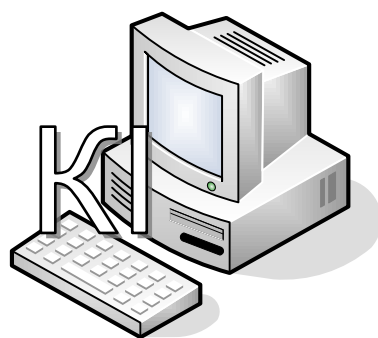


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ. МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Навчальний посібник
Частина I



Полтава 2011

УДК

Н-65

ББК-32841

Автори: О.І. Тиртишніков, завідувач кафедри комп'ютерної інженерії,
кандидат технічних наук, доцент;

М.Б. Нікулін, доцент кафедри комп'ютерної інженерії, кандидат
технічних наук, доцент;

Ю.М. Корж, старший викладач кафедри комп'ютерної інженерії.

Відповідальний за випуск: доцент О.І. Тиртишніков, завідувач кафедри
комп'ютерної інженерії, кандидат технічних наук.

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент В.Ф. Федін.

Затверджено науково-методичною
радою Полтавського національного
технічного університету імені Юрія Кондратюка
Протокол №1_від 29 березня 2010 р.

Навчальний посібник призначено для вивчення методів аналізу та розрахунку аналогових лінійних електричних кіл при вивченні дисциплін “Теорія електричних кіл”, “Теорія електричних кіл і сигналів”, “Основи схемотехніки”, “Основи електротехніки та електроніки” для студентів заочної й очної форм навчання за напрямами 6.050102 “Комп'ютерна інженерія”, 6.050903 “Телекомунікації”, 6.050101 “Комп'ютерні науки”

Тиртишніков О.І., Нікулін М.Б., Корж Ю.М., 2011

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1. ПРИНЦИПИ ТА ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ (ЛЕК).....	6
1.1. Принципи лінійних електричних кіл.....	6
1.1.1. Принцип накладання.....	6
1.1.2. Принцип дуальності (подвійності).....	7
1.2. Теореми лінійних електричних кіл.....	8
1.2.1. Теорема компенсації.....	8
1.2.2. Теорема взаємності.....	10
1.2.3. Теорема про еквівалентний генератор.....	11
2. РОЗРАХУНОК РЕЗИСТИВНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ.....	14
2.1. Розрахунок резистивних кіл драбинної структури.....	14
2.2. Розрахунок складних резистивних кіл.....	16
2.2.1. Метод вузлових напруг (МВН).....	16
2.2.2. Метод контурних струмів (МКС).....	19
3. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПРИ ГАРМОНІЧНІЙ ДІЇ.....	22
3.1. Суть методу комплексних амплітуд.....	22
3.2. Особливості розрахунку лінійних ЕК при гармонічній дії.....	24
3.3. Розрахунок індуктивних зв'язків.....	26
3.4. Комплексна форма запису потужності.....	28
4. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ДЛЯ ДОВІЛЬНОЇ ДІЇ.....	31
4.1. Аналіз ЛЕК з використанням часових характеристик.....	31
4.1.1. Аналіз ЛЕК з використанням перехідних характеристик.....	31
4.1.2. Аналіз ЛЕК з використанням імпульсних характеристик.....	38
4.2. Аналіз ЛЕК з використанням частотних характеристик.....	44
4.2.1. Спектральний спосіб подання періодичних сигналів.....	44

4.2.2. Спектри періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів.....	46
4.2.3. Спектральний спосіб подання неперіодичних сигналів.....	49
4.2.4. Сутність спектрального методу аналізу.....	55
4.2.4.1. Розрахунок проходження сигналів з дискретним спектром.....	56
4.2.4.2. Розрахунок проходження сигналів із суцільним спектром.....	58
4.2.5. Зв'язок між часовими та частотними характеристиками лінійних електричних кіл.....	60
4.3. Операторний метод аналізу електричних кіл.....	61
4.3.1. Перетворення Лапласа. L-зображення конкретних функцій.....	62
4.3.2. Теорема операторного методу аналізу.....	66
4.4. Поняття про неспотворену передачу сигналів.....	67
5. АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ.....	69
5.1. Критерій стійкості Гурвіца.....	70
5.2. Критерій стійкості Михайлова.....	71
5.3. Критерій стійкості Найквіста.....	73
ВИСНОВКИ.....	76
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....	77

ВСТУП

У навчальному посібникові викладено основні принципи і теореми з теорії електричних кіл.

У розділах II, III розглянуто методи розрахунку лінійних електричних кіл (ЛЕК) при таких типових діях, як гармонічна дія, постійний струм та напруга.

У IV розділі розглянуто спектральні представлення періодичних і неперіодичних сигналів.

Наведено частотні й часові характеристики лінійних електричних кіл. На основі введених частотних та часових характеристик розглянуто методи аналізу ЛЕК у частотній і часовій областях для довільної дії.

У V розділі розглянуто основні критерії стійкості електричних кіл у частотній області.

1. ПРИНЦИПИ ТА ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ (ЛЕК)

Напруга і струми в електричних колах являють собою „реакцію”, або „відгук”, на прикладений до кола „вплив”. Впливи в електричних колах характеризуються законами зміни в часі ЕРС або струмів джерел, що задаються.

Якщо реакція кола пропорційна впливу, то таке коло називається лінійним.

1.1. Принципи лінійних електричних кіл

Для обґрунтування багатьох методів теорії лінійних електричних кіл важливе значення мають так звані принципи лінійних кіл.

До таких принципів відносять:

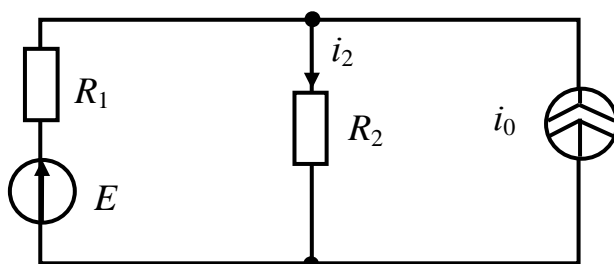
- накладання (або суперпозиції);
- дуальності.

1.1.1. Принцип накладання

Принцип накладання (суперпозиції) застосовується лише для лінійних електричних кіл і використовується для пошуку реакції ЕК на сукупність впливів, на вплив складної форми, а також для обґрунтування й спрощення багатьох методів розрахунку.

Принцип накладання формулюється так: *реакція лінійного ЕК на сукупність одночасних впливів дорівнює сумі реакцій, викликаних у тому ж колі кожним впливом окремо.*

Розглянемо приклад на застосування принципу накладання (рис. 1).



Дано: E , i_0 , R_1 , R_2 .

Визначити: i_2 .

Рис. 1

Струм i_2 знайдемо як алгебраїчну суму струмів, створених кожним із впливів E й i_0 окремо. При цьому, прийнявши рівним нулю заданий струм або напругу джерела, слід змінити в схемі його внутрішній опір. Якщо заданий струм i_0 дорівнює нулю, знайдемо струм i_2' , створений тільки джерелом E :

$$i_2' = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Припускаючи $E = 0$, знайдемо струм i_2'' , зумовлений джерелом i_0 :

$$i_2'' = \frac{i_0 R_1}{R_1 + R_2}.$$

Звідси

$$i_2 = i_2' + i_2'' = \frac{i_0 R_1}{R_1 + R_2} + \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E + i_0 R_1}{R_1 + R_2}.$$

1.1.2. Принцип дуальності (подвійності)

Використання цього принципу веде до подвійного скорочення математичних обчислень і формулювань при аналізі електричних кіл. Однак, перш ніж сформулювати цей принцип, уведемо поняття дуальних елементів, величин та кіл. *Два елементи ЕК називаються дуальними, якщо струм в одному з них веде себе, як напруга в іншому. Два електричних кола називаються дуальними, якщо струми в одному з них ведуть себе як напруги в іншому.*

На рисунку 2 наведено приклади дуальних ЕК.

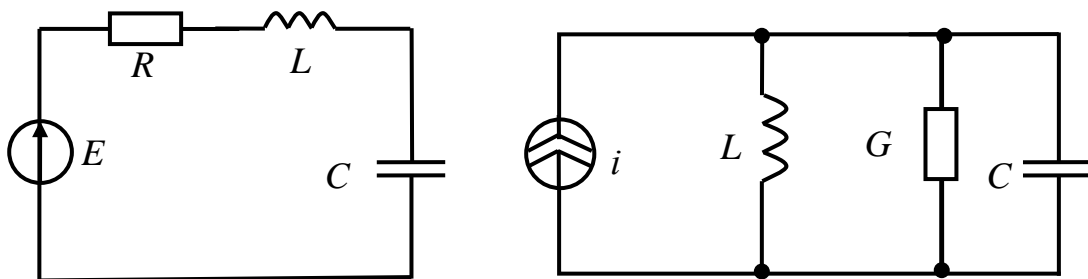


Рис. 2

Рівняння таких кіл відрізняються лише позначеннями змінних коефіцієнтів, отже, рішення їх однакові, однакові й процеси, які проходять у

дуальних колах. Поняття дуальності є взаємним, наприклад, якщо елемент L дуальний елементу C , то і елемент C дуальний елементу L .

У таблиці 1 ілюструється подвійний характер основних законів та співвідношень в електричних колах.

Аналіз рівнянь, отриманих із використанням законів Кірхгофа, дозволяє сформулювати важливий принцип теорії електричних кіл – принцип дуальності.

Таблиця 1

Основні	Дуальні
Напруга U	Струм I
Опір R	Провідність G
Індуктивність L	Ємність C
Задана напруга генератора U_{Γ}	Заданий струм генератора I_{Γ}
$\sum_{k=1}^N i_k = 0$	$\sum_{k=1}^N U_k = 0$
$U_R = Ri$	$i_G = GU$
$U_L = L \frac{di}{dt}$	$i_C = C \frac{dU}{dt}$
$U_C = \frac{1}{C} \int i dt$	$i_L = \frac{1}{L} \int U dt$

Цей принцип гласить: якщо для цього електричного кола справедливі деякі закони, рівняння або співвідношення, то вони будуть справедливі й для дуальних величин у дуальному колі.

1.2. Теорема лінійних електричних кіл

1.2.1. Теорема компенсації

Теорема компенсації формулюється таким чином: у будь-якому лінійному електричному колі без зміни струморозподілу опір можна замінити джерелом напруги, електрорушійна сила якого чисельно дорівнює падінню напруги на опорі та напрямлена назустріч струму в цьому опорі.

Для доведення теореми компенсації виділимо в схемі одну гілку з опором R , через який тече струм I , а всю іншу частину схеми умовно позначимо прямокутником A (рис. 3).

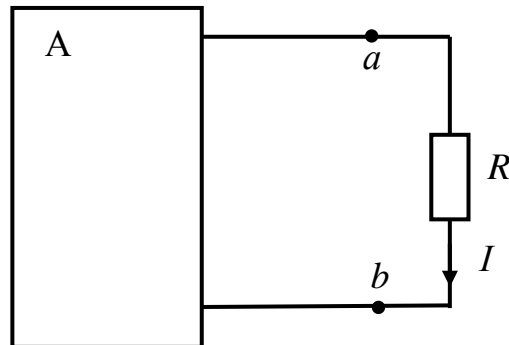


Рис. 3

У виділену гілку ввімкнемо два однакових і протилежних за напрямком джерела електрорушійної сили E , електрорушійна сила яких дорівнює падінню напруги на опорі R під дією струму I (рис. 4).

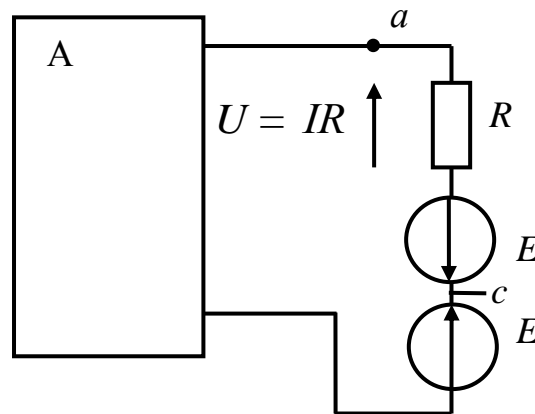


Рис. 4

Розглянемо різницю потенціалів між точками a і c :

$$\varphi_c = \varphi_a - IR + E = \varphi_a - IR + IR = \varphi_a.$$

Тобто $\varphi_a = \varphi_c$. Це говорить про те, що ділянка $a - c$ короткозамкнена. Отже, схема рисунка 4 перетвориться в схему, подану на рисунку 5, що і потрібно було довести.

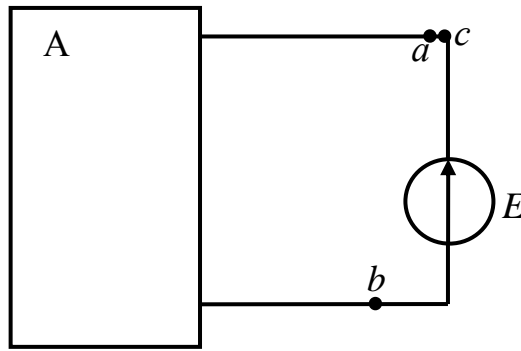


Рис. 5

1.2.2. Теорема взаємності

Теорема взаємності формулюється таким чином: для будь-якого лінійного кола струм в m -гілці, котрий викликаний джерелом ЕРС E_m , що в свою чергу знаходиться в m -гілці, дорівнює струму I_m у m -гілці, викликаному джерелом ЕРС E_k , яке знаходиться в k -гілці й чисельно дорівнює ЕРС E_m .

Для доведення звернемося до схеми (рис. 6).

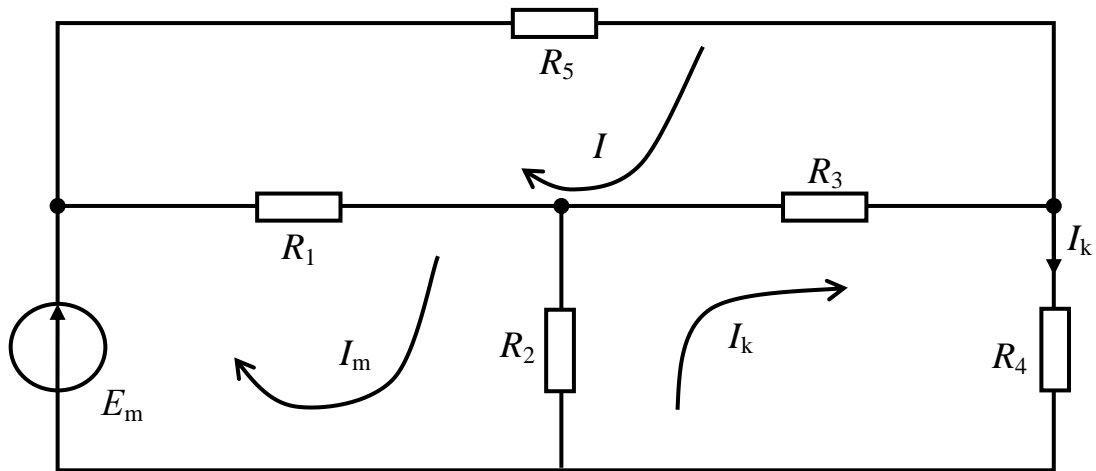


Рис. 6

Маємо

$$\begin{aligned}
 \text{M} & \quad I_m(R_1 + R_2) - I_k R_2 - I R_1 = E_m \\
 \text{H} & \quad I_m R_2 + I_k(R_2 + R_3 + R_4) - I R_3 = 0. \\
 \text{O} & \quad I_m R_1 - I_k R_3 + I(R_1 + R_5 + R_3) = 0
 \end{aligned}$$

$$I_k = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & E_m & -R_1 \\ -R_2 & 0 & -R_3 \\ -R_1 & 0 & R_1 + R_5 + R_3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -R_2 & -R_3 \\ -R_1 & R_1 + R_5 + R_3 \end{vmatrix} E_m}{D}.$$

Тепер увімкнемо джерело ЕРС до k -гілки та визначимо I_m . Отримаємо

$$\begin{aligned} \text{М} & I_m(R_1 + R_2) - I_k R_2 - IR_1 = 0 \\ \text{Н} & I_m R_2 + I_k(R_2 + R_3 + R_4) - IR_3 = E_k \\ \text{О} & -I_m R_1 - I_k R_3 + I(R_1 + R_5 + R_3) = 0 \end{aligned}$$

$$I_m = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -R_2 & -R_1 \\ E_k & R_2 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_1 + R_5 + R_3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -R_2 & -R_1 \\ -R_3 & R_1 + R_5 + R_3 \end{vmatrix}(-E_k)}{D}.$$

Робимо висновок, що $I_m = I_k$. Отже, теорема доведена.

