поставлену задачу, знайдемо локальні перетворення еквівалентності рівнянь (2.27) та (2.29).

Для зручності дослідження перетворень еквівалентності перепишемо рівняння (2.27) та (2.29) наступним чином

$$u^3 u_{11} = \varphi(\frac{u_0}{u}) \tag{2.30}$$

та

$$u^2 u_{111} = \psi(\frac{u_0}{u}), \tag{2.31}$$

де φ, ψ — довільні гладкі функції. Після заміни

$$u = e^w, \tag{2.32}$$

де $w = w(x_0, x_1)$ — нова невідома функція, одержимо

$$e^w(w_{11} + w_1^2) = \varphi(w_0), \tag{2.33}$$

та

$$e^w(w_{111} + 3w_1 w_{11} + w_1^3) = \psi(w_0). \tag{2.34}$$

Знайдемо перетворення еквівалентності рівнянь (2.33) та (2.34).

Теорема 2.2. *1. Максимальною локальною групою точкових перетворень еквівалентності рівняння (2.33) є група, яка породжується інфінітезимальним оператором*

$$E = \xi^0 \partial_0 + \xi^1 \partial_1 + \eta \partial_w + \zeta \partial_\varphi, \tag{2.35}$$

де

$$\begin{aligned} &\xi^0 = \varkappa_1 x_0 + d_0, \qquad \xi^1 = a x_1^2 + 2\varkappa_2 x_1 + d_1, \\ &\eta = a x_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3, \;\; \zeta = 4\varkappa_3 \varphi. \end{aligned} \tag{2.36}$$

2. Максимальною локальною групою точкових перетворень еквівалентності рівняння (2.34) є група, яка породжується інфінітезимальним оператором

$$E = \xi^0\partial_0 + \xi^1\partial_1 + \eta\partial_w + \zeta\partial_\psi, \tag{2.37}$$

де

$$\begin{aligned} &\xi^0 = \varkappa_1 x_0 + d_0, \qquad \xi^1 = a x_1^2 + 2\varkappa_2 x_1 + d_1,\\ &\eta = a x_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3, \ \ \zeta = 3\varkappa_3\psi, \end{aligned} \tag{2.38}$$

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, a, d_0, d_1 — довільні сталі.

Доведення проведемо для рівняння (2.33), для рівняння (2.34) доведення проводиться аналогічно. З умови інваріантності рівняння (2.33) при умовах

$$\varphi_{x_\mu} = 0, \quad \varphi_w = 0, \quad \varphi_{w_1} = 0$$

відносно оператора (2.35)

$$\underset{2}{E}S\Bigg|_M = 0, \ \ \underset{2}{E}\varphi_{x_\mu}\Bigg|_M = 0, \ \ \underset{2}{E}\varphi_w\Bigg|_M = 0, \ \ \underset{2}{E}\varphi_{w_1}\Bigg|_M = 0,$$

де $S = u_0 - uf(\omega_1)$, $M : \{S = 0,\ \varphi_{x_\mu} = 0,\ \varphi_w = 0,\ \varphi_{w_1} = 0\}$, одержуємо систему визначальних рівнянь відносно невідомих функцій ξ^0, ξ^1, η, ζ:

$$\begin{aligned} &\xi^0_1 = \xi^0_u = 0,\ \xi^0_{00} = 0,\ \xi^1_0 = \xi^1_u = 0,\ \xi^1_{11} = 2\eta_1,\ \eta_w = 0,\\ &\eta_{0\mu} = 0,\ \zeta_\mu = 0,\ \zeta_w = 0,\ \zeta = e^{4w}\eta_{11} + (4\eta - 2\xi^1_1)\varphi \end{aligned} \tag{2.39}$$

загальним розв'язком системи (2.39) є функції (2.36).

Теорему 2.2 доведено.

З точністю до перетворень еквівалентності з групи $G^{\sim}$, яка породжується оператором (2.35), та заміни (2.32) виконаємо групову класифікацію рівнянь другого порядку в класі вигляду (2.27). Результати групової класифікації наведено в наступних твердженнях.

Теорема 2.3. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь вигляду (2.27) є алгебра*

$$A^{\mathrm{ker}} = \langle \partial_0,\, \partial_1,\, D = 2x_1\partial_1 + u\partial_u,\, K_1 = x_1^2\partial_1 + x_1 u\partial_u \rangle.$$

Теорема 2.4. *З точністю до перетворень з $G^{\sim}$ для класу рівнянь (2.27) існує лише чотири випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче $\omega = u^3u_{11}$ та наведено лише базисні оператори з доповнення до A^{ker}):*

1. $f = \ln(\omega)$: $\quad Y_1 = e^{4x_0}u\partial_u$;

2. $f = \omega^m$: $\quad D_1 = 4mx_0\partial_0 - u\partial_u,\ m \neq 0, \pm\frac{1}{3}$ *— довільна стала;*

3. $f = \omega^{-\frac{1}{3}}$: $\quad D_2 = 4x_0\partial_0 + 3u\partial_u,\ Q_1 = \partial_u,\ Q_2 = x_1\partial_u$;

4. $f = \omega^{\frac{1}{3}}$: $\quad D_3 = 4x_0\partial_0 - 3u\partial_u,\ G = u\partial_1,\ K_2 = x_1u\partial_1 + u^2\partial_u$.

Доведення обох теорем проведемо одночасно. Так як рівняння (2.27) еволюційне, то в силу леми доведеної в роботі [7] для будь-якої однопараметричної групи локальних перетворень симетрії цього рівняння, відповідний інфінітезимальний оператор має вигляд

$$X = \xi^0(x_0)\partial_0 + \xi^1(x_0, x_1, u)\partial_1 + \eta(x_0, x_1, u)\partial_u.$$

З умови інваріантності [31, 32] рівняння (2.27) відносно оператора X, після переходу на многовид заданий рівнянням (2.27) в продовженому просторі, розщеплюючи (2.32) по степеням похідної u_1, одержимо систему визначальних рівнянь для знаходження функцій

ξ^0, ξ^1, η, f:

$$\xi^1_{uu} = 0, \;\; \eta_{uu} = 2\xi^1_{1u},$$

$$[(2\eta_{1u} - \xi^1_{11})u^4 - 3u\xi^1_u\omega]\dot{f} + u\xi^1_u f + \xi^1_0 = 0,$$

$$[\eta_{11}u^4 + (\eta_u - 2\xi^1_1 + 3u^{-1}\eta)u\omega]\dot{f} + [\eta - (\eta_u - \xi^0_0)u]f + \eta_0 = 0.$$

З першого та другого рівнянь визначальної системи одержуємо

$$\begin{aligned} &\xi^1 = A(x_0, x_1)u + B(x_0, x_1), \\ &\eta = A_1 u^2 + C(x_0, x_1)u + D(x_0, x_1), \end{aligned} \tag{2.40}$$

де A, B, C, D — довільні гладкі функції. Якщо знайдені функції (2.40) підставити в третє та четверте рівняння визначальної системи і розчепити їх по степенях u, то отримаємо наступні умови:

$$B_0 = A_{11} = C_{11} = D_{11} = 0, \;\; 2C_1 = B_{11}, \tag{2.41}$$

$$A(3\omega\dot{f} - f) = A_0, \tag{2.42}$$

$$2(2C - B_1)\omega\dot{f} + \xi^0_0 f = C_0, \tag{2.43}$$

$$D(3\omega\dot{f} + f) = D_0 \tag{2.44}$$

Роз'язком (2.41) є функції:

$$\begin{aligned} &A = \gamma(x_0)x_1 + \beta(x_0), \quad B = c_1x_1^2 + 2c_2x_1 + c_3, \\ &C = c_1x_1 + c_2 + \alpha(x_0), \quad D = \sigma(x_0)x_1 + s(x_0), \end{aligned} \tag{2.45}$$

де c_1, c_2, c_3 – довільні сталі, α, β, γ, σ, s довільні гладкі функції.

Якщо f — довільна функція, то розщеплюючи по f, $\dot{f}$, отримаємо, зокрема, такі визначальні рівняння $A = D = \xi^0_0 = 2C - B_1 = 0$, розв'язком яких є функції:

$$\xi^0 = c_4, \quad \xi^1 = c_1x_1^2 + 2c_2x_1 + c_3, \quad \eta = (c_1x_1 + c_2)u,$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 — довільні сталі, що доводить теорему 2.3.

Опишемо всі можливі розширення МАІ в класі рівнянь (2.27). Структурні рівняння для (2.42), (2.43) та (2.44) мають вигляд

$$k_1\omega\dot{f} = k_2 f + k_3, \tag{2.46}$$

де k_1, k_2, k_3 — деякі сталі. В залежності від співвідношень між коефіцієнтами k_i з точністю до перетворень з $G^{\sim}$ отримуємо різні вигляди функції f. Зазначимо, що при $k_1 = 0$ маємо $f = \mathrm{const}$, тобто рівняння (2.27) стає виродженим.

Якщо $k_1 \neq 0$, то проаналізувавши структуру рівнянь (2.42)–(2.44), приходимо до висновку, що можливі такі суттєво різні випадки: $f = \ln\omega$ та $f = \omega^m$, де $m \neq 0$ довільна стала. Розглянемо отримані випадки.

Нехай $f = \ln\omega$, підставивши (2.45) в (2.42)–(2.44), отримуємо $\alpha = c_5 e^{4x_0}$ та рівняння $\xi^0_0 = A = D = 0$, розв'язком яких є функції $\xi^0 = c_4,\ \xi^1 = c_1 x_1^2 + 2c_2 x_1 + c_3,\ \eta = (c_1 x_1 + c_2 + c_5 e^{4x_0})u$. Що доводить перший пункт теореми 2.4.

Якщо $f = \omega^m$, то після підстановки (2.45) в (2.42)–(2.44) одержимо:

$$\begin{aligned} &(3m-1)A = 0,\ \ A_0 = 0,\ \ \xi^0_0 = -4m\alpha, \\ &\dot{\alpha} = 0,\ \ (3m+1)D = 0,\ \ D_0 = 0. \end{aligned} \tag{2.47}$$

При розв'язуванні рівнянь (2.47) виникають наступні суттєво різні підвипадки: $m \neq 0, \pm\frac{1}{3}$; $m = -\frac{1}{3}$; $m = \frac{1}{3}$. Для кожного з яких, провівши міркування аналогічні наведеним вище, отримаємо другий, третій або четвертий пункти теореми 2.4. Теорему 2.4 доведено.

Сформулюємо результати групової класифікації для рівнянь третього порядку в класі вигляду(2.29).

Теорема 2.5. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь вигляду (2.29) є алгебра*

$$A^{\ker} = \langle \partial_0,\ \partial_1,\ D = x_1\partial_1 + u\partial_u,\ K = x_1^2\partial_1 + 2x_1u\partial_u \rangle.$$

Теорема 2.6. *З точністю до перетворень з $G^{\sim}$, породженої оператором (2.37), для класу рівнянь (2.29) існує лише три випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче $\omega = u^2u_{111}$ та наведено лише базисні оператори з доповнення до $A^{\ker}$):*

1. $g = \ln(\omega)$: $\quad Y_1 = e^{3x_0}u\partial_u$;

2. $g = \omega^m$: $\quad D_1 = 3mx_0\partial_0 - u\partial_u,\ m \neq 0, -\frac{1}{2}$ — *довільна стала;*

3. $g = \omega^{-\frac{1}{2}}$: $\quad D_2 = 3x_0\partial_0 + 2u\partial_u$, $Q_1 = x_1^2\partial_u$, $Q_2 = x_1\partial_u$, $Q_3 = \partial_u$.

Доведення обох теорем проведемо одночасно. Система визначальних рівнянь має вигляд:

$$\xi^0_1 = \xi^0_u = 0, \quad \xi^1_0 = \xi^1_u = 0, \quad \eta = (\xi^1_1 + \alpha)u + b, \quad \xi^1_{111} = 0,$$

$$[(3\alpha u + 2b)\omega + b_{111}u^3]\dot{g} + (u\xi^0_0 + b)g = \dot{\alpha}u + b_0,$$

де $\alpha(x_0)$, $b(x)$ — довільні гладкі функції, з четвертого та третього рівнянь визначальної системи випливає, що

$$\xi^1 = c_1x_1^2 + c_2x_1 + c_3, \quad \eta = (2c_1x_1 + c_2 + \alpha)u + b, \tag{2.48}$$

де c_1, c_2, c_3 — довільні сталі.

Коли (2.48) підставити в останнє рівняння визначальної системи і отримане рівняння розчепити по степеням функції u, то одержимо:

$$b = \beta x_1^2 + \gamma x_1 + \sigma,\ 3\alpha\omega\dot{g} + \xi^0_0 g = \dot{\alpha},\ 2\omega b\dot{g} + bg = b_0, \tag{2.49}$$

де $\beta = \beta(x_0)$, $\gamma = \gamma(x_0)$, $\sigma = \sigma(x_0)$ - довільні функції, що підлягають визначенню.

Якщо g — довільна функція, то розв'язком (2.49) будуть функції $\xi_0^0 = \alpha = B = 0$, а координати інфінітезимального оператора (2.27) задають алгебру $A^{\ker}$. Теорему 2.5 доведено.

Структурні рівняння на функцію g для (2.49) мають вигляд (2.46), тому, аналогічно доведенню попередньої теореми, можливі такі нееквівалентні випадки: $g = \ln \omega$, $g = \omega^m$. Перший випадок доводиться аналогічно теоремі 2.4. Для другого випадку, коли $g = \omega^m$ підставити в (2.49) і отримане рівняння розчепити по степеням змінної ω, то, зокрема, одержимо рівняння $(2m+1)b = 0$, розв'язок якого залежать від значення числового параметра m. Що задає пункти два та три теореми 2.6.

Теорему 2.6 доведено.

Як випливає з доведеного, найбільш широкою симетрією в класі рівнянь (2.27) володіють рівняння

$$u_0 = u^2 (u_{11})^{\frac{1}{3}}, \tag{2.50}$$

та

$$u_0 = (u_{11})^{-\frac{1}{3}}. \tag{2.51}$$

Найбільш широкою симетрією в класі рівнянь (2.28) володіє рівняння

$$u_0 = (u_{111})^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.52}$$

Слід зазначити, що рівняння (2.50) заміною

$$x_0 \to x_0, \;\; x_1 \to \frac{x_1}{u}, \;\; u \to \frac{1}{u}$$

зводиться до рівняння

$$u_0 = (u_{11})^{\frac{1}{3}}. \tag{2.53}$$

У роботі [81] за допомогою перетворень

$$x_0 \to x_0, \;\; x_1 \to u_1, \;\; u \to x_1 u_1 - u$$

встановлено зв'язок між рівняннями (2.51) та (2.53) і доведено, що рівняння (2.53) даною заміною зводиться до рівняння (2.51).

Алгебри інваріантності рівнянь (2.53), (2.51) та (2.52) складаються з семи та восьми базових операторів, що підтверджує факт, доведений у роботі [24], про те, що алгебра інваріантності еволюційного рівняння складається не більше ніж з $n+5$ операторів, де n — це порядок еволюційного рівняння.

Рівняння (2.51), (2.53) виділені і в роботах [3, 105] при проведенні симетрійної класифікації рівнянь $u_0 = F(u_{11})$ в залежності від вигляду функції $F(u_{11})$, де доведено, що саме ці рівняння володіють найбільш широкою симетрією. Слід зазначити, що рівняння (2.52) виділено як особливе і в роботі [84].

2.3. Групова класифікація рівнянь n-го порядку

В цьому підрозділі ми розглянемо задачу узагальнити результати одержані для рівнянь (2.51)–(2.53) на випадок рівняння довільного порядку. Розглянемо клас еволюційних рівнянь вигляду:

$$u_0 = f(u_n), \tag{2.54}$$

де $u_0 = \frac{\partial u}{\partial x_0}$, $u_n = \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}$, f — довільна гладка функція змінної u_n, тобто функція f залежить лише від старшої похідної u_n, причому $f_{u_n} \neq 0$. Класифікацію таких рівнянь, коли $n = 2$ проведено в роботах [3, 105], тому надалі вважаємо, що $n > 2$.

Будь-яке рівняння вигляду (2.54) можна привести до вигляду

$$u_n = F(u_0), \tag{2.55}$$

де F — гладка функція, яка є оберненою до функції f. Тому всі твердження сформулюємо для рівняння (2.55).

Результати групової класифікації для рівнянь класу (2.55) наведемо в вигляді наступних трьох теорем.

Теорема 2.7. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь вигляду (2.55) є алгебра*

$$A^{\mathrm{ker}} = \langle \partial_0,\ \partial_1,\ nx_0\partial_0 + x_1\partial_1 + nu\partial_u,\ \partial_u,\ x_1\partial_u,\ x_1^2\partial_u, \ldots,\ x_1^{n-1}\partial_u \rangle.$$

Теорема 2.8. *Алгебра Лі $A^{\sim}$ групи еквівалентності $G^{\sim}$ класу рівнянь (2.55) породжується операторами з A^{ker} (продовженими на довільний елемент F) та операторами $u\partial_u + nF\partial_F$, $x_1\partial_1 - nF\partial_F$.*

Теорема 2.9. *З точністю до перетворень з $G^{\sim}$ для класу рівнянь (2.55) при $n > 2$ існує лише чотири випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до A^{ker}):*

1. $F = e^{u_0}$: $\quad Q = x_1\partial_1 - nx_0\partial_u$;

2. $F = \ln u_0$: $\quad Q = n!\, x_0\partial_0 - x_1^n\partial_u$;

3. $F = (u_0)^m$: $\quad D_1 = (1-m)x_1\partial_1 + nu\partial_u$, $\quad m \neq -\frac{n+1}{n-1}$ — *довільна стала;*

4. $F = (u_0)^{-\frac{n+1}{n-1}}$: $\quad D = 2x_1\partial_1 + (n-1)u\partial_u,\ K = x_1^2\partial_1 + (n-1)x_1u\partial_u.$

Доведення всі трьох теорем проведемо одночасно. Скористаємося технікою, запропонованою в роботі [92]. Оскільки (2.54) є еволюційним рівнянням, то в силу леми з [7] будь-який інфінітезимальний оператор його ліївської симетрії має вигляд

$$X = \xi^0(x_0)\partial_0 + \xi^1(x_0, x_1, u)\partial_1 + \eta(x_0, x_1, u)\partial_u.$$

Після переходу на многовид, заданий рівнянням (2.55) в продовженому просторі, і розщеплення по похідним $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ отримаємо систему визначальних рівнянь

$$\xi^1_u = \eta_{uu} = 0, \quad \eta_{k\,u} = \frac{n-k}{k+1}\xi^1_{k+1}, \ k \in \mathbb{N}, \tag{2.56}$$

$$[\eta_0 + (\eta_u - \xi^0_0)u_0 - \xi^1_0 u_1]\dot{F} = [\eta_u - n\xi^1_1]F + \eta_n. \tag{2.57}$$

Якщо F — довільна функція, то розщеплюючи (2.57) по F і $\dot{F}$, отримаємо рівняння $\eta_u = n\xi^1_1 = \xi^0_0, \ \xi^1_0 = \eta_0 = \eta_n = 0$, розв'язком яких є функції $\xi^0 = c_1 x_0 + c_2, \ \xi^1 = c_1 n^{-1} x_1 + c_3, \ \eta = c_1 u + P_{n-1}(x_1)$, де c_1, c_2, c_3 — довільні сталі, P_{n-1} — довільний поліном $n-1$ степеня відносно змінної x_1, що доводить теорему 2.7.

Максимальна група еквівалентності класу рівнянь (2.55) співпадає з групою, породженою сукупністю однопараметричних перетворень груп локальних симетрій системи

$$u_n = F(u_0), \quad F_0 = F_1 = 0, \quad F_{u_l} = 0, \ l = \overline{1, n-1}, \tag{2.58}$$

інфінітезимальні оператори яких мають вигляд

$$E = \xi^0(x_0, x_1, u)\partial_0 + \xi^1(x_0, x_1, u)\partial_1 + \eta(x_0, x_1, u)\partial_u + \zeta(x_0, x_1, u, F)\partial_F.$$

З умови інваріантності [32] системи (2.58) відносно оператора E, після розщеплення за незв'язанними змінними отримаємо систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора E, розв'язки якої задають оператори, що породжують групу перетворень еквівалентності $G^{\sim}$.

