УДК 624.014

С.Ф. Пічугін, д.т.н., професор
В.П.Чичулін, к.т.н., доцент,
К.В. Чичуліна, к.т.н.
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Обгрунтовано врахування всіх складових внутрішніх та зовнішніх факторів роботи конструкцій для отримання більш надійних конструкцій. Визначено, що реальні конструкції допускають резерв надійності одних елементів і недостатній рівень надійності інших, тому отримання рівнонадійних конструкцій є актуальною проблемою.Виявлено, що при аналізі надійності будівельних конструкцій потрібне врахування ймовірнісної природи різних чинників, що впливають на характер їх роботи, і врахування кореляційного зв'язку між окремими характеристиками конструкцій.

Ключові слова:*коефіцієнт кореляції,коваріація, імовірність відмови, імовірність безвідмовної роботи, система, елемент, відмова, залежність, незалежність.*

Вступ.В умовах сучасного розвитку теорії надійності будівельних конструкцій існує необхідність регулювання ймовірносних характеристик окремих елементів і систем. Імовірність відмов нових та експлуатованих конструкцій можна зменшити шляхом урахування характеру роботи будівельних систем та міри взаємозв'язку їх елементів, а саме додатної кореляційної залежності (за умови наявності відповідної статистичної інформації). Проведення досліджень, спрямованих на підвищення надійності та безпеки будівельних конструкцій без збільшення матеріальних витрат, є досить актуальним.

Основний матеріал і результати.Коефіцієнт лінійної кореляції Пірсона[1] призначений для розрахунку сили і напряму лінійної залежності між змінними характеристиками. Змінні вимірюються в інтервальному або відносному масштабі. Якщо дві змінні на координатному полі, то кожна пара значень відображає координати точок на цьому полі. Чим ближче точки до усередненої прямої, тим вище коефіцієнт кореляції (рис.1, а).Коефіцієнт кореляції є позитивним, коли X збільшився і збільшився Y (прямо пропорційно (рис.1, б), і негативним для зворотного зв'язку. Отже, лінійний коефіцієнт кореляції спрацьовує тільки при лінійної залежності між змінними.Згідно [1] загальна формула визначення коефіцієнта кореляції виглядає наступним чином:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i - \bar{x}\right)\cdot\left(y_i - \bar{y}\right)\right]}{\left(n-1\right)\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}, \qquad (1)$$

де$x_i, y - i.$– характеристики, що порівнюються;

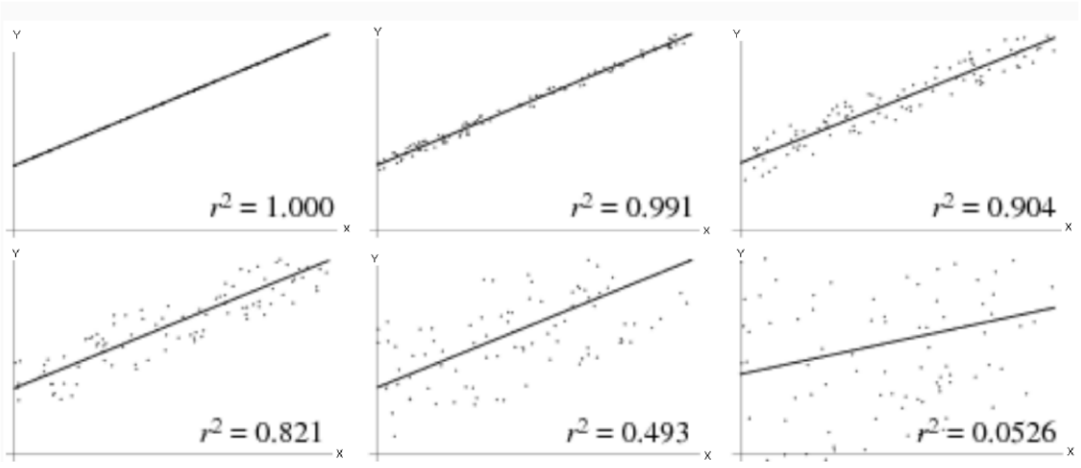
n – кількість змінних, які порівнюються;

$\sigma_x, \sigma - y.$– стандарти відхилення у вибірках порівняння.

