

## Нелінійні та дискретні системи автоматичного керування

У статті досліджуються характеристики нелінійних систем та їх дослідження за допомогою гармонічного методу балансу та за фазовими траєкторіями

### Вступ

**Постановка проблеми.** Нелійними САК є системи, в яких рівняння динаміки нелінійні, тобто містять члени, яких функції та їх похідні знаходяться в степені, відмінній від одиниці, в яких є члени з добутками невідомих функцій або коефіцієнти рівнянь залежать від аргументу.

Практично всі реальні системи є нелійними, але значне число САК можна лінеаризувати. При лінеаризації ми розглядаємо динаміку систем при відносно малих змінах вхідних величин. Поряд з тим існують системи, які не можуть бути лінеаризованими. Це системи, до складу яких входить хоча б один суттєво нелінійний елемент.

### Основний матеріал

#### Характеристики нелінійних елементів

До суттєво нелінійних елементів відносяться елементи, характеристики яких мають різкі переломи, або розриви. Прикладами таких елементів є механічні з'єднання з люфтом, вузли механічних систем з сухим тертям, підсилювачі з насиченням, магнітні матеріали з петлею гістерезису, релейні елементи та ін. Характеристики таких елементів спрощено можна подати у вигляді ламаних чи розривних ліній на рис. 1.

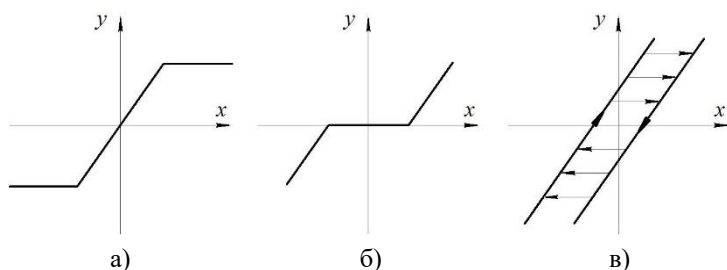


рис. 1

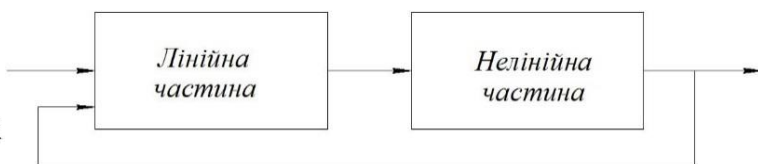
- На рисунку а) показана характеристика типу підсилювач з насиченням. якщо на такий елемент подати певний сигнал, то він обрізує його при досягненні межі насичення.
- На рисунку б) наведена характеристика нелінійних елементів із зоною нечутливості. Сигнал, який пройшов через такий елемент матиме нульові значення, якщо його величина не перевищувала певної величини порогу нечутливості.
- Рисунок в) відповідає механічному елементу з люфтом.

Проходячи через нелінійні елементи, будь-який сигнал змінює свою форму. Тому вивчення нелінійних

систем є складним завданням. Детальний аналіз є завданням наукових досліджень.

Під час вивчення динаміки нелінійних систем основну увагу приділяють вивченню автоколивань. Автоколивання – це характерна особливість нелінійних систем, яка не властива лінійним системам. У нелінійній системі при незмінних значеннях вхідних величин можуть виникати і підтримуватися коливання певної форми. Це можуть бути прості, майже синусоїдальні коливання або коливання досить складної форми. Оскільки вони виникають самостійно. Їх називають автоколиваннями. Прикладами нелінійних систем з автоколиваннями можуть бути годинник, генератори різних типів, система кровообігу і серце людини та багато інших.

Під час математичного аналізу динаміки в нелінійній системі виділяють всі елементи з несуттєвими нелійнностями і їх лінеаризують, а суттєво нелінійні елементи спрощують і зводять до типових нелінійних елементів. Таким чином структуру нелінійної системи приводять до схеми, в якій основною частиною є лінійна частина і один нелінійний елемент.



Спрощене представлення нелінійної системи

#### Аналіз нелінійних систем методом гармонічного балансу

Метод гармонічного балансу полягає в тому, що виділяють основну гармоніку сигналу і розглядають проходження її через систему.

Сигнал, перетворений нелінійним елементом, проходить через лінійну частину системи. Лінійна частина має амплітудно-частотну характеристику, що пропускає, як правило, низькі частоти і значно ослаблює високі частоти. Для аналізу динаміки систем методом гармонічного балансу вихідний сигнал нелінійної частини розкладають у ряд Фур'є і виділяють у ньому основну гармоніку. Аналізують роботу лінійної системи і вивчають динаміку при виділеному гармонічному сигналі. Тобто лінійну систему розглядають як фільтр, який пропускає тільки сигнали певних частот. Ситуація виглядає так, що нелінійний елемент тільки змінює фазу й частоту синусоїдальних коливань, лінійна частина виконує перетворення того сигналу.