Теорема 2.8 доведена.

Опишемо всі можливі розширення МАІ в класі рівнянь (2.55). Розв'язавши перші три рівняння з (2.56), отримаємо

$$\eta = a(x_0, x_1)u + b(x_0, x_1), \ \xi^1 = \xi^1(x_0, x_1), \tag{2.59}$$

де a, b — гладкі функції.

Структурне рівняння для (2.57) має вигляд

$$(k_1 u_0 + k_2)\dot{F} = k_3 F + k_4, \tag{2.60}$$

де $k_1, \ldots, k_4$ — деякі сталі. В залежності від співвідношень між коефіцієнтами k_i з точністю до перетворень з $G^{\sim}$ отримуємо різні вигляди функції F. Зазначимо, що при $k_1 = k_2 = 0$ маємо $a_0 = b_0 = a - \xi^0_0 = = \xi^1_0 = 0$, тобто розширення MAI немає.

Якщо $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, то $k_2 = 0$ і без обмеження загальності можна вважати $k_1 = 1$, а розв'язком рівняння (2.60) з точністю до перетворень з групи $G^{\sim}$ є функція $F = (u_0)^m$. Підставивши F в рівняння (2.57) та розчепивши по похідній u_0, отримуємо:

$$(m-1)a = m\xi^0_0 - n\xi^1_1, \quad a_0 = b_0 = \xi^1_0 = 0, \quad b_n = 0.$$

В залежності від значення m, з врахуванням рівнянь (2.56), маємо або третій, або четвертий випадки теореми 2.9.

Якщо $k_1 \neq 0$, $k_3 = 0$, то $k_2 = 0$, $k_1 = 1$, а розв'язком рівняння (2.60) з точністю до перетворень з групи $G^{\sim}$ є функція $F = \ln u_0$. Підставивши F в рівняння (2.58), аналогічно як і в попередньому випадку, одержимо:

$$a - \xi^0_0 = b_n, \quad a_0 = b_0 = \xi^1_0 = 0, \quad a - n\xi^1_1 = 0.$$

В результаті отримуємо другий випадок теореми 2.9.

У випадку $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ розв'язком рівняння (2.60) з точністю до перетворень з групи $G^{\sim}$ є функція $F = e^{u_0}$, а рівняння (2.58) розпадається на систему рівнянь:

$$a - \xi^0_0 = 0, \quad a_0 = \xi^1_0 = 0, \quad b_0 = a - n\xi^1_1, \quad b_n = 0,$$

які разом з (2.59) задають перший випадок теореми 2.9.

Теорему 2.9 доведено.

Зауваження. Результати отримані нами в теоремі 2.9 для рівняння $u_0 = (u_n)^{-\frac{n-1}{n+1}}$ узагальнюють результати, одержані Б.А. Магадеєвим для цього рівняння в роботах [23, 24].

2.4. Інваріанти, анзаци та редуковані рівняння

Як випливає з теореми 2.4, одним з рівнянь вигляду (2.27), що володіє найбільш широкою симетрією, є рівняння (2.50). Використаємо симетрію цього рівняння для проведення редукції.

У теоремі 2.4 доведено, що максимальна алгебра інваріантності рівняння (2.50) задається базовими операторами

$$\begin{aligned} &\partial_0,\ \partial_1,\ D = 2x_1\partial_1 + u\partial_u,\ K_1 = x_1^2\partial_1 + x_1 u\partial_u, \\ &D_3 = 4x_0\partial_0 - 3u\partial_u,\ G = u\partial_1,\ K_2 = x_1 u\partial_1 + u^2\partial_u. \end{aligned} \tag{2.61}$$

З зображення операторів алгебри інваріантності рівняння (2.50) випливає, що його інваріантний розв'язок має вигляд:

$$W = \varphi(\omega), \tag{2.62}$$

де φ — довільна гладка функція, а ω, W — перші інтеграли системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = 4\kappa_1 x_0 + d_0,\ \ \dot{x}_1 = a_1 x_1^2 + (a_2 x_1 + g)u + 2\kappa_1 x_1 + d_1, \\ &\dot{u} = a_1 x_1 u + a_2 u^2 + (\kappa_2 - 3\kappa_1)u, \end{aligned} \tag{2.63}$$

котрі є інваріантами алгебри (2.61). Підстановки вигляду (2.62) є (див. [62]) інваріантними анзацами рівняння (2.50).

У залежності від співвідношень між параметрами κ_1, κ_2, a_1, a_2, d_0, d_1, g, отримаємо різні розв'язки системи (2.63).

У таблиці 3.1 наведено нееквівалентні анзаци побудовані за допомогою алгебри (2.61) і редуковані рівняння, отримані після підстановки цих анзаців у рівняння (2.50).

Таблиця 3.1

ω	Анзац	Редуковані рівняння
x_0	$u=\varphi(\omega)$	$\varphi'=0$
x_0	$u=x_1\varphi(\omega)$	$\varphi'=0$
x_0	$u=\sqrt{x_1}\varphi(\omega)$	$\varphi'=-\frac{\lambda}{\sqrt[3]{4}}\varphi^{\frac{7}{3}}$
x_0	$u=\sqrt{x_1^2+1}\varphi(\omega)$	$\varphi'=\lambda\varphi^{\frac{7}{3}}$
x_0	$u=\sqrt{x_1^2-1}\varphi(\omega)$	$\varphi'=-\lambda\varphi^{\frac{7}{3}}$
x_0	$\frac{x_1}{u}+\frac{k}{u^2}=\varphi(\omega)$	$\varphi'=-\lambda\sqrt[3]{2k}$
x_1+mx_0	$u=\varphi(\omega)$	$m\varphi'=\lambda\varphi^2(\varphi'')^{\frac{1}{3}}$
$\frac{1}{x_1}+mx_0$	$u=x_1\varphi(\omega)$	$m\varphi'=\lambda\varphi^2(\varphi'')^{\frac{1}{3}}$
$\ln x_1+mx_0$	$u=\sqrt{x_1}\varphi(\omega)$	$m\varphi'=\lambda\varphi^2(\varphi''-\frac{1}{4}\varphi)^{\frac{1}{3}}$
$\mathrm{arctg}x_1+mx_0$	$u=\sqrt{x_1^2+1}\varphi(\omega)$	$m\varphi'=-\lambda\varphi^2(\varphi''+\varphi)^{\frac{1}{3}}$
$\mathrm{arcth}x_1+mx_0$	$u=\sqrt{x_1^2-1}\varphi(\omega)$	$m\varphi'=\lambda\varphi^2(\varphi''-\frac{1}{4}\varphi)^{\frac{1}{3}}$
$\frac{1}{u}+mx_0$	$\frac{x_1}{u}+\frac{k}{u^2}=\varphi(\omega)$	$m\varphi'=\lambda\varphi(\varphi\varphi''-2\varphi')^{\frac{1}{3}}$
$\frac{1}{u}+mx_0$	$\frac{u}{x_1}=\varphi(\omega)$	$m\varphi'=-\lambda(2-\varphi'')^{\frac{1}{3}}$
$x_1+kx_0u+mx_0$	$u=\varphi(\omega)$	$k+m\omega=-\lambda\omega^2(\varphi'')^{\frac{1}{3}}$
$x_1+m\ln x_0$	$u=x_0^{-\frac{3}{4}}\varphi(\omega)$	$m\varphi'-\frac{3}{4}\varphi=\lambda\varphi^2(\varphi'')^{\frac{1}{3}}$
$\frac{1}{x_1}+m\ln x_0$	$u=x_0^{-\frac{3}{4}}x_1\varphi(\omega)$	$m\varphi'-\frac{3}{4}\varphi=\lambda\varphi^2(\varphi'')^{\frac{1}{3}}$
$\ln x_1+m\ln x_0$	$u=x_0^{-\frac{3}{4}}\sqrt{x_1}\varphi(\omega)$	$m\varphi'-\frac{3}{4}\varphi=\lambda\varphi^2(-\frac{1}{4}\varphi-\varphi'')^{\frac{1}{3}}$
$\mathrm{arctg}x_1+m\ln x_0$	$u=x_0^{-\frac{3}{4}}\sqrt{x_1^2+1}\varphi(\omega)$	$m\varphi'-\frac{3}{4}\varphi=\lambda\varphi^2(\varphi+\varphi'')^{\frac{1}{3}}$
$\mathrm{arcth}x_1+m\ln x_0$	$u=x_0^{-\frac{3}{4}}\sqrt{x_1^2-1}\varphi(\omega)$	$m\varphi'-\frac{3}{4}\varphi=\lambda\varphi^2(\varphi''-\varphi)^{\frac{1}{3}}$
$\frac{1}{u}+m\ln x_0$	$x_0^{-\frac{3}{2}}x_1u^{-1}=\varphi(\omega)$	$\varphi=\frac{2}{3}\lambda\omega(2\varphi'+\omega\varphi'')^{\frac{1}{3}}$
$\frac{x_1}{u}+m\ln x_0$	$x_0^{-\frac{3}{2}}u^{-1}=\varphi(\omega)$	$m-\frac{3}{2}\omega\varphi'=-\lambda\omega(\omega\varphi''+2\varphi')^{\frac{1}{3}}$

Отримані редуковані рівняння — звичайні диференціальні рівняння другого порядку, які можна розв'язати. Наприклад, для сьомого випадку таблиці проінтегрувавши редуковане рівняння, отримаємо розв'язок рівняння (2.50)

$$C_1u+C_2+\lambda^3u^{-4}=-20m^3(x_1+mx_0),$$

де C_1 та C_2 — довільні сталі. Проінтегрувавши редуковане рівняння та використавши відповідний анзац, аналогічно у восьмому випадку розв'язок рівняння (2.50) має вигляд

$$C_1 u + C_2 + \lambda^3 u^{-4} = -20m^3(x_1^{-1} + mx_0).$$

Для редукованого рівняння наведеного в тринадцятому пункті таблиці 3.1 вдалося знайти розв'язок у параметричному вигляді. Тоді розв'язок рівняння (2.50) має вигляд

$$\frac{u}{x_1} = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 \int \frac{\tau d\tau}{\tau^3+2}, \qquad \frac{1}{u} + mx_0 = \frac{\lambda}{m}\int \frac{d\tau}{\tau^3+2}$$

Для чотирнадцятого пункту таблиці 3.1 розв'язок редукованого рівняння задає наступний розв'язок рівняння (2.50)

$$u\omega^4 = \omega^4 P_1(\omega) + \frac{m^3}{3}\omega^3 + \frac{m^2 k}{2}\omega^2 + \frac{mk^2}{4}\omega + \frac{k^3}{20},$$

де $P_1(\omega)$ — довільний многочлен першого степеня від

$$\omega = x_1 + kx_0 u + mx_0.$$

Алгебра інваріантності, що визначається операторами (2.61), задає формулу розмноження розв'язків:

$$u^{II}(x_0, x_1) = \frac{\exp(\theta_3 + \theta_2)u^I(x_0', x_1')}{1 + \theta_5\theta_4 x_1 \exp(2\theta_3) + \theta_6 \exp(\theta_2) u^I(x_0', x_1') + \theta_4}, \quad (2.64)$$

де $\quad x'_0 = \exp(-\frac{4}{3}\theta_2)x_0 + \theta_1,$

$$x'_1 = \frac{\exp(2\theta_3)x_1 + \theta_7 \exp(\theta_2)u^I(x_0', x_1') + \theta_5}{1 + \theta_5\theta_4 x_1 \exp(2\theta_3) + \theta_6 \exp(\theta_2) u^I(x_0', x_1') + \theta_4},$$

а θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5, θ_6, θ_7 — довільні константи, u^I, u^{II} — розв'язки рівняння (2.50).

2.5. Системи нелінійних рівнянь теплопровідності

Розглянемо відоме узагальнення рівняння (2.1) на випадок системи рівнянь відносно двох функцій:

$$U_0 = \partial_1[F(U)U_1], \quad (2.65)$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} F^{11} & F^{12} \\ F^{21} & F^{22} \end{pmatrix}$, $F^{ab} = F^{ab}(u^1, u^2)$ — довільні гладкі функції, $u^a = u^a(x_0, x_1)$, $a, b = 1, 2$.

Система (2.65) при конкретних нелінійностях знаходить широке застосування в теорії процесів теплопровідності, дифузії, описує еволюцію температури u^1 та густини u^2 у термоядерній плазмі [8, 112]. Повний симетрійний аналіз нелінійної системи (2.65) досі не проведено. Зазначимо, що в роботах [42, 60, 71] побудовані класи нелінійних систем двох рівнянь параболічного типу, інваріантних відносно алгебри Галілея та її розширень. При деяких конкретних виглядах системи рівнянь (2.65) досліджені її симетрійні властивості і знайдені точні розв'язки в роботах [64].

У даному підрозділі поставлена та розв'язана задача: дослідити, при яких функціях F^{ab} система (2.65) інваріантна відносно розширеної конформної алгебри

$$AC_1(1) = \langle \partial_0,\ \ \partial_1,\ \ D = 2x_1\partial_1 + Q,\ \ K = x_1^2\partial_1 + x_1 Q\rangle, \tag{2.66}$$

де $Q = (m_{ab}u^b + n_a)\partial_{u^a}$, m_{ab}, n_a — довільні сталі, $a, b = 1, 2$.

Для того, щоб система (2.65) була інваріантна відносно розширеної конформної алгебри (2.66) необхідно, щоб вона була інваріантна відносно алгебри $A = \langle \partial_0, \partial_1, D\rangle$. Результатом таких досліджень є наступне твердження.

Теорема 2.10. *Система рівнянь (2.65) інваріантна відносно алгебри $A = \langle \partial_0, \partial_1, D\rangle$ тоді і тільки тоді, коли:*

$$F^{ab} = e^{4u^1} f^{ab}, \tag{2.67}$$

де $D = D_1 = 2x_1\partial_1 + \partial_{u^1}$, $\omega = u^2$;

$$\begin{aligned} &F^{11} = (u^1)^{\frac{4}{\lambda}} f^{11}, \qquad F^{12} = (u^1)^{1-k+\frac{4}{\lambda}} f^{12}, \\ &F^{21} = (u^1)^{k-1+\frac{4}{\lambda}} f^{21}, \quad F^{22} = (u^1)^{\frac{4}{\lambda}} f^{22}, \end{aligned} \tag{2.68}$$

де $D = D_2 = 2x_1\partial_1 + \lambda(u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2})$, $\omega = (u^1)^{-k}u^2,\ \lambda \neq 0$;

$$\begin{aligned} &F^{11} = e^{4u^1} f^{11}, \qquad F^{12} = e^{(4-k)u^1} f^{12}, \\ &F^{21} = e^{(4+k)u^1} f^{21}, \quad F^{22} = e^{4u^1} f^{22}, \end{aligned} \tag{2.69}$$

де $D = D_3 = 2x_1\partial_1 + \partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}$, $\omega = \ln u^2 - ku^1$;

$$\begin{aligned} &F^{11} = (u^1)^{\frac{4}{\lambda}} \left(f^{11} - k\ln(u^1) f^{12}\right), \ F^{12} = (u^1)^{\frac{4}{\lambda}} f^{12}, \\ &F^{21} = (u^1)^{\frac{4}{\lambda}} \left(f^{21} + k(f^{11} - f^{22})\ln(u^1) - k^2\ln^2(u^1) f^{12}\right), \\ &F^{22} = (u^1)^{\frac{4}{\lambda}} (f^{22} + k\ln(u^1) f^{12}), \end{aligned} \tag{2.70}$$

де $D = D_4 = 2x_1\partial_1 + \lambda(u^1\partial_{u^1} + (ku^1 + u^2)\partial_{u^2})$, $\omega = \dfrac{u^2}{u^1} - k\ln(u^1),\ k \neq 0$;

$$\begin{aligned} &F^{11} = e^{\frac{4u^1}{u^2}} \left(f^{11} + \frac{u^1}{u^2} f^{21}\right), \\ &F^{12} = e^{\frac{4u^1}{u^2}} \left(f^{12} + \frac{u^1}{u^2}(f^{22} - f^{11}) - (\frac{u^1}{u^2})^2 f^{21}\right), \\ &F^{21} = e^{\frac{4u^1}{u^2}} f^{21}, \ F^{22} = e^{\frac{4u^1}{u^2}} (f^{22} - \frac{u^1}{u^2} f^{21}), \end{aligned} \tag{2.71}$$

де $D = D_5 = 2x_1\partial_1 + u^2\partial_{u^1}$, $\omega = u^2$;

$$\begin{aligned} &F^{11} = e^{\frac{4u^2}{k}} \left(f^{11} + \frac{u^2}{k} f^{21}\right), \ F^{21} = e^{\frac{4u^2}{k}} f^{21}, \\ &F^{12} = e^{\frac{4u^2}{k}} \left(f^{12} + \frac{u^2}{k}(f^{22} - f^{11}) - (\frac{u^2}{k})^2 f^{21}\right), \\ &F^{22} = e^{\frac{4u^2}{k}} \left(f^{22} - \frac{u^2}{k} f^{21}\right), \end{aligned} \tag{2.72}$$

де $D = D_6 = 2x_1\partial_1 + u^2\partial_{u^1} + k\partial_{u^2}$, $\omega = (u^2)^2 - 2ku^1, k \neq 0$.

У формулах (2.67)–(2.72) λ, k — довільні сталі, $f^{ab} = f^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Доведення. Інфінітезимальний оператор алгебри інварінтності системи (2.65) має вигляд

$$X = \xi^{\mu}(x_0, x_1, u^1, u^2)\partial_{\mu} + \eta^{a}(x_0, x_1, u^1, u^2)\partial_{u^a}. \tag{2.73}$$

З умови інваріантності системи (2.65) відносно оператора (2.73) одержуємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат інфінітезимального оператора (2.73) та функцій F^{ab}:

$$\begin{aligned} &\eta^c F^{ab}_{u^c} + (\xi^0_0 - 2\xi^1_1)F^{ab} + \eta^c_{u^b}F^{ac} - \eta^a_{u^c}F^{cb} = 0, \\ &\eta^c_1(F^{ac}_{u^b} + F^{ab}_{u^c}) + 2\eta^c_{1u^b}F^{ac} - \xi^1_{11}F^{ab} + \delta_{ab}\xi^1_0 = 0, \\ &\eta^b_{11}F^{ab} - \eta^a_0 = 0, \qquad \eta^a_{u^c u^d}F^{db} + \eta^a_{u^b u^d}F^{dc} = 0, \end{aligned} \tag{2.74}$$

де $a, b, c, d = 1, 2$.

Координати ξ^{μ}, η^{a} інфінітезимального оператора алгебри (2.66) мають вигляд:

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = 2\kappa x_1 + d_1, \quad \eta^a = \kappa(m_{ab}u^b + n_a), \tag{2.75}$$

де $d_0, d_1, \kappa, m_{ab}, n_a$ — довільні сталі.

У залежності від співвідношень між коефіцієнтами m_{ab}, n_a одержуємо шість нееквівалентних зображень виразу Q (цей факт є результатом розв'язування окремої задачі, яка детально описана в роботі [11]). А саме:

1. $Q_1 = \partial_{u^1}$;

2. $Q_2 = \lambda(u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2})$;

3. $Q_3 = \partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}$, $k \neq 0$;

4. $Q_4 = \lambda(u^1\partial_{u^1} + (ku^1 + u^2)\partial_{u^2})$;

5. $Q_5 = u^2\partial_{u^1} + k\partial_{u^2}$;

6. $Q_6 = \lambda((ku^1 + u^2)\partial_{u^1} + (ku^2 - u^1)\partial_{u^2})$, де k — довільна стала.

