УДК 517.912:512.816

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ БАГАТОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Н. В. Ічанська

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка; 36011, м. Полтава, Першотравневий проспект, 24; e-mail: natasha.ichanska@mail.ru

Розглянуто багатовимірні нелінійні еволюційні рівняння другого порядку, для яких знайдено максимальні алгебри інваріантності.

Ключові слова: *еволюційні рівняння, системи визначальних рівнянь, максимальні алгебри інваріантності, перетворення еквівалентності.*

Вступ. Групові властивості диференціальних рівнянь з частинними похідними суттєво впливають на розв’язання задачі їх інтегрування. Груповому аналізу диференціальних рівнянь присвячена ціла низка робіт (див., наприклад, роботи П. Олвера - Р. Хер态деро [1], Р. Вілтшіра, А.Г. Нікітіна [2], Р.М. Черніги [3], Р.З. Жданова - В.І. Лагна [4, 5, 6] та ін.), але його основи було закладено ще С. Лі [7, 8], Л.В. Овсянніковим [9, 10, 11]. Важливими та актуальними задачами якісної теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики є пряма та обернена задачі групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними. Розв’язанню таких задач і присвячена наша робота.

Розглянемо клас нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку вигляду

$$\Delta u = F(u, u_0), \tag{1}$$

де $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in R^n$, $u_0 = \partial u / \partial x_0$, Δ – оператор Лапласа, $u = u(x)$, F – гладкі функції.

Цей клас еволюційних рівнянь містить як частинні випадки відомі рівняння математичної фізики. До рівнянь з класу (1) приводять різні фізичні задачі, наприклад, задачі опису процесів тепло- та масообміну, механіки суцільного середовища, теорії фільтрації, росту популяцій, фізики моря для опису розподілу коливань температури та солоності моря в глибину тощо. Крім того ці рівняння в частинному випадку є потенціальними багатовимірними рівняннями дифузії з розв'язаною задачею групової класифікації [10, 12, 13, 14].

У даній роботі розв’яжемо задачу групової класифікації нелінійних багатовимірних рівнянь другого порядку. Зазначимо, що у роботах [15, 16] обернена задача симетрійної класифікації розглянута повністю для загальних одновимірних рівнянь та систем довільного порядку та для виділеного підкласу конформно інваріантих рівнянь проведено повну групову класифікацію. У роботах [17, 18] ми розв’язали задачу повної групової класифікації нелінійних одновимірних рівнянь довільного порядку і для конформно інваріантних рівнянь, що володіють найширшими симетрійними властивостями провели редукцію.

Система визначальних рівнянь та основна алгебра інваріантності. Розглянемо клас еволюційних рівнянь вигляду (1). Використовуючи класичні результати Лі щодо диференціальних інваріантів груп перетворень, доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Основною алгеброю класу рівнянь (1) є алгебра:*

$$A^{bas} = \langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b \rangle. \qquad (2)$$

Тут і далі $a = \overline{1,n}$, $b = \overline{1,n}$, n – кількість просторових змінних.

Доведення. Нехай $S = \Delta u - F(u, u_0)$, де $\Delta u = \delta_{ab} u_{ab}$, $a = 1, 2, ..n$, $b = 1, 2, ..n$. Подіємо інфінітезимальним оператором на S: $XS = \delta_{ab} {}^{ab}\eta - F_u \eta - F_{u_0} {}^{0}\eta$. Підставивши в $\tilde{X}S$ відповідні перші та другі продовження, після переходу на многовид та розщеплення відносно старших похідних, отримаємо рівняння:

$$\xi^0_a = 0, \xi^0_u = 0, \xi^a_u = 0, \xi^a_b + \xi^b_a = 0, a \neq b, \xi^1_1 = \xi^2_2 = \ldots = \xi^n_n. \qquad (3)$$

Розщеплення $\tilde{X}S$ відносно степенів перших похідних за просторовими змінними задає:

$$\eta_{uu} = 0, 2\eta_{au} - \Delta\xi^a + \xi^a_0 F_{u_0} = 0, \eta F_u + [\eta_0 + u_0(\eta_u - \xi^0_0)] F_{u_0} = (\eta_u - 2\xi^1_1) F + \Delta\eta.$$