Для аналізу умов виникнення автоколивань згідно з методом гармонічного балансу лінійну частину системи

описуємо його передаточною функцією та амплітудно-фазовою частотною характеристикою  $W(\omega)$ . Нелінійний елемент також описує його амплітудно-фазовою частотною характеристикою  $Z(\omega)$ . Ця характеристика може бути розрахована або знайдена експериментально. Проте для типових нелінійних елементів немає потреби вивчати і розраховувати АФЧХ, оскільки вони наведені в довідках. Для визначення умов виникнення автоколивань будують на одному з графіків АФЧХ розімкнуті лінії частини системи  $W(\omega)$  та АФЧХ нелінійного елемента  $Z(\omega)$ . За аналізом їх розміщення, визначають можливість виникнення автоколивань та їх параметри.

Приклад побудови АФЧХ показаний на рис. 2.

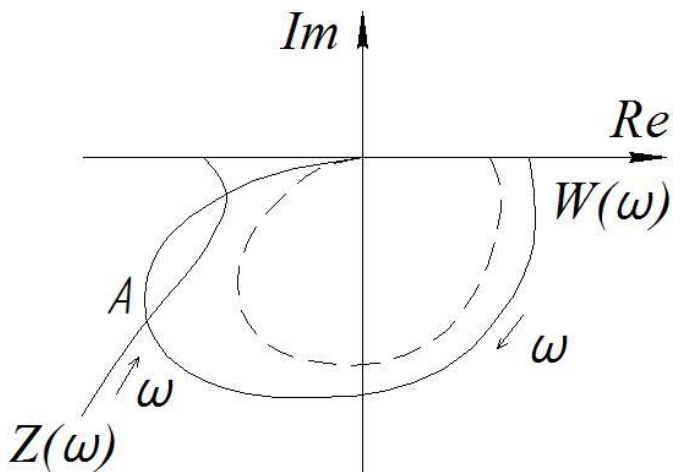


Рис. 2. Визначення автоколивань нелінійної системи

Точка перетину АФЧХ лінійної частини  $W(\omega)$  та нелінійної частини  $Z(\omega)$  визначає можливість виникнення коливань і їх параметри. Частота коливань відповідає розміщенню точок за частотою при побудові АФЧХ, а амплітуда відповідає модулю АФЧХ в точці перетину. Причому стійким коливанням відповідає лише одна точка перетину. Щоб позбутися автоколивань, коли вони не бажані, потрібно змінити параметри лінійної системи так, щоб АФЧХ її не перетинались з АФЧХ нелінійного елемента. Це можна зробити. Як показано на рис. 2. Зміною коефіцієнта підсилення лінійної частини або іншим шляхом.

### Аналіз нелінійних систем за фазовими траєкторіями

Іншим методом аналізу динаміки нелінійних систем є методи побудови фазової площини чи фазового простору і вивчення фазового портрету нелінійної системи.

Побудова фазової траєкторії на прикладі перехідного процесу показана на рисунку.

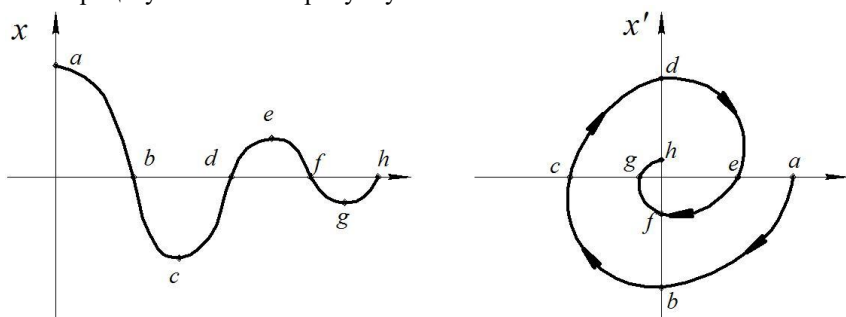


Рис.3. Побудова фазової траєкторії за перехідним процесом

Для кожної точки перехідного процесу встановлюють значення вихідної величини системи і швидкість її зміни. Ця фазова траєкторія відповідає затуханню коливань і точка в початку координатної осі є точкою стійкості системи.

Для аналізу динаміки нелінійних САК фазові траєкторії будують згідно з рівнянням динаміки системи. Фазова площина відповідає системі, порядок якої рівний двом, тобто системі, в якій в рівняння динаміки входять тільки похідні другого порядку. Рівняння такої системи можна подати у вигляді

$$a_1 x'' + a_2 x' + F(x) = 0.$$

Тут  $F(x)$  – нелінійна функція від  $x$ . позначимо  $y = x'$  тоді рівняння можна записати так

$$a_1 y' + a_2 y + F(x) = 0.$$

Звідси

$$y' = -\frac{[a_2 y + F(x)]}{a_1} = 0.$$

Виключивши з рівняння параметр  $t$ , одержимо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{[a_2 y + F(x)]}{a_1 y}.$$

### Заключення

Підводячи підсумки зауважимо, що нелінійні системи, як правило, не можна характеризувати як стійкі чи нестійкі системи. Система може бути стійкою при одних значеннях параметрів і нестійкою при інших. При цьому в системі можуть виникати автоколивання. При деяких початкових значеннях діючих величин ці автоколивання можуть виникати, а при інших ні. Динаміка нелінійних систем досить складна і кінцеві значення величини керування можуть залежати не тільки від параметрів системи а і від початкових умов.