Підставивши функції (2.75) в систему визначальних рівнянь для кожного з зображень Q_i $(i = \overline{1,6})$, отримаємо системи рівнянь для визначення функцій F^{ab}:

1. $F_1^{ab} = 4F^{ab}$;

2. $\lambda u^1 F_1^{11} + \lambda k u^2 F_2^{11} = 4F^{11}, \quad \lambda u^1 F_1^{12} + \lambda k u^2 F_2^{12} = (4 + \lambda - \lambda k)F^{12},$

   $\lambda u^1 F_1^{22} + \lambda k u^2 F_2^{22} = 4F^{22}, \quad \lambda u^1 F_1^{21} + \lambda k u^2 F_2^{21} = (4 + \lambda k - \lambda)F^{21};$

3. $F_1^{11} + k u^2 F_2^{11} = 4F^{11}, \quad F_1^{12} + k u^2 F_2^{12} = (4 - k)F^{12},$

   $F_1^{22} + k u^2 F_2^{22} = 4F^{22}, \quad F_1^{21} + k u^2 F_2^{21} = (4 + k)F^{21};$

4. $\lambda u^1 F_1^{11} + \lambda(ku^1 + u^2)F_2^{11} = 4F^{11} - \lambda k F^{12},$

   $\lambda u^1 F_1^{12} + \lambda(ku^1 + u^2)F_2^{12} = 4F^{12},$

   $\lambda u^1 F_1^{21} + \lambda(ku^1 + u^2)F_2^{21} = 4F^{21} + k(F^{11} - F^{22}),$

   $\lambda u^1 F_1^{22} + \lambda(ku^1 + u^2)F_2^{22} = 4F^{22} + \lambda k F^{12};$

5. $u^2 F_1^{11} + k F_2^{11} = 4F^{11} + F^{21}, \quad u^2 F_1^{12} + k F_2^{12} = 4F^{12} - F^{11} + F^{22},$

   $u^2 F_1^{21} + k F_2^{21} = 4F^{21}, \quad u^2 F_1^{22} + k F_2^{22} = 4F^{22} - F^{21};$

6. $\lambda(ku^1 + u^2)F_1^{11} + \lambda(ku^2 - u^1)F_2^{11} = 4F^{11} + \lambda(F^{12} + F^{21}),$

   $\lambda(ku^1 + u^2)F_1^{12} + \lambda(ku^2 - u^1)F_2^{12} = 4F^{12} + \lambda(F^{22} - F^{11}),$

   $\lambda(ku^1 + u^2)F_1^{22} + \lambda(ku^2 - u^1)F_2^{22} = 4F^{21} + \lambda(F^{22} - F^{11}),$

   $\lambda(ku^1 + u^2)F_1^{21} + \lambda(ku^2 - u^1)F_2^{21} = 4F^{22} - \lambda(F^{12} + F^{21}).$

Розв'язками цих систем і будуть функції (2.67)–(2.72) відповідно. Теорему 2.10 доведено.

Доповнимо тепер алгебру A оператором

$$K = x_1^2\partial_1 + \eta^a(x_0, x_1, \vec{u})\partial_{u^a}. \qquad (2.76)$$

З комутаційних співвідношень між операторами утвореної алгебри однозначно визначається зображення оператора K:

$$K = x_1 D - x_1^2\partial_1. \qquad (2.77)$$

Тобто, якщо доповнити алгебру A оператором (2.77), то одержимо розширену конформну алгебру $AC_1(1)$. Дослідимо, при яких функціях F^{ab} система (2.65) є інваріантною відносно цієї алгебри. Результатом цих досліджень є наступне твердження.

Теорема 2.11. *Система (2.65) інваріантна відносно розширеної конформної алгебри $AC_1(1)$ тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна одній з наступних систем:*

$$U_0 = \partial_{11}[(u^1)^{-\frac{1}{3}}\Phi(\omega)], \;\; \omega = (u^1)^{-1}u^2, \qquad (2.78)$$

де $D = 2x_1\partial_1 - 3I$;

$$U_0 = \partial_1[(u^1)^{-1}\partial_1(\Phi(\omega))], \;\; \omega = (u^1)^{-1}u^2, \qquad (2.79)$$

де $D = 2x_1\partial_1 - 2I$;

$$u_0^1 = \partial_{11}[(u^2)^{-\frac{1}{3}}\varphi(\omega)], \;\; u_0^2 = \partial_1[(u^1)^{-\frac{2}{3}}\partial_1(\psi(\omega))], \;\; \omega = (u^1)^{-\frac{2}{3}}u^2, \qquad (2.80)$$

де $D = 2x_1\partial_1 - 3u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2}$.

У формулах (2.78)–(2.80) φ, ψ, $\Phi(\omega) = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}$ — довільні гладкі функції, $\quad I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$.

Доведення. Знайдемо, при яких функціях F^{ab} система (2.65) буде інваріантна відносно алгебри $AC_1(1)$ для кожного з отриманих її нееквівалентних зображень.

I. Розглянемо спочатку алгебру (2.66) при $D = D_1$. Підставивши координати інфінітезимального оператора цієї алгебри

$$\xi^0 = d_0,\ \xi^1 = ax_1^2 + 2bx_1 + d_1,\ \eta^1 = (ax_1 + b),\ \eta^2 = 0,$$

де d_0, d_1, a, b — довільні сталі, в систему визначальних рівнянь (2.74) та врахувавши формули (2.67), отримаємо, що функції $F^{ab} = 0$, а це означає, що система (2.65) стає вироджена, тому цей випадок нас не цікавить. Аналогічна ситуація спостерігається, коли

$D = D_3$, $D = D_5$, $D = D_6$.

II. При $D = D_2$, підставивши координати інфінітезимального оператора

$$\xi^0 = d_0,\ \xi^1 = ax_1^2 + 2bx_1 + d_1,\ \eta^1 = \lambda(ax_1 + b)u^1,\ \eta^2 = \lambda(ax_1 + b)ku^2$$

та формули (2.68) в систему визначальних рівнянь, після спрощень, отримаємо систему:

$$\begin{aligned}
&(1 + \tfrac{3}{\lambda})(f^{11} + k\omega f^{12}) = 0,\\
&\dot{f}^{11} + k\omega \dot{f}^{12} + (k + 1 + \tfrac{2}{\lambda})f^{11} = 0,\\
&(k + \tfrac{3}{\lambda})(f^{21} + k\omega f^{22}) = 0,\\
&\dot{f}^{21} + k\omega \dot{f}^{22} + 2(k + \tfrac{1}{\lambda})f^{22} = 0.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Очевидно, що розв'язок системи рівнянь (2.81) залежить від значення сталих λ та k. Отримуємо такі нееквівалентні випадки:

II.1. Коли $\lambda = -3$, $k = 1$ розв'язком системи рівнянь (2.81) є функції:

$$\begin{aligned}
&f^{12} = \lambda_{12}\omega^{-\frac{4}{3}} - \omega^{-1}f^{11} + \tfrac{1}{3}\omega^{-\frac{4}{3}}\int \omega^{-\frac{2}{3}} f^{11} d\omega,\\
&f^{21} = \lambda_{22}\omega^{-\frac{4}{3}} - \omega^{-1}f^{21} + \tfrac{1}{3}\omega^{-\frac{4}{3}}\int \omega^{-\frac{2}{3}} f^{21} d\omega,
\end{aligned} \tag{2.82}$$

де λ_{12}, λ_{22} — довільні сталі, $f^{11} = f^{11}(\omega)$, $f^{21} = f^{21}(\omega)$ — довільні гладкі функції. Якщо (2.82) підставити в (2.65), то після деяких перепозначень довільних функцій отримаємо систему рівнянь (2.78);

II.2. При $\lambda = -3$, $k = \frac{2}{3}$ розв'язком системи рівнянь (2.81) є функції:

$$\begin{aligned} &f^{12} = \lambda_{12}\omega^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}\omega^{-1}f^{11} + \tfrac{3}{4}\omega^{-\frac{3}{2}}\int \omega^{-\frac{1}{2}} f^{11} d\omega, \\ &f^{21} = -\tfrac{2}{3}\omega f^{22}. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Якщо функції (2.83) підставити в систему (2.65), то після спрощень отримаємо систему рівнянь (2.80);

II.3. Коли $\lambda = -2$, $k = \frac{3}{2}$ розв'язком системи рівнянь (2.81) є функції:

$$\begin{aligned} &f^{11} = -\tfrac{3}{2}\omega f^{11}, \\ &f^{22} = \lambda_{22}\omega^{-\frac{4}{3}} - \tfrac{2}{3}\omega^{-1}f^{21} + \tfrac{2}{9}\omega^{-\frac{4}{3}}\int \omega^{-\frac{2}{3}} f^{21} d\omega, \end{aligned} \tag{2.84}$$

підставивши які в систему (2.65), отримаємо систему, яка є локально еквівалентна системі рівнянь (2.80);

II.4. Якщо $\lambda = -2$, $k = 1$, то розв'язком системи рівнянь (2.81) є функції:

$$f^{11} = -\omega f^{12}, \;\; f^{21} = -\omega f^{22}. \tag{2.85}$$

Підставивши функції (2.85) в систему (2.65), після деяких спрощень отримаємо систему (2.79);

Випадки II.5 $\lambda = -3$, $k \neq \frac{2}{3}, 1$; II.6 $\lambda = -2$, $k \neq \frac{3}{2}, 1$ та II.7 $\lambda \neq -3, -2$ приводять до виродженої системи вигляду:

$$u_0^1 + \partial_1(F^{1a}u^a) = 0, \;\; u_0^2 = 0, \;\; \text{або} \;\; u_0^1 = 0, \;\; u_0^2 = 0.$$

III. При $D = D_4$, підставивши координати інфінітезимального оператора

$\xi^0 = d_0$, $\xi^1 = ax_1^2 + 2bx_1 + d_1$, $\eta^1 = \lambda(ax_1 + b)u^1$, $\eta^2 = \lambda(ax_1 + b)(ku^1 + u^2)$ та формули (2.70) в систему визначальних рівнянь, після спрощень отримаємо систему:

$$
\begin{aligned}
&(1+\tfrac{3}{\lambda})(1+\tfrac{2}{\lambda})f^{12}=0,\ \ (1+\tfrac{3}{\lambda})[f^{11}+(k+\omega)f^{12}]=0,\\
&(1+\tfrac{3}{\lambda})(1+\tfrac{2}{\lambda})f^{22}+k(2+\tfrac{5}{\lambda})f^{12}=0,\\
&kf^{11}+k(k+\omega)f^{12}+(1+\tfrac{3}{\lambda})f^{21}+(k+\omega)(1+\tfrac{3}{\lambda})f^{22}=0.
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

Розв'язок системи рівнянь (2.86) залежить від значення сталих λ та k, після підстановки яких у задану систему (2.65), отримуємо невироджені системи лише при умові, коли $k=0$, що є частинним випадком пункту II.

Теорему 2.11 доведено.

Зауваження. *З теореми 2.11 випливає, що існують три різні реалізації розширеної конформної алгебри* $AC_1(1)$ *(2.66), відносно яких інваріантна система (2.65). Вони реалізуються наступним виглядом оператора* Q*:*

1. $Q=-3I$;
2. $Q=-2I$;
3. $Q=-3u^1\partial_{u^1}-2u^2\partial_{u^2}$.

У [65] розглянута система (2.65), коли матриця F *має спеціальний вигляд* $F=\begin{pmatrix} F^{11}(u) & F^{12}(u,v)\\ F^{21}(u,v) & F^{22}(v)\end{pmatrix}$, *де* $u=u^1$, $v=u^2$ *і показано, що ця система інваріантна відносно розширеної конформної алгебри, яка реалізується першими двома зображеннями. Результати цієї статті отримуються з формул (2.78) та (2.79), якщо вибрати спеціальним чином функції* Φ. *А саме для системи рівнянь (2.78) функція* Φ *має вигляд*

$\Phi=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \lambda_4\end{pmatrix}\omega^{-\frac{1}{3}}$, *а для системи (2.79) –* $\Phi=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\ln(\omega)$.

Третє зображення для такого вигляду матриці F не існує.

Система рівнянь (2.65) в загальному вигляді досліджувалась також і в роботі [66], де отримано тільки перші дві реалізації алгебри $AC_1(1)$.

2.6. Системи еволюційних рівнянь n-го порядку

Розглянемо систему еволюційних рівнянь, що узагальнює рівняння (2.11) на випадок двох функцій відносно двох невідомих x_0, x_1:

$$U_0 = F(x_0,\ x_1,\ U,\ U_{(n)}), \tag{2.87}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $U_{(n)} = \begin{pmatrix} u^1_{(n)} \\ u^2_{(n)} \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}$ — довільні гладкі функції.

Розв'яжемо задачу: виділити з класу систем (2.87) ті, що є інваріантними відносно розширеної конформної алгебри $AC_1(1)$:

$$\langle \partial_0,\ \partial_1,\ D = 2x_1\partial_1 + u^a\partial_{u^a},\ \ K = x_1^2\partial_1 + x_1u^a\partial_{u^a}\rangle. \tag{2.88}$$

Очевидно, що інваріантність системи (2.87) відносно двовимірної алгебри трансляцій з базисними операторами ∂_0, ∂_1, вимагає, щоб (2.87) мала вигляд:

$$U_0 = F(U,\ U_{(n)}). \tag{2.89}$$

Тому надалі будемо досліджувати систему рівнянь (2.89). Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.12. *Система* (2.89) *інваріантна відносно алгебри* $AC_1(1)$ *(2.88) тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд:*

$$U_0 = uF, \quad F = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}, \tag{2.90}$$

де $f^a = f^a(\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{11}, \omega^{12}, \ldots, \omega^{1,n-1}, \omega^{21}, \omega^{22}, \ldots, \omega^{2,n-1})$ *— довільні гладкі функції своїх аргументів,*

$\omega^{01} = \frac{u^1}{u^2}$, $\omega^{02} = u^2u_1^1 - u^1u_1^2$, $\omega^{ak} = ((u^a)^2\partial_1)^{k-1}((u^a)^3u_{11}^a)$
(суми по індексу a немає), $k = \overline{1, n-1}$, $a = 1, 2$.

Доведення. Перепишемо систему (2.89) в еквівалентній формі

$$\Phi(U_0, U, U_{(n)}) = 0, \tag{2.91}$$

де $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix}$ — довільні гладкі функції такі, що $\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial u_0^1} & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u_0^2} \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial u_0^1} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial u_0^2} \end{vmatrix} \neq 0.$

Так як система (2.91) інваріантна відносно алгебри зсувів $\langle \partial_0, \partial_1 \rangle$ при довільних функціях Φ^a, то з'ясуємо вигляд функції Φ^a при яких дана система є інваріантною відносно операторів D і K. Запишемо інфінітезимальний оператор у вигляді

$$X = \varkappa D + aK = (ax_1^2 + 2\varkappa x_1)\partial_1 + (ax_1 + \varkappa)u^a\partial_{u^a}, \tag{2.92}$$

де $\varkappa$ і a — довільні параметри. Умова інваріантності системи (2.91) відносно оператора (2.92) має вигляд

$$\left. \underset{n}{X}\Phi \right|_{\Phi = 0} = 0. \tag{2.93}$$

З умови (2.93) одержуємо систему:

$$\begin{gathered} {}^0\eta^1\Phi^a_{u_0^1} + {}^0\eta^2\Phi^a_{u_0^2} + \eta^1\Phi^a_{u^1} + \eta^2\Phi^a_{u^2} + {}^1\eta^1\Phi^a_{u_1^1} + {}^1\eta^2\Phi^a_{u_1^2} + \\ + \ldots + {}^n\eta^1\Phi^a_{u_n^1} + {}^n\eta^2\Phi^a_{u_n^2} = 0, \end{gathered} \tag{2.94}$$

причому потрібно знайти її загальний розв'язок при умові (2.91). У формулі (2.94) ${}^0\eta^a$, ${}^1\eta^a$, … , ${}^n\eta^a$ — координати продовженого оператора $\underset{n}{X}$, $a = 1, 2$. Загальним розв'язком системи (2.94) є функції

$$\Phi^a = \Phi^a(J^1, \ldots, J^{n-1}, \ldots, J^{2n+2}), \tag{2.95}$$

де $J^1, \ldots, J^{2n+2}$ — перші інтеграли системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du_0^1}{{}^0\eta^1} = \frac{du_0^2}{{}^0\eta^2} = \frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du_1^1}{{}^1\eta^1} = \frac{du^2}{\eta^2} = \frac{du_1^2}{{}^1\eta^2} = \ldots = \frac{du_n^1}{{}^n\eta^1} = \frac{du_n^2}{{}^n\eta^2}. \quad (2.96)$$

Аналогічно, як і в теоремі 2.1, одержуємо, що перші інтеграли систем

$$\frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du_1^1}{{}^1\eta^1} = \ldots = \frac{du_n^1}{{}^n\eta^1}, \qquad \frac{du^2}{\eta^2} = \frac{du_1^2}{{}^1\eta^2} = \ldots = \frac{du_n^2}{{}^n\eta^2} \quad (2.97)$$

мають вигляд

$$J^{ak} = ((u^a)^2\partial_1)^{k-1}((u^a)^3 u_{11}^a), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (2.98)$$

де суми по індексу a немає.

Залишається знайти перші інтеграли системи w_1, w_2, w_3, w_4, які є розв'язком диференціальної системи

$$\frac{du_0^1}{{}^0\eta^1} = \frac{du_0^2}{{}^0\eta^2} = \frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du^2}{\eta^2} = \frac{d(u^2u_1^1 - u^1u_1^2)}{u_1^1\,\eta^2 - u_1^2\,\eta^1 - u^1\,{}^1\eta^2 + u^2\,{}^1\eta^1}. \quad (2.99)$$

Оскільки як для оператора (2.92)

$$\begin{aligned} &\eta^a = (ax_1 + \varkappa)u^a,\ {}^0\eta^a = (ax_1 + \varkappa)u_0^a, \\ &{}^1\eta^a = au^a - (ax_1 + \varkappa)u_1^a, \end{aligned} \quad (2.100)$$

то підставляючи (2.100) в (2.99), одержимо

$$\begin{aligned} &\frac{du_0^1}{(ax_1+\varkappa)u_0^1} = \frac{du_0^2}{(ax_1+\varkappa)u_0^2} = \frac{du^1}{(ax_1+\varkappa)u^1} = \frac{du^2}{(ax_1+\varkappa)u^2} = \\ &= \frac{du^2u_1^1 - u^1u_1^2}{0}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Розв'язуючи рівняння (2.101), знаходимо

$$w_3 = \frac{u_0^1}{u^1},\ w_4 = \frac{u_0^2}{u^2},\ w_1 = \frac{u^1}{u^2},\ w_2 = u^2u_1^1 - u^1u_1^2. \quad (2.102)$$

Отже, загальний розв'язок системи (2.94) при умові (2.91) має вигляд

$$\Phi^a\left(\frac{u_0^1}{u^1},\ \frac{u_0^2}{u^2},\ \frac{u^1}{u^2},\ u^2u_1^1 - u^1u_1^2,\ I^1,\ I^2\right) = 0 \quad (2.103)$$

або

$$\begin{aligned} \frac{u_0^1}{u^1} &= f^1(\frac{u^1}{u^2},\ u^2u_1^1 - u^1u_1^2,\ I^1,\ I^2), \\ \frac{u_0^2}{u^2} &= f^2(\frac{u^1}{u^2},\ u^2u_1^1 - u^1u_1^2,\ I^1,\ I^2), \end{aligned} \tag{2.104}$$

де $I^a = (J^{a1}, J^{a2}, \dots, J^{an-1})$ задані формулами (2.98). З формул (2.104), (2.98) одержуємо систему (2.90).

Теорему 2.12 доведено.