1.2.3. Теорема про еквівалентний генератор

Теорема про еквівалентний генератор формулюється таким чином: *будь-яке лінійне електричне коло, котре розглядається відносно двох затисків, еквівалентне реальному джерелу з ЕРС, що дорівнює напрузі між цими затисками при розімкненій зовнішній ділянці кола, яка в свою чергу підключена до цих затисків (режим холостого ходу) та із внутрішнім опором, що дорівнює вхідному опору цього кола із боку цих затисків, при рівності 0 усіх ЕРС джерел напруги і струмів джерел струмів.*

Будь-яке електричне коло може бути подане у вигляді активного двополюсника (рис. 7), у гілках якого необхідно визначити струм.

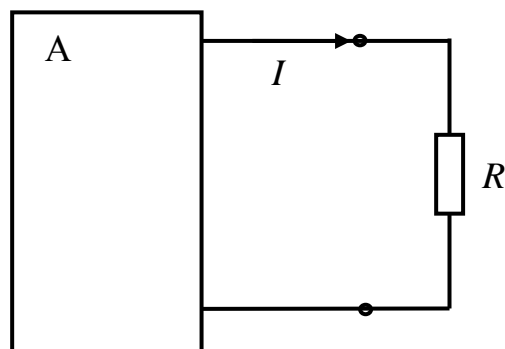


Рис. 7

Використаємо теорему компенсації й замість R увімкнемо джерело напруги з ЕРС $E = IR = U$. Тоді отримаємо схему, зображену на рисунку 8, а.

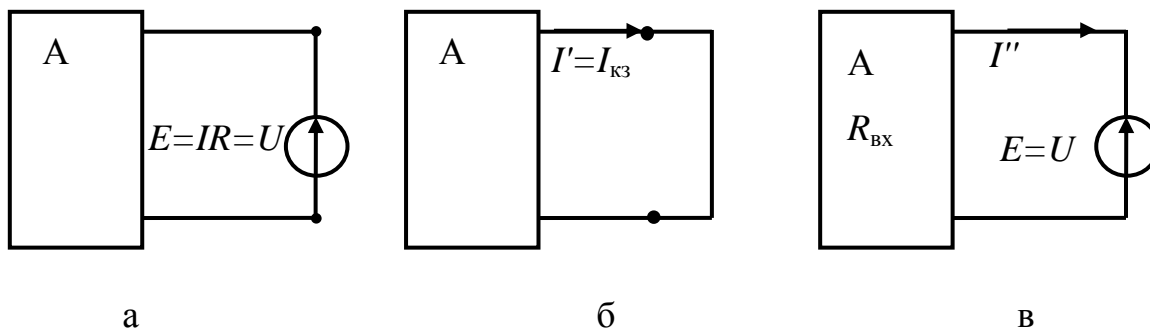


Рис. 8

Використовуючи принцип накладання, побудуємо дві схеми з двома різними режимами.

У першій діє тільки внутрішнє джерело активного двополюсника, а ЕРС компенсації – $E = 0$ (рис. 8, б).

У другій діє тільки ЕРС компенсації $E = U$, а двополюсник – пасивний, його вхідний опір $R_{\text{вх}}$ (рис. 8, в).

На основі принципу накладання $I = I' + I''$. З першої схеми $I' = I_{\text{кз}}$. З другої схеми $I'' = -\frac{U}{R_{\text{вх}}}$, звідси слідує $I = I_{\text{кз}} - \frac{U}{R_{\text{вх}}}$.

$$\text{Звідси } U = (I_{\text{кз}} - I)R_{\text{вх}}.$$

Якщо, наприклад, у режимі холостого ходу $I = 0$, то $U_{\text{xx}} = I_{\text{кз}}R_{\text{вх}}$. Таким чином, $U = U_{\text{xx}} - IR_{\text{вх}}$. Поділимо праву та ліву частини на R . Отримаємо $\frac{U}{R} = \frac{U_{\text{xx}} - IR_{\text{вх}}}{R} = I$. Звідси $I = \frac{U_{\text{xx}}}{R + R_{\text{вх}}}$. Цьому рівнянню відповідає схема рисунка 9, а.

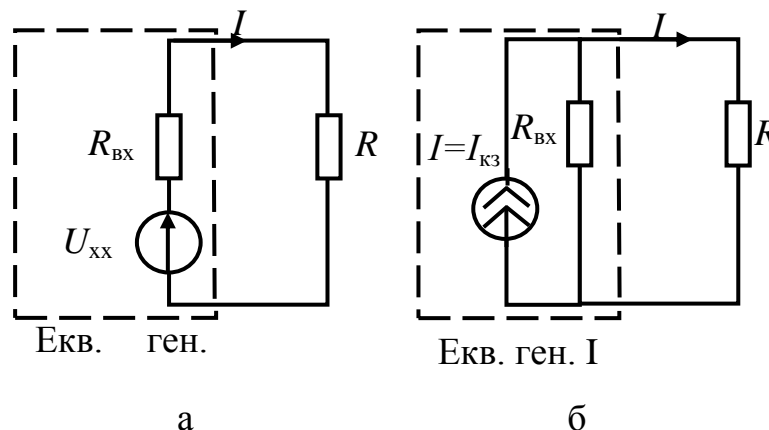


Рис. 9

Теорема доведена.

Якщо джерело напруги перетворити в джерело струму, то отримаємо схему еквівалентного генератора струму (рис. 9, б), для якої $I = \frac{R_{\text{вх}} \Psi_{\text{кз}}}{R_{\text{вх}} + R}$.

2. РОЗРАХУНОК РЕЗИСТИВНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

2.1. Розрахунок резистивних кіл драбинної структури

Методика розрахунку резистивних кіл драбинної структури основана на комбінованому використанні законів Ома і Кірхгофа.

Розглянемо це на прикладі. Задане електричне резистивне коло показано на рисунку 10.

Дано: R_1, R_2, R_3, R_4, E .

Визначити: $R_{\text{екв}}$, струми в гілках, падіння напруги на елементах.

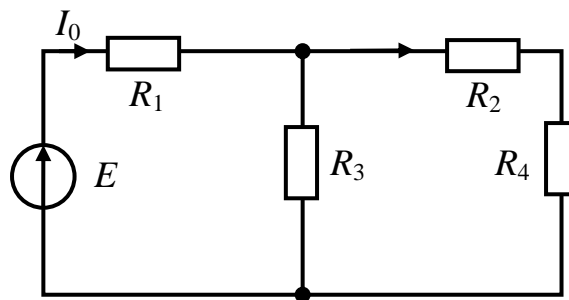


Рис. 10

Розв'язання здійснюється поетапно.

I етап: визначити загальний опір послідовного кола

$$R_{2,4} = R_2 + R_4.$$

II етап: визначити загальний опір паралельного кола R_3 і $R_{2,4}$

$$\frac{1}{R_{3,2,4}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{2,4}} = \frac{R_{2,4} + R_3}{R_3 \cdot R_{2,4}}, \text{ або } R_{3,2,4} = \frac{R_3 \cdot R_{2,4}}{R_{2,4} + R_3}.$$

III етап: визначити еквівалентний опір усього кола на ділянці з'єднаних опорів R_1 і загального опору $R_{2,3,4}$

$$R_{\text{екв}} = R_1 + R_{2,3,4} = R_1 + \frac{R_{2,4} \cdot R_3}{R_{2,4} + R_3}.$$

У подальшому визначаються струми в гілках і падіння напруги на опорах.

I етап: визначити загальний струм в колі

$$I_0 = I_1, I_1 = E/R_{\text{екв}}.$$

II етап: визначити падіння напруги на R_1

$$U_1 = I_1 \cdot R_1.$$

У вузлі струм I_0 розгалужується. На основі 1-го закону Кірхгофа

$$I_1 = I_3 + I_{2,4}.$$

Падіння напруги на загальному опорі $R_{2,3,4}$ дорівнює $U_{2,3,4} = E - U_1$, тому

струм через опір R_3 дорівнює $I_3 = \frac{E - U_1}{R_3}$, а через загальний опір $R_{2,4}$ –

$$I_{2,4} = \frac{E - U_1}{R_{2,4}} = \frac{E - U_1}{R_2 + R_4}.$$

III етап: визначити падіння напруги на R_2 , R_4

$$U_2 = I_{2,4} \cdot R_2, \quad U_4 = I_{2,4} \cdot R_4.$$

Отже, методика розрахунку резистивного кола драбинної структури має такий вигляд:

- визначити $R_{\text{екв}}$ шляхом ряду послідовно-паралельних перетворень із кінця електричного кола;
- визначити струм у гілках і падіння напруги на кожному елементі, використовуючи закони Кірхгофа.

Методика розрахунку резистивних кіл, що зводяться до кіл драбинної структури, основана на комбінованому використанні законів Ома, Кірхгофа і методики розрахунку резистивних кіл драбинної структури. Основна ідея її в тому, що шляхом ряду перетворень здійснюється драбинна структура, розрахунок якої показаний був вище.

Наприклад, дана складна структура резистивного кола (рис. 11).

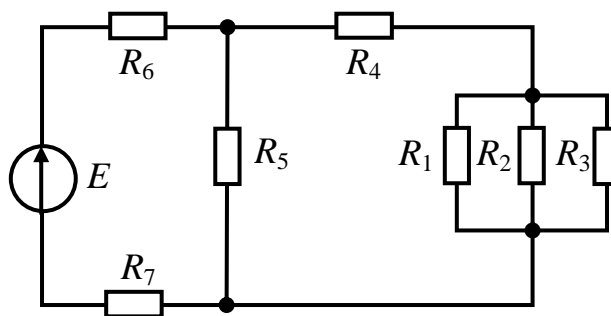


Рис. 11

На першому етапі здійснюється перетворення паралельного з'єднання опорів (рис. 12):

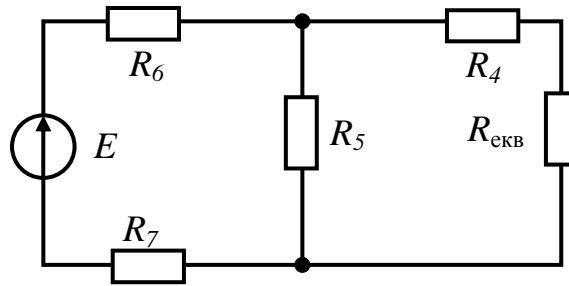


Рис. 12

$$R_{\text{екв}} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_2 R_1 + R_3 R_1 + R_2 R_3}, \quad \frac{1}{R_{\text{екв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}.$$

Далі застосовується відома методика розрахунку резистивних кіл драбинної структури.

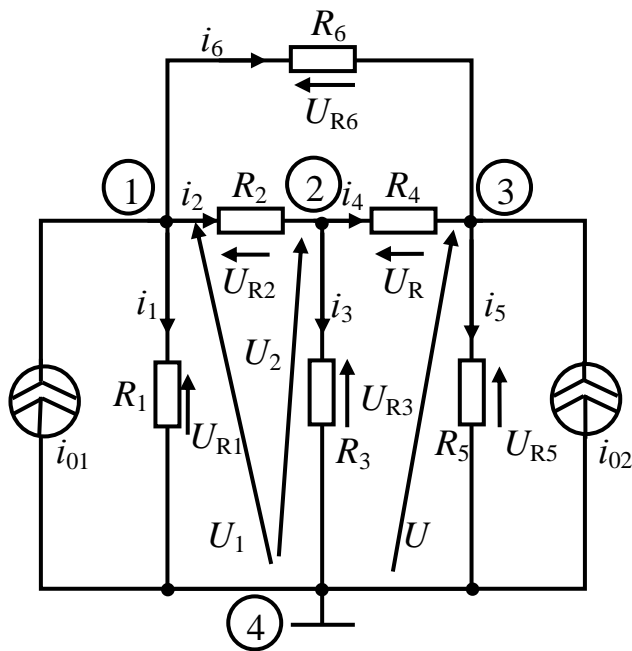
Був розглянутий порядок розрахунку простих резистивних кіл, які в загальному випадку можна віднести до послідовного або паралельного з'єднання елементів. Однак у практичній діяльності не завжди вдається здійснювати послідовно-паралельне перетворення і визначити значення еквівалентних опорів, струмів, напруг, використовуючи закони Ома і Кірхгофа. Отже, в складних колах, що містять складні вузли й елементи, котрі належать різним контурам, застосовують інші методи розрахунку.

2.2. Розрахунок складних резистивних кіл

2.2.1. Метод вузлових напруг (МВН)

Метод аналізу електричних кіл, у якому невідомими, підлягаючими визначенню є вузлові напруги, називається *методом вузлових напруг*.

Розрахунок складних електричних кіл методом вузлових напруг розглянемо на прикладі схеми (рис. 13).



Дано: $i_{01}, i_{02}, R_1 \div R_6$.

Визначити: струми в гілках і напругу на елементах.

Рис. 13

Уведемо поняття:

Вузлова напруга – це різниця потенціалів між цим вузлом і базисним вузлом.

Базисний вузол – це вузол, відносно якого вимірюються всі вузлові напруги. За базисний вузол береться той, до якого підключено найбільше число джерел ЕРС, а за їх відсутності – найбільше число гілок.

Потенціал базисного вузла вважається наперед відомим, частіше всього він вибирається рівним нулю.

Власною провідністю вузла називається сума провідностей гілок, підключених до цього вузла.

Взаємною провідністю вузлів називається провідність гілок, підключених до цих вузлів.

Використовують такі правила складання системи рівнянь за МВН:

1. У ліву частину рівняння, записаного для будь-якого вузла зі знаком „+”, уходить добуток власної провідності вузла на його вузлову напругу та зі знаком „-” – добуток взаємних провідностей на відповідні їм вузлові напруги.

2. У праву частину рівняння, записаного для будь-якого вузла, входить алгебраїчна сума заданих струмів джерел, підключених до цього вузла,

причому зі знаком „+” беруться струми, що орієнтовані до вузла, а зі знаком „-” беруться струми, орієнтовані від вузла.

Складемо систему рівнянь за наведеним вище правилом.

$$\text{Для вузла I: } (G_1 + G_2 + G_6)U_1 - G_2U_2 - G_6U_3 = i_{01}.$$

$$\text{Для вузла II: } -G_2U_1 + (G_2 + G_3 + G_4)U_2 - G_4U_3 = 0.$$

$$\text{Для вузла III: } -G_6U_1 - G_4U_2 + (G_4 + G_5 + G_6)U_3 = -i_{02}.$$

Тут $G_1 + G_2 + G_6$ – власна провідність першого вузла; $G_2 + G_3 + G_4$ – другого вузла; $G_4 + G_5 + G_6$ – третього вузла; G_2 – взаємна провідність між I і II вузлом; G_4 – між II і III вузлом, G_6 – між III і I вузлом.

Розв’язавши отриману систему рівняння відносно невідомих вузлових напруг U_1, U_2, U_3 , можна визначити падіння напруги на елементах (табл. 2).

Таблиця 2

$U_{R1} = U_1$	$U_{R4} = U_2 - U_3$
$U_{R2} = U_1 - U_2$	$U_{R5} = U_3$
$U_{R3} = U_2$	$U_{R6} = U_1 - U_3$

За відомими падіннями напруги на елементах, виходячи із закону Ома, визначають струми гілок, наприклад, $i_1 = \frac{U_{R1}}{R_1}$.