Для спрощення розрахунку надалі будемо використовувати перетворену формулу[2]:

$$r_{xy} = \frac{n\sum\left(x_i\cdot y_i\right) - n\sum x_i\cdot\sum y_i}{\sqrt{\left(n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right)\cdot\left(n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right)}}. \qquad (2)$$

а)



б)

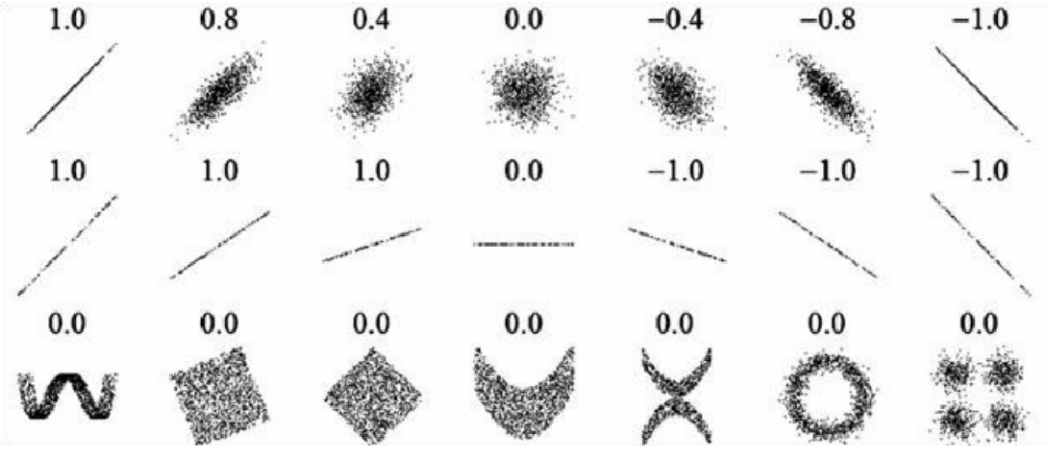


Рис. 1. Графічне зображення: а) залежності лінійної функції та змінної у вигляді точок з відповідними коефіцієнтами кореляції; б) спеціально створені форми залежностійвідповіднікоефіцієнти кореляції для них

Таблиця 1 – Ступені залежностіокремих характеристик від значень коефіцієнтів кореляції

Значеннякоефіцієнта кореляції	Залежність
від 0 до 0,3	дуже слабка
від 0,3 до 0,5	слабка
від 0, 5 до 0,7	середня
від 0,7 до 0, 9	висока
від 0,9 до 1	дуже висока

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}}. \quad (3)$$

Згідно з [4] дисперсії суми незалежних величинпредставлені наступним чином:

$$D(x+y) = D(x) + D(y). \quad (4)$$

У випадку, коли величини залежні вираз (4) набуває іншого вигляду:

$$D(x \pm y) = D(x) + D(y) \pm 2\,cov(x,y). \quad (5)$$

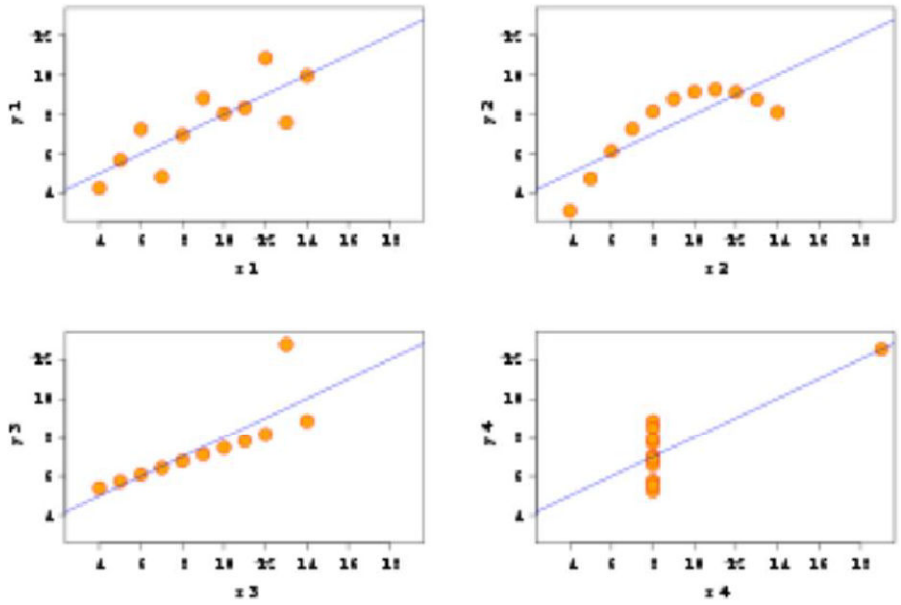


Рис.2. Графічне зображення лінійної функції та змінної з коефіцієнтом кореляції 0,81

Наприклад: якщо значення коефіцієнта кореляції між змінними – 0,36, то це слабкий негативний зв'язок, і у багатьох випадках можна не брати його до уваги; якщо значення коефіцієнта кореляції дорівнює 0 – це випадок не зв'язаних змінних; якщо значення коефіцієнта кореляції між змінними дорівнює 0,25, то це дуже слабка кореляція, і в більшості випадків, ми не беремо її до уваги; якщо значення коефіцієнту кореляції між змінними дорівнює 0, 75, ця кореляціявисокаі її необхідно враховувати; якщо значення коефіцієнта кореляції дорівнює 1,то змінні повністю пов'язані.

На основі результатів проведеного дослідження були визначені слабкі сторони застосування коефіцієнта парної кореляції: нестійкість до викидів; визначається тільки лінійна залежність, інші види залежності встановлюються тільки регресивним аналізом; визначаєтьсянезалежність і некорельованість(але з першого виникає друге, а не навпаки).

Пропонується для визначення лінійної кореляційної залежності застосовувати вибірковий(емпіричний) коефіцієнт парної кореляції:

$$r_{xy}^{в} = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sqrt{\left(\overline{X}^2 - \left(\overline{X}\right)^2\right) \cdot \left(\overline{Y}^2 - \left(\overline{Y}\right)^2\right)}}. \qquad (6)$$

При переході до розрахунку імовірності безвідмовної роботи з урахуванням коефіцієнта парної кореляції між окремими елементами системи необхідно окреслити передумови проведеного дослідження.

Розглянемо попередні значення ймовірності відмови двох окремих елементів конструкції. За умови абсолютної залежності r_{ij}= 1, елементи необхідно замінити одним з максимальною ймовірністю відмови Q_{max}. Якщо елементи незалежні r_{ij}= 0, то ймовірність відмови двох елементів одночасно знаходиться за наступною формулою:

$$Q_{s\,ij}^{н} = 1 - P_{s\,ij}^{н} = 1 - P_i \cdot P_j = 1 - \left(1 - Q_i\right) \cdot \left(1 - Q_j\right). \qquad (7)$$

Передбачимо лінійну залежність (у параметрах зміни парного коефіцієнта кореляції r_{ij} від 0 до 1) імовірності відмови незалежних та залежних послідовно з'єднаних елементів. Треба відмітити, що коефіцієнт кореляції характеризує не будь-яку залежність, а тільки лінійну.

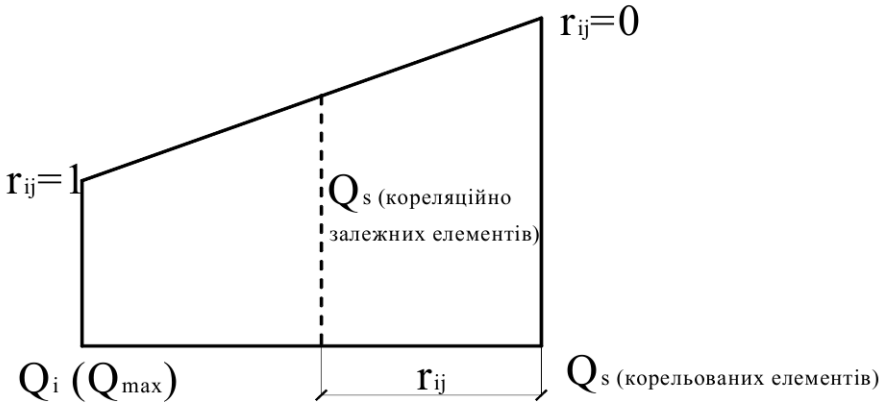


Рис. 3. Лінійна інтерполяція визначення ймовірності відмови системи послідовно з'єднаних корельованих елементів