Зауважимо, що для конкретних рівнянь можуть виникати реалізації подібні до (2.88), коли оператори D, K мають вигляд

$$D = 2x_1\partial_1 + m_{1a}u^a\partial_{u^a}, \quad K = x_1^2\partial_1 + m_{1a}x_1u^a\partial_{u^a},$$

де m_{1a} — довільні константи одночасно нерівні нулю.

Якщо $m_{11} \neq 0$, $m_{12} \neq 0$, то такі реалізації зводяться до (2.88) локальними перетвореннями $u^1 \to (u^1)^{m_{11}}$, $u^2 \to (u^2)^{m_{12}}$.

Коли хоча б одна з сталих m_{11}, m_{12} дорівнює нулю, то такі реалізації локальними перетвореннями $u^1 \to u^1$, $u^2 \to (u^2)^{m_2}$ зводяться до

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_1\partial_1 + u^2\partial_{u^2}, \quad K = x_1^2\partial_1 + x_1u^2\partial_{u^2} \rangle. \tag{2.105}$$

Розглянемо інваріантність відносно алгебри (2.105) на прикладі еволюційної системи рівнянь другого порядку.

Одною з систем еволюційних рівнянь, яка узагальнює рівняння (2.1) на випадок двох функцій $u^1 = u^1(x_0, x_1)$, $u^2 = u^2(x_0, x_1)$, є система:

$$U_0 = F(x_0, x_1, U, U_1, U_{11}), \tag{2.106}$$

де $U_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{pmatrix}$, $U_{11} = \begin{pmatrix} u_{11}^1 \\ u_{11}^2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}$ — довільні гладкі функції.

Дослідимо, при яких F система (2.106) інваріантна відносно розширеної конформної алгебри (2.105).

Зрозуміло, що інваріантність системи рівнянь (2.106) відносно двовимірної алгебри трансляцій з базисними операторами ∂_0, ∂_1 вимагає, щоб система (2.106) мала вигляд:

$$U_0 = F(U, U_1, U_{11}). \tag{2.107}$$

Тому надалі будемо досліджувати систему (2.107). Результатом цих досліджень наступна теорема.

Теорема 2.13. *Система рівнянь (2.107) інваріантна відносно розширеної конформної алгебри (2.105), коли вона має вигляд:*

$$\begin{aligned} &u^1_0 = f^1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4),\\ &u^2_0 = u^2 f^2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4), \end{aligned} \tag{2.108}$$

де $\omega^1 = u^1$, $\omega^2 = u^1_1(u^2)^2$, $\omega^3 = 2u^2u^2_1 - \dfrac{(u^2)^2}{u^1_1}u^1_{11}$, $\omega^4 = (u^2)^3u^2_{11}$, f^1 *та* f^2 *— довільні гладкі функції.*

Доведення. З умови інваріантності системи (2.107) відносно оператора $X = (ax_1^2 + 2bx_1)\partial_1 + (ax_1 + b)u^2\partial_{u^2}$, отримуємо систему визначальних рівнянь для визначення функцій f^1 та f^2:

$$\begin{aligned} &-au^2 f^1_{u^2} + 2au^1 f^1_{u^1_1} + au^2{}_1 f^1_{u^2{}_1} + 4au^1_{11} f^1_{u^1_{11}} + 3au^2{}_{11} f^1_{u^2{}_{11}} = 0,\\ &-bu^2 f^1_{u^2} + 2bu^1_1 f^1_{u^1_1} - (au^2 - bu^2{}_1) f^1_{u^2_1} + 2(au^1_1 + 2bu^1_{11}) f^1_{u^1_{11}} +\\ &+3bu^2_{11} f^1_{u^2_{11}} = 0,\\ &af^2 - au^2 f^2_{u^2} + 2au^1_1 f^2_{u^1_1} + au^2_1 f^2_{u^2_1} + 4au^1_{11} f^2_{u^1_{11}} + 3au^2_{11} f^2_{u^2_{11}} = 0,\\ &bf^2 - bu^2 f^2_{u^2} + 2bu^1_1 f^2_{u^1_1} - (au^2 - bu^2_1) f^2_{u^2_1} + 2(au^1_1 + 2bu^1_{11}) f^2_{u^1_{11}} +\\ &+3bu^2_{11} f^2_{u^2_{11}} = 0. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Зрозуміло, що розв'язок системи рівнянь (2.109) залежить від значень коефіцієнтів a та b.

При $a = 0$, $b = 0$ система (2.109) задовольняється при довільних f^a, а система (2.107) буде інваріантна відносно операторів ∂_0, ∂_1.

Щоб знайти загальний розв'язок системи (2.109), при $a = 0$ та $b \neq 0$ необхідно визначити перші інтеграли наступних систем звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{du^1}{0} = \frac{du^2}{u^2} = -\frac{du^1_1}{2u^1_1} = -\frac{du^2_1}{u^2_1} = -\frac{du^1_{11}}{4u^1_{11}} = -\frac{du^2_{11}}{3u^2_{11}} = \frac{df^1}{0}, \\ &\frac{du^1}{0} = \frac{du^2}{u^2} = -\frac{du^1_1}{2u^1_1} = -\frac{du^2_1}{u^2_1} = -\frac{du^1_{11}}{4u^1_{11}} = -\frac{du^2_{11}}{3u^2_{11}} = \frac{df^2}{f^2}. \end{aligned} \tag{2.110}$$

Розв'язком (2.110) є функції

$$\begin{aligned} &f^1 = f^1(u^1, (u^2)^2 u^1_1, u^2 u^2{}_1, (u^1_1)^{-2} u^1_{11}, (u^2)^3 u^2_{11}), \\ &f^2 = u^2 f^2(u^1, (u^2)^2 u^1_1, u^2 u^2_1, (u^1_1)^{-2} u^1_{11}, (u^2)^3 u^2_{11}), \end{aligned} \tag{2.111}$$

а система (2.107) буде інваріантна відносно операторів ∂_0, ∂_1, D.

При $a \neq 0$, функції F^1, F^2 будуть розв'язками системи (2.109), якщо вони задовольняють наступну систему рівнянь:

$$u^2 f^1_{u^2_1} - 2u^1_1 f^1_{u^1_{11}} = 0, \quad u^2 f^2_{u^2_1} - 2u^1_1 f^2_{u^1_{11}} = 0. \tag{2.112}$$

Підставивши функції (2.111) в (2.112) отримаємо функції (2.108).

Теорему 2.13 доведено.

РОЗДІЛ 3

Класифікація систем квазілінійних еволюційних рівнянь інваріантних відносно алгебр Галілея

У даному розділі розглядаються системи рівнянь інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень. Вивчено симетрійні властивості системи рівнянь теорії проникання, що описує адіабатичний рух нев'язкої стисливої рідини у випадку відсутності та наявності масових сил. Встановлено нелінійності, при яких ця система інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея у випадках наявності та відсутності осьової симетрії. Досліджено симетрійні властивості системи еволюційних рівнянь третього порядку. Серед широкого класу таких систем за допомогою симетрійних методів відібрано ті, які інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень.

3.1. Інваріантність рівнянь теорії проникання відносно алгебри Галілея та її розширень

Добре відомі такі результати:

а) [39, 56] нелінійні хвильові рівняння

$\Box u = F(x, u)$

є інваріантними відносно конформної алгебри $AC(1, n)$ тоді і тільки тоді, коли вони є локально еквівалентними рівнянню

$$\Box u = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}, \tag{3.1}$$

де λ – довільна стала, а n — розмірність простору незалежних змінних $(u = u(x), x = (x_0, \vec{x}), \vec{x} \in R_n)$;

б) [58, 62, 92] нелінійні рівняння Шредінгера

$i\psi_0 + \frac{1}{2m}\triangle\psi = F(x, \psi)$

є інваріантними відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, n)$ тоді і тільки тоді, коли вони є локально еквівалентними рівнянню

$$i\psi_0 + \frac{1}{2m}\triangle\psi = \lambda|\psi|^{\frac{4}{n}}\psi. \tag{3.2}$$

У роботі [56], показано, що циліндрично–симетричні нелінійні хвильові рівняння

$\Box u - \frac{N}{x_n}u_n = F(x, u),$

інваріантні відносно конформної алгебри $AC(1, n-1)$ тоді і тільки тоді, коли вони локально еквівалентні рівнянню

$$\Box u - \frac{N}{x_n}u_n = \lambda u^m, \tag{3.3}$$

де m – довільна стала, пов'язана зі сталими n і N співвідношенням $n + N = \frac{m+3}{m-1}$.

У роботі [39] встановлено, що циліндрично–симетричні нелінійні рівняння Шредінгера

$i\psi_0 + \frac{1}{2m}(\triangle\psi + \frac{N}{x_n}\psi_n) = F(x, \psi)$

інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, n-1)$ тоді і тільки тоді, коли вони локально еквівалентні рівнянню

$$i\psi_0 + \frac{1}{2m}(\triangle\psi + \frac{N}{x_n}\psi_n) = \lambda|\psi|^k\psi, \tag{3.4}$$

де k — довільна стала, така, що $n + N = \frac{4}{k}$.

Рівняння (3.3) та (3.4) містять довільну степеневу нелінійність, але їх максимальні алгебри інваріантності мають розмірність на одиницю меншу, ніж відповідні рівняння (3.1) та (3.2). У даному розділі показано, що аналогічна ситуація спостерігається і для систем вигляду

$$
\begin{aligned}
&u_0 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} u)^2 = F(\rho),\\
&v_0 + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v = 0,\\
&\rho_0 + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} \rho + \rho(\triangle u + \tfrac{N}{x_n} u_n) = G(\rho),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

де N — довільна стала, $F = F(\rho)$, $G = G(\rho)$ — довільні гладкі функції. Системи рівнянь (3.5) описують адіабатичний рух нев'язкої стисливої рідини і широко застосовуються у теорії проникання [35], [36]. У цій роботі вперше встановлена максимальна алгебра інваріантності систем, що описують адіабатичний рух при відсутності масових сил та при їх наявності. Знайдено нелінійності при яких ці системи є інваріантними відносно узагальненої алгебри Галілея у випадках наявності та відсутності осьової симетрії.

Даний підрозділ побудовано таким чином: спочатку досліджена симетрія даної системи у випадку відсутності масових сил при наявності та відсутності осьової симетрії. Потім розв'язується аналогічна задача при наявності масових сил.

Адіабатичний рух нев'язкої стисливої рідини при відсутності масових сил.

Розглядається адіабатичний рух нев'язкої стисливої рідини з осьовою симетрією при відсутності масових сил. Тоді рівняння руху, неперервності та збереження ентропії частинки мають вигляд (див. [35]):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x\frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y}) + w_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + w_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{w_y}{y} = 0,\\
&\frac{\partial S}{\partial t} + w_x\frac{\partial S}{\partial x} + w_y\frac{\partial S}{\partial y} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

де w_x, w_y — компоненти швидкості частинки, ρ — густина, p — тиск, S — ентропія, t — час, x, y — просторові змінні.

Введемо потенціал поля швидкостей

$$
w_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \ w_y = \frac{\partial u}{\partial y}.
$$

Тоді система (3.6) запишеться в такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial u}{y\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial y} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Якщо зробити припущення, що $p = f\,(\rho)$, проінтегрувати перші два рівняння системи (3.7) по x та y відповідно та перепозначити:

$$
t = x_0,\ x = x_1,\ y = r,\ S = v,
$$

то система (3.7) набуде вигляду:

$$
\begin{aligned}
&u_0 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_r^2) = F(\rho),\\
&v_0 + u_1 v_1 + u_r v_r = 0,\\
&\rho_0 + u_1\rho_1 + u_r\rho_r + \rho\left(u_{11} + u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

де $F = F(\rho)$ — гладка функція така, що $F_\rho = -\rho^{-1} f_\rho$.

Тривимірний оператор Лапласа в циліндричних координатах має вигляд $\triangle = \partial_{11} + \partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}$, де $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$.

У випадку, коли функція u володіє осьовою (циліндричною) симетрією, то $\triangle u = u_{11} + u_{rr} + \frac{1}{r}u_r$. Використавши дані формули, запишемо систему (3.8) для випадку трьох просторових змінних, коли u не володіє циліндричною симетрією:

$$\begin{aligned} & u_0 + \frac{1}{2}u_a u_a = F(\rho), \\ & v_0 + u_a v_a = 0, \\ & \rho_0 + u_a \rho_a + \rho \triangle u = 0, \quad a = \overline{1,3}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Очевидно з системи (3.9) при $u_\theta = 0$ одержується система (3.8).

Узагальнимо систему (3.8) на випадок довільної кількості просторових змінних наступною системою:

$$\begin{aligned} & u_0 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} u)^2 = F(\rho), \\ & v_0 + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v = 0, \\ & \rho_0 + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} \rho + \rho(\triangle u + \tfrac{N}{x_n} u_n) = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

де $\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$, N — довільна стала.

Поставимо задачу: дослідити симетрійні властивості систем (3.9) та (3.10) у залежності від вигляду функції $F(\rho)$ у випадку довільної кількості просторових змінних $\vec{x} \in R_n$.

Спочатку розглянемо випадок $N = 0$.

Теорема 3.1. *Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь:*

$$\begin{aligned} & u_0 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} u)^2 = F(\rho), \\ & v_0 + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v = 0, \\ & \rho_0 + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} \rho + \rho \triangle u = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

є алгебра:

1. $A = \langle \partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_u = \dfrac{\partial}{\partial u}, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a$
   $G_a = x_0\partial_a + x_a\partial_u, \quad D = x_\mu\partial_\mu + u\partial_u, \quad Q_1 = \psi^1\partial_v\rangle,$
   де $\mu = \overline{0,n}, \quad a = \overline{1,n}, \quad b = \overline{1,n},$
   якщо $F(\rho)$ *— довільна гладка функція;*
2. $A_1 = \langle A, \quad Q_2 = x_0\partial_u + \dfrac{1}{\lambda}\rho\partial_\rho\rangle,$ *якщо* $F(\rho) = \lambda\ln\rho,\ \lambda \neq 0;$
3. $A_2 = \langle A, \quad D_1 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \frac{2}{m}\rho\partial_\rho\rangle,$
   якщо $F(\rho) = \lambda\rho^m, \lambda \neq 0, m \neq 0, \frac{2}{n};$
4. $A_3 = \langle A, \quad D_2 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - n\rho\partial_\rho,$
   $\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a + \dfrac{\vec{x}^2}{2}\partial_u - nx_0\rho\partial_\rho\rangle,$ *якщо* $F(\rho) = \lambda\rho^{\frac{2}{n}}, \lambda \neq 0;$
5. $A_4 = \langle A_3, \quad Q_3 = \psi^2\rho\partial_\rho\rangle,$ *якщо* $F(\rho) = 0,$

де m, λ *— довільні сталі, у випадках 1 і 5 функціїї* $\psi^1 = \psi^1(v)$, $\psi^2 = \psi^2(v)$ *— довільні гладкі функції.*

Розглянемо випадок, коли $N \neq 0$. Результатом досліджень симетрійних властивостей системи (3.10) є наступна теорема.

Теорема 3.2. *Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь (3.10) є алгебра:*

1. $A = \langle \partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha},\ \partial_u = \dfrac{\partial}{\partial u},\ J_{ij} = x_i\partial_j - x_j\partial_i,\ G_i = x_0\partial_i + x_i\partial_u,$
   $D = x_\alpha\partial_\alpha + x_n\partial_n + u\partial_u,\ Q_1 = \psi^1\partial_v\rangle,$ *де* $\alpha = \overline{0, n-1},\ i =$
   $= \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, n-1},$ *якщо* $F(\rho)$ *— довільна гладка функція;*
2. $A_1 = \langle A, \quad Q_2 = x_0\partial_u + \dfrac{1}{\lambda}\rho\partial_\rho\rangle,$ *якщо* $F(\rho) = \lambda\ln\rho,\ \lambda \neq 0;$
3. $A_2 = \langle A, \quad D_1 = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + x_n\partial_n - \frac{2}{m}\rho\partial_\rho\rangle,$

   якщо $F(\rho) = \lambda\rho^m, \lambda \neq 0, N \neq \frac{2}{m} - n;$
4. $A_3 = \langle A, \quad D_2 = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + x_n\partial_n - (n+N)\rho\partial_\rho,$
   $\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_i\partial_i + \dfrac{\vec{x}^2}{2}\partial_u - (n+N)x_0\rho\partial_\rho\rangle,$

якщо $F(\rho) = \lambda\rho^m, N = \frac{2}{m} - n, \lambda \neq 0$;

5. $A_4 = \langle A_3, \quad Q_3 = \psi^2\rho\partial_\rho\rangle$, *якщо* $F(\rho) = 0$,

де m, λ *— довільні сталі, у випадках 1 і 5* $\psi^1 = \psi^1(v)$, $\psi^2 = \psi^2(v)$ *— довільні гладкі функції.*

Доведення теорем 3.1 та 3.2 проведемо одночасно. Згідно критерію Лі, діючи другим продовженням інфінітезимального оператора на кожне з рівнянь системи (3.10) та перейшовши на многовид системи (3.10), після розщеплення по похідним отримуємо систему визначальних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&\xi^0 = \xi^0(x_0),\ \xi^a = \xi^a(x),\ a = \overline{1,n},\\
&\xi^a_b + \xi^b_a = 0,\ b = \overline{1,n},\ a \neq b,\ \xi^1_1 = \xi^2_2 = ... = \xi^n_n,\\
&\eta^1_\rho = \eta^2_\rho = \eta^1_v = 0,\ \eta^2 = \eta^2(v),\\
&\xi^0_0 + \eta^1_u = 2\xi^1_1,\ \eta^1_a = \xi^a_0,\\
&\eta^0_u + \rho\eta^1_{uu} = 0,\ \rho\eta^0_\rho = \eta^0 = 0,\ \eta^0_u + 2\rho\eta^1_{uu} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\eta^0_i + 2\rho\eta^1_{iu} = \rho(\triangle\xi^i + \tfrac{N}{x_n}\xi^i_n),\\
&\eta^0_n + 2\rho\eta^1_{nu} = \rho(\triangle\xi^n - \tfrac{N}{x_n}\xi^1_1 + \tfrac{N}{x_n^2}\xi^n),
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\eta^0_0 + \eta^0_u F + \rho(\triangle\eta^1 + \tfrac{N}{x_n}\eta^1_n) = 0,\\
&\eta^1_0 + (\eta^1_u - \xi^0_0)F = \eta^0\dot{F},
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

де $a = \overline{1,n}$, $b = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,n-1}$. Розв'язком рівнянь (3.12) є функції:

$$
\begin{aligned}
&\xi^0 = \xi^0(x_0),\\
&\xi^a = \dot{\varkappa}x_a + C_{ab}x_b + d_a,\ C_{ab} + C_{ba} = 0,\\
&\eta^1 = [2\dot{\varkappa}(x_0) - \xi^0_0]u + \tfrac{\ddot{\varkappa}}{2}\vec{x}^2 + \dot{d}_a(x_0)x_a + \gamma(x_0),\\
&\eta^2 = \eta^2(v),\\
&\eta^0 = \Phi(x_0, x_1, ..., x_n, v)\rho,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

де $\varkappa$, d_a, γ, Φ — довільні функції своїх аргументів, $C_{ab}, (a \neq b)$ — довільні сталі.

Підставивши функції (3.15) в систему (3.13), отримаємо:

$$\Phi = \frac{N}{x_n} C_{in} x_i - \frac{N}{x_n} d_n + \varphi(x_0, v), \tag{3.16}$$

де $\varphi(x_0, v)$ — довільна функція.