Для аналізу електричного кола методом вузлових напруг можна рекомендувати такий порядок роботи:

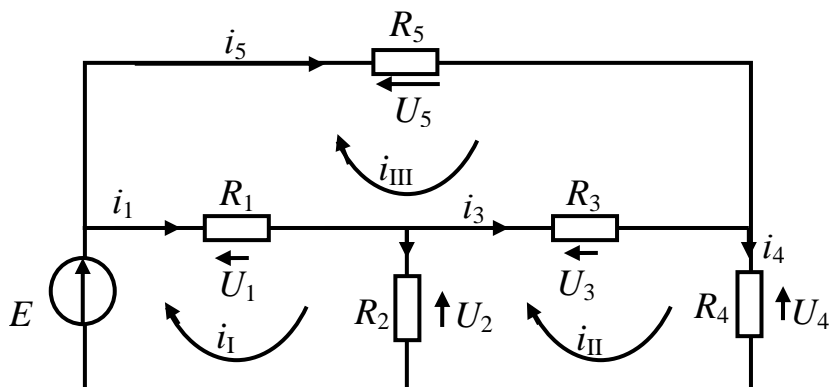
1. Вибрати додатні напрямки відліку струмів у гілках і напруг на елементах.
2. Визначити кількість незалежних рівнянь, які можна скласти за першим законом Кірхгофа.
3. Позначити складні вузли цифрами й вибрати базисний вузол.
4. Позначити вузлові напруги.
5. Скласти систему рівнянь за методом вузлових напруг.
6. За допомогою теорії визначників розв’язати систему відносно вузлових напруг.
7. Визначити напругу на елементах.

8. Визначити струм у гілках (за законом Ома).

2.2.2. Метод контурних струмів (МКС)

Метод аналізу електричних кіл, за яким підлягають визначенню контурні струми, називається *методом контурних струмів*.

Розрахунок складних електричних кіл за МКС розглянемо на прикладі схеми рисунка 14.



Дано: $E, R_1 \div R_5$.

Визначити: *струми в гілках і напругу на елементах.*

Рис. 14

Уведемо основні поняття:

Контурним струмом називається такий струм, який проходить по всіх елементах, що входять у цей контур.

Якщо елемент входить тільки в один контур, то струм у ньому дорівнює контурному струму цього контура.

Якщо елемент входить у декілька контурів, і через нього проходять декілька контурних струмів, то струм елемента згідно з принципом суперпозиції визначається як алгебраїчна сума відповідних контурних струмів.

Для формулювання правил складання рівнянь за методом контурних струмів уведемо наступні поняття:

Власний опір контуру – це сумарний опір усіх елементів, які входять у цей контур.

Взаємний опір двох контурів – це еквівалентний опір гілок, спільних для двох контурів.

З урахуванням визначень можна сформулювати правила складання рівнянь за МКС:

1. У лівій частині рівняння для кожного контуру є алгебраїчна сума, в яку входять добуток контурного струму на власний опір цього контура (із знаком „+”) і добуток взаємних опорів на відповідні контурні струми, взяті зі знаком „+”, якщо струми у взаємному опорі збігаються за напрямком або із знаком „-” в іншому випадку.

2. У правій частині рівняння для кожного контуру записується алгебраїчна сума ЕРС, діючих у даному контурі, причому зі знаком „+” уходять ЕРС, напрямки відліку яких збігаються з напрямком контурного струму й із знаком „-” беруться в протилежному випадку.

Скористаємося цими правилами і складемо систему рівнянь для схеми, представленої на рисунку 14.

$$\text{Для I контура: } i_I(R_1 + R_2) - i_{II}R_2 - i_{III}R_1 = E.$$

$$\text{Для II контура: } i_I R_2 + i_{II}(R_2 + R_3 + R_4) - i_{III}R_3 = 0.$$

$$\text{Для III контура: } i_I R_1 - i_{II}R_3 + i_{III}(R_1 + R_3 + R_5) = 0.$$

Тут $R_1 + R_2$ – власний опір першого контура $R_1 + R_2 + R_4$ – другого; $R_1 + R_3 + R_5$ – третього; R_1 – взаємний опір першого і третього контура; R_2 – першого і другого; R_3 – другого і третього.

Розв’язавши систему рівнянь відносно невідомих контурних струмів будь-якими зручними методами (наприклад, методом визначників), розраховують струми через кожний елемент і падіння напруги на кожному елементі (табл. 3).

Таблиця 3

$i_1 = i_I - i_{III}$	$U_1 = i_1 R_1$
$i_2 = i_I - i_{II}$	$U_2 = i_2 R_2$
$i_3 = i_{II} - i_{III}$	$U_3 = i_3 R_3$
$i_4 = i_{II}$	$U_4 = i_4 R_4$
$i_5 = i_{III}$	$U_5 = i_5 R_5$

Таким чином, для аналізу електричного кола методом контурних струмів можна рекомендувати таке:

1. Вибрати додатній напрямок відліку струмів у гілках і напруги на елементах.

2. Визначити кількість незалежних рівнянь, які можна скласти за другим законом Кірхгофа.

3. Вибрати незалежні контури і напрямки контурних струмів.

4. Скласти систему контурних рівнянь.

5. Розв'язати систему рівнянь відносно невідомих контурних струмів за допомогою теорії визначників.

6. Визначити реальні струми в гілках.

7. Визначити напругу на елементах за законом Ома.

Як метод контурних струмів, так і метод вузлових напруг застосовуються для аналізу будь-якого електричного кола. Перевагу тому чи іншому методу слід віддавати, виходячи з кількості рівнянь, що можуть бути складені за тим чи іншим методом.

Позначимо:

N_e – кількість елементів кола; N_B – кількість вузлів у колі.

Тоді кількість рівнянь, складених за методом контурних струмів (N_{KC}) і за методом вузлових напруг (N_{BH}), можна розрахувати за такими формулами:

$$N_{BH} = N_B - 1;$$

$$N_{KC} = N_e - N_B + 1.$$

Визначивши, який метод потребує складання меншої кількості рівнянь, вибирають метод розв'язання задачі.

Примітка. Якщо в колі наявне N_c джерел струму, то реальна кількість рівнянь, складених за МКС, може бути зменшена на N_c , тобто

$$N_{KC} = N_e - N_B + 1 - N_c.$$

Якщо в колі наявна N_n джерел напруг, підключених до базисного вузла, то кількість рівнянь, складених за МВН, може бути зменшена на N_n , тобто $N_{BH} = N_B - 1 - N_n$.

3. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПРИ ГАРМОНІЧНІЙ ДІЇ

3.1. Суть методу комплексних амплітуд

Наявність у схемі електричного кола реактивних елементів (L і C) приводить до того, що напруга на елементах і струми, котрі проходять через них, описуються рівняннями, які мають комплексний характер. Алгебраїчно форма запису комплексного числа має вигляд $\dot{A} = a + jb$ з відповідною геометричною інтерпретацією на комплексній площині (рис. 15).

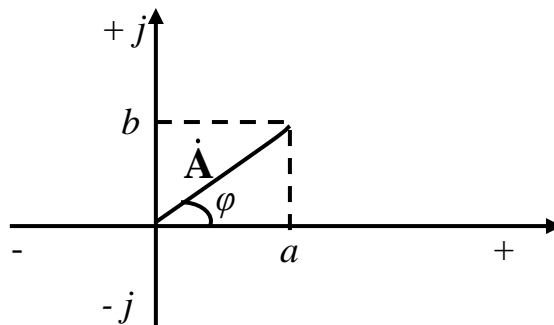


Рис. 15

Як видно з рисунка 15, величина \dot{A} не тільки залежить, а й повністю визначається значенням a і b , які також визначають кут φ між дійсною віссю та \dot{A} .

Із прямокутних трикутників легко знайти модуль $|\dot{A}| = A_m = \sqrt{a^2 + b^2}$, а також кут $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$. Крім того, легко помітити, що $a = A_m \cos \varphi$, а $b = A_m \sin \varphi$.

Підставивши їх в алгебраїчний запис комплексного числа, отримаємо його тригонометричне представлення $\dot{A} = A_m \cos \varphi + jA_m \sin \varphi$.

Скориставшись формулою Ейлера ($e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$), легко отримати запис комплексного числа в показниковій формі

$$\dot{A} = A_m \cos \varphi + jA_m \sin \varphi = A_m (\cos \varphi + j \sin \varphi) = A_m e^{j\varphi}.$$

У теорії лінійних електричних кіл величина \dot{A} називається комплексною амплітудою.

Модуль її рівний амплітуді гармонічного коливання. Так, для сигналу $U(t) = 2,8\cos(428t + 40^\circ)$ комплексна амплітуда $\dot{U}_m = 2,8e^{j40^\circ}$, а для $i(t) = \frac{U(t)}{R}$

будемо мати $\dot{I}_m = \frac{2,8}{R}e^{j40^\circ}$.

Якщо на комплексній площині відобразити миттєві значення сигналу $X(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$, то одержимо вектор, котрий обертається проти годинникової стрілки, модуль якого рівний амплітуді сигналу, а аргумент дорівнює повній фазі цього сигналу. Тобто неважко записати $X(t) = \text{Re}(X_m e^{j(\omega t + \varphi)}) = \text{Re}(\dot{X}_m e^{j\omega t})$, де $\dot{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ – комплексна амплітуда сигналу.

Запис комплексного числа в показниковій формі значно полегшує обчислення ряду математичних операцій, наприклад:

$$1. A_1 e^{j\varphi_1} \cdot A_2 e^{j\varphi_2} = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

$$2. A_1 e^{j\varphi_1} / A_2 e^{j\varphi_2} = A_1 / A_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

$$3. \text{Якщо } i(t) = \text{Re}(\dot{I}_m e^{j\omega t}), \text{ то } \frac{di(t)}{dt} = \text{Re}(j\omega \cdot \dot{I}_m e^{j\omega t}), \text{ а } \int i(t) dt = \text{Re}\left(\frac{\dot{I}_m e^{j\omega t}}{j\omega}\right).$$

Метод аналізу електричних кіл, де використовується комплексне представлення сигналів, називається символічним методом.

Наприклад, будуть справедливі такі записи в символічному вигляді для:

1. Комплексного опору $Z(j\omega) = r + jx = Z \cdot e^{j\varphi}$, де r – активна складова; x – реактивна складова.

2. Комплексної провідності $Y(j\omega) = g + jb = Y \cdot e^{j\varphi}$, де g – активна складова, b – реактивна складова.

$$3. \text{Закону Ома } \dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z(j\omega)} = \dot{U}_m Y(j\omega).$$

$$4. \text{Першого закону Кірхгофа } \sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0; n = 1, 2, \dots$$

5. Другого закону Кірхгофа $\sum_{k=1}^n \dot{U}_{mk} = 0; n = 1, 2, \dots$.

Таким чином, використання символічного методу значно полегшує обчислення і дозволяє проводити аналіз електричних кіл при гармонічній дії.

3.2. Особливості розрахунку лінійних ЕК при гармонічній дії

Розглянемо використання методу комплексних амплітуд до послідовного і паралельного з'єднання трьох елементів: опору, індуктивності та ємності.

Послідовне з'єднання елементів

Ця схема представлена на рисунку 16.

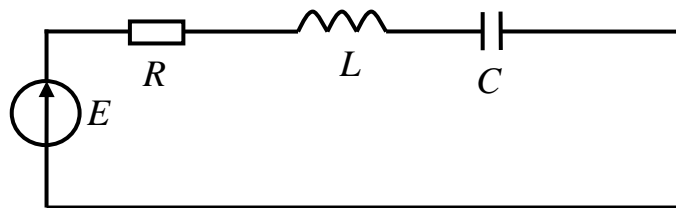


Рис. 16

Згідно з другим законом Кірхгофа, можна записати: $E = U_R + U_L + U_C$, або в символічній формі

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{I}_m R + \dot{I}_m j\omega L + \dot{I}_m \frac{1}{j\omega C} = \dot{I}_m \left(R + j\omega L - \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{I}_m \left(R + j\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \\ &= \dot{I}_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \exp(j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}) \quad \text{де} \quad \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} - \text{модуль} \end{aligned}$$

комплексного опору; $\arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ – фаза комплексного опору;

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \exp(j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}) - \text{комплексний опір.}$$

Геометричною інтерпретацією комплексного опору є трикутник опорів (рис. 17).

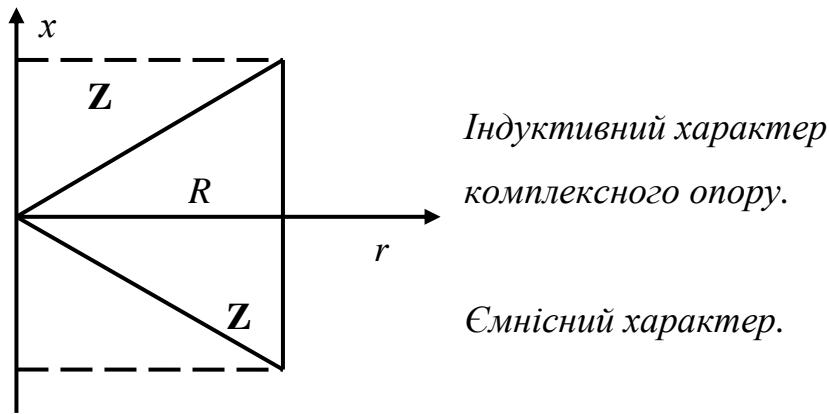


Рис. 17

Паралельне з'єднання елементів

Розглянемо схему, представлену на рисунку 18.

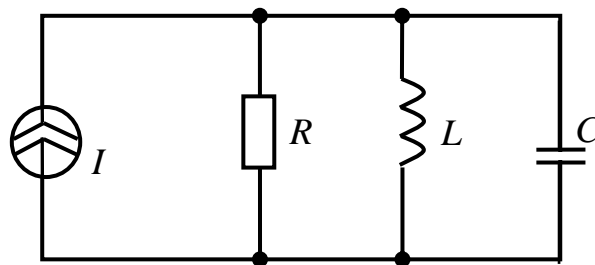


Рис. 18

Згідно з першим законом Кірхгофа, рівняння в символічній формі буде мати вигляд

$$\dot{\mathbf{I}}_m = \frac{\dot{\mathbf{U}}_m}{R} + \frac{\dot{\mathbf{U}}_m}{j\omega L} + \dot{\mathbf{U}}_m j\omega C = \dot{\mathbf{U}}_m \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) = \dot{\mathbf{U}}_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \cdot \exp \cdot \left\{ j \arctg \left[R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \right\},$$

де $\mathbf{X} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \cdot \exp \left\{ j \arctg \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) R \right] \right\}$ – комплексна провідність.

Комплексне діюче значення можна отримати, розділивши комплексну амплітуду на $\sqrt{2}$: $\dot{\mathbf{I}} = \frac{\dot{\mathbf{I}}_m}{\sqrt{2}}$; $\dot{\mathbf{U}} = \frac{\dot{\mathbf{U}}_m}{\sqrt{2}}$.

Таким чином, при розрахунку складних лінійних електричних кіл при дії гармонічних коливань можна використати МВН і МКС, замінивши в них струм, напругу й опір на комплексну амплітуду.

3.3. Розрахунок індуктивних зв'язків

Розглянемо два електричних кола, які складаються з індуктивності та джерела струму (рис. 19).

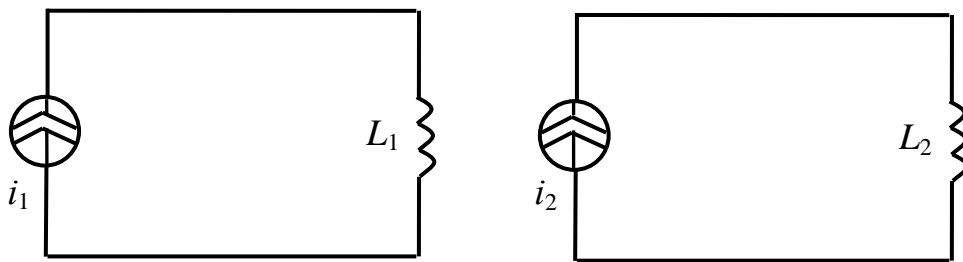


Рис. 19

Напруги на затисках котушок будуть описуватися такими рівняннями:

$$U_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}; U_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Якщо котушки індуктивності L_1 і L_2 виконати на одному металевому каркасі або розмістити дуже близько одна біля одної, то, як відомо із шкільного курсу фізики, отримаємо трансформатор (рис. 20).