Рисунок 3 ілюструє трапецію, за допомогою якої обґрунтуємо твердження, що при коефіцієнті кореляції r_{ij}=0 елементи будуть незалежними, а при r_{ij}=1 імовірність відмови системи буде дорівнювати імовірності відмови будь-якого з двох елементів (при умові їх однакових чисельних значень) або максимальному значенню ймовірності відмови (при умові їх різних чисельних значень). Якщо коефіцієнт кореляції двох випадкових величин відмінний від нуля – існує ознака залежності між ними.

Визначаємо ймовірність відмови залежних між собою послідовно з'єднаних двох елементів ($Q_s^з$) за лінійною інтерполяцією (рис. 4) та за такими формулами:

за умови однакових

$$Q_i \text{ та } Q_j: \; Q_s^з = Q_s^н - r_{ij}(Q_s^н - Q_i), \tag{8}$$

за умови різних

$$Q_i \text{ та } Q_j: \; Q_s^з = Q_s^н - r_{ij}(Q_s^н - Q_{maa}), \tag{9}$$

де Q_i – імовірність відмови *i-го* або *j-го* елементу конструкції;

$Q_s^н$ – імовірність відмови системи двох незалежних елементів конструкції;

Q_{max} – максимальна ймовірність відмови між *i-м* та *j-м* елементами конструкції.

Необхідно відмітити, що деякі джерела обґрунтовують нелінійність коефіцієнту кореляції [4], тобто наявність між двома явищами залежності, яка виражається у вигляді квазілінійної функції.

Також була запропонована ступенева функція визначення для послідовно з'єднаних елементів імовірності відмови системи двох елементів з урахуванням коефіцієнта парної кореляції r_{ij} для тих же передумов [3], які були приведені для наступної лінійної постановки:

$$Q_s^з = Q_s^н \cdot \left(\frac{Q_i}{Q_s^н}\right)^{r_{ij}}. \tag{10}$$

Дослідивши відповідну залежність, можна відмітити, що відхилення ймовірності відмови системи двох взаємопов'язаних елементів $Q_s^з$ за формулою (8) порівняно з виразом (9) сягають до 5,75% при r_{ij}=0,6 з подальшим зменшенням відсотків похибки. Аналізуючи різницю приведених величин, можна спостерігати тенденцію збільшення її чисельного значення до межі коефіцієнта кореляції r_{ij}=0,5.

Висновок.Можна зробити висновок, що надійність системи послідовно з'єднаних елементів з урахуванням коефіцієнта кореляції збільшилася.Отже, потрібно враховувати кореляцію, якщо вона існує (r_{ik}≥0,4) [5]. Треба зауважити, що для

елементів в паралельному з'єднанні не виправдано врахування коефіцієнту кореляції (не досягає потрібного ефекту), тому що ймовірність безвідмовної роботи менша в паралельних з'єднаннях саме з урахуванням коефіцієнта кореляції.

Література

1. Вентцель Е.С. Теориявероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576с.

2. Матвеева С.П. Теориявероятностей и элементыматематической статистики / С.П. Матвеева. – М.: Воениздат, 1980. – 399 с.

3. Пічугін С.Ф. Врахування кореляційного зв'язку між елементами в оцінках надійності будівельних конструкцій / С.П. Пічугін, К.В. Чичуліна // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – Вип. 74: В 2-х кн.: Книга 1. – К.: ДП НДІБК, 2011. – С. 386 – 394.

4. Сигорский В.П. Математическийаппарат інженера / В.П. Сигорский. – К.: Техника, 1977. – 766 с.

5. Чичуліна К.В. Кореляційний зв'язок в економіко-математичних моделях // Наукові праці Полтавської державної аграрної академії. Вип.1(4) – Т. 3. – Полтава:ПДАА, 2012. – С. 250 – 255.