Якщо підставити (3.15) та (3.16) в рівняння (3.14), то отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned}
&\varkappa''' = 0,\ \ddot{d}_a = 0,\ \xi^0_0 = 2\ddot{\varkappa},\ NC_{in}\dot{F} = 0,\\
&\varphi'_{x_0} + (n+N)\ddot{\varkappa} = 0, \quad N\dot{d}_n = 0, \quad Nd_n\dot{F} = 0,\\
&\varphi\rho\dot{F} = 2(\dot{\varkappa} - \xi^0_0)F + \dot{\gamma}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Дослідимо останнє рівняння (3.17). Вивчивши його структуру відносно функції F та змінної ρ, робимо висновок, що існують чотири нееквівалентні випадки:

1. F — довільна функція, $\quad F \neq 0;\ \lambda \ln \rho;\ \lambda\rho^m$;
2. $F = \lambda \ln \rho, \quad \lambda = \mathrm{const}, \quad \lambda \neq 0;$
3. $F = \lambda\rho^m, \quad \lambda, m = \mathrm{const}, \quad \lambda, m \neq 0;$
4. $F = 0.$

Розглянемо тільки випадки 1 та 3. Доведення для випадків 2 та 4 проводиться аналогічно.

Нехай F – довільна функція. Тоді рівняння (3.17) задають умови:

$$\begin{aligned}
&\varkappa = c_1x_0^2 + c_2x_0 + c_3, \quad \xi^0 = 2c_1x_0^2 + (2c_2 + c_4)x_0 + c_5,\\
&d_a = l_ax_0 + k_a, \quad 2(n+N)c_1 = 0,\\
&NC_{in} = 0,\ Nl_n = 0,\ Nk_n = 0, \varphi = 0,\ \dot{\varkappa} = \xi^0_0,\ \dot{\gamma} = 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Очевидно, що розв'язок (3.18) залежить від значення сталої N.

Нехай $N = 0$. Тоді з (3.18) одержуємо:

$$c_1 = 0,\ \ c_4 = -c_2,\ \ \gamma = c_6. \tag{3.19}$$

Підставивши (3.16), (3.18), (3.19) в (3.15), отримаємо координати інфінітезимального оператора ξ^0, ξ^1, η^1, η^2, η^0, що задають алгебру A в теоремі 3.1.

Коли $N \neq 0$. Тоді з (3.18) будемо мати:

$$C_{in} = 0, \;\; l_n = k_n = 0, \;\; c_1 = 0, \;\; c_4 = -c_2, \;\; \gamma = c_6. \tag{3.20}$$

Підставивши функції (3.16), (3.18), (3.20) в (3.15), отримаємо ξ^0, ξ^1, η^1, η^2, η^0, що задають алгебру A в теоремі 3.2.

Нехай $F = \lambda\rho^m$. Тоді рівняння (3.17) задають умови:

$$\begin{aligned}
&\varkappa = c_1x_0^2 + c_2x_0 + c_3, \;\; \xi^0 = 2c_1x_0^2 + (2c_2 + c_4)x_0 + c_5,\\
&d_a = l_a x_0 + k_a, \; NC_{in} = 0, \; Nl_n = 0, \; Nk_n = 0,\\
&c_1(n + N - \tfrac{2}{m}) = 0, \; \varphi = \tfrac{2}{m}(-2c_1x_0 - c_2 - c_4), \; \dot{\gamma} = 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Розв'язок (3.21) залежить від значення сталої N.

При $N = 0$ з (3.21) одержуємо:

$$c_1(n - \frac{2}{m}) = 0, \;\; \gamma = c_6. \tag{3.22}$$

Рівняння (3.22) задає два випадки:

1. Коли $c_1 = 0$, тоді підставивши функції (3.16), (3.21), (3.22) в (3.15), отримаємо координати інфінітезимального оператора, що задають алгебру A_2 в теоремі 3.1;

2. При $n = \frac{2}{m}$ функції (3.16), (3.21), (3.22) в (3.15) задають алгебру A_3 в теоремі 3.1.

При $N \neq 0$ з (3.21) отримаємо:

$$C_{in} = 0, \;\; l_n = k_n = 0, \; \gamma = c_6, \; c_1(n + N - \tfrac{2}{m}) = 0. \tag{3.23}$$

Рівняння (3.23) задає два випадки:

1. Коли $c_1 = 0$, тоді підставивши (3.16), (3.21), (3.23) в (3.15), отримаємо ξ^0, ξ^1, η^1, η^2, η^0, що задають алгебру A_2 в теоремі 3.2;

2. При $n+N=\frac{2}{m}$ функції (3.16), (3.21), (3.23) в (3.15) задають алгебру A_3 в теоремі 3.2.

Теореми (3.1), (3.2) доведено.

Зауваження. *Із симетрійних властивостей системи (3.11) випливає, що у випадку, коли дана система має вигляд:*

$$\begin{aligned}
&u_0+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}u)^2=\lambda\rho^{\frac{2}{n}},\\
&v_0+\vec{\nabla}u\vec{\nabla}v=0,\\
&\rho_0+\vec{\nabla}u\vec{\nabla}\rho+\rho\triangle u=0,
\end{aligned}\tag{3.24}$$

вона є інваріантною відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,n)$.

Із симетрійних властивостей системи (3.10) випливає, що у випадку, коли ця система має вигляд:

$$\begin{aligned}
&u_0+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}u)^2=\lambda\rho^{m},\ \ \lambda,m=\text{ const},\\
&v_0+\vec{\nabla}u\vec{\nabla}v=0,\\
&\rho_0+\vec{\nabla}u\vec{\nabla}\rho+\rho(\triangle u+\tfrac{N}{x_n}u_n)=0,\ \ N=\tfrac{2}{m}-n,
\end{aligned}\tag{3.25}$$

вона є інваріантною відносно узагальненої алгебри Галілея при довільному степені m, але її алгеброю інваріантності є узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1,n-1)$.

Адіабатичний рух нев'язкої стисливої рідини при наявності масових сил.

Система рівнянь, яка описує адіабатичний рух нев'язкої стисливої рідини з осьовою симетрією при наявності масових сил аналогічно, як в попередньому пункті, зводиться до наступної системи:

$$\begin{aligned}
&u_0+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}u)^2=F(\rho),\\
&v_0+\vec{\nabla}u\vec{\nabla}v=0,\\
&\rho_0+\vec{\nabla}u\vec{\nabla}\rho+\rho(\triangle u+\tfrac{N}{x_n}u_n)=G(\rho),
\end{aligned}\tag{3.26}$$

де F, $G \neq 0$ — довільні гладкі функції, N — довільна стала.

Прокласифікуємо симетрійні властивості системи (3.26) в залежності від вигляду функцій F та G. Справедливі наступні твердження.

Теорема 3.3. *Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь (3.26) при умові $N = 0$ є алгебра:*

1. $A = \langle \partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu},\ \partial_u = \dfrac{\partial}{\partial u},\ J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a,\ Q_1 = \psi\partial_v,$
$G_a = x_0\partial_a + x_a\partial_u\rangle,\quad$ *де* $\mu = \overline{0,n},\quad a = \overline{1,n},\quad b = \overline{1,n},$
якщо $F(\rho)$, $G(\rho)$ *— довільні гладкі функції;*

2. $A_1 = \langle A,\quad D_1 = x_a\partial_a + 2u\partial_u\rangle,$
якщо $F(\rho) = 0$, $G(\rho)$ *- довільна гладка функція;*

3. $A_2 = \langle A,\quad Q_2 = e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_1\partial_u + \lambda_3\rho\partial_\rho)\rangle,$
якщо $F(\rho) = \lambda_1 \ln\rho + \lambda_2$, $G = \lambda_3\rho\ln\rho + \lambda_4\rho$, $\lambda_1, \lambda_3 \neq 0$*;*

4. $A_3 = \langle A_1,\quad Q_3 = e^{\lambda_2 x_0}\varphi\rho\partial_\rho\rangle,$
якщо $F(\rho) = 0$, $G = \lambda_1\rho\ln\rho + \lambda_2\rho$, $\lambda_2 \neq 0$*;*

5. $A_4 = \langle A,\quad D_2 = x_0\partial_0 + x_a\partial_a + (u + \frac{\lambda_1 x_0}{1-m})\partial_u + \dfrac{1}{m-1}\rho\partial_\rho\rangle,$
якщо $F(\rho) = \lambda_1\ln\rho$, $G = \lambda_2\rho^m$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $m \neq 0; 1$*;*

6. $A_5 = \langle A,\quad D_3 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \frac{2}{m}\rho\partial_\rho\rangle,$
якщо $F(\rho) = \lambda_1\rho^m$, $G(\rho) = \lambda_2\rho^{m+1}$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $m \neq 0, \frac{2}{n}$*;*

7. $A_6 = \langle D_4 = (1-m_1)x_0\partial_0 + (1-m_1+\frac{m}{2})x_a\partial_a - (m_1-m-1)u\partial_u + \rho\partial_\rho,$
$A\rangle$, *якщо* $F(\rho) = \lambda_1\rho^m$, $G(\rho) = \lambda_2\rho^{m_1}$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$*;* $m, m_1 \neq 0, 1$*;*

8. $A_7 = \langle A_1,\quad D_5 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a + \frac{2}{1-m}\rho\partial_\rho\rangle,$
якщо $F(\rho) = 0$, $G(\rho) = \lambda\rho^m$, $\lambda \neq 0$, $m \neq 0, 1, \frac{2}{n} + 1$*;*

9. $A_8 = \langle A,\ D_6 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - n\rho\partial_\rho,\ \mathit{\Pi} = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a + \dfrac{\vec{x}^2}{2}\partial_u -$
$- nx_0\rho\partial_\rho\rangle$, *якщо* $F(\rho) = \lambda_1\rho^{\frac{2}{n}}$, $G(\rho) = \lambda_2\rho^{\frac{2}{n}+1}$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$*;*

10. $A_9 = \langle A_1,\ D_6,\ \Pi\rangle$, *якщо* $F(\rho) = 0$, $G(\rho) = \lambda\rho^{\frac{2}{n}+1}$, $\lambda \neq 0$,

де m, m_1, λ, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 *— довільні сталі, у випадках 1 та 4* $\psi = \psi(v)$ *— довільна гладка функція.*

Теорема 3.4. *Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь (3.26) при* $N \neq 0$ *є алгебра:*

1. $A = \langle \partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha},\quad \partial_u = \dfrac{\partial}{\partial u},\quad J_{ij} = x_i\partial_j - x_j\partial_i \quad G_i = x_0\partial_i + x_i\partial_u,$
   $Q_1 = \psi\partial_v\rangle$, *де* $\alpha = \overline{0, n-1}$, $\quad i = \overline{1, n-1}$, $\quad j = \overline{1, n-1}$,
   якщо $F(\rho)$, $G(\rho)$ *— довільні гладкі функції;*

2. $A_1 = \langle A,\quad D_1 = x_i\partial_i + x_n\partial_n + 2u\partial_u\rangle$,
   якщо $F(\rho) = 0$, $G(\rho)$ *— довільна гладка функція;*

3. $A_2 = \langle A,\quad Q_2 = e^{\lambda_3 x_0}(\lambda_1\partial_u + \lambda_3\rho\partial_\rho)\rangle$,
   якщо $F(\rho) = \lambda_1 \ln\rho + \lambda_2$, $G = \lambda_3\rho\ln\rho + \lambda_4\rho$, $\lambda_1, \lambda_3 \neq 0$;

4. $A_3 = \langle A_1,\quad Q_3 = e^{\lambda_2 x_0}\varphi\rho\partial_\rho\rangle$,
   якщо $F(\rho) = 0$, $G = \lambda_1\rho\ln\rho + \lambda_2\rho$, $\lambda_2 \neq 0$;

5. $A_4 = \langle A,\quad D_2 = x_0\partial_0 + x_i\partial_i + x_n\partial_n + (u + \frac{\lambda_1 x_0}{1-m})\partial_u + \dfrac{1}{m-1}\rho\partial_\rho\rangle$,
   якщо $F(\rho) = \lambda_1\ln\rho$, $G = \lambda_2\rho^m$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $m \neq 0, 1$;

6. $A_5 = \langle A,\quad D_3 = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + x_n\partial_n - \frac{2}{m}\rho\partial_\rho\rangle$,
   якщо $F(\rho) = \lambda_1\rho^m$, $G(\rho) = \lambda_2\rho^{m+1}$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $m \neq 0, \frac{2}{n}$;

7. $A_6 = \langle A,\quad D_4 = (1 - m_1)x_0\partial_0 + (1 - m_1 + \frac{m}{2})(x_i\partial_i + x_n\partial_n) -$
   $- (m_1 - m - 1)u\partial_u + \rho\partial_\rho\rangle$,
   якщо $F(\rho) = \lambda_1\rho^m$, $G(\rho) = \lambda_2\rho^{m_1}$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$; $m, m_1 \neq 0, 1$;

8. $A_7 = \langle A_1,\quad D_5 = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + x_n\partial_n + \frac{2}{1-m}\rho\partial_\rho\rangle$,
   якщо $F(\rho) = 0$, $G(\rho) = \lambda\rho^m$, $\lambda \neq 0$, $m \neq 0, 1, \frac{2}{n+N} + 1$;

9. $A_8 = \langle A, \quad D_6 = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + x_n\partial_n - (n+N)\rho\partial_\rho,$

$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0(x_a\partial_a + x_n\partial_n) + \frac{\vec{x}^2}{2}\partial_u - (n+N)x_0\rho\partial_\rho\rangle,$

якщо $F(\rho) = \lambda_1\rho^m$, $G(\rho) = \lambda_2\rho^{m+1}$, $N = \frac{2}{m} - n$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$;

10. $A_9 = \langle A_1,\ D_6,\ \Pi\rangle,$

якщо $F(\rho) = 0$, $G(\rho) = \lambda\rho^{m+1}$, $N = \frac{2}{m} - n$, $\lambda \neq 0$,

де m, m_1, λ, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 *— довільні сталі, у випадках 1 та 4* $\psi = \psi(v)$ *— довільна гладка функція.*

Доведення теорем 3.3 та 3.4 проведемо одночасно. Система визначальних рівнянь для системи (3.26) буде складатися з рівнянь (3.12), (3.13) та рівнянь:

$$\begin{aligned} &\eta_0^1 + (\eta_u^1 - \xi_0^0)F = \eta^0\dot{F}, \\ &\eta_0^0 + \eta_u^0 G + \rho(\triangle\eta^1 + \tfrac{N}{x_n}\eta_n^1) + (\eta_u^1 + \tfrac{\eta^0}{\rho} - 2\xi_1^1)G = \eta^0\dot{G}. \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Як показано в доведенні теорем 3.1 та 3.2, розв'язком рівнянь (3.12) та (3.13) є функції:

$$\begin{aligned} &\xi^0 = 2c_1x_0^2 + (2c_2 + c_4)x_0 + c_5, \\ &\xi^a = (2c_1x_0 + c_2)x_a + C_{ab}x_b + l_ax_0 + k_a,\ C_{ab} + C_{ba} = 0, \\ &\eta^1 = -c_4u + c_1\vec{x}^2 + l_ax_a + \gamma(x_0), \\ &\eta^2 = \eta^2(v), \\ &\eta^0 = [\tfrac{N}{x_n}C_{in}x_i - \tfrac{N}{x_n}d_n + \varphi(x_0, v)]\rho, \end{aligned} \qquad (3.28)$$

де c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, $C_{ab}, (a \neq b)$, l_a, k_a — довільні сталі, γ, η^2 φ — довільні функції своїх аргументів.

Якщо підставити (3.28) в рівняння (3.27), то отримаємо умови:

$$
\begin{aligned}
& Nl_n\dot{F} = 0, \ \ Nk_n\dot{F} = 0, \\
& \varphi\rho\dot{F} = -2(2c_1x_0 + c_2 + c_4)F + \dot{\gamma}, \\
& NC_{in}(G - \rho\dot{G}) = 0, \\
& Nl_n(G - \rho\dot{G}) = 0, \ \ Nk_n(G - \rho\dot{G}) = 0, \\
& \varphi'_{x_0}\rho + 2(n+N)c_1\rho + (-4c_1x_0 - 2c_2 - c_4 + \varphi)G = \varphi\rho\dot{G}.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Друге рівняння (3.29) досліджено в доведенні теорем 3.1, 3.2, де показано, що симетрія початкової системи суттєво відрізняється тільки коли:

1. F — довільна функція;
2. $F = \lambda \ln \rho, \quad \lambda = \mathrm{const}, \quad \lambda \neq 0$;
3. $F = \lambda\rho^m, \quad \lambda, m = \mathrm{const}, \quad \lambda, m \neq 0$;
4. $F = 0$.

Розглянемо тільки випадки 1 та 3. Доведення випадків 2 та 4 проводиться аналогічно.

Нехай F — довільна функція. Тоді (3.29) задають умови:

$$
\begin{aligned}
& Nl_n = Nk_n = \varphi = c_1 = c_2 + c_4 = \dot{\gamma} = 0, \\
& NC_{in}(G - \rho\dot{G}) = 0, \ \ c_2G = 0.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Очевидно, що розв'язок (3.30) залежить від значення сталої N.

Нехай $N = 0$. Так як випадок $G = 0$ розглянуто в теоремах 3.1 та 3.2, то надалі вважатимемо, що $G \neq 0$. Тоді з (3.30) одержуємо:

$$
c_1 = c_2 = c_4 = \varphi = 0, \ \ \gamma = c_6. \tag{3.31}
$$

Підставивши $N = 0$ та (3.31) в (3.28), отримаємо координати інфінітезимального оператора ξ^0, ξ^1, η^1, η^2, η^0, що задають алгебру A в теоремі 3.3.

Коли $N \neq 0$, то з (3.30) випливає, що:

$$\begin{aligned} & l_n = k_n = \varphi = c_1 = c_2 = 0, \gamma = c_6, \\ & C_{in}(G - \rho\dot{G}) = 0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

При розв'язанні другого рівняння (3.32) виникають два випадки:

1. $C_{in} = 0$, , а функція G є довільною. Тоді використавши (3.32), отримаємо ξ^0, ξ^1, η^1, η^2, η^0, що задають алгебру A в теоремі 3.4.

2. $G - \rho\dot{G} = 0$. Тоді $G = \lambda\rho$. В цьому випадку заміною $\rho = e^{\lambda x_0}\rho$, система (3.26) зводиться до системи (3.10), симетрійні властивості якої досліджені в теоремі 3.2.

Нехай $F = \lambda\rho^m$, $\lambda, m \neq 0$. Тоді рівняння (3.29) задають такі умови:

$$\begin{aligned} & Nl_n = Nk_n = \dot{\gamma} = 0, \ NC_{in}(G - \rho\dot{G}) = 0, \\ & Nl_n(G - \rho\dot{G}) = 0, \ Nk_n(G - \rho\dot{G}) = 0, \\ & \varphi = \tfrac{2}{m}(-2c_1x_0 - c_2 - c_4), \\ & c_1[\tfrac{1}{m}\rho\dot{G} - (\tfrac{1}{m} + 1)G] = 0, \\ & \tfrac{2}{m}(c_2 + c_4)\rho\dot{G} = [(\tfrac{2}{m} + 2)c_2 + (\tfrac{2}{m} + 1)c_4]G - 2c_1(n + N - \tfrac{2}{m})\rho. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Дослідимо структуру останнього рівняння (3.33) відносно функції G та змінної ρ. У залежності від співвідношень між коефіцієнтами k_1, k_2, k_3 структурного рівняння

$$k_1\rho\dot{G} = k_2G + k_3\rho,$$

отримуємо три нееквівалентні випадки:

1. G — довільна функція;

2. $G = \lambda_1\rho\ln\rho + \lambda_2\rho, \quad \lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const}, \ \lambda_1 \neq 0;$

3. $G = \lambda_1\rho^{m_1} + \lambda_2\rho$, $\lambda_1, \lambda_2, m_1 = \mathrm{const}$, $\lambda_1 \neq 0$, $m \neq 0, 1$.

Розглянемо кожен з отриманих випадків.

Коли G — довільна функція, з (3.33) отримуємо наступні умови:
1. $N=0,\ c_1=c_2=c_4=0,\ \gamma=c_6,\ \varphi=0$;
2. $N\neq 0, l_n=k_n=0,\ C_{in}=0, c_1=c_2=c_4=0,\ \gamma=c_6,\ \varphi=0$; після підстановки яких в (3.28), отримаємо координати інфінітезимального оператора ξ^0, ξ^1, η^1, η^2, η^0, що задають алгебри A в теоремах 3.3 та 3.4 відповідно.