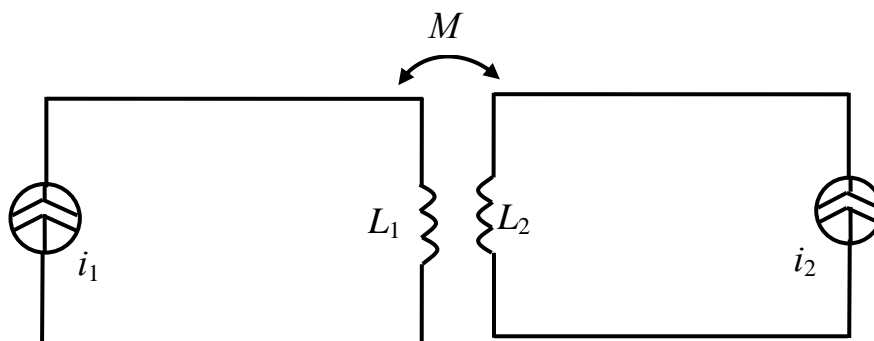


Рис. 20

У цьому випадкові напруга на затискачах котушок індуктивності буде визначатись не тільки струмами підключених джерел електричної енергії, але буде включати і складову, яка врахує взаємний вплив котушок одна на одну.

Цей взаємний вплив враховується за допомогою так званої взаємної індукції, котра позначається буквою M і чисельно дорівнює $M = k\sqrt{L_1L_2}$, де k - коефіцієнт зв'язку ($0 \leq k \leq 1$), який характеризує ступінь магнітного зв'язку котушок.

Напруги на затискачах котушок індуктивності будуть визначатися за формулами:

$$U_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm \frac{M di_2}{dt};$$

$$U_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm \frac{M di_1}{dt}.$$

Знак „+” або „-” перед складовою, зумовленою взаємною індукцією, вибираємо, виходячи зі схеми включення котушок: „+” – для узгодженого і „-” – для зустрічного включення.

Узгодженим уключенням котушок індуктивності називається таке їх уключення, при якому напрямки проходження струмів через котушки однакові відносно однойменних затискачів котушок індуктивності. Якщо напрямок проходження струмів через котушки індуктивності протилежний відносно однойменних їм затискачів, то таке включення називається зустрічним (рис. 21).

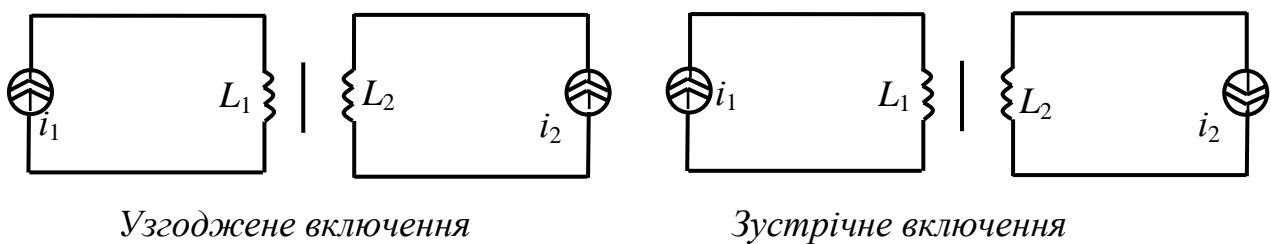


Рис. 21

У символічній формі система рівнянь для зв'язаних котушок індуктивності має вигляд

$$\begin{cases} \dot{U}_{m1} = j\omega L_1 \cdot \dot{I}_{m1} \pm j\omega M \dot{I}_{m2}; \\ \dot{U}_{m2} = j\omega L_2 \dot{I}_{m2} \pm j\omega M \dot{I}_{m1}. \end{cases}$$

3.4. Комплексна форма запису потужності

При гармонійній дії на електричне коло початкова фаза струму і напруги в загальному випадку можуть не збігатися (що в більшості випадків має місце). Припустимо, що початкова фаза струму – φ_1 , а напруги – φ_2 , тоді комплексні амплітуди: $\dot{\mathbf{I}}_m = I_m e^{j\varphi_1}$, $\dot{\mathbf{U}}_m = U_m e^{j\varphi_2}$, а фазовий зсув струму відносно напруги, дорівнює $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, буде початковою фазою в комплексній формі запису потужності $\dot{\mathbf{S}} = S e^{j\varphi}$.

Для того щоб знайти комплексну потужність, необхідно перемножити комплексну величину напруги на комплексно спряжену величину струму $\dot{\mathbf{S}} = U e^{j\varphi_2} I e^{-j\varphi_1} = UI e^{j\varphi}$, що відповідає тригонометричній формі запису $\dot{\mathbf{S}} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ$, де $P = UI \cos \varphi$ – активна потужність (Вт), $Q = UI \sin \varphi$ – реактивна потужність (ВАР – вольт-ампер реактивний).

Очевидно, що $\sqrt{P^2 + Q^2} = |\dot{\mathbf{S}}| = UI$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}$.

Повна потужність (В·А) графічно може бути представлена (рис. 22) у вигляді трикутника потужностей.

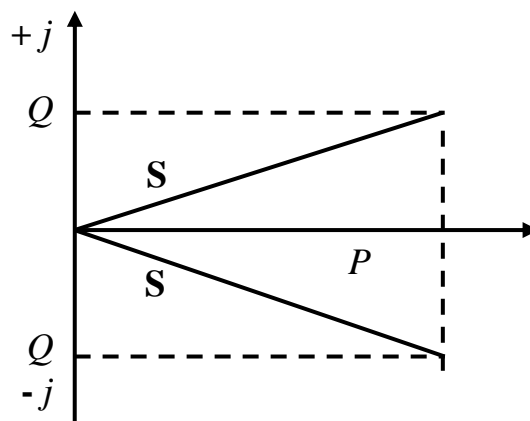


Рис. 22

$\dot{\mathbf{S}} = P + jQ$ – для індуктивного характеру навантаження;

$\dot{\mathbf{S}} = P - jQ$ – для ємнісного характеру навантаження.

Величина $\cos \varphi$ називається коефіцієнтом потужності, який характеризує ступінь використання повної потужності. Очевидно, що чим ближче значення $\cos \varphi$ до 1, тим більш повною мірою використовується потужність.

Визначимо умови передачі максимальної потужності від генератора до навантаження.

Розглянемо електричне коло рисунка 23. Струм у колі обчислюється за формулою

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{Z_H + Z_0} = \frac{E e^{j(\varphi - \arctg \frac{x_0 + x_H}{r_0 + r_H})}}{\sqrt{(r_0 + r_H)^2 + (x_0 + x_H)^2}}.$$

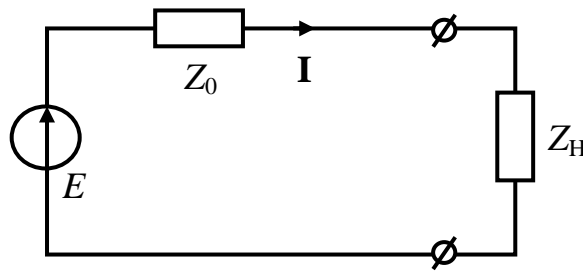


Рис. 23

Активна потужність, що споживається навантаженням, дорівнює добутку активного опору на квадрат активної складової струму:

$$P = r_H \cdot I^2 = \frac{E^2 r_H}{(r_0 + r_H)^2 + (x_0 + x_H)^2}.$$

З аналізу цього виразу бачимо, що активна потужність досягає максимуму, коли $P = \frac{E^2 r_H}{(r_0 + r_H)^2}$, тобто для $x_H = -x_0$.

Якщо диференціювати вираз за r_H , то визначимо, при якому співвідношенні r_0 і r_H до навантаження буде віддаватися максимальна потужність.

$$\text{Маємо } \frac{d(P)}{dr_H} = r_0 + r_H - 2(r_0 + r_H) = 0 \text{ @ } r_H = r_0, \text{ а } P_{\max} = \frac{E^2}{4r_H}.$$

Таким чином, умови передачі максимальної потужності від генератора до навантаження: $x_H = -x_0$; $r_H = r_0$, тобто $Z_H = Z_0^*$.

При цьому ККД становить 50%, оскільки на внутрішньому опорі генератора розсіюється половина потужності.

4. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ДЛЯ ДОВІЛЬНОЇ ДІЇ

4.1. Аналіз ЛЕК з використанням часових характеристик

Часовою характеристикою кола називається функція часу, значення якої чисельно визначається реакцією кола на типову дію. Реакція кола на задану типову дію залежить лише від схеми кола та параметрів її елементів і, таким чином, може бути її характеристикою. Часові характеристики визначають для лінійних кіл, які не мають незалежних джерел енергії й при нульових початкових умовах. Часові характеристики залежать від виду заданої типової дії. У зв'язку з цим, їх поділяють на дві групи: перехідні та імпульсні характеристики.

4.1.1. Аналіз ЛЕК з використанням перехідних характеристик

Перехідна характеристика $h(t)$ визначається реакцією кола на дію одиничної ступінчастої функції. Одиничну ступінчасту функцію визначають як функцію часу, що дорівнює нулю при $t < 0$ та дорівнює одиниці при $t > 0$:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Вигляд одиничної функції показано на рисунку 24.

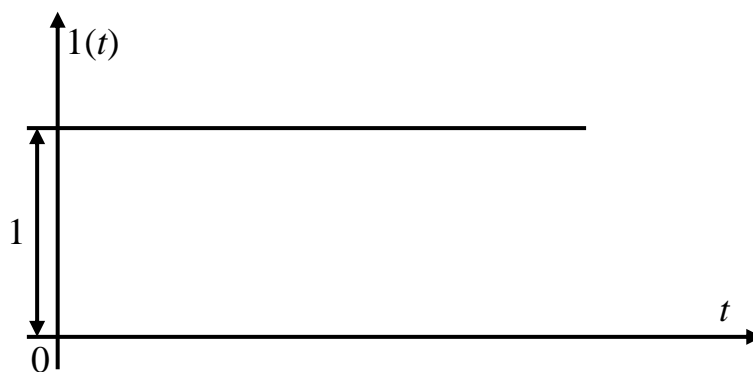


Рис. 24

За допомогою одиничної ступінчастої функції будь-яка функція часу $u = f(t)$ може бути представлена у формі добутку $1(t)f(t)$. Цей вираз дорівнює нулю при $t < 0$ і дорівнює $f(t)$ при $t > 0$. Якщо коло в момент $t = 0$ підключається до джерела постійної напруги U_0 (струму), тоді $u = U_0 1(t)$.

Цей вираз указує на те, що напруга стрибком збільшується до U_0 у момент уключення ($t = 0$) і далі безперервно діє, залишаючись постійною.

Якщо дія подається на коло не в момент $t = 0$, а з запізненням на t_1 , її потрібно записати за допомогою одиничної ступінчастої функції з аргументом, котрий запізнюється:

$$1(t - t_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1; \\ 1 & \text{при } t > t_1. \end{cases}$$

Графік цієї функції, який пояснює зміст параметра t_1 , показано на рисунку 25.

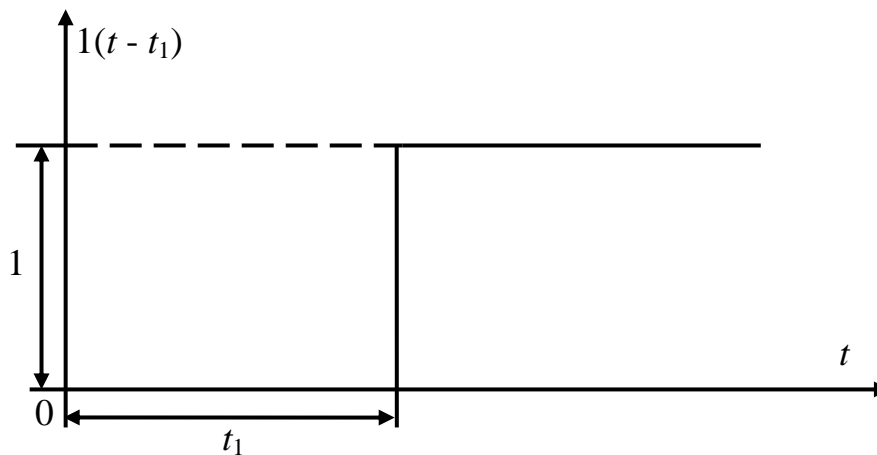


Рис. 25

Постійна напруга U_0 , що подається на коло, в цьому випадку записується таким чином: $u = U_0 1(t - t_1)$.

Одиничну ступінчасту функцію напруги можна побудувати підключенням до кола в момент $t = 0$ або $t = t_1$ джерела постійної напруги з $E = 1$ В; одиничну ступінчасту функцію струму можна сформувати підключенням до кола джерела постійного струму з $I_0 = 1$ А.

Як було відмічено раніше, перехідна характеристика – це реакція кола на одиничну ступінчасту дію, яка може бути у вигляді одиничної ступінчастої дії напруги чи струму.

Перехідна характеристика має декілька різновидів (табл. 4).

Дія	Реакція	$h(t)$
Одиничний стрибок напруги	напруга	$h_u(t)$
	струм	$h_y(t)$
Одиничний стрибок струму	напруга	$h_z(t)$
	струм	$h_i(t)$

Для визначення перехідної характеристики необхідно розрахувати перехідний процес у колі при нульових початкових умовах при включенні на одиничну функцію напруги (струму).

Розглянемо приклад.

Визначити перехідну характеристику $h_{U_C}(t)$ для кола вигляду рисунка 26:

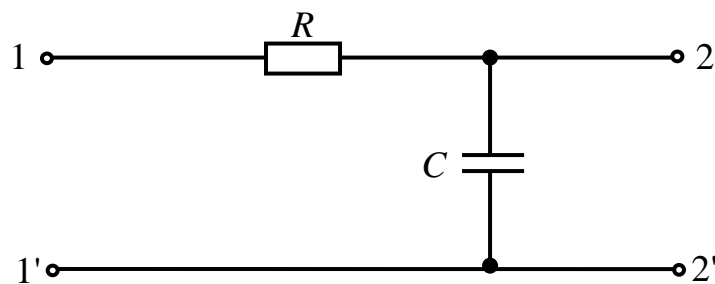


Рис. 26

Перехідна характеристика $h_{U_C}(t)$ визначається як перехідний процес у вигляді напруги на ємності при одиничній ступінчастій дії напруги. Отже, схема має вигляд рисунка 27:

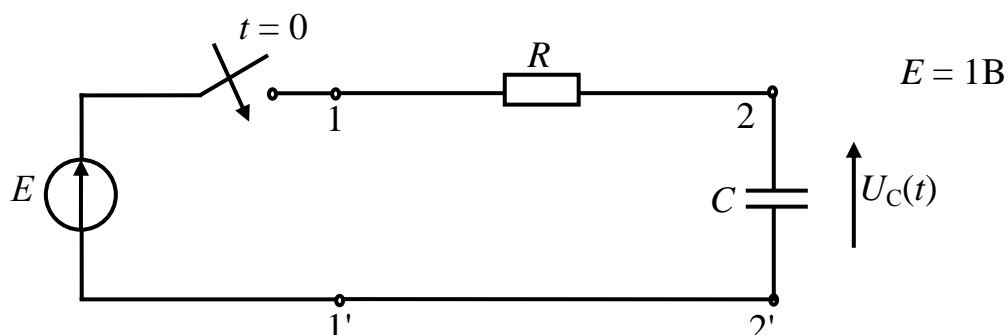


Рис. 27

Використовуючи класичний метод, будемо мати

$$U_C(t) = U_{C\text{ввл}}(t) + U_{C\text{вим}}(t), U_{C\text{вим}}(t) = E, U_{C\text{ввл}}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ де } \tau = RC.$$

Для $t = 0$ $U_C(t) = 0 = Ae^0 + E$, тобто $A = -E$. Таким чином

$$U_C(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Для $E = 1$ В матимемо $h_{U_C}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Необхідно відмітити: якщо відома перехідна характеристика кола і потрібно визначити перехідний процес на включення постійної напруги (струму), то в цьому випадку для визначення реакції достатньо перехідну характеристику помножити на величину ЕРС (струму) джерела.

Як правило, більшість задач аналізу полягає у визначенні реакції кола при включенні кола на напругу (струм), відмінних від постійних. Тому необхідно розглянути розв'язання задачі з визначення реакції кола за перехідною характеристикою при включенні його на дію довільної форми.

Припустимо, що потрібно визначити струм у лінійному пасивному двополюсникові при включенні на напругу U будь-якої форми (рис. 28).