Випадок $F_{u_0} = const$ ми не розглядаємо, бо він є вже вивченим (див.[9, 10, 19]). Тому тут і далі вважаємо $F_{u_0} \neq const$. Остаточно, визначальна система рівнянь має вигляд:

$$\xi^0 = \xi^0(x_0), \xi^a = \xi^a(\vec{x}), \xi^a_b + \xi^b_a = 2\delta_{ab}\xi^1_1, 2a_a = \Delta\xi^a, \qquad (5)$$

$$\eta = a(x_0, \vec{x})u + b(x_0, \vec{x}), \eta F_u + [\eta_0 + u_0(\eta_u - \xi^0_0)] F_{u_0} = (\eta_u - 2\xi^1_1) F + \Delta\eta. \qquad (6)$$

Основна алгебра інваріантності класу рівнянь (1) описується операторами, координати яких задовольняють наступні рівняння:

$$\xi = 0, \xi = 0, \xi + \xi = 0, \Delta\xi = 0, \eta = 0. \qquad (7)$$

Розв’язком (7) є функції $\xi^0 = d_0, \xi^a = C_{ab} x_b + d_a$, де $C_{ab} = -C_{ba}, d_0, d_a$ – довільні сталі, що доводить твердження теореми 1.

Зауваження. *1. Визначальна система (5)-(6) однозначно задає вигляд оператора інваріантності заданого класу рівнянь, а саме: якщо рівняння з класу (1) є інваріантним відносно оператора X, то цей оператор повинен мати вигляд:*

$$X = \xi^0(x_0)\partial_0 + \xi^a(\vec{x})\partial_a + [a(x_0,\vec{x})u + b(x_0,\vec{x})]\partial_u. \quad (8)$$

2. Розв'язки системи (5)-(6) дають повну групову класифікацію рівняння (1) відносно вигляду функції F.

3. Алгебра (2) є прямою сумою оператора зсуву по часу ∂_0 *та алгебри Евкліда* $AE(n)$.

Перетворення еквівалентності. Відомо, що груповий аналіз одного рівняння виявляється груповим аналізом цілого класу рівнянь, які отримуються з даного рівняння локальною заміною змінних і мають ізоморфні групи симетрії [9, 11]. Тому знайдемо локальні перетворення еквівалентності класу рівнянь (1).

Теорема 2. *Максимальною локальною групою* $G^{:}$ *точкових перетворень еквівалентності класу еволюційних рівнянь* $\Delta u = F(u,u_0)$ *є група, яка породжується оператором*

$$E = (C_0x_0 + d_0)\partial_0 + (C_{ab}x_b + \kappa x_a + d_a)\partial_a + (C_1u + C_2)\partial_u + (C_1 - 2\chi)F\partial_F,$$

де C_0, d_0, $C_{ab} = -C_{ab}$, κ, d_a, C_1, C_2 *– довільні сталі.*

Доведення. З умови інваріантності рівняння (1) при додаткових умовах $F_{u_0} = 0$, $F_\mu = 0$ відносно оператора $E = \zeta^0\partial_0 + \zeta^a\partial_a + \eta\partial_u + {}$ $+ \zeta\partial_F$, одержуємо систему визначальних рівнянь відносно невідомих функцій $\xi^0, \xi^a, \eta, \zeta$:

$$\begin{aligned} &\xi^0_a = \xi^0_u = 0, \xi^a_0 = \xi^a_u = 0, \xi^a_b + \xi^b_a = 0,\\ &\eta_\mu = 0, \eta_{uu} = 0, \zeta_\mu = 0, \zeta = (\eta_u - 2\xi^1_1)F. \end{aligned} \quad (9)$$

Загальним розв'язком системи (9) є функції, що однозначно визначають координати інфінітезимального оператора E. Теорему доведено.