Нехай $G=\lambda_1\rho\ln\rho+\lambda_2\rho$, $\lambda_1\neq 0$. Коли $\lambda_1=0$ система (3.26) заміною $\rho=e^{\lambda_1 x_0}\rho$ зводиться до системи (3.10), симетрійні властивості якої досліджені в теоремах 3.1, 3.2.

Після підстановки функції G в рівняння (3.33) отримуємо:

$$Nl_n=Nk_n=0,\ NC_{in}=0,\ \gamma=c_6,\ c_1=c_4=c_2=0. \tag{3.34}$$

Розв'язуючи (3.34) в залежності від значення N, отримуємо два випадки:
1. $c_1=c_2=c_4=0, \gamma=c_6, \varphi=0$, коли $N=0$;
2. $c_1=c_2=c_4=l_n=k_n=\varphi=0$,$\gamma=c_6$, $C_{in}=0$, коли $N\neq 0$.

Після підстановки яких в (3.28), отримаємо координати інфінітезимального оператора ξ^0, ξ^1, η^1, η^2, η^0, що задають алгебри A в теоремах 3.3 та 3.4 відповідно.

Розглянемо випадок, коли $G=\lambda_1\rho^{m_1}+\lambda_2\rho$, $\lambda_1\neq 0$, $m_1\neq 0,1$. При $\lambda_1=0$, або $m_1=0$, або $m_1=1$ система (3.26) локально еквівалентна системі (3.10), симетрійні властивості якої досліджені в теоремах 3.1, 3.2.

Підставивши функцію G в рівняння (3.33) та розщепивши отримане рівняння по степеням ρ, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&Nl_n = Nk_n = 0,\ NC_{in}(1-m_1) = 0,\ \gamma = c_6,\\
&Nl_n(1-m_1) = 0,\ \ Nk_n(1-m_1) = 0,\\
&\varphi = \tfrac{2}{m}(-2c_1x_0 - c_2 - c_4),\\
&c_1(m_1 - m - 1) = 0,\ \lambda_2 = 0,\\
&2(m_1 - m - 1)c_2 + (2m_1 - m - 2)c_4 = 0,\\
&c_1(n + N - \tfrac{2}{m}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

При розв'язуванні (3.35), виникають два різні випадки:

$$\begin{aligned}
&c_1 = 0,\ \ Nl_n = Nk_n = 0,\ NC_{in}(1-m_1) = 0,\ \gamma = c_6,\\
&Nl_n(1-m_1) = 0,\ \ Nk_n(1-m_1) = 0,\\
&\varphi = \tfrac{2}{m}(-c_2 - c_4),\ \lambda_2 = 0,\\
&2(m_1 - m - 1)c_2 + (2m_1 - m - 2)c_4 = 0;
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
&m = \tfrac{2}{n+N},\ \ m_1 = m + 1,\ \lambda_2 = 0,\ c_4 = 0,\\
&Nl_n = Nk_n = 0,\ NC_{in} = 0,\ \gamma = c_6,\\
&Nl_n = 0,\ \ Nk_n = 0,\ \varphi = (n+N)(-2c_1x_0 - c_2 - c_4).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

При розв'язанні рівнянь (3.36) та (3.37) в залежності від значень N, m_1 та m, виникають ще три розгалудження:

1. Якщо $m_1 = m + 1$, тоді

$$\begin{aligned}
&c_1 = 0,\ \gamma = c_6,\ \varphi = \tfrac{2}{m}(-c_2 - c_4),\ \lambda_2 = 0,\\
&c_4 = 0,\ \text{коли}\ N = 0;
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
&c_1 = 0,\ \ l_n = k_n = 0,\ C_{in} = 0,\ \gamma = c_6,\\
&\varphi = \tfrac{2}{m}(-c_2 - c_4),\ \lambda_2 = 0,\ \ c_4 = 0, \text{коли}\ \ N \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Коли підставити (3.38) та (3.39) в (3.28), отримаємо координати інфінітезимального оператора, що задають алгебри A_5 в теоремах 3.3 та 3.4 відповідно;

2. При $m_1 \neq m+1$ маємо

$$c_1 = 0,\ \gamma = c_6,\ \varphi = \frac{2}{m}(-c_2 - c_4),\ \lambda_2 = 0,$$
$$c_2 = \frac{m+2-2m_1}{2(m_1-m-1)}c_4,\ \text{коли}\ N = 0; \tag{3.40}$$

$$c_1 = 0,\ \ l_n = k_n = 0,\ C_{in} = 0,\ \gamma = c_6,$$
$$\varphi = \frac{2}{m}(-c_2 - c_4),\ \lambda_2 = 0, \tag{3.41}$$
$$c_2 = \frac{2m_1 - m - 2}{2(m_1-m-1)}c_4 = 0, \text{коли}\ \ N \neq 0.$$

Тоді після підстановки (3.40) та (3.41) в (3.28) отримаємо координати інфінітезимального оператора, що задають алгебри A_6 в теоремах 3.3 та 3.4 відповідно;

3. При $m = \dfrac{2}{n+N}$, $m_1 = m+1$ одержуємо

$$\lambda_2 = 0,\ c_4 = 0,\ \gamma = c_6,$$
$$\varphi = n(-2c_1x_0 - c_2 - c_4),\ \text{коли}\ \ N = 0; \tag{3.42}$$

$$\lambda_2 = 0,\ c_4 = 0,\ l_n = k_n = 0,\ C_{in} = 0,\ \gamma = c_6,$$
$$\varphi = (n+N)(-2c_1x_0 - c_2 - c_4), \text{коли}\ \ N \neq 0. \tag{3.43}$$

Підставивши (3.42) та (3.43) в (3.28), отримаємо координати інфінітезимального оператора, що задають алгебри A_8 в теоремах 3.3 та 3.4 відповідно. Теореми 3.3, 3.4 доведено.

Зауваження. *Система рівнянь (3.26) при умові $N = 0$ інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, n)$, якщо вона має вигляд:*

$$u_0 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}u)^2 = \lambda_1\rho^{\frac{2}{n}},$$
$$v_0 + \vec{\nabla}u\vec{\nabla}v = 0, \tag{3.44}$$
$$\rho_0 + \vec{\nabla}u\vec{\nabla}\rho + \rho\triangle u = \lambda_2\rho^{\frac{2}{n}+1},$$

де λ_1, λ_2 — довільні сталі.

У випадку $N \neq 0$ система (3.26) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, n-1)$ при довільній степеневій нелінійності:

$$
\begin{aligned}
&u_0 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} u)^2 = \lambda_1 \rho^m,\\
&v_0 + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v = 0,\\
&\rho_0 + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} \rho + \rho(\triangle u + \frac{N}{x_n} u_n) = \lambda_2 \rho^{m+1},
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

де $\lambda_1, \lambda_2, m, N$ — довільні сталі, де $N = \dfrac{2}{m} - n$, але розмірність даної алгебри є на одиницю меншою ніж розмірність алгебри інваріантності системи (3.44).

3.2. Системи еволюційних рівнянь третього порядку інваріантні відносно алгебр Галілея та її розширень

Поширення хвилі у середовищі з дисперсією описується рівнянням Кортевега–де Фріза

$$
u_0 + \lambda u u_1 + u_{111} = 0. \tag{3.46}
$$

Відомо (див.,наприклад, [17]), що максимальною в сенсі С. Лі алгеброю інваріантності рівняння (3.46) є розширена алгебра Галілея $AG_1(1,1)$ з базисними елементами:

$$
\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0 \partial_1 + \frac{1}{\lambda}\partial_u, \quad D = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - 2u\partial_u.
$$

Алгебра інваріантності багатьох основних класичних рівнянь параболічного типу, таких як рівняння теплопровідності, Шредінгера, Нав'є–Стокса та інших, крім алгебри Галілея $AG_1(1,1)$, містить ще й оператор проективних перетворень:

$$
\Pi = {x_0}^2\partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 + \eta(x, u)\partial_u,
$$

де $\eta(x,u)$ для кожного з цих рівнянь має спеціальний вигляд.

У даному розділі розв'язана задача з систем, що узагальнюють рівняння (3.46) (і багато інших відомих рівнянь) на випадок системи двох рівнянь відносно двох невідомих функцій, вибрати ті, що є інваріантними відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1) = \langle AG_1(1,1),\ \Pi\rangle$. Розглядаються квазілінійні системи еволюційних рівнянь третього порядку вигляду

$$U_0 + F(U)U_1 + KU_{11} + \Lambda U_{111} = 0, \tag{3.47}$$

де $U \in \mathbb{R}_2$, $F(U)$ — функціональна матриця, K, Λ — сталі матриці розмірності 2×2. Системи (3.47) при конкретних нелінійностях знаходять широке застосування в теорії густих частотних полів, у загальних розтягах і деформаціях скінченних середовищ, подібних до розтягів Хабла Всесвіту в астрофізиці [113], в явищах турбулентної дифузії [87], в процесах, пов'язаних з рідинами Ван–дер–Ваальса [86]. При деяких конкретних виглядах систем рівнянь (3.47) досліджені їх симетрійні властивості і методами ліївської та умовної симетрії знайдені деякі їх точні розв'язки в роботах [42, 71, 108, 111].

Запропоновані галілей-інваріантні системи третього порядку в силу своїх широких симетрійних властивостей претендують на опис фізичних процесів, що задовольняють принцип відносності Галілея.

Розглянемо систему

$$U_0 + F(U)U_1 + KU_{11} + \Lambda U_{111} = 0, \tag{3.48}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} F^{11} & F^{12} \\ F^{21} & F^{22} \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$,
$F^{ab} = F^{ab}(u^1,u^2)$ — довільні гладкі функції, $u^a = u^a(x_0,x_1)$, k_{ab},

λ_{ab} — довільні сталі, $(a, b = 1, 2)$.

Система (3.48) при конкретних нелінійностях знаходить широке застосування в теорії густих частотних полів, у загальних розтягах і деформаціях скінченних середовищ, подібних до розтягів Хабла Всесвіту в астрофізиці [113], в явищах турбулентної дифузії [87], в процесах, пов'язаних з рідинами Ван–дер–Ваальса [86]. При конкретних виглядах системи рівнянь (3.48) досліджені її симетрійні властивості і методами ліївської та умовної симетрії знайдені деякі її точні розв'язки в роботах [42, 71, 108, 111].

Розглянемо задачу знайти такі функції F^{ab}, при яких система (3.48) інваріантна відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень. Тобто, серед всеможливих допустимих математичних моделей вигляду (3.48) відберемо лише ті, що задовольняють принцип відносності Галілея.

Дослідженню поставленої задачі і присвячений цей підрозділ.

Інваріантність відносно алгебри Галілея.

Спочатку розглянемо, при яких функціях F^{ab} система (3.48) інваріантна відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$, оператори якої мають вигляд

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, G = x_0\partial_1 + Q, \tag{3.49}$$

де $Q = (m_{ab}u^b + n_a)\partial_{u^a}$, m_{ab}, n_a — довільні сталі, $a, b = 1, 2$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.5. *Система рівнянь (3.48) інваріантна відносно алгебри Галілея (3.49) тоді і тільки тоді, коли:*

$$\begin{aligned} &F^{11} = u^1 + f^{11}(u^2), \quad F^{12} = f^{12}(u^2), \\ &F^{21} = f^{21}(u^2), \qquad\quad F^{22} = u^1 + f^{22}(u^2), \end{aligned} \tag{3.50}$$

де $G = G_1 = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}$;

$$
\begin{gathered}
F^{11} = \frac{1 + f^{21}(u^2)}{u^2}u^1 + u^2 f^{11}(u^2),\\
F^{12} = -\frac{(u^1)^2}{(u^2)^2} f^{21}(u^2) + (f^{22}(u^2) - f^{11}(u^2))u^1 + f^{12}(u^2),\\
F^{21} = f^{21}(u^2), \qquad F^{22} = \frac{1 - f^{21}(u^2)}{u^2}u^1 + u^2 f^{22}(u^2),\\
\lambda_{11} = \lambda_{22}, \lambda_{21} = k_{21} = 0, k_{11} = k_{22},
\end{gathered} \tag{3.51}
$$

де $G = G_2 = x_0\partial_1 + u^2\partial_{u^1}$;

$$
\begin{gathered}
F^{11} = [1 + f^{21}(\omega)]u^2 + f^{11}(\omega),\\
F^{12} = -(u^2)^2 f^{21}(\omega) + [f^{22}(\omega) - f^{11}(\omega)]u^2 + f^{12}(\omega),\\
F^{21} = f^{21}(\omega), \qquad F^{22} = [1 - f^{21}(\omega)]u^2 + f^{22}(\omega),\\
\lambda_{11} = \lambda_{22}, \lambda_{21} = k_{21} = 0, k_{11} = k_{22}, \ \ \omega = 2u^1 - (u^2)^2,
\end{gathered} \tag{3.52}
$$

де $G = G_3 = x_0\partial_1 + u^2\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$;

$$
\begin{gathered}
F^{11} = u^1 + f^{11}(\omega), \qquad F^{12} = e^{-u^2} f^{12}(\omega),\\
F^{21} = e^{u^2} f^{21}(\omega), \qquad F^{22} = u^1 + f^{22}(\omega),\\
\lambda_{12} = \lambda_{21} = k_{12} = k_{21} = 0, \ \ \omega = u^1 - \ln u^2,
\end{gathered} \tag{3.53}
$$

де $G = G_4 = x_0\partial_1 + \partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$;

$$
\begin{gathered}
F^{11} = \ln u^1 + f^{11}(\omega), \ \ F^{12} = f^{12}(\omega),\\
F^{21} = f^{21}(\omega), \qquad F^{22} = \ln u^1 + f^{22}(\omega), \ \ \omega = \frac{u^1}{u^2},
\end{gathered} \tag{3.54}
$$

де $G = G_5 = x_0\partial_1 + u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$;

$$
\begin{gathered}
F^{11} = \ln u^1 + f^{11}(\omega), \qquad F^{12} = (u^1)^{1-k} f^{12}(\omega),\\
F^{21} = (u^1)^{k-1} f^{21}(\omega), \qquad F^{22} = \ln u^1 + f^{22}(\omega),\\
\lambda_{12} = \lambda_{21} = k_{12} = k_{21} = 0, \ \ \omega = \frac{(u^1)^k}{u^2}, \ k \neq 1,
\end{gathered} \tag{3.55}
$$

де $G = G_6 = x_0\partial_1 + u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}$*;*

$$\begin{aligned}
&F^{11} = [1 - f^{12}(\omega)]\ln u^1 + f^{11}(\omega), \quad F^{12} = f^{12}(\omega),\\
&F^{21} = -\ln^2 u^1 f^{12}(\omega) + [f^{11}(\omega) - f^{22}(\omega)]\ln u^1 + f^{21}(\omega),\\
&F^{22} = [1 + f^{12}(\omega)]\ln u^1 + f^{22}(\omega),\\
&\lambda_{12} = k_{12} = 0, \lambda_{11} = \lambda_{22}, k_{11} = k_{22}, \;\; \omega = \frac{u^2}{u^1} - \ln u^1,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

де $G = G_7 = x_0\partial_1 + u^1\partial_{u^1} + (u^1 + u^2)\partial_{u^2}$*;*

$$\begin{aligned}
&F^{11} = \operatorname{arctg}\frac{u^1}{u^2} + f^{11}(\omega) + \frac{(u^2)^2 - (u^1)^2}{\overrightarrow{u}^2}f^{12}(\omega) + \frac{2u^1u^2}{\overrightarrow{u}^2}f^{21},\\
&F^{12} = f^{22}(\omega) + \frac{(u^2)^2 - (u^1)^2}{\overrightarrow{u}^2}f^{21}(\omega) - \frac{2u^1u^2}{\overrightarrow{u}^2}f^{12}(\omega),\\
&F^{21} = -f^{22}(\omega) + \frac{(u^2)^2 - (u^1)^2}{\overrightarrow{u}^2}f^{12}(\omega) + \frac{2u^1u^2}{\overrightarrow{u}^2}f^{21}(\omega),\\
&F^{22} = \operatorname{arctg}\frac{u^1}{u^2} + f^{11}(\omega) + \frac{(u^2)^2 - (u^1)^2}{\overrightarrow{u}^2}f^{12}(\omega) - \frac{2u^1u^2}{\overrightarrow{u}^2}f^{21},
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\lambda_{12} + \lambda_{21} = k_{12} + k_{21} = 0, \lambda_{11} = \lambda_{22}, k_{11} = k_{22},$$
$$\omega = 2k\operatorname{arctg}\frac{u^1}{u^2} - \ln\overrightarrow{u}^2,$$

де $G = G_8 = x_0\partial_1 + (ku^1 + u^2)\partial_{u^1} + (ku^1 - u^2)\partial_{u^2}$*.*

У формулах (3.50)–(3.57) f^{ab}, $a, b = 1, 2$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, k — довільна стала.

Доведення. З умови інваріантності отримуємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат інфінітезимального оператора та функцій F^{ab}:

1. $\xi^0 = \xi^0(x_0)$, $\xi^1_{11} = 0$, $\xi^1_{u^a} = 0$, $\lambda_{ab}\eta^b_{u^cu^d} = 0$, $\quad k_{ab}\eta^b_{u^cu^d} = 0$,
2. $\lambda_{21}\eta^1_{u^2} - \lambda_{12}\eta^2_{u^1} + \lambda_{22}(\xi^0_0 - 3\xi^1_1) = 0$,
3. $-\lambda_{21}\eta^1_{u^2} + \lambda_{12}\eta^2_{u^1} + \lambda_{11}(\xi^0_0 - 3\xi^1_1) = 0$,
4. $(\lambda_{11} - \lambda_{22})\eta^1_{u^2} + \lambda_{12}(\xi^0_0 - 3\xi^1_1 - \eta^1_{u^1} + \eta^2_{u^2}) = 0$,

5. $(-\lambda_{11}+\lambda_{22})\eta^2_{u^1}+\lambda_{21}(\xi^0_0-3\xi^1_1+\eta^1_{u^1}-\eta^2_{u^2})=0,$

6. $k_{21}\eta^1_{u^2}-k_{12}\eta^2_{u^1}+k_{22}(\xi^0_0-2\xi^1_1)+3\lambda_{2c}\eta^c_{1u^2}=0,$

7. $-k_{21}\eta^1_{u^2}+k_{12}\eta^2_{u^1}+k_{11}(\xi^0_0-2\xi^1_1)+3\lambda_{1c}\eta^c_{1u^1}=0,$

8. $(k_{11}-k_{22})\eta^1_{u^2}+k_{12}(\xi^0_0-2\xi^1_1-\eta^1_{u^1}+\eta^2_{u^2})+3\lambda_{1c}\eta^c_{1u^2}=0,$

9. $(-k_{11}+k_{22})\eta^2_{u^1}+k_{21}(\xi^0_0-2\xi^1_1+\eta^1_{u^1}-\eta^2_{u^2})+3\lambda_{2c}\eta^c_{1u^1}=0,$

10. $\eta^dF^{ac}_d+(\xi^0_0-\xi^1_1)F^{ac}+\eta^b_{u^c}F^{ab}-\eta^a_{u^b}F^{bc}=\delta_{ac}\xi^1_0-3\lambda_{ab}\eta^b_{11u^c}-2k_{ab}\eta^b_{1u^c},$

11. $\eta^a_0+F^{ab}\eta^b_1+\lambda_{ab}\eta^b_{111}+k_{ab}\eta^b_{11}=0.$

Координати ξ^μ, η^a інфінітезимального оператора алгебри $AG(1.1)$ мають вигляд:

$$\xi^0=d_0,\quad \xi^1=gx_0+d_1,\quad \eta^a=m_{ab}u^b+n_a, \tag{3.58}$$

де d_0, d_1, g, m_{ab}, n_a — довільні сталі.