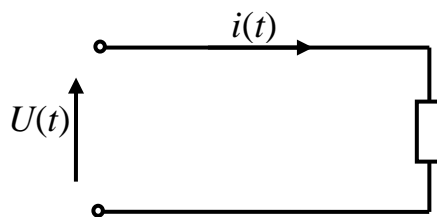


Рис. 28

Крива напруги U зображена на рисунку 29.

Початковий запас енергії двополюсника вважаємо рівним нулю. Вибираємо будь-який довільно фіксований момент спостереження t і розраховуємо перехідний струм до цього часу. Хоча момент часу вибираємо довільно, він фіксується й стає постійною величиною – параметром. У зв'язку з цим уведемо нове позначення поточного часу τ , що змінюється в межах $0 \leq \tau \leq t$. У подальшому будемо розрізняти $U(t)$ та $i(t)$ як функції моменту спостереження t і $U(\tau)$ та $i(\tau)$ як функції поточного часу τ .

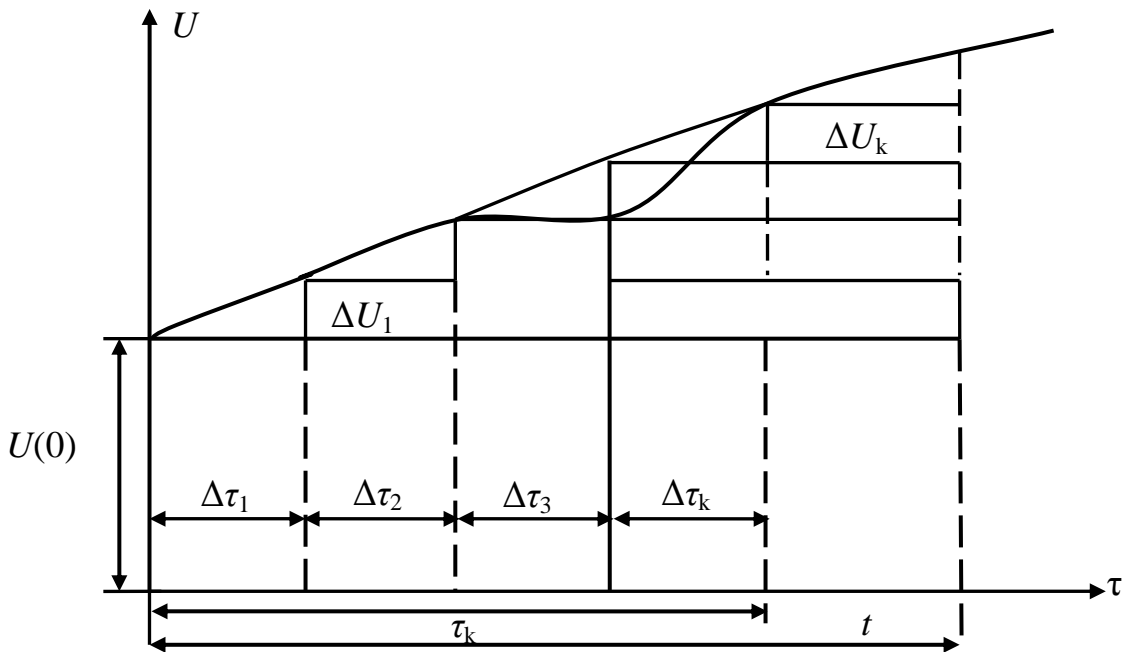


Рис. 29

Визначимо спочатку струм у колі при дії на коло ступінчастої напруги, яка приблизно апроксимує залежність рисунка 29. Заміна плавної кривої полягає в тому, що в момент часу $\tau = 0$ умикається постійна початкова напруга $U(0)1(\tau)$, котра діє на коло протягом усього інтервалу часу від 0 до ∞ . Далі через проміжок часу $\Delta\tau_1$ уступає в дію додаткова постійна напруга величиною ΔU_1 , що діє на коло, починаючи з моменту τ_1 , далі вступає в дію ΔU_2 , в момент часу τ_2 і т.д.

Використовуючи одиничну ступінчасту функцію із запізнюючим аргументом, можна приблизно записати прикладену до кола напругу у вигляді суми

$$\begin{aligned}
 U(t) &\approx U(0)1(t) + D U_1 1(t - \tau_1) + D U_2 1(t - \tau_2) + \dots + D U_k 1(t - \tau_k) = \\
 &= U(0)1(t) + \sum_{k=1}^n D U_k 1(t - \tau_k).
 \end{aligned}$$

Реакція кола (у розглянутому випадкові – це струм), виходячи з лінійності кола, визначається як алгебраїчна сума реакцій кола на дію початкової напруги $U(0)$ та сигналів напруги, які послідовно включаються один за одним. Під впливом складової напруги $U(0)1(t)$ виникне складова струму $i(\tau)$, що в момент спостереження має значення $i(t) = U(0)h(t)$. Через деякий час τ_1 напруга

збільшиться стрибком на величину ΔU_1 . Тривалість дії цього сигналу напруги, як ми вже зазначали, дорівнює $t - \tau_1$, оскільки він умикається із запізненням на τ_1 . Тому відповідна йому перехідна характеристика буде $h(t - \tau_1)$. У разі дії цього сигналу в колі з'явиться додаткова складова струму $Di_1 = DU_1h(t - \tau_1)$.

Далі, в момент часу τ_2 , відбувається стрибкоподібна зміна напруги на величину ΔU_2 , яка викличе додаткову складову струму $Di_2 = DU_2h(t - \tau_2)$.

Спостерігаємо, що в момент часу τ_k стрибок напруги ΔU_k викличе струм $Di_k = DU_kh(t - \tau_k)$. Шуканий перехідний струм буде дорівнювати сумі складових, що були знайдені для моменту часу t :

$$i(t) \gg U(0)h(t) + \Delta U_1h(t - \tau_1) + \Delta U_2h(t - \tau_2) + L + \Delta U_kh(t - \tau_k) + L + U_nh(t - \tau_n),$$

або $i(t) \gg U(0)h(t) + \sum_{k=1}^n \Delta U_kh(t - \tau_k)$, де n – число проміжків, на котрі розбивається інтервал часу від 0 до t .

Для того, щоб отримати вираз струму, який відповідає не ступінчастій залежності напруги, а заданій, необхідно проміжок часу зменшувати до нескінченно малої величини $d\tau$, а число сигналів n збільшувати до ∞ . Самі сигнали напруги при цьому будуть безперервно малими величинами. Величину кожного сигналу напруги dU можна подати у вигляді добутку швидкості зміни напруги $U\check{\tau} = \frac{dU}{d\tau}$ на тривалість цього проміжку $d\tau$, тобто $dU = U\check{\tau}d\tau$.

Сума на межі перейде в інтеграл і точне значення перехідного струму $i(t)$ для фіксованого моменту t буде

$$i(t) = U(0)h(t) + \int_0^t U\check{\tau}h(t - \tau)d\tau.$$

Вираз $\int_0^t U\check{\tau}h(t - \tau)d\tau$ називається *інтегралом Дюамеля (накладання)*.

Для розрахунку струму за цією формулою необхідно знати закон зміни заданої напруги в аналітичній формі та перехідну характеристику кола.

Інтеграл Дюамеля записується й в інших формах.

Для отримання другої форми інтеграла Дюамеля у попередньому виразі зробимо підстановку $t - \tau = x$, тоді $d\tau = -dx$ і $\tau = t - x$. Змінюються також і межі інтегрування. При $\tau = t$ верхня межа $x = 0$, а при $\tau = 0$ нижня межа $x = t$. Для нової змінної у нових межах інтегрування отримаємо

$$\int_0^t U\ddot{\check{\tau}}h(t - \tau)d\tau = - \int_0^t U\ddot{\check{t-x}}h(x)dx = \int_0^t U\ddot{\check{t-x}}h(x)dx.$$

Величина визначеного інтегралу не залежить від визначення змінної. Повернемося до старого позначення змінної, тобто замінимо x на τ . Отримаємо

$$\int_0^t U\ddot{\check{\tau}}h(t - \tau)d\tau = \int_0^t U\ddot{\check{t-\tau}}h(\tau)d\tau.$$

Таким чином, друга форма інтеграла Дюамеля буде мати вигляд

$$i(t) = U(0)h(t) + \int_0^t U\ddot{\check{t-\tau}}h(\tau)d\tau.$$

Виконавши інтегрування по частинах, у першій формі запису інтеграла Дюамеля знайдемо третю форму запису –

$$\begin{aligned} i(t) &= U(0)h(t) + \int_0^t U\ddot{\check{\tau}}h(t - \tau)d\tau = U(0)h(t) + \int_0^t h(t - \tau)dU(\tau) = \\ &= U(0)h(t) + \left|U(\tau)h(t - \tau)\right|_0^t + \int_0^t U(\tau)h\ddot{\check{t-\tau}}d\tau. \end{aligned}$$

Підставимо межі та отримаємо

$$i(t) = U(t)h(0) + \int_0^t U(\tau)h\ddot{\check{t-\tau}}d\tau,$$

де $h\ddot{\check{t-\tau}}$ – похідна функції $h(t - \tau)$ за її аргументом $(t - \tau)$.

Нарешті, використовуючи ще раз еквівалентне перетворення третьої форми інтеграла Дюамеля, отримаємо четверту форму запису

$$i(t) = U(t)h(0) + \int_0^t U(t - \tau)h\ddot{\check{\tau}}d\tau.$$

Усі чотири форми запису інтеграла Дюамеля в теоретичному відношенні рівноцінні. Ту чи іншу форму запису вибирають тільки із міркувань зручності

розрахунків, що в свою чергу залежить від того, який вид мають функції $U(t)$ і $h(t)$.

4.1.2. Аналіз ЛЕК з використанням імпульсних характеристик

Імпульсна характеристика визначається реакцією кола на дію $\delta(t)$ -функції („дельта-функції“).

Поняття $\delta(t)$ -функції найпростіше можна ввести, якщо будемо розглядати імпульс прямокутної форми. Виберемо прямокутний імпульс (рис. 30) так, щоб його висота A та тривалість Δt були в таких співвідношеннях: $A = \frac{1}{\Delta t}$ і площа імпульсу $S = A\Delta t = 1$. При такому співвідношенні зі зменшенням Δt збільшується A , а площа – незмінна й дорівнює одиниці.

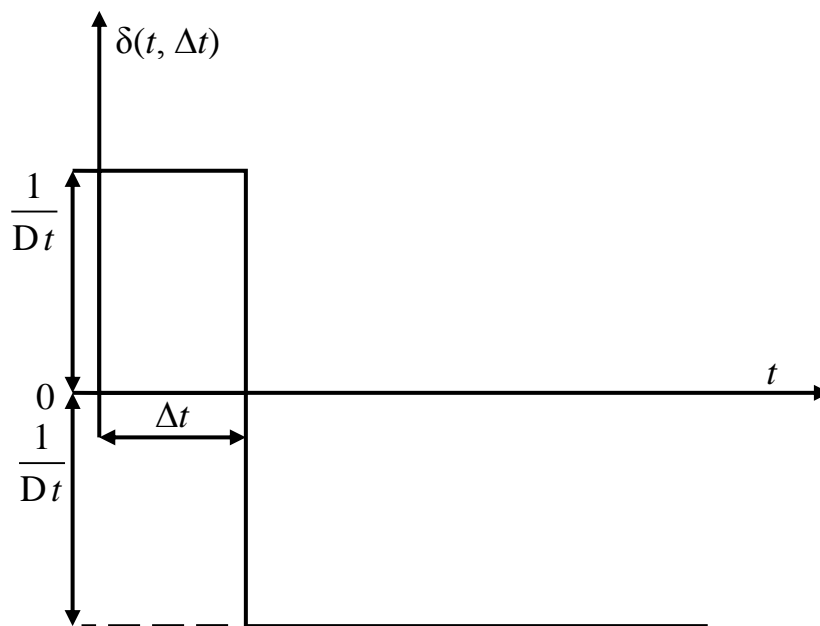


Рис. 30

Позначимо функцію, яка визначає імпульс, через $\delta(t, \Delta t)$, відмічаючи, що значення функції залежать не тільки від моменту спостереження t , але й від тривалості імпульсу Δt . Функція $\delta(t, \Delta t)$ задовольняє за визначенням аналітичний запис

$$\delta(t, \Delta t) = \begin{cases} 0, & t < 0; t > \Delta t; \\ \frac{1}{\Delta t}, & 0 < t < \Delta t. \end{cases}$$

Імпульс із такими властивостями можна сформувати за допомогою одиничних ступінчастих функцій за формулою

$$\delta(t, Dt) = \frac{1}{Dt} 1(t) - \frac{1}{Dt} 1(t, Dt) = \frac{1(t) - 1(t, Dt)}{Dt}.$$

Найбільший інтерес у теоретичному відношенні викликає крайній випадок прямокутного імпульсу $\delta(t, Dt)$, коли його тривалість прямує до нуля ($Dt \rightarrow 0$), а висота імпульсу прямує до нескінченності ($A \rightarrow \infty$). У цьому випадкові в результаті граничного переходу отримаємо нову функцію з надзвичайними якостями

$$\lim_{Dt \rightarrow 0} \delta(t, Dt) = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t, Dt)}{Dt} = \delta(t).$$

Дельта-функція володіє такими якостями:

1. Вона дорівнює нулю при $t < 0$ і $t > 0$, отже, $\delta(t) = 0$ при $t \neq 0$.

2. Вона нескінченно велика у точці $t = 0$, $\delta(0) = \infty$.

3. Крім того, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

4. При зміщенні дельта-функції вправо по осі абсцис на час τ отримаємо (рис. 31) $\delta(t - \tau) = 0$ для $t \neq \tau$.

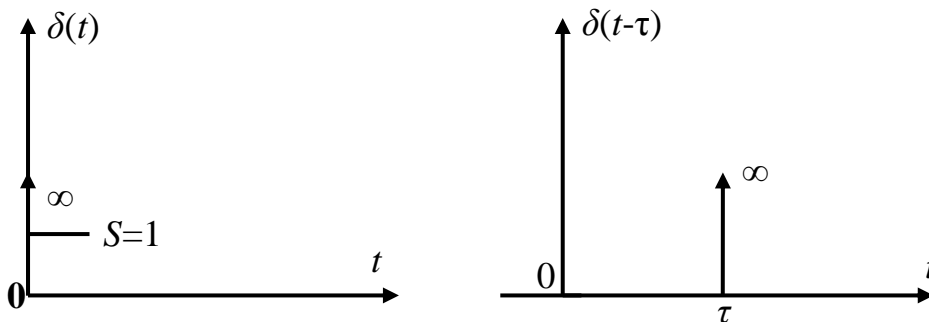


Рис. 31

5. Вона володіє фільтруючими властивостями, які визначаються

рівняннями: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$; $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau)$, де $f(t)$ – будь-яка

безперервна функція.

Імпульсна характеристика, так само, як і перехідна характеристика, залежно від виду дельта-функції й виду реакції має декілька різновидів, представлених у таблиці 5.

Таблиця 5

Вид дії	Вид реакції	Імпульсна характеристика $g(t)$
Дельта-функція за напругою	напруга	$g_U(t)$
	струм	$g_Y(t)$
Дельта-функція за струмом	напруга	$g_Z(t)$
	струм	$g_I(t)$

Розглянемо приклад щодо визначення імпульсної характеристики $g_U(t)$ для кола зображеного на рисунку 32:

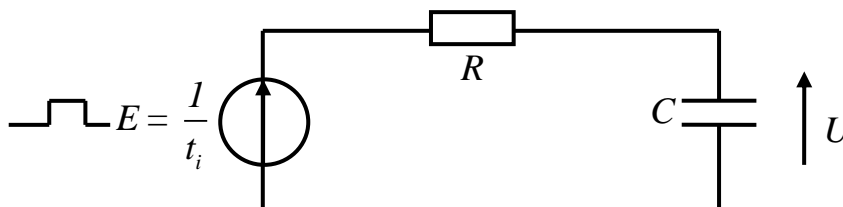


Рис. 32

На першому етапі визначимо $U(t)$ як реакцію на прямокутний імпульс з амплітудою $E = \frac{1}{t_i}$, де t_i – тривалість імпульсу:

$$U(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) e^{-\frac{t-t_i}{\tau}}.$$

Як відомо, імпульсна характеристика – це реакція кола на $\delta(t)$, тому необхідно для дії у вигляді прямокутного імпульсу його тривалість спрямувати до 0 ($t_i \rightarrow 0$). Таким чином,

$$g(t) = \lim_{t_i \rightarrow 0} U(t) = \lim_{t_i \rightarrow 0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) e^{-\frac{t-t_i}{\tau}} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Однак завдання щодо визначення імпульсної характеристики можна полегшити, якщо встановити зв'язок між імпульсною і перехідною характеристиками.

Припустимо, що на коло з відомою перехідною характеристикою діє прямокутний імпульс тривалістю t_i , площею $S = 1$ і, отже, висота імпульсу дорівнює $\frac{1}{t_i}$. Відтворимо імпульс у вигляді двох перепадів величиною $\frac{1}{t_i}$ (рис. 33).

- Перший перепад викликає реакцію $h(t) \frac{1}{t_i}$.
- Другий перепад викликає реакцію $h(t - t_i) \frac{1}{t_i}$.

У цілому для лінійного кола реакція буде дорівнювати

$$g(t, t_i) = \frac{h(t) - h(t - t_i)}{t_i}.$$

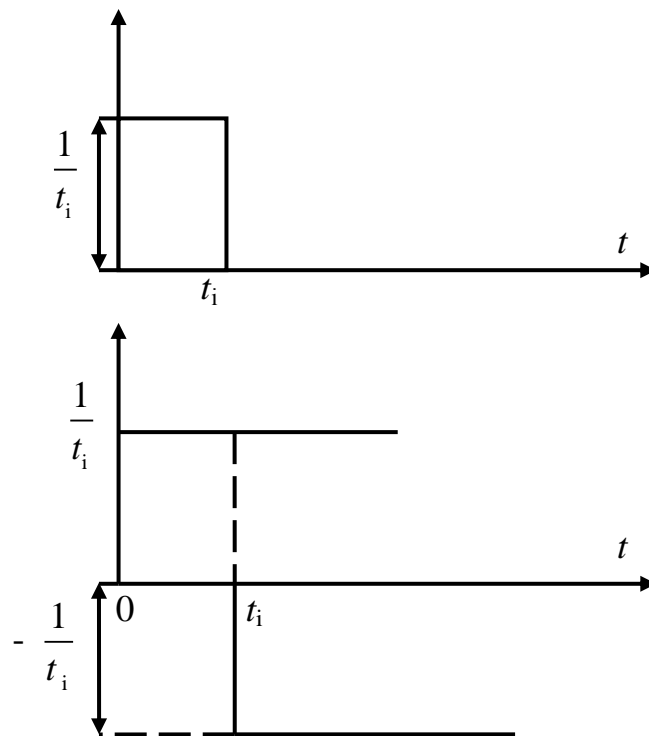


Рис. 33

Для визначення $g(t)$ необхідно тривалість імпульсу $t_i \rightarrow 0$, у результаті отримаємо

$$g(t) = \lim_{t_i \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(t - t_i)}{t_i} = h'(t).$$

Таким чином, імпульсна характеристика – це похідна за часом від перехідної характеристики: $g(t) = \dot{h}(t)$.

Але цей вираз не стосується загального випадку $h(0) \neq 0$. Для уточнення виразу, який визначає зв'язок $g(t)$ і $h(t)$ для $h(0) \neq 0$, уявимо перехідну характеристику у вигляді суми $h(t) = h(0)1(t) + h_1(t)$, яка подана на рисунку 34.

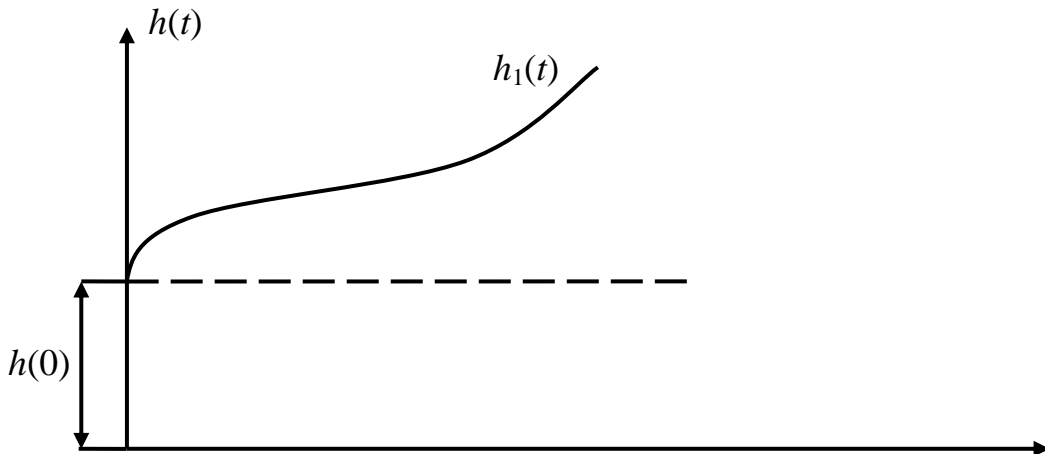


Рис. 34

Беручи до уваги, що $\dot{h}(t) = \dot{h}_1(t)$, отримаємо $g(t) = \dot{h}(t) + h(0)\delta(t)$.

Отже, для знаходження імпульсної характеристики необхідно спочатку знайти перехідну характеристику, а далі за нею визначити імпульсну.

Нехай на коло з відомою перехідною характеристикою $h(t)$ діє прямокутний імпульс з амплітудою U_m (рис. 35).

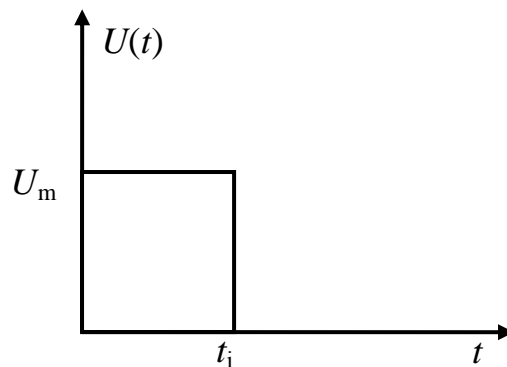


Рис. 35

Визначасмо напругу на виході кола. Подаючи імпульс у вигляді двох перепадів напруги, ми можемо записати $U(t) = U_m [h(t) - h(t - t_i)]$.

Помножимо та поділимо праву частину на t_i . Отримаємо

$$U(t) = U_m t_i \frac{h(t) - h(t - t_i)}{t_i}$$

Уведемо обмеження – нехай імпульс буде з дуже малою тривалістю, тоді

$$U_m t_i = S, \quad \frac{h(t) - h(t - t_i)}{t_i} = h'(t) = g(t).$$

Таким чином, для вхідного імпульсу з малою тривалістю ми можемо записати: $U(t) = Sg(t)$ (*).

Реакція кола на прямокутний імпульс визначається як добуток площі цього імпульсу на імпульсну характеристику кола. Однак це окремий випадок. Узагалі необхідно визначити вираз, котрий визначав би реакцію кола на довільну дію.

Припустимо, що є імпульсна характеристика кола $g(t)$. Необхідно визначити реакцію кола на будь-яку дію, наприклад, зображену на рисунку 36.

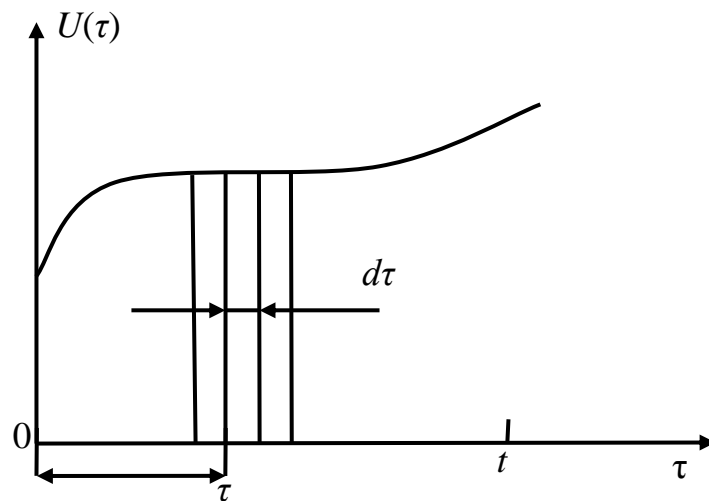


Рис. 36

Розітнемо вхідну дію на елементарні функції у вигляді прямокутних імпульсів висотою $U(\tau)$ та тривалістю $d\tau$. Через τ позначимо поточний час, який змінюється в межах $0 \leq \tau \leq t$, а t – час від початку відліку до моменту спостереження. Тоді кожен окремий елементарний імпульс буде викликати відповідну реакцію на основі (*) у вигляді складової струму

$$di(t) = U(\tau)g(t - \tau)d\tau,$$

де $g(t - \tau)$ – значення імпульсної характеристики в момент спостереження t при дії імпульсу в момент τ .

На основі принципу суперпозиції, додаючи нескінченно малі складові $di(t)$, які викликані послідовністю нескінченно малих за площиною прямокутних імпульсів напруги в момент спостереження t , отримаємо

$$i(t) = \int_0^t U(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Використовуючи еквівалентне перетворення, можна записати

$$i(t) = \int_0^t U(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

Отримані інтеграли також називаються *інтегралами накладання (Дюамеля)*.

4.2. Аналіз ЛЕК з використанням частотних характеристик

4.2.1. Спектральний спосіб подання періодичних сигналів

В основі класичного спектрального подання сигналу лежить розклад за системою синусоїдальних функцій.

Будь-який періодичний несинусоїдальний сигнал $S(t)$ із періодом T , який задовольняє в межах періоду умови Дирихле, може бути поданий рядом Фур'є, тобто рядом вигляду

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t), \text{ де } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Коефіцієнти ряду a_k і b_k визначаються відомими рівностями

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cos k\omega_0 t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \sin k\omega_0 t dt; \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) dt.$$

Це можна записати в іншій формі:

$$S(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k),$$

де $A_0 = a_0$; $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; $\varphi_k = \text{arctg} \frac{b_k}{a_k}$.

Аналізуючи ці вирази, ми бачимо, що періодичний сигнал можна розглядати як результат накладання постійної складової A_0 і нескінченно великої кількості гармонічних складових із частотами $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = 2\omega_0$, $\omega_3 = 3\omega_0$, $\omega_k = k\omega_0$, кожна із яких характеризується амплітудою A_1, A_2, \dots, A_k та початковою фазою $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$.

Сукупність гармонічних складових називається спектром сигналу. Спектр сигналу можна подати графічно. Оскільки кожна гармонічна складова з частотою ω_k має амплітуду A_k і початкову фазу φ_k , то графічно спектр зображується у вигляді ліній, які характеризують амплітуду й початкову фазу складових цієї частоти (рис. 37).

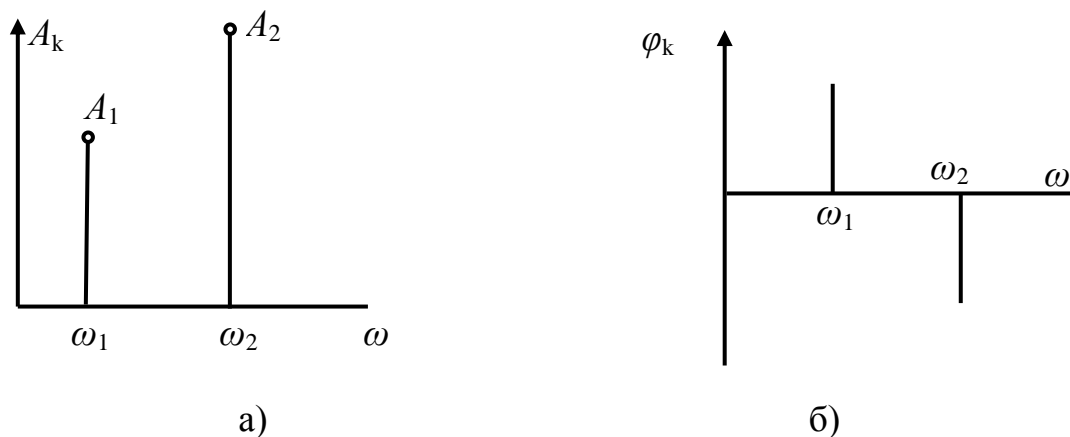


Рис. 37

Перший графік (рис. 37, а) називається спектром амплітуд, а другий (рис. 37, б) – спектром фаз.

Подані спектри складаються із дискретного ряду складових і називаються дискретними, або лінійчастими, спектрами. Періодичні сигнали завжди мають дискретні спектри.

Має місце також комплексна форма ряду Фур'є. Використовуючи формули Ейлера, тобто

$$\cos k\omega_0 t = \frac{e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2}, \quad \sin k\omega_0 t = \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}}{2}, \quad \text{одержимо}$$

$$S(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\Gamma} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega_0 t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega_0 t}$$

Уведемо від'ємні значення порядкових номерів коефіцієнтів ряду. У результаті будемо мати $a_{-k} = a_k$, $b_{-k} = -b_k$, а для $k = 0$, $a_k = a_0$, $b_k = 0$ і відповідно одержимо

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\Gamma}^{\Gamma} (a_k - ib_k) e^{ik\omega_0 t}$$

Уведемо допоміжну комплексну амплітуду

$$\dot{A}_k = A_k e^{-i\varphi_k} = a_k + ib_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} e^{-i\varphi_k}$$

У результаті одержимо

$$\dot{S}(t) = \sum_{k=-\Gamma}^{\Gamma} \dot{A}_k e^{ik\omega_0 t}, \text{ де } \dot{A}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

При комплексній формі запису ряду Фур'є шкала частот доповнюється від'ємною піввіссю, амплітудний і фазовий спектри будуть зображатися парами ординат, які відповідають додатним та від'ємним значенням частот $k\omega_0$ і $-k\omega_0$. При цьому спектр амплітуд стає симетричним відносно осі ординат (рис. 38, а), а спектр фаз – відносно початку відліку (рис. 38, б).

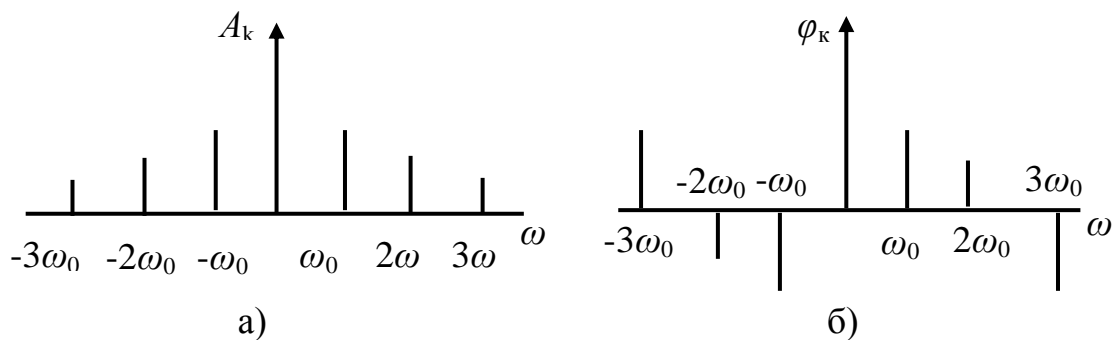


Рис. 38

4.2.2. Спектри періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів

Припустимо, що маємо періодичну послідовність відеоімпульсів, при цьому візьмемо початок координат у середині імпульсу (рис. 39).

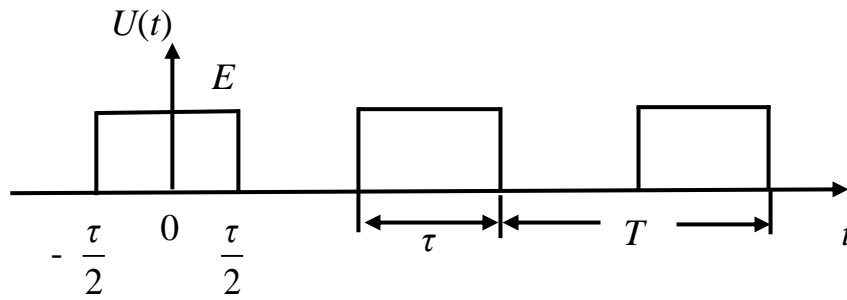


Рис. 39

Цю періодичну послідовність можна подати рядом Фур'є

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t).$$

Визначимо: $a_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cos k\omega_0 t dt = \frac{4E}{k\omega_0 T} \sin \frac{k\omega_0 \tau}{2} = \frac{2E}{\pi k} \sin \frac{k\pi \tau}{T};$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \sin k\omega_0 t dt = 0; a_0 = \frac{2E\tau}{T}.$$

Уведемо поняття шпаруватості $\frac{T}{\tau} = Q$, тоді $a_k = \frac{2E}{Q} \sin \frac{k\pi}{\frac{k\pi}{Q}}$.

Ураховуючи це, $U(t) = \frac{E}{Q} + \frac{2E}{Q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{Q}}{\frac{k\pi}{Q}} \cos k\omega_0 t$, де $\frac{E}{Q} = U_0$ – постійна

складова, а амплітуда k -ої гармоніки $U_{mk} = \frac{2E}{Q} \left| \frac{\sin \frac{k\pi}{Q}}{\frac{k\pi}{Q}} \right|$.

Аналіз одержаних виразів дозволяє зробити висновки:

1. Постійна складова й амплітуди всіх гармонік пропорційні амплітуді імпульсів і зменшуються зі зростанням їх шпаруватості.

2. Розподіл амплітуд гармонік за величинами підпорядковується закону $\frac{\sin x}{x}$, де $x = \frac{k\pi}{Q}$. Графік цієї функції має вигляд (рис. 40)

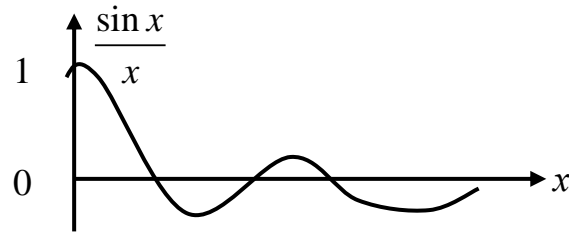


Рис. 40

Як бачимо, вона визначає перед амплітудами знак “+” чи “-”, що відповідає зміні фази гармонік на $\pm\pi$. Нулі ця функція має при $\omega = n \frac{2\pi}{\tau}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

При побудові амплітудного спектра (рис. 41) необхідно спочатку

зобразити огинаючу
$$U_{mk} = \frac{2E}{Q} \left| \frac{\sin \frac{k\pi}{Q}}{\frac{k\pi}{Q}} \right|.$$

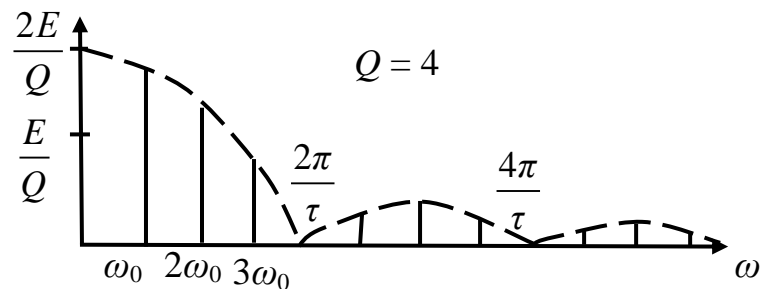


Рис. 41

При збільшенні періоду слідкування імпульсів для $\tau = \text{const}$ відбувається згущення спектра: відстань між спектральними лініями зменшується (рис. 42).

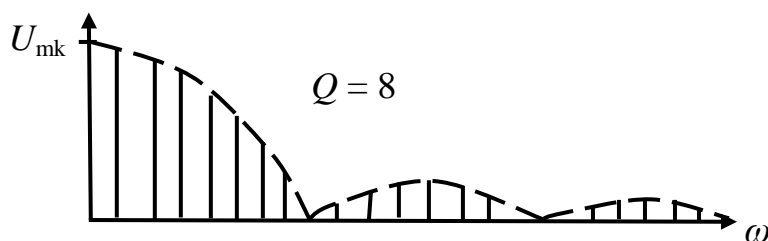


Рис. 42

Спектральні складові з найбільшою амплітудою розташовані під першими арками. Тому ефективну ширину спектра визначають так:

$$\Delta\omega_c = (1 \div 2,5) \frac{2\pi}{\tau}, \Delta f_c = (1 \div 2,5) \frac{1}{\tau}.$$

При збільшенні тривалості імпульсів ширина спектра зменшується. Таким чином, чим коротший імпульс і більша скважність, тим ширший та густіший спектр і навпаки.

Часовий та спектральний способи подання сигналів рівноправні. Вони є різними формами опису реальних процесів. Частота і час є дуальними величинами, дуальними можуть бути названі й відповідні їм способи опису сигналів.

4.2.3. Спектральний спосіб подання неперіодичних сигналів

Припустимо, що маємо неперіодичний сигнал вигляду рисунка 43:

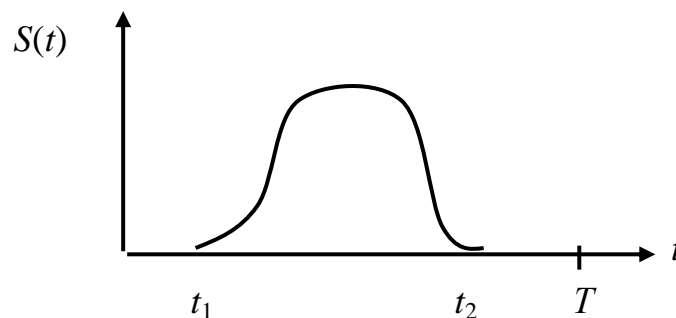


Рис. 43

Виділимо довільний відрізок часу T , який уключає в себе проміжок часу t_1, t_2 . Це коливання може бути подане як періодичне з періодом T у вигляді комплексного ряду Фур'є

$$S(t) = \sum_{k=-\Gamma}^{\Gamma} A_k e^{ik\omega_0 t}, \quad 0 < t < T, \quad \text{де } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad A_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} S(t) e^{-ik\omega_0 t} dt.$$

$$\text{Підставляючи } A_k, \text{ одержимо } S(t) = \sum_{k=-\Gamma}^{\Gamma} \left(\int_{t_1}^{t_2} S(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \right) e^{ik\omega_0 t} \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Спрямуємо T до ∞ , тоді:

– A_k – спрямується до нескінченно малих амплітуд;

- число гармонічних складових спрямується до нескінченності;
- відстань між спектральними лініями буде нескінченно мала;
- спектр стане суцільним;
- ω_0 спрямується до нескінченно малої величини $d\omega$;
- операція додавання перетворюється в операцію інтегрування.

У результаті будемо мати
$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} e^{i\omega t} S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Внутрішній інтеграл $\Phi(i\omega) = \int_{t_1}^{t_2} S(t) e^{-i\omega t} dt$ називається *комплексною*

спектральною щільністю. В загальному випадку

$$\Phi(i\omega) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(t) e^{-i\omega t} dt (**).$$

У результаті будемо мати
$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega) e^{i\omega t} d\omega (***)$$
.

Вирази (**) і (***) називаються *прямим та зворотним перетворенням Фур'є*. Розглянемо математичний вираз комплексної спектральної щільності

$$\Phi(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \sin \omega t dt.$$

Уведемо позначення: $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cos \omega t dt$, $B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \sin \omega t dt$.

З урахуванням уведених позначень модуль комплексної спектральної щільності (спектральна щільність) буде визначатися як

$$|\Phi(i\omega)| = \Phi(\omega) = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2}$$

і є парною функцією частоти ω , а фаза комплексної спектральної щільності (фазовий спектр) $\varphi_{\Phi(\omega)} = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$ є непарною функцією частоти.

Таким чином, неперіодичний сигнал $S(t)$ можемо подати як

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega) e^{i(\omega t + \varphi_{\Phi})} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi_{\Phi}) d\omega +$$

$$+i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)| \sin(\omega t + \varphi_{\Phi}) d\omega.$$

У силу непарності підінтегрального виразу другого інтегралу він дорівнює нулю і

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi_{\Phi}) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi_{\Phi}) d\omega.$$

Порівнюючи останній вираз та вираз для спектрального подання періодичного сигналу $S(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$, можемо зробити висновок, що для неперіодичного сигналу в смузі частот $d\omega$ із середньою частотою ω діє гармонічне коливання $dS(t) = \frac{1}{\pi} |\Phi(i\omega)| d\omega \cos(\omega t + \varphi_{\Phi})$, амплітуда якого нескінченно мала. З цього випливає, що аперіодичний сигнал є сумою нескінченно великої кількості гармонік із безперервно розподіленими частотами й нескінченно малими амплітудами, тобто спектр неперіодичного сигналу є суцільним.

Можна показати, що спектральна щільність має суть щільності амплітуд і має розмірність амплітуди, яка ділиться на частоту.

Для визначення загальних властивостей спектрального розкладання неперіодичних сигналів розглянемо спектри типових сигналів.

На рисунку 44 зображений прямокутний відеоімпульс.

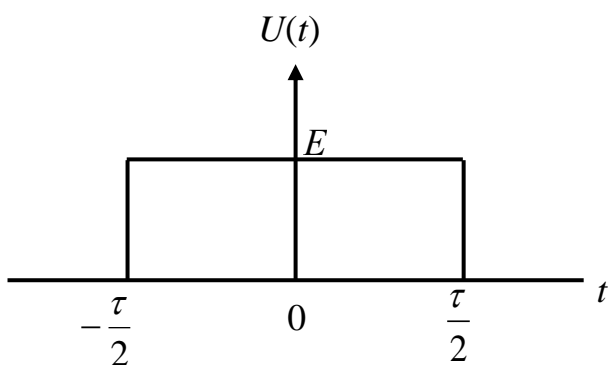


Рис. 44

Аналітичний запис має вигляд

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{\tau}{2}; \\ E, & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}; \\ 0, & t > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Визначимо його спектральну щільність. Для цього використаємо пряме перетворення Фур'є

$$\Phi(i\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U(t)\cos \omega t dt - i \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U(t)\sin \omega t dt.$$

Другий інтеграл дорівнює нулю, з цього випливає, що

$$\Phi(i\omega) = E \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos \omega t dt = \frac{E}{\omega} \sin \omega t \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2E}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Звідси спектральна щільність (спектр амплітуд) визначається як

$$\Phi(\omega) = E\tau \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right|.$$

Графік цього співвідношення наведено на рисунку 45.

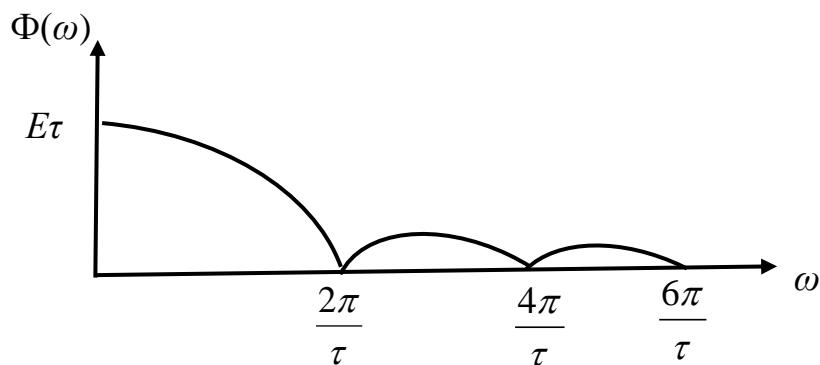


Рис. 45

Проводячи аналогію з періодичною послідовністю імпульсів, бачимо, що огинаюча аналогічна (якщо ми збільшуємо T , то число дискрет зростає, а відстань за частотою між ними зменшується, при $T \rightarrow \infty$ спектр стає суцільним).

Спектр фаз визначається виразом $\varphi(\omega) = \pm \pi(k-1)$, де $k = 1, 2, 3 \dots$ – номер арки.

У випадкові зсуву імпульсу по осі часу (рис. 46) спектральна щільність не змінюється, а спектр фаз визначається виразом $\varphi(\omega) = \omega t_0 \pm \pi(k-1)$.

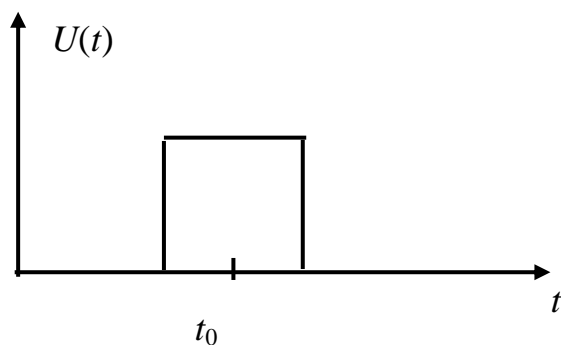
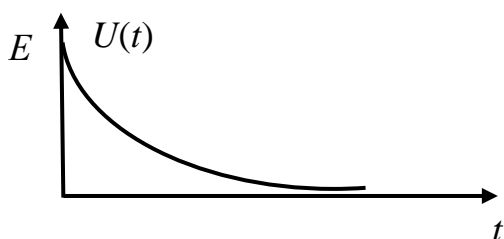


Рис. 46

Таким чином, спектр амплітуд суттєво залежить від тривалості імпульсу і не пов'язаний з його зсувом у часі, а спектр фаз визначається тривалістю імпульсу та зсувом його за часом.

Розглянемо експоненціальний відеоімпульс (рис. 47).



Аналітичний запис має вигляд

$$U(t) = \begin{cases} Ee^{-\alpha t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Рис. 47

Пряме перетворення Фур'є

$$\begin{aligned} \Phi(i\omega) &= E \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = -\frac{E}{\alpha + i\omega} e^{-t(\alpha + i\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{E}{\alpha + i\omega} = \\ &= \frac{E(\alpha - i\omega)}{(\alpha + i\omega) \cdot (\alpha - i\omega)} = \frac{E\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - i \frac{E\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо $\Phi(\omega) = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$, $\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\alpha}$.

Графік спектральної щільності зображено на рисунку 48.

У тих випадках, коли $S(t)$ відмінна від 0 лише в проміжку від 0 до $+\infty$, пряме перетворення Фур'є має назву одностороннього:

$$\Phi(i\omega) = \int_0^{\Gamma} S(t) e^{-i\omega t} dt.$$

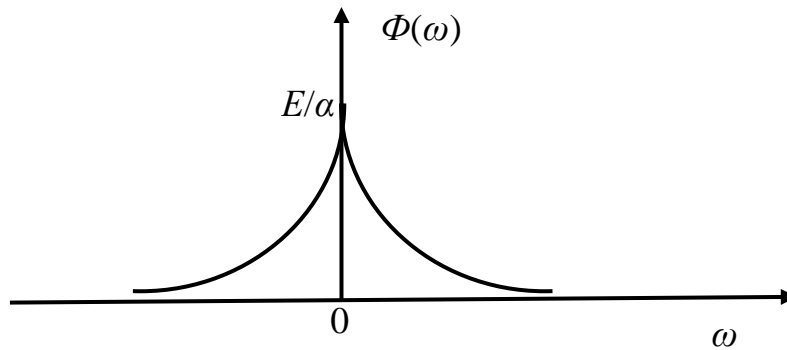


Рис. 48

Порівнюючи формулу прямого одностороннього перетворення Фур'є з формулою зображення за Лапласом $F(p) = \int_0^{\Gamma} S(t)e^{-pt} dt$, можна зробити висновок, що одностороннє перетворення Фур'є є окремим випадком перетворення Лапласа, в якому оператор p замінюють на $i\omega$.

Із сказаного слідує, що пошук спектра сигналу можна замінити пошуком зображення цієї функції за Лапласом з подальшою заміною p на $i\omega$. Так, для експоненціального імпульсу $U(t) = Ee^{-at}$ для $0 < t$. Відповідно $U(p) = E \frac{1}{p+a}$.

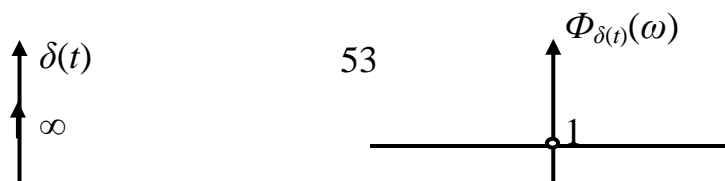
Проведемо заміну p на $i\omega$. Тоді отримаємо $\Phi(i\omega) = \frac{E}{\alpha + i\omega}$.

Для прямого перетворення Фур'є часова функція повинна відповідати умовам абсолютного інтегрування $\int_{-\Gamma}^{\Gamma} |S(t)| dt < \Gamma$. Виходячи з цього, для $\delta(t)$ і одиничної ступінчастої функції $1(t)$ перетворення Фур'є не існує. Але було б зручно узагальнити техніку перетворення Фур'є й на ці функції.

Використовуючи фільтруючі властивості $\delta(t)$, будемо мати

$$\Phi_{\delta(t)}(i\omega) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = 1.$$

Відповідно графіки $\delta(t)$ і $\Phi(i\omega)$ наведено на рисунку 49, а, б.



а

б

Рис. 49

4.2.4. Сутність спектрального методу аналізу

Сутність спектрального методу аналізу електричних кіл полягає в такому.

Сигнал, що діє на електричне коло, як було показано раніше, незалежно від того, є він періодичним чи неперіодичним, може бути представлений у вигляді сукупності гармонійних дій. Приймається, що ця сукупність гармонійних дій прикладена до електричного кола задовго до моменту спостереження (моменту визначення реакції).

При цьому сигнал (реакція), котрий з'являється на виході кола (лінійного), відповідно до принципу суперпозиції (накладання) визначається як сума гармонійних реакцій, які викликаються кожною з гармонійних складових вхідного сигналу (дії) окремо.

Таким чином, задача спектрального методу аналізу зводиться до аналізу сталих режимів у колі при синусоїдальній дії (символічний метод аналізу). Притому, як нам відомо з розв'язання задач символічним методом, значення гармонічних складових вихідного сигналу легко знаходити, якщо відомі спектр вхідного сигналу і частотна характеристика електричного кола (амплітудночастотна й фазочастотна характеристики – комплексна передавальна функція). Оскільки в основі спектрального методу аналізу лежить принцип суперпозиції, такий метод є лінійним, він справедливий для розв'язання лінійних задач, задач аналізу проходження сигналів через лінійні кола.

4.2.4.1. Розрахунок проходження сигналів з дискретним спектром

Припустимо, що на електричне коло діє сигнал у вигляді періодичної несинусоїдальної напруги або струму, які можна подати рядом Фур'є у вигляді суми нескінченного числа гармонік

$$U_{\text{вх}}(t) = U_{\text{вх}}(0) + \sum_{k=1}^{\Gamma} U_{\text{вх}_{\text{mk}}} \cos(\omega_k t - \varphi_{\text{вх}_k}).$$

Необхідно визначити вихідний сигнал електричного кола, якими є струм або напруга на одному із його елементів.

Із методу комплексних амплітуд нам відомо, що комплексна амплітуда гармонічного струму частоти ω , який проходить у гілці, та напруга, котра до неї прикладена, пов'язані законом Ома у символічному вигляді $\dot{I}_{\text{m}} e^{i\omega t} = Y(i\omega) \dot{U}_{\text{m}} e^{i\omega t}$; $\dot{U}_{\text{m}} e^{i\omega t} = Z(i\omega) \dot{I}_{\text{m}} e^{i\omega t}$, де $Y(i\omega)$ і $Z(i\omega)$ – відповідно комплексна провідність й опір гілки, що розраховані на частоті ω .

Прикладена напруга, що подана рядом Фур'є, може бути записана у вигляді $U(t) = U_0 + U_{\text{m1}} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + U_{\text{mk}} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$.

Тоді на кожній частоті ω_k можемо записати

$$\begin{cases} \dot{I}_{\text{mk}} e^{i\omega_k t} = Y(i\omega_k) \dot{U}_{\text{mk}} e^{i\omega_k t}; \\ \dot{U}_{\text{mk}} e^{i\omega_k t} = Z(i\omega_k) \dot{I}_{\text{mk}} e^{i\omega_k t}, \end{cases}$$

де $Y(i\omega_k)$ та $Z(i\omega_k)$ – комплексна провідність і опір гілки, які розраховані на частоті ω_k .

Це дозволяє знайти амплітуди й початкові фази гармонійних складових вихідного струму

$$I_0 = \frac{U_0}{Z_0}; \quad I_{\text{mk}} = \frac{U_{\text{mk}}}{Z(\omega_k)}; \quad \varphi_{\text{kl}} = \varphi_k - \arctg \frac{X(\omega_k)}{R},$$

де Z_0 – опір гілки постійному струмові ($\omega = 0$);

$Z(\omega_k)$ – модуль комплексного опору гілки на частоті ω_k ;

$X(\omega_k)$ – реактивний опір гілки на частоті ω_k ;

R – активний опір гілки на частоті ω_k .

Беручи до уваги, що коло лінійне, струм у колі за принципом суперпозиції можна визначити як суму гармонік струму

$$i(t) = I_0 + I_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_{11}) + K + I_{mk} \cos(\omega_k t + \varphi_{k1}).$$

Комплексний опір $Z(i\omega)$ та провідність $Y(i\omega)$ є частинними випадками більш загального поняття – комплексної передавальної функції $T(i\omega)$.

Відношення комплексної амплітуди (діючого значення) реакції до комплексної амплітуди (діючого значення) дії називається комплексною передавальною функцією.

Залежно від вигляду дії й вигляду реакції будемо мати наступні такі види комплексних передавальних функцій (табл. 6).

Таблиця 6

Вигляд дії	Вигляд реакції	$T(i\omega)$
\dot{E}_m	\dot{U}_{m2}	$T_U(i\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{I}_m}$
	\dot{I}_{m2}	$T_Y(i\omega) = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{E}_m}$
\dot{I}_m	\dot{U}_{m2}	$T_Z(i\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{I}_m}$
	\dot{I}_{m2}	$T_I(i\omega) = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{I}_m}$

Якщо знаємо комплексну передавальну функцію і комплексну амплітуду дії, то можна визначити комплексну амплітуду реакції:

$$\dot{U}_{m2} = T_U(i\omega)\dot{E}_m;$$

$$\dot{U}_{m2} = T_Z(i\omega)\dot{I}_m.$$

Модуль комплексної передавальної функції називається амплітудно-частотною характеристикою, тобто $|T(i\omega)|$ – АЧХ. Аргумент комплексної передавальної функції називається фазочастотною характеристикою. $\Theta(\omega)$ – ФЧХ.

Припустимо, що вхідний сигнал представлений рядом Фур'є

$$U_{\text{вх}}(t) = U_{\text{вх}}(0) + \sum_{k=1}^{\Gamma} U_{\text{вхmk}} \cos(\omega_k t - \varphi_{\text{вхk}}).$$

У цьому випадкові вихідний сигнал при відомій комплексній передавальній функції кола буде дорівнювати

$$U_{\text{вих}}(t) = U_{\text{вх}}(0) \Psi(0) + \sum_{k=1}^{\Gamma} U_{\text{вх.мк}} |T(i\omega_k)| \cos[\omega_k t - \varphi_{\text{вх.к}} + \Theta(\omega_k)].$$

Таким чином, вихідний сигнал (реакція) лінійного електричного кола при дії на нього періодичного несинусоїдального сигналу може бути отриманий перемноженням амплітуд гармонік вхідного сигналу на значення амплітудно-частотної характеристики кола з частотою $\omega = \omega_k$, а його фазочастотний спектр – сума фазочастотного спектра вхідного сигналу і значень аргументів комплексної передавальної функції кола на відповідних частотах.

Виходячи із вищесказаного, необхідно дотримуватися такої методики розрахунків:

1. Подати періодичний несинусоїдальний вхідний сигнал у вигляді ряду Фур'є.
2. Визначити на основі символічного методу комплексну передавальну функцію кола.
3. За комплексною передавальною функцією визначити АЧХ і ФЧХ.
4. Розрахувати амплітуди гармонічних складових вхідного сигналу як добуток амплітуд вхідного сигналу на АЧХ кола (при $\omega = \omega_k$).
5. Розрахувати початкові фази гармонічних складових вхідного сигналу як суму початкових фаз гармонічних складових вхідного сигналу й аргументу $T(i\omega)$ кола (при $\omega = \omega_k$).
6. Подати вихідний сигнал як суму гармонічних складових.

4.2.4.2. Розрахунок проходження сигналів із суцільним спектром

Раніше було визначено, що спектральний опис неперіодичних сигналів визначається комплексною спектральною щільністю, яку знаходимо на основі прямого перетворення Фур'є

$$\Phi(i\omega) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(t) e^{-i\omega t} dt,$$

а перехід від спектрального представлення сигналу до часового – на основі зворотного перетворення Фур'є

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \Phi(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Розглянемо комплексну спектральну щільність

$$\Phi(i\omega) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(t) \sin \omega t dt.$$

Уведемо позначення

$$\int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(t) \cos \omega t dt = A(\omega), \quad \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(t) \sin \omega t dt = B(\omega).$$

Звідси $|\Phi(i\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ є парною функцією,

$$\varphi_{F[\omega]} = - \operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \text{ є непарною функцією.}$$

Отже, можна записати

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\Gamma} |\Phi(i\omega)| e^{i\omega t} e^{i\varphi_F} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\Gamma} |\Phi(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi_F) d\omega + i \frac{1}{\pi} \int_0^{\Gamma} |\Phi(i\omega)| \sin(\omega t + \varphi_F) d\omega. \end{aligned}$$

Другий інтеграл в силу непарності функції $\sin \alpha$ дорівнює 0. Звідси

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Gamma} |\Phi(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi_F) d\omega.$$

Спираючись на фізичний зміст інтеграла, ми можемо стверджувати, що неперіодичний сигнал є сукупність елементарних гармонічних складових

$$dS(t) = \frac{1}{\pi} |\Phi(i\omega)| d\omega \cos(\omega t + \varphi_F).$$

Використовуючи знання щодо визначення реакції кола при синусоїдальній дії, можемо визначити вихідну елементарну гармонічну складову

$$dS_{\text{вих}}(t) = \frac{1}{\pi} |\Phi(i\omega)| |T(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi_F + Q(\omega)) d\omega.$$

Приймаючи до уваги, що коло лінійне, отримаємо вихідний сигнал

$$S_{\text{вих}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(i\omega) T(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Визначимо $\Phi(i\omega)T(i\omega) = \Phi_{\text{вих}}(i\omega)$ – комплексну спектральну щільність вихідного сигналу і, таким чином,

$$S_{\text{вих}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \Phi_{\text{вих}}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

На основі проведеного аналізу можемо зробити висновок, що в спектральному методі аналізу при дії на лінійне коло неперіодичного сигналу необхідно:

1. Визначити комплексну спектральну щільність дії (вхідного сигналу).
2. Визначити комплексну передавальну функцію кола.
3. У результаті перемноження комплексної спектральної щільності передавальної функції отримати комплексну спектральну щільність реакції.
4. Взяти зворотне перетворення Фур'є від комплексної спектральної щільності реакції (отримуємо сигнал на виході).

4.2.5. Зв'язок між часовими та частотними характеристиками лінійних електричних кіл

Розглянемо зв'язок між частотними і часовими характеристиками лінійного електричного кола.

Нехай на коло діє дельта - функція $\delta(t)$, тоді

$$\Phi(i\omega)_{\delta(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1.$$

Як нам відомо, реакція кола на дельта-функцію називається імпульсною характеристикою кола, тобто

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \Phi(i\omega)_{\delta(t)} \Psi(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} T(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Звідси імпульсну характеристику кола визначають як зворотне перетворення Фур'є від комплексної передавальної функції. Або

$$T(i\omega) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} g(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Також можливо показати, що

$$h(t) = \frac{T(0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{T(i\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

4.3. Операторний метод аналізу електричних кіл

Відомо, що аналіз перехідних процесів класичним методом остаточно зводиться до розв'язання диференціальних рівнянь. При цьому основними труднощами аналізу є визначення довільних сталих. У міру ускладнення електричного кола і збільшення порядку диференціального рівняння ці труднощі збільшуються.

Будь-який математичний метод, що спрощує практику інтегрування диференціальних рівнянь, котрий не потребує визначення довільних сталих, може використовуватися для розрахунку перехідних процесів в електричних колах. До таких методів у першу чергу відносять операторний метод.

Операторний метод аналізу перехідних процесів у лінійних електричних колах також ефективний і цілеспрямований, як ефективний та цілеспрямований символічний метод аналізу встановленого режиму при гармонічних напругах і струмах.

Припустимо, що потрібно знайти розв'язання диференціального рівняння – будь-яку функцію (струм або напругу) дійсної змінної $f(t)$. Операторний метод розв'язання цієї задачі зводиться до чотирьох послідовних етапів:

1. Від функції $f(t)$, що називається оригіналом, переходять за допомогою перетворення Лапласа до функції комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$. Нову функцію визначають через $F(p)$ і називають L-зображенням функції $f(t)$.

2. Диференціальні рівняння для оригіналів за правилами перетворення функцій їх похідних та інтегралів перетворюються в операторні алгебраїчні рівняння для L-зображень.

3. Отримані операторні рівняння розв'язуються відносно $F(p)$.

4. Від отриманого L-зображення $F(p)$ за допомогою зворотного перетворення Лапласа переходять до оригіналу $f_1(t)$, що і є функцією, яку шукають.

4.3.1. Перетворення Лапласа. L-зображення конкретних функцій

Дана будь-яка функція дійсної змінної $f(t)$ (наприклад – струм чи напруга). L-зображення цієї функції отримаємо в результаті розрахунку інтеграла (прямого перетворення Лапласа)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

де t – дійсна змінна, а $p = \sigma + j\omega$ – комплексна змінна ($\sigma > 0$).

При цьому оригінал-функція $f(t)$ повинна відповідати таким умовам:

1. Функція $f(t)$ зі своїми похідними безперервна на всій осі t . Можливі винятки – наявність кінцевого числа точок розриву першого роду.

2. Функція $f(t)$ дорівнює нулю при від'ємних значеннях t :

$$f(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0.$$

3. Функція $f(t)$ збільшується не швидше від показникової функції:

$$|f(t)| \leq M e^{S_0 t}, \quad \text{де} \quad M > 0 \quad \text{і} \quad S_0 \geq 0.$$

Необхідно відзначити, що у більшості інженерних задач функція $f(t)$ відповідає цим умовам.

При знаходженні оригіналу $f_1(t)$ за L-зображенням $F(p)$ використовують зворотне перетворення Лапласа

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(p)e^{pt} dp.$$

Особливо відзначимо, що між L-зображенням і оригіналом немає рівності, а є тільки однозначна відповідність. Це важливе положення підкреслюється умовною формулою $f(t) \text{®} F(p)$.

Основні властивості перетворення Лапласа:

При множенні оригіналу на постійну величину, на ту ж постійну величину множать і зображення (L-зображення)

$$af(t) \textcircled{R} aF(p).$$

Якщо оригінал представлений сумою функцій, то зображення цієї суми дорівнює сумі зображень цих функцій

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \textcircled{R} \sum_{k=1}^n a_k F_k(p).$$

Розглянемо зображення конкретних функцій:

1. Зображення одиничної ступінчастої функції $f(t) = 1(t)$

$$F(p) = \int_0^{\Gamma} 1(t)e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \left| e^{-pt} \right|_0^{\Gamma} = \frac{1}{p}.$$

Тобто зображення постійної ЕРС E , що виникає в момент часу $t = 0$, легко знайти, якщо її подати за допомогою одиничної ступінчастої функції як функцію часу, тобто записати так: $f(t) = E\mathbf{1}(t)$, тоді будемо мати

$$f(t) = A\mathbf{1}(t) \textcircled{R} A\frac{1}{p}; 1(t) \textcircled{R} \frac{1}{p}; E \textcircled{R} \frac{E}{p}.$$

У таблиці 7 наведено операторні співвідношення, які найчастіше трапляються.

2. Зображення експоненційної функції $f(t) = e^{-\alpha t}$, тоді

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = -\frac{1}{\alpha + p} \left| e^{-(\alpha+p)t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + p}.$$

Таким чином, $e^{-\alpha t} \textcircled{R} \frac{1}{\alpha + p}$. Якщо уявити, що $\alpha = -j\omega$, тоді

$$e^{+j\omega t} \textcircled{R} \frac{1}{p - j\omega}.$$

Знаючи зображення показникової функції, можна знайти зображення гармонійних функцій за формулою Ейлера

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad \text{®} \quad \frac{1}{p - j\omega} = \frac