Зауваження. *1. Група перетворень еквівалентності даного класу рівнянь складається із зсуву по* x_μ, *зсуву по* u, *поворотів по просторовим змінним, розтягів по* x_μ, *розтягу по* u *та розтягу по* F. *Це означає, що зв'язна компонента одиниці в* $G^{:}$ *задається перетвореннями еквівалентності*

$$\begin{aligned} &x_0 \to e^{\theta_5}x_0 + \theta_0,\\ &x_a \to e^{\theta_6}(x_a\cos\theta_8 - x_b\sin\theta_8) + \theta_a,\\ &x_b \to e^{\theta_6}(x_b\sin\theta_8 + x_a\cos\theta_8) + \theta_b,\\ &u \to e^{\theta_7}u + \theta_4, F \to e^{\theta_7 - 2\theta_6}F. \end{aligned} \quad (10)$$

2. Крім неперервних перетворень еквівалентності (10), клас рівнянь (1) також допускає наступні дискретні перетворення еквівалентності:

$$x_0 \to x_0, \quad x_a \to -x_a, \quad u \to u, \quad F \to -F;$$
$$x_0 \to x_0, \quad x_a \to x_a, \quad u \to -u, \quad F \to -F.$$

3. Для окремих рівнянь вигляду (1) ефективними є додаткові перетворення еквівалентності:

$$u \to e^{\lambda_0 x_0} u, \quad x_0 \to \frac{1}{\lambda_0 k} e^{\lambda_0 k x_0} \quad \text{та} \quad u \to u - \lambda_0 x_0, \quad x_0 \to -\frac{1}{\lambda_0} e^{-\lambda_0 x_0}.$$

4. Всі наші подальші міркування будемо викладати з точністю до вказаних вище неперервних, дискретних та додаткових перетворень еквівалентності.

Максимальні алгебри інваріантності. Розглянемо рівняння, що належать до класу (1) і мають вигляд:

$$\Delta u = e^u f(u_0), \ n = 2 \qquad \text{та} \qquad \Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} f\left(\frac{u_0}{u}\right), \ n \neq 2.$$

Розглянемо задачу: знайти максимальні алгебри інваріантності (МАІ) цих рівнянь. Розв'язок цієї задачі повністю описується загальним розв'язком визначальної системи (5)-(6). Одними з рівнянь визначальної системи (5)-(6) є рівняння Кілінга, а як відомо їх розв'язки залежать від значення n. При $n \neq 2$ розв'язки рівняння Кілінга мають вигляд $\xi^a = -\lambda_a \vec{x}^2 + 2\vec{\lambda}\vec{x} x_a + \kappa x_a + (C_{ab} - C_{ba}) x_b + d_a$, а при $n = 2$ розв'язками рівняння Кілінга є функції $\xi^a = \xi^a(\vec{x})$ такі, що $\xi^a_b + \xi^b_a = 2\delta_{ab}\xi^1_1$, $\Delta\xi^a = 0$. Тут і далі δ_{ab} – символ Кронекера. Тому групову класифікацію проведемо в залежності від значень параметра n.

Теорема 5. *У випадку $n \neq 2$ основною алгеброю інваріантності класу багатовимірних рівнянь*

$$\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} f\left(\frac{u_0}{u}\right) \tag{11}$$

є алгебра

$$A_1^{bas} = \langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, D = 2x_a \partial_a + (2-n)u\partial_u, K_a = 2x_a D - \vec{x}^2 \partial_a \rangle.$$

Теорема 6. *З точністю до перетворень з $G^{:}$ для класу рівнянь (11) при $n \neq 2$ існує лише п'ять випадків розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено нееквівалентні рівняння з цього класу та їх МАІ):*

$$\Delta u = \lambda e^{\frac{u_0}{u}} u^{\frac{n+2}{n-2}} : \ A_1 = \langle A_1^{bas}, Q_1 = e^{\frac{4x_0}{2-n}} u\partial_u \rangle;$$

$$\Delta u = \lambda(\frac{u_0}{u})^k u^{\frac{n+2}{n-2}}: \quad A_2 = \langle A_1^{bas}, Q_2 = x_0\partial_0 + \frac{2-n}{4}ku\partial_u\rangle, \quad k \neq \frac{n+2}{n-2};$$

$$\Delta u = \lambda u_0^{\frac{n+2}{n-2}}: \quad A_3 = \langle A_1^{bas}, Q_3 = x_0\partial_0 + \frac{2+n}{4}u\partial_u, Q^\infty = \beta(\vec{x})\partial_u\rangle;$$

$$\Delta u = \lambda(\frac{u_0}{u} + m)^k u^{\frac{n+2}{n-2}}: \quad A_4 = \langle A_1^{bas}, Q_4 = e^{\frac{4mx_0}{k(2-n)}}(\partial_0 - mu\partial_u)\rangle, \; k \neq \frac{n+2}{n-2},$$

$m \neq 0$, $k \neq 0$;

$$\Delta u = \lambda(u_0 + mu)^{\frac{n+2}{n-2}}:$$

$$A_5 = \langle A_1^{bas}, Q_5 = e^{-\frac{4mx_0}{2+n}}(\partial_0 - mu\partial_u), Q^\infty = e^{-mx_0}\beta(\vec{x})\partial_u\rangle.$$

Тут і далі f – довільна гладка функція своїх аргументів, $\beta(\vec{x})$ – довільна гладка функція, що задовольняє рівняння $\Delta\beta = 0$, λ, $m \neq 0$, $k \neq 0$ – сталі.

Доведення обох теорем проведемо одночасно. Нехай $\omega = \frac{u_0}{u}$. У випадку $n \neq 2$ розв'язком визначальної системи (5)-(6) є функції:

$$\xi^0 = \xi^0(x_0), \xi^a = -\lambda_a\vec{x}^2 + 2\vec{\lambda}\vec{x}x_a + \kappa x_a + (C_{ab} - C_{ba})x_b + d_a, \qquad \eta = a(x)u + b(x),$$

що задовольняють систему:

$$\begin{gathered}(b\omega + b_0)\dot{f} = \frac{n+2}{n-2}bf, \; (a_0 - \omega\xi_0^0)\dot{f} + \left(\frac{4}{n-2}a + 2\xi_1^1\right)f = 0, \; \Delta b = 0, \\ a_a = \lambda_a(2-n), \; \Delta a = 0, \; \xi_1^1 = 2\vec{\lambda}\vec{x} + \kappa.\end{gathered} \tag{12}$$

Якщо f – довільна функція, то розщеплюючи по f, $\dot{f}$ отримаємо, зокрема, такі визначальні рівняння $\xi_0^0 = 0$, $a = (2-n)\left(\vec{\lambda}\vec{x} + \frac{1}{2}\kappa\right)$, розв'язком яких є функції, які задають базисні генератори конформної алгебри, що доводить теорему 5.

Опишемо всі можливі розширення МАІ. Структурні рівняння для першого та другого рівнянь системи (12) мають вигляд

$$(k_1\omega + k_2)\dot{f} = k_3 f, \tag{13}$$

де k_1, k_2, k_3 – деякі сталі. В залежності від співвідношень між коефіцієнтами k_i з точністю до перетворень з $G^{:}$ отримуємо різні вигляди функції f. Зазначимо, що при випадок $f = \mathrm{const}$ ми не розглядаємо.

Проаналізувавши структуру рівняння (13), приходимо до висновку, що можливі такі суттєво різні випадки: $f = e^{m\omega}$, $f = (\omega + m)^k$,

$f=(\omega+m)^{\frac{n+2}{n-2}}$, де $k\neq\dfrac{n+2}{n-2}$, m – довільні сталі. Для кожного з яких, використовуючи класичні результати Лі та провівши стандартні математичні міркування, отримаємо перший, другий, третій, четвертий або п'ятий пункти теореми 6. Теорему 6 доведено.

Сформулюємо результати групової класифікації для випадку $n=2$.

Теорема 7. *Нескінченна алгебра, базисні оператори якої породжуються інфінітезимальним оператором* $X^{bas}=d_0\partial_0+\xi^a(\vec{x})\partial_a-2\xi_1^1\partial_u$, *а функції* ξ^a *задовольняють рівняння* $\xi_b^a+\xi_a^b=2\delta_{ab}\xi_1^1$, $\Delta\xi^a=0$, *є основною алгеброю інваріантності класу (1+2)-вимірних рівнянь*

$$\Delta u=e^u f(u_0). \tag{14}$$

Тут і далі $f(u_0)$ – довільна гладка функція.

Теорема 8. *З точністю до перетворень з* $G^{\sim}$ *для класу (1+2)-вимірних рівнянь (14) існує три випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено нееквівалентні рівняння з цього класу та їх інфінітезимальні оператори, які породжують максимальні алгебри інваріантності цих рівнянь):*

$\Delta u=\lambda e^{u+mu_0}$:

$$X_1=(-mC_1e^{-\frac{1}{m}x_0}+d_0)\partial_0+\xi^a(\vec{x})\partial_a+[C_1e^{-\frac{1}{m}x_0}u+(\frac{1}{m}\beta_1(\vec{x})x_0+\beta_2(\vec{x}))e^{-\frac{1}{m}x_0}-2\xi_1^1]\partial_u;$$

$\Delta u=\lambda(u_0+m)^k e^u$:

$$X_2=(-\frac{kC_1}{m}e^{-\frac{m}{k}x_0}+d_0)\partial_0+\xi^a(\vec{x})\partial_a+[kC_1e^{-\frac{m}{k}x_0}-2\xi_1^1]\partial_u;$$

$\Delta u=\lambda u_0^k e^u$: $X_3=(C_1x_0+d_0)\partial_0+\xi^a(\vec{x})\partial_a+[kC_1-2\xi_1^1]\partial_u$.

Тут $m\neq0$, $k\neq0$, $\lambda\neq0$, C_1, d_0 – довільні сталі, β_1, β_2 – довільні гладкі функції такі, що $\Delta\beta_1=0$, $\Delta\beta_2=0$.

Доведення обох теорем проведемо одночасно. Підставивши у визначальну систему (5)-(6) функцію $F=e^u f(u_0)$ та розщепивши по виразам ue^u та e^u, отримаємо визначальні рівняння:

$$\begin{gathered}\xi^0=\xi^0(x_0),\xi^a=\xi^a(\vec{x}),\xi_b^a+\xi_a^b=2\delta_{ab}\xi_1^1,\\ \eta=a(x_0)u+b(\vec{x}),\Delta\xi^a=0,\Delta b=0,\\ a_0\dot{f}+af=0,(b_0+(a-\xi_0^0)\omega)\dot{f}+bf=(a-2\xi_1^1)f.\end{gathered}\tag{15}$$

Якщо f – довільна функція, то розв’язком (15) є функції $\xi^0 = d_0$, $\xi = \xi(\vec{x})$, $\eta = -2\xi$ та ξ^a задовольняють рівняння $\xi_b^a + \xi_a^b = 2\delta_{ab}\xi_1^1$, $\Delta\xi^a = 0$, що доводить теорему 7.

Дослідимо останні два рівняння системи (15) за структурою. В залежності від співвідношень між структурними коефіцієнтами з точністю до перетворень еквівалентності отримуємо різні вигляди функцій f. А саме: $f = e^{mu_0}$, $f = (u_0 + m)^k$, де $k \neq \frac{n+2}{n-2}$, m – довільні сталі. Зазначимо, що: 1. Випадок $f = \text{const}$ ми не розглядаємо; 2. Випадок $f = (u_0 + m)^k$ розбивається на два суттєво різні підвипадки: $m = 0$ та $m \neq 0$. Для кожного з яких, провівши міркування аналогічні наведеним вище, отримуємо другий або третій пункт теореми 8. Теорему 8 доведено.

Висновки. У даній роботі вивчено клас еволюційних n-вимірних рівнянь. Для багатовимірних еволюційних нелінійних рівнянь проведено групову класифікація. Запропоновані рівняння мають широкі симетрійні властивості і тому можуть бути використані в якості математичних моделей для описання реальних фізичних процесів. Знання МАІ даних рівнянь дає можливість їх інтегрування, дозволяє генерувати нові розв’язки з відомих та ін.

Література

1. Heredero R.H. Classification of invariant wave equations / R.H. Heredero, P.J. Olver // J. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37, № 12. – P. 6414-6438.
2. Nikitin A.G. System of reaction-diffusion equations and their symmetry properties / A.G. Nikitin, R.J. Wiltshire // J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 42. – P. 1666-1688.
3. Cherniha R.M. Galilean-invariant nonlinear PDEs and their exact solutions / R.M. Cherniha // J. Nonlin. Math. Phys. – 1995. – Vol. 2, № 3. – P. 374-383.
4. Basarab-Horwath P. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations / P. Basarab-Horwath, V. Lahno and R. Zhdanov // Acta Appl. Math. – 2001. – Vol. 69, № 1. – P. 43-94.
5. Zhdanov R.Z. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source / R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno // J. Phys.A: Math. Gen. – 1999. – Vol. 32. – P. 7405-7418.
6. Жданов Р.З. Групова класифікація рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом / Р.З. Жданов, В.І. Лагно // Доповіді НАН України. – 2000. – № 3. – С. 12-16.
7. Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ / S. Lie // Arch. Math. – 1881. – Vol. 8, № 1. – P. 112-125.

8. Lie S. Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten / S. Lie // Arch. Math. Naturv. – 1883. – 9. – P. 371-393.
9. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – М.: Наука. – 1978. – 400 с. – English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic Press. – 1982. – 400 p.
10. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности / Л.В. Овсянников // ДАН СССР. – 1959. – Т. 125, № 3. – С. 492-495.
11. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина / Л.В. Овсянников // Журн. прикл. мех. и техн.физ. – 1960. – № 3. – С. 126-145.
12. Дородницын В.А. О инвариантных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с источником / В.А. Дородницын // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 1982. – Т. 22. – С. 1393-1400.
13. Дородницын В.А. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях / В.А. Дородницын, И.В. Князева, С.Р. Свирщевский // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – С. 1215-1223.
14. Серова М.М. О нелинейных уравнениях теплопроводности, инвариантных относительно группы Галилея / М.М. Серова // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – К.: Ин-т математики. – 1985. – С. 119-123.
15. Ічанська Н.В. Еволюційні рівняння та системи інваріантні відносно конформної алгебр / Н.В. Ічанська // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2006. – Т.3, № 2. – С. 159-169.
16. Андреєва Н.В. Симетрійні властивості нелінійної системи рівнянь параболічного типу / Н.В. Андреєва (тепер Ічанська Н.В.) // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. – 1998. – Т. 19. – С. 10-13.
17. Ічанська Н.В. Групова класифікація еволюційних рівнянь високого порядку / Н.В. Ічанська // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. – 2011. – № 1. – С. 43-48.
18. Serova M. Evolution equations invariant under the conformal algebra / M. Serova, N. Andreeva (N. Ichanska) // Proceedings of the Second International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Phisics”. – K.: Institute of Mathematics. – 1997. – Vol. 1. – P. 217-221.
19. Сєров М.І. Симетрії Лі та точні розв’язки нелінійних рівнянь з конвективним членом / М.І. Сєров, Р.М. Черніга // УМЖ. – 1997. – Т. 49, № 9. – С. 1262-1270.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.12.2016 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., проф. ***Сєровим М.І.*** *(м. Полтава),*
д.ф.-м.н., проф. ***Королем І.І.*** *(м. Ужгород)*

GROUP CLASSIFICATION OF THE EVOLUTION EQUATION OF SECOND USAGES

N. V. Ichanska
Poltava National Technical Yuriy Kondratyuk University;
36011, Poltava, Pershotravneva Avenue, 24

This thesis is devoted to investigation of symmetry properties of nonlinear evolution equations. The group classification problem is solver for nonlinear evolutionary equations.

Key words: *equations of evolutionary type, diffusion equations, Lie algebras, group classification, exact solutions.*