У залежності від співвідношень між коефіцієнтами m_{ab}, n_a одержуємо шість нееквівалентних представлень виразу Q (див. підрозділ 2.5. після формули (2.75)). Підставивши функції (3.58) в систему визначальних рівнянь для кожного з представлень Q_i $(i=\overline{1,6})$, отримаємо системи рівнянь для визначення функцій F^{ab}:

1. $F^{ac}_d\eta^d=\delta_{ac};$

2. $u^2F^{11}_1+kF^{11}_2-F^{21}=1,\quad u^2F^{12}_1+kF^{12}_2+(F^{11}-F^{22})=0,$
   $u^2F^{22}_1+kF^{22}_2+F^{21}=1,\quad u^2F^{21}_1+kF^{21}_2=0,\quad k=0,1;$

3. $F^{11}_1+u^2F^{11}_2=1,\quad F^{12}_1+u^2F^{12}_2+F^{12}=0,$
   $F^{22}_1+u^2F^{22}_2=1,\quad F^{21}_1+u^2F^{21}_2-F^{21}=0;$

4. а) $u^1F^{11}_1+u^2F^{11}_2=1,\ u^1F^{12}_1+u^2F^{12}_2=(\eta^1_{u^1}-\eta^2_{u^2})F^{12},$
   $u^1F^{22}_1+u^2F^{22}_2=1,\ u^1F^{21}_1+u^2F^{21}_2=(\eta^2_{u^2}-\eta^1_{u^1})F^{21},\quad k=1;$

b) $u^1F_1^{11} + ku^2F_2^{11} = 1,\ u^1F_1^{12} + ku^2F_2^{12} = (1-k)F^{12},$
$u^1F_1^{22} + ku^2F_2^{22} = 1,\ u^1F_1^{21} + ku^2F_2^{21} = (k-1)F^{21}, \quad k \neq 1;$

5. $u^1F_1^{11} + (u^1+u^2)F_2^{11} + F^{12} = 1, \quad u^1F_1^{22} + (u^1+u^2)F_2^{22} - F^{12} = 1,$
$u^1F_1^{12} + (u^1+u^2)F_2^{12} = 0, \quad u^1F_1^{21} + (u^1+u^2)F_2^{21} + (F^{22} - F^{11}) = 0;$

6. $(ku^1+u^2)F_1^{11} + (ku^2-u^1)F_2^{11} - (F^{12}+F^{21}) = 1,$
$(ku^1+u^2)F_1^{22} + (ku^2-u^1)F_2^{22} + (F^{12}+F^{21}) = 1,$
$(ku^1+u^2)F_1^{12} + (ku^2-u^1)F_2^{12} + F^{11} - F^{22} = 0,$
$(ku^1+u^2)F_1^{21} + (ku^2-u^1)F_2^{21} + F^{11} - F^{22} = 0, \quad k \neq 0.$

Розв'язками цих систем і будуть функції (3.50)–(3.57) відповідно.

Теорему 3.5 доведено.

Інваріантність відносно розширеної алгебри Галілея.

Доповнимо алгебру (3.49) оператором масштабних перетворень

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}. \tag{3.59}$$

При виконанні відповідних комутаційних співвідношень між операторами алгебри (3.49) та оператором (3.59), одержимо розширену алгебру Галілея $AG_1(1,1)$, де α_{ab}, β_a — деякі сталі, що підлягають визначенню. Дослідимо, при яких функціях F^{ab} система (3.48) є інваріантною відносно цієї алгебри.

Теорема 3.6. *Система (3.48) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна одній із наступних систем:*

$$\begin{aligned} &u_0^1 + u^1u_1^1 + k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0,\\ &u_0^2 + f^1(u^2)u_1^1 + u^1u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.60}$$

де $G = G_1,\ \ D = D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1}$*;*

$$\begin{aligned} &u_0^1 + (u^1 + C_{11}\sqrt{u^2})u_1^1 + C_{12}u_1^2 + k_{11}u_{11}^1 = 0,\\ &u_0^2 + C_{21}u^2u_1^1 + (u^1 + C_{22}\sqrt{u^2})u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 + \lambda_{21}u_{111}^1 = 0, \end{aligned} \tag{3.61}$$

де $G = G_1,\ \ D = D_2 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2}$*;*

$$\begin{aligned} &u_0^1 + (u^1 + C_{11}u^2)u_1^1 + C_{12}u^2u_1^2 + k_{1a}u_{11}^a = 0,\\ &u_0^2 + C_{21}u^2u_1^1 + (u^1 + C_{22}u^2)u_1^2 + k_{2a}u_{11}^a = 0, \end{aligned} \tag{3.62}$$

де $G = G_1,\ \ D = D_3 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$*;*

$$\begin{aligned} &u_0^1 + (u^1 + C_{11}\sqrt[k]{u^2})u_1^1 + C_{12}(u^2)^{\frac{2-k}{k}}u_1^2 + k_{11}u_{11}^1 = 0,\\ &u_0^2 + C_{21}u^2u_1^1 + (u^1 + C_{22}\sqrt[k]{u^2})u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.63}$$

де $G = G_1,\ \ D = D_4 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - ku^2\partial_{u^2}$*, де* $k \neq 0$*;*

$$\begin{aligned} &u_0^1 + [u^1 + C_{11}u^2 + (C_{21} - 1)u^2\ln u^2]u_1^1 +\\ &+[-C_{21}u^2\ln^2 u^2 + (C_{22} - C_{11})u^2\ln u^2 + C_{12}u^2]u_1^2 +\\ &+k_{1a}u_{11}^a = 0,\\ &u_0^2 + C_{21}u^2u_1^1 + [u^1 + C_{22}u^2 - (C_{21} + 1)u^2\ln u^2]u_1^2 +\\ &+k_{11}u_{11}^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.64}$$

де $G = G_1,\ \ D = D_5 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - (u^1 + u^2)\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$*;*

$$\begin{aligned} &u_0^1 + [u^1 + C_{11}e^{u^2}]u_1^1 + C_{12}e^{2u^2}u_1^2 + k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0,\\ &u_0^2 + C_{21}u_1^1 + [u^1 + C_{22}e^{u^2}]u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.65}$$

де $G = G_1,\ \ D = D_6 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - \partial_{u^2}$*;*

$$\begin{aligned} &u_0^1 + \left[\frac{u^1}{u^2} + C_{11}(u^2)^{-\frac{1}{m+1}}\right]u_1^1 + [(C_{22} - C_{11})u^1(u^2)^{-\frac{m+2}{m+1}} +\\ &+C_{12}(u^2)^{-\frac{2}{m+1}}]u_1^2 + k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0,\\ &u_0^2 + \left[\frac{u^1}{u^2} + C_{22}(u^2)^{-\frac{1}{m+1}}\right]u_1^2 + k_{11}u_{11}^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.66}$$

де $G = G_2$, $D = D_7 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + mu^1\partial_{u^1} + (m+1)u^2\partial_{u^2}$, $m \neq -1$;

$$
\begin{gathered}
u^1_0 + \left[\frac{1+C_{21}}{u^2}u^1 + \frac{C_{11}}{u^2} - \frac{m(1+C_{21})}{u^2}\ln u^2\right]u^1_1 + \\
+\left[-\frac{C_{21}}{(u^2)^2}(u^1)^2 + \frac{C_{22}-C_{11}}{(u^2)^2}u^1 + \frac{2mC_{21}}{(u^2)^2}u^1\ln u^2 + \right. \\
\left. + \frac{m(C_{11}-C_{22})}{(u^2)^2}\ln u^2 - \frac{m^2C_{21}}{(u^2)^2}\ln^2 u^2 + \frac{C_{12}}{(u^2)^2}\right]u^2_1 + \\
+k_{11}u^1_{11} + \lambda_{12}u^2_{111} = 0,
\end{gathered}
\tag{3.67}
$$

$$
u^2_0 + C_{21}u^1_1 + [\frac{1-C_{21}}{u^2}u^1 + \frac{C_{22}}{u^2} - \frac{m(1-C_{21})}{u^2}\ln u^2]u^2_1 + k_{11}u^2_{11} = 0,
$$

де $G = G_2$, $D = D_8 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + m\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$;

$$
\begin{gathered}
u^1_0 + [(1+C_{21})u^2 + C_{11}\sqrt{2u^1-(u^2)^2}]u^1_1 + [-C_{21}(u^2)^2 + \\
+C_{12}(2u^1-(u^2)^2) + (C_{22}-C_{11})u^2\sqrt{2u^1-(u^2)^2}]u^2_1 + \\
+k_{11}u^1_{11} + \lambda_{12}u^2_{111} = 0, \\
u^2_0 + C_{21}u^1_1 + [(1-C_{21})u^2 + C_{22}\sqrt{2u^1-(u^2)^2}]u^2_1 + \\
+k_{11}u^2_{11} = 0,
\end{gathered}
\tag{3.68}
$$

де $G = G_3$, $D = D_9 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - 2u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$.

У формулах (3.60)–(3.68) f^1 — довільна гладка функція, m, k, k_{ab}, λ_{ab}, C_{ab} — довільні сталі.

Доведення. Визначимо, коли система (3.48) буде інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$. Кожну з отриманих у теоремі 3.5 алгебр розширимо оператором дилатації (3.59).

I. Розглянемо алгебру $AG_1(1,1) = \langle\partial_0, \partial_1, G_1 = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, D\rangle$. З комутаційних співвідношень між операторами даної алгебри випливає, що існують три такі алгебри, які реалізуються нееквівалентними зображеннями оператора D:

1. $\langle\partial_0, \partial_1, G_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - ku^2\partial_{u^2}\rangle$;

2. $\langle \partial_0, \partial_1, G_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - (u^2 + u^1)\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2} \rangle$;

3. $\langle \partial_0, \partial_1, G_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \partial_{u^2} - u^1\partial_{u^1} \rangle$.

II. $AG_1(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G_2 = x_0\partial_1 + u^2\partial_{u^1}, D \rangle$. З комутаційних співвідношень між операторами цієї алгебри випливає, що існує лише дві алгебри, що реалізуються нееквівалентними представленнями оператора дилатації D:

1. $\langle \partial_0, \partial_1, G_2, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + mu^1\partial_{u^1} + (m+1)u^2\partial_{u^2} \rangle$;

2. $\langle \partial_0, \partial_1, G_2, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + m\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} \rangle$.

III. $AG_1(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G_3 = x_0\partial_1 + u^2\partial_{u^1} + \partial_{u^3}, D \rangle$. З комутаційних співвідношень між операторами даної алгебри випливає, що існує лише єдина алгебра, яка реалізується наступним представленням оператора дилатації D:

$$\langle \partial_0, \partial_1, G_3, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - 2u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2} \rangle.$$

IV. Так як оператори G_4–G_8 не комутують з оператором дилатації (3.59) ні при яких значеннях сталих α_{ab}, β_a, то алгебри $\langle \partial_0, \partial_1, G_i \rangle$, $i = \overline{4, 8}$ не можуть бути розширені до алгебри $AG_1(1,1)$.

Для кожного з отриманих зображень розширених алгебр Галілея знайдемо функції F^{ab}, при яких система (3.48) буде інваріантна відносно цих алгебр.

I.1. Підставивши координати інфінітезимального оператора:

$$\xi^0 = 2ax_0 + d_0, \xi^1 = gx_0 + ax_1 + d_1, \eta^1 = -au^1 + g, \eta^2 = -aku^2,$$

де d_0, d_1, g, a — довільні сталі, в систему визначальних рівнянь та врахувавши формули (3.50), отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{11} = \lambda_{22} = k\lambda_{12} = 0,\\
&(1-k)k_{12} = 0,\ (2-k)\lambda_{21} = 0,\ (1-k)k_{21} = 0,\\
&ku^2 \dot{f^{11}} = f^{11}, ku^2 \dot{f^{22}} = f^{22},\\
&ku^2 \dot{f^{12}} = (2-k)f^{12}, ku^2 \dot{f^{21}} = kf^{21}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

З вигляду системи (3.69) видно, що її розв'язок залежить від значень сталої k. Існує чотири нееквівалентні випадки:

$k = 0$, тоді розв'язок (3.69) задає систему (3.60);

$k = 1$, тоді розв'язок (3.69) задає систему (3.61);

$k = 2$, тоді розв'язок (3.69) задає систему (3.62);

$k \neq 0, 1, 2$, тоді розв'язок (3.69) задає систему (3.63).

I.2. Підставивши координати інфінітезимального оператора:

$\xi^0 = 2ax_0 + d_0, \xi^1 = gx_0 + ax_1 + d_1, \eta^1 = -a(u^2 + u^1) + g, \eta^2 = -au^2,$

в систему визначальних рівнянь, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = k_{21} = 0,\ k_{11} = k_{22},\\
&-u^2 \dot{f^{11}} + f^{11} + f^{21} - u^2 = 0,\ -u^2 \dot{f^{12}} + f^{12} - f^{11} + f^{22} = 0,\\
&-u^2 \dot{f^{22}} + f^{22} - f^{21} - u^2 = 0, -u^2 \dot{f^{21}} + f^{21} = 0.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Розв'язком рівнянь (3.70) з використанням (3.50) є система (3.64).

I.3. Після підстановки:

$\xi^0 = 2ax_0 + d_0, \xi^1 = gx_0 + ax_1 + d_1, \eta^1 = -au^1 + g, \eta^2 = -a$

та формул (3.50) у систему визначальних рівнянь, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{21} = k_{12} = k_{21} = 0,\\
&\dot{f^{11}} - f^{11} = 0,\ \dot{f^{12}} - 2f^{12} = 0,\ \dot{f^{22}} - f^{22} = 0,\ \dot{f^{21}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Розв'язавши рівняння (3.71), одержимо систему (3.65).

II.1. Підставивши координати інфінітезимального оператора:

$\xi^0 = 2ax_0 + d_0, \xi^1 = gx_0 + ax_1 + d_1, \eta^1 = amu^1 + gu^2, \eta^2 = a(m+1)u^2$

та (3.51) в систему визначальних рівнянь, після спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned}&\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{21}=k_{12}=k_{21}=0,\ \ k_{11}=k_{22},\\&(m+1)u^1\dot{f^{21}}+(m+1)(u^2)^2\dot{f^{11}}+(m+2)u^2f^{11}=0,\\&(m+2)u^1(f^{11}-f^{22})-(m+1)u^2[(\dot{f^{22}}-\dot{f^{11}})u^1+\dot{f^{12}}]=2f^{12}.\end{aligned}\tag{3.72}$$

Зрозуміло, що розв'язок системи рівнянь (3.72) залежить від значення сталої m. Існує два нееквівалентні випадки:

$m=-1$, тоді оператор дилатації D співпадає з розглянутим вище (випадок I.1.), який ми повністю дослідили.

$m\neq-1$, тоді розв'язок (3.72) задає систему (3.66).

II.2. Підставивши координати інфінітезимального оператора:
$\xi^0=2ax_0+d_0,\xi^1=gx_0+ax_1+d_1,\eta^1=am+gu^2,\eta^2=au^2$
та (3.51) в систему визначальних рівнянь, отримаємо:

$$\begin{aligned}&\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{21}=k_{12}=k_{21}=0,\ k_{11}=k_{22},\\&f^{21}=C_{21},\quad (u^2)^2\dot{f^{11}}+2u^2f^{11}+\frac{1+C_{21}}{u^2}m=0,\\&u^2\dot{f^{22}}+2f^{22}+\frac{1-C_{21}}{(u^2)^2}m=0,\\&u^2[\dot{f^{22}}-\dot{f^{11}}]+2(f^{22}-f^{11})=\frac{2mC_{21}}{(u^2)^2},\\&u^2\dot{f^{12}}+2f^{12}+m(f^{22}-f^{11})=0.\end{aligned}\tag{3.73}$$

Розв'язком (3.73) з використанням (3.51) є (3.67).

III.1. Підставивши координати інфінітезимального оператора:
$\xi^0=2ax_0+d_0,\xi^1=gx_0+ax_1+d_1,\eta^1=-2au^1+gu^2,\eta^2=-u^2+g$
та (3.52) в систему визначальних рівнянь, після спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned}&\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{21}=k_{12}=k_{21}=0,\ k_{11}=k_{22},\\&f^{21}=C_{21},\quad 2\omega\dot{f^{11}}=f^{11},\quad 2\omega\dot{f^{22}}=f^{22},\quad \omega\dot{f^{12}}=f^{12}.\end{aligned}\tag{3.74}$$

Розв'язком рівнянь (3.74) з використанням (3.52) є система (3.68).

Теорему 3.6 доведено.

Інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея.

Доповнимо розширену алгебру Галілея $AG_1(1,1)$ оператором проективних перетворень

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + \eta^a\partial_{u^a}. \tag{3.75}$$

За умови виконання відповідних комутаційних співвідношень між операторами алгебри $AG_1(1,1)$ та оператором (3.75), одержимо узагальнену алгебру Галілея $AG_2(1,1)$, при певних функціях $\eta^a = \eta^a(x,u)$, які підлягають визначенню. Дослідимо, при яких функціях F^{ab} система (3.48) є інваріантною відносно цієї алгебри.

Теорема 3.7. *Система (3.48) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна одній із наступних систем:*

$$\begin{aligned} &u_0^1 + u^1u_1^1 + k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0,\\ &u_0^2 + u^1u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.76}$$

де $\langle G = G_1, D = D_1, \mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}_1 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1}\rangle$;

$$\begin{aligned} &u_0^1 + u^1u_1^1 + C_1u_1^2 + k_{11}u_{11}^1 = 0,\\ &u_0^2 + 2u^2u_1^1 + (u^1 + C_2\sqrt{u^2})u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 + \lambda_{21}u_{111}^1 = 0, \end{aligned} \tag{3.77}$$

де $\langle G = G_1, D = D_2,$

$\mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}_2 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (\lambda x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1} - 2x_0u^2\partial_{u^2}\rangle$;

$$\begin{aligned} &u_0^1 + u^1u_1^1 + C_1e^{2u^2}u_1^2 + k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0,\\ &u_0^2 + u_1^1 + [u^1 + C_2e^{u^2}]u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.78}$$

де $\langle G = G_1, D = D_6, \mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}_3 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1} - x_0\partial_{u^2}\rangle$;

$$u_0^1 - \tfrac{m}{u^2}u_1^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 + \tfrac{u_1^2}{(u^2)^2}[(u^1 - m\ln u^2)^2 + C_1(u^1 - m\ln u^2) + C_2] = 0,$$

$$u_0^2 - u_1^1 - \frac{m}{u^2}u_1^2 + \frac{1}{u^2}[2(u^1 - m\ln u^2) + C_1]u_1^2 = 0, \tag{3.79}$$

де $\langle G = G_2, D = D_8,$

$\mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}_4 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (mx_0 + x_1u^2)\partial_{u^1} + x_0u^2\partial_{u^2}\rangle;$

$$u_0^1 + (1+C)u^2u_1^1 + [2u^1 - (1+C)(u^2)^2]u_1^2 + k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0,$$
$$u_0^2 + Cu_1^1 + (1-C)u^2u_1^2 + k_{11}u_{11}^2 = 0, \qquad (3.80)$$

де $\langle G = G_3, D = D_9,$

$\mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}_5 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + [-2x_0u^1 + x_1u^2 - k_{11}]\partial_{u^1} + [-x_0u^2 + x_1]\partial_{u^2}\rangle;$

$$\begin{aligned} &u_0^1 + u^1u_1^1 + C_1(u^2)^{\frac{2-k}{k}}u_1^2 + k_{1a}u_{11}^a = 0, \\ &u_0^2 + ku^2u_1^1 + (u^1 + C_2(u^2)^{\frac{1}{k}})u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 = 0 \end{aligned} \qquad (3.81)$$

де $\langle G = G_1, D = D_4,$

$\mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}_6 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1} - kx_0u^2\partial_{u^2}\rangle,\ k \neq 0;$

$$\begin{aligned} &u_0^1 + u^1u_1^1 + [-u^2\ln^2 u^2 + C_1u^2\ln u^2 + C_2u^2]u_1^2 + k_{1a}u_{11}^a = 0, \\ &u_0^2 + u^2u_1^1 + [u^1 + C_1u^2 - 2u^2\ln u^2]u_1^2 + k_{11}u_{11}^2 = 0, \end{aligned} \qquad (3.82)$$

де $\langle G = G_1, D = D_5,$

$\mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}_7 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + [x_1 - x_0(u^1 + u^2)]\partial_{u^1} - x_0u^2\partial_{u^2}\rangle.$

У формулах (3.76)–(3.82) C,C_a $(a = 1, 2)$ — довільні сталі.

Доведення. Комутаційні співвідношення проективного оператора Π з іншими операторами алгебри $AG_2(1,1)$ задають такі нееквівалентні зображення узагальненої алгебри Галілея:

1. $\langle \partial_0, \partial_1, G_1, D_1, \Pi = \Pi_1 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1}\rangle;$
2. $\langle \partial_0, \partial_1, G_1, D_2, \Pi = \Pi_2 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1} - 2x_0u^2\partial_{u^2}\rangle;$
3. $\langle \partial_0, \partial_1, G_1, D_5, \Pi = \Pi_3 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1} - x_0\partial_{u^2}\rangle;$
4. $\langle \partial_0, \partial_1, G_2, D_7, \Pi = \Pi_4 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (mx_0 + x_1u^2)\partial_{u^1} + x_0u^2\partial_{u^2}\rangle;$
5. $\langle \partial_0, \partial_1, G_3, D_8, \Pi = \Pi_5 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + [-2x_0u^1 + x_1u^2 - k_{11}]\partial_{u^1} +$
   $+ [-x_0u^2 + x_1]\partial_{u^2}\rangle;$

6. $\langle \partial_0, \partial_1, G_1, D_3, \Pi = \Pi_6 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1} - kx_0u^2\partial_{u^2}\rangle$, де $k \neq 0$;

7. $\langle \partial_0, \partial_1, G_1, D_4,$

   $\Pi = \Pi_7 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + [x_1 - x_0(u^1 + u^2)]\partial_{u^1} - x_0u^2\partial_{u^2}\rangle.$

Розглянемо перший випадок. Так як система (3.48) інваріантна відносно алгебри $\langle \partial_0, \partial_1, G_1, D_1\rangle$, то вона має вигляд (3.60). Якщо вимагати додатково, щоб система (3.60) була інваріантна відносно оператора Π, то з системи визначальних рівнянь одержуємо, що $f(u^2) = 0$, тобто одержується система (3.76). Аналогічно проводиться доведення для інших випадків теореми 3.7.

Теорему 3.7 доведено.

З отриманих у теоремі 3.7 систем випишемо системи третього порядку:

1. $u_0^1 + u^1u_1^1 + k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0,$
   $u_0^2 + u^1u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 = 0;$

2. $u_0^1 + u^1u_1^1 + C_1u_1^2 + k_{11}u_{11}^1 = 0,$
   $u_0^2 + 2u^2u_1^1 + (u^1 + C_2\sqrt{u^2})u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 + \lambda_{21}u_{111}^1 = 0;$

3. $u_0^1 + u^1u_1^1 + C_1e^{2u^2}u_1^2 + k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0,$
   $u_0^2 + u_1^1 + [u^1 + C_2e^{u^2}]u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 = 0;$

4. $u_0^1 - \dfrac{m}{u^2}u_1^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 +$
   $+\dfrac{1}{(u^2)^2}[(u^1 - m\ln u^2)^2 + C_1(u^1 - m\ln u^2) + C_2]u_1^2 = 0,$
   $u_0^2 - u_1^1 - \dfrac{m}{u^2}u_1^2 + \dfrac{1}{u^2}[2(u^1 - m\ln u^2) + C_1]u_1^2 = 0;$

5. $u_0^1 + (1 + C)u^2u_1^1 + [2u^1 - (1 + C)(u^2)^2]u_1^2k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0,$

   $u_0^2 + Cu_1^1 + (1 - C)u^2u_1^2 + k_{11}u_{11}^2 = 0.$

Таким чином, у класі систем третього порядку (3.48) лише дані системи є інваріантними відносно узагальненої алгебри Галілея. В зв'язку з тим, що вказані системи інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея, вони можуть претендувати на описання реальних фізичних процесів. Так, наприклад, перша система зустрічається в роботах С. Саковіча [107], система вигляду 2 є системою рівнянь Бусінеска (див.[102]).

Список використаних джерел

[1] Абраменко А.А., Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 482–489.

[2] Андреєва Н.В. (тепер Ічанська Н.В.) Симетрійні властивості нелінійної системи рівнянь параболічного типу // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. — 1998. — Т. 19. — С. 10–13.

[3] Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1989. — Т. 34. — С. 3–83.

[4] Белоколос Е.Д., Энольский В.З. О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравненининий в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния // Успехи математических наук. — 1982. — Т. 37, № 4. — С. 89–120.

[5] Белоколос Е.Д., Бобенко А.И., Матвеев В.Б., Эпольский В.З. Алгебро–геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений // Успехи математических наук. — 1986. — Т. 41, № 2. — С. 3–42.

[6] Биркгоф Г. Гидродинамика. — М.: Иностранная литература. — 1963. — 400 с.

[7] Бойко В.М., Попович В.О. Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 45–50.

[8] Вільгельмссон Г. Коливання та встановлення рівноваги за умов взаємозв‘язку температури та густини у термоядерних плазмах // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 38, № 1. — С. 44–53.

[9] Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1986. — Т. 28. — С. 95–206.

[10] Голод П.І., Клімик А.У. Математичні основи теорії симетрій // Відп. ред. Парасюк О.С.; АН України. Ін–т теорет.фізики. — Київ: Наукова думка. — 1992. — 380 с.

[11] Глеба А.В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей–інваріантних рівнянь: Дис... канд. ф.-м. наук: 01.01.03. — Київ. — 2003. — 120 с.

[12] Дородницын В.А. О инвариантных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1982. — Т. 22. — С. 1393–1400.

[13] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19. — С. 1215–1223.

[14] Жданов Р.З., Лагно В.І. Групова класифікація рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом // Доповіді НАН України. — 2000. — № 3. – С. 12–16.

[15] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[16] Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи математических наук. — Т. 47, выпуск 4 (286). — 1992. — С. 83–144.

[17] Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Уравнения Кортевега–де Фриза с групповой точки зрения // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 244, № 1. — С. 56–61.

[18] Ічанська Н.В. Галілеївська інваріантність нелінійної системи еволюційних рівнянь третього порядку // Вісник Київського університету. — 2004. — Т. 1. — С. 92–112.

[19] Костенко В.Г. Інтегрування деяких диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом. — Львів: Львівський держ. університет. — 1959. — 22 с.

[20] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. — М.: Гостехиздат. — 1951. — Т. 1. — 476 с., Т. 2. — 544 с.

[21] Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. — 2002. – Т. 38, № 3. — С. 365–372.

[22] Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Праці Інституту математики НАН України. — Т. 45. — 2002. — 360 с.

[23] Магадеев Б.А. Структура симметрии эволюционных уравнений: Дис... канд. ф.–м. наук: 01.01.02. — Уфа. — 1990. — 103 с.

[24] Магадеев Б.А. О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений // Алгебра и анализ. — 1993. — Т.5, вып.2. — С. 141–156.

[25] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. — Київ: Наук. думка. — 1977. — 331 с.

[26] Миллер У. мл. Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир. — 1981. — 342 с.

[27] Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния. — Киев: Наук. думка. — 1973. — 182 с.

[28] Нижник Л.П., Починайко М.Д. Интегрирование пространственно–двумерного уравнения Шредингера методом обратной задачи // Функц. анализ. — 1982. — Т. 16, вып. 1. — С. 80–82.

[29] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.

[30] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн.физ. — 1960. — № 3. — С. 126–145.

[31] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука. — 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. — New York: Academic Press. — 1982. — 400 p.

[32] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир. — 1989. — 581 с.

[33] Попович Р.О. Про симетрію та точні розв'язки одного рівняння переносу // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 1. — С. 121–125.

[34] Попович Р.О., Корнєва І.П. Про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. — 1998. — Т. 19. — С. 200–211.

[35] Сагомонян А.Я. Проникание. — М.: Издательство Московского университета. — 1974. — 300 с.

[36] Сагомонян А.Я., Поручников В.Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. — М.: Издательство Московского университета. — 1970. — 120 с.

[37] Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности. // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 10. — С. 1370–1376.

[38] Сєров М.І., Ічанська Н.В. Симетрійні властивості, редукція та точні розв'язки системи рівнянь типу Кортевега–де Фріза // Доповіді НАН України. — 2000. — № 10. — С. 31–35.

[39] Сєров М.І., Сєрова М.М., Глеба А.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки нелінійного циліндрично–симетричного рівняння Шредінгера // Доповіді НАН України. — 1998. — № 5. — С. 41–45.

[40] Сєров М.І., Тулупова Л.О., Андреєва Н.В. (тепер Ічанська Н.В.) Q-умовна симетрія нелінійного двовимірного рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 6 — С. 846–849.

[41] Сєров М.І., Тулупова Л.О., Ічанська Н.В. Симетрійні властивості та редукція системи рівнянь Деві–Стюардсона // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 247–253.

[42] Сєров М.І., Черніга Р.М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь з конвективним членом // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, № 9. — С. 1262–1270.

[43] Серова М.М. О нелинейных уравнениях теплопроводности, инвариантных относительно группы Галилея // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. — Киев: Ин-т математики. — 1985. — С. 119–123.

[44] Сєрова М.М., Андреєва Н.В. (тепер Ічанська Н.В.) Симетрійні властивості узагальненого рівняння Гарі–Діма // Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь присвяченій 70-річчю від дня народження професора В.Скоробагатька, 15–19 вересня 1997р., м. Дрогобич. — Київ: Інститут математики НАН України. — 1997. — С. 100.

[45] Сєрова М.М., Ічанська Н.В. Інваріантність рівнянь теорії проникання відносно розширеної алгебри Галілея // Вісник Київського університету. — Вип. 4. — 2000. — С. 107–111.

[46] Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Докл. АН СССР. — 1979. — 246, № 4. — С. 846–850.

[47] Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики// Теоретико–алгебраические исследования в математической физике. — Киев: Ин–т математики АН УССР. — 1981. — С. 6–28.

[48] Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Ин–т математики АН УССР. — 1987. — С. 4–16.

[49] Фущич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр. мат. журн. — 1991. — 43, № 11. — С. 1456–1470.

[50] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука. — 1990. — 400 с.

[51] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. — Киев: Наукова думка. — 1983. — 199 с.

[52] Фущич В.И., Репета В.К., Серов Н.И. Нелиевская симметрия и точные решения одномерных уравнений газовой динамики // Доклады АН Украины. — 1991. — № 11. — С. 27–33.

[53] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. — 1990. — Сер. А, № 7. — С. 24–27.

[54] Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности// Доклады АН Украины. — 1992. — № 1. — С. 26–30.

[55] Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. — 1990. — № 11. — С. 15–18.

[56] Фущич В.І., Серов М.І., Подошвелев Ю.Г. Конформна симетрія нелінійного циліндрично-симетричного хвильового рівняння // Доповіді НАН України. — 1998. — № 4. — С. 64–68.

[57] Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. — 1988. — Сер. А, № 9. — С. 17–20.

[58] Фущич В.И., Серов Н.И., Штелень В.М. О некоторых точных решениях многомерных нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, эйконала и Дирака // Теоретико–групповые методы в физике. Труды 2-го международного семинара (Звенигород 1982). М.: Наука. — 1983. — С. 100–105.

[59] Фущич В.И., Славуцкий С.Л. О нелинейном галилей - инвариантном обобщении уравнений Ламе // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 287, № 2. — С. 320–323.

[60] Фущич В.І., Черніга Р.М. Системи лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень // Доповіді АН України. — 1993. — № 8. — С. 44–51.

[61] Фущич В.І., Чопик В.І. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, № 10. — С. 1433–1443.

[62] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики.— Киев: Наукова думка. — 1989. — 339 с.

[63] Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза со ступенчастыми начальными данными // Мат. сборник. — 1976. — Т. 99. — С. 261–281.

[64] Черніга Р.М. О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа // Симметрийный анализ и решенния уравнений матфизики: Сб. науч. тр. — Киев: Ин–т математики. — 1988. — № 8. — С. 49–53.

[65] Черніга Р.М. Симетрія і точні розв'язки рівнянь тепломасопереносу у термоядерній плазмі // Доповіді АН України. — 1995. — № 4. — С. 17–21.

[66] Baikov V.A., Gladkov A.V., Wiltshire R.J. Lie symmetry classification analysis for nonlinear coupled diffusion. // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — Vol. 31. — P. 7483–7499.

[67] Basarab–Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 69, № 1. — P. 43–94.

[68] Bateman H. The transformations of electrodynamical equations // Proc. London Math. Soc. — 1909. — Vol. 8. — P. 223–264.

[69] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. — 1969. — Vol. 18, № 11. — P. 1025–1042.

[70] Bluman G., Kumei S. Symmetries and differential equations. — New York: Springer — Verlag. — 1989. — 142 p.

[71] Cherniha R.M. Galilean–invariant nonlinear PDEs and their exact solutions // J. Nonlin. Math.Phys. — 1995. — Vol. 2, № 3. — P. 374–383.

[72] Cherniha R., Serov M. Symmetries ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // Euro. J. of Appl. Math. — 1998. — Vol. 9. — P. 527–542.

[73] Clarkson P., Kruskal M.D. New similarity solutions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. — 1989. — Vol. 30, № 10. — P. 2201–2213.

[74] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations // Phys. Lett. A. — 1994. — Vol. 190. — P. 149–154.

[75] Fushchish W.I., Serov N.I., Shtelen W.M. and Popovich R.E. Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. — 1992. — № 12. — P. 27–32.

[76] Fushchich W.I., Serov N.I., Tulupova L.A. The Conditional Invariance and Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation. // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. — 1993. — № 4. — P. 37–40.

[77] Fushchich W.I., Serov N.I., Tychinin W.A., Amerov T.K. On nonlocal symmetries of the nonlinear heat equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. — 1992. — № 11 — P. 27–33.

[78] Fushchych W., Shtelen W., Serov N. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. — 1993. — 436 p.

[79] Fushchych W., Tsyfra I. On reduction and exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — Vol. 20. — P. L45–L47.

[80] Gardner C., Green J., Kruskal M., Miura R. Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Lett. — 1967. — Vol. 19. — P. 1095–1097.

[81] Gazizov R.K. Contact transformations of equations of the type of nonlinear filtration // CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. — 1987. — Vol. 1. — P. 125–135.

[82] Goard J., Broadbridge P. Nonclassical symmetry analysis of nonlinear reaction—diffusion equations in two spatial dimensions// Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. — 1996. — Vol. 26, № 4. — P. 735–756.

[83] Heredero R.H., Olver P.J. Classification of invariant wave equations // J. Math. Phys. — 1996.— Vol. 37, № 12. — P. 6414–6438.

[84] Heredero R.H., Sokolov V.V., Svinolupov S.I. Toward the classification of third-orderintegrable evolution equations // J. Phys. A: Math.Gen. — 1994. — Vol. 27. — P. 4557–4568.

[85] Ibragimov N.H. (Editor) Lie group analysis of differential equations – symmetries, exact solutions and conservation laws // Boca Raton, FL, Chemical Rubber Company. — 1994. — Vol. 1.

[86] Jian H.-Y., Wang X.-P., Hsieh D.–Y. The Global Attractor of a Dissipative Nonlinear Evolution System // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1999. — 238. — P. 124–142.

[87] Karczewska A. Statical solutions to turbulent diffusion // Pergamon: Nonlinear Analysis. — 1999. — 37. — P. 635–675.

[88] Levi D., Winternitz P. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — Vol. 22, № 15. — P. 2915–2924.

[89] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ // Arch. Math. — 1881. — Vol. 8, № 1. — P. 112–125.

[90] Lie S. Classification und Integration von gewöhnlichen Differential–gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Arch. Math. Naturv. — 1883. — 9. — P. 371–393.

[91] Lie S. Klassifikation und Integration von gewohnlichen Differential–gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten// I, II, Math. Ann. — 1888. — Vol. 32. — P. 213–281; Gesammetle Abhandlungen// — Vol. 5. — Leipzig, B. G. Teubner. — 1924. — P. 240–310.

[92] Nikitin A.G., Popovych R.O. Group Classification of Nonlinear Schrodinger Equations // Ukrainian Mathematical Journal. — 2001. — Vol. 53, № 8. — P. 1255–1265.

[93] Nikitin A.G., Wiltshire R.J. System of reaction–diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. — 2001. — Vol. 42. — P. 1666–1688.

[94] Nesterenko M.O. Differential Invariants of Transformations Groups on the Real Plane// Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in

Nonlinear Mathematical Phisics". — Kyiv: Institute of Mathematics, 2004. — Vol. 50, Part 1. — P. 211–213.

[95] Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. — Berlin: Springer. — 1986. — 510 p.

[96] Olver P. Direct reduction and differential constraints // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1994. — Vol. 444. — P. 509–523.

[97] Olver P. Differential invariants and invariant differential equations// Lie Groups Appl. — 1994. — Vol. 1. — P. 177–192.

[98] Olver P., Rosenau P. Group-invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — Vol. 47. — P. 263–278.

[99] Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. — 1986. — Vol. 118, № 4. — P. 172–176.

[100] Patera J., Sharp R., Winternitz P. and Zassenaus H. Subgroup of the Poincare group and their invariats // J. Mat. Phys. — 1976. — Vol. 17, № 6. — P. 977–984.

[101] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. 1. General method and the Poincare group // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, № 8. — P. 1597–1624.

[102] Pava J.A. On the Cauchy problem for a Boussinesq–Type system // Advances in Differential Equations. — 1999. — Vol. 4, № 4. — P. 457–492.

[103] Popovych R.O. On reduction and Q-conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Phisics". — Kyiv: Institute of Mathematics. — 1997. — Vol. 2. — P. 437–443.

[104] Popovych R.O. Equivalence of Q-conditional symmetries under group of local transformation // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2000. — Vol. 30, Part 1. — P. 184–189.

[105] Pukhnachov V.V. Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations // Energy methods in continuum mechanics. — 1996. — 316 p.

[106] Rideau G., Winternitz P. Nonlinear equations invariant under the Poincare, similitude and confornal groups in two–dimensional spase–time // J. Math. Phys. — 1990. — Vol. 31. — P. 1095–1105.

[107] Sakovich S.Yu. Painleve analysis of new soliton equations by Hu // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — № 27 — P. 503–505.

[108] Serov N.I., Tulupova L.A. Symmetry properties of the generalized Korteweg–de Vries and Burgers equations // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. — 1994. — № 12. — P. 42–44.

[109] Serova M., Andreeva N. (Ichanska N.) Evolution equations invariant under the conformal algebra // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Phisics". — Kyiv: Institute of Mathematics. — 1997. — Vol. 1. — P. 217–221.

[110] Tychynin V.A. Non-local symmetry and generating solutions for Harry–Dym–type equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Vol. 27. — P. 4549–4556.

[111] Webb G.M. Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers–heat equation system // J. Phys. A: Math. Gen. — 1990. — Vol. 23, № 17. — P. 3885–3894.

[112] Wilhelmsson H. Plasma temperature and density dynamics including particle and heat pinch effects // Physica Scripta. — 1992. — Vol. 46. — P. 177–181.

[113] Woyczynski W.A. Burgers–KPZ Turbulence Gottingen lectures. — Berlin: Springer. — 1998. — 320 p.

[114] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J.Phys.A: Math. Gen — 1999. — Vol. 32. — P. 7405–7418.

[115] Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — Vol. 238, № 1. — P. 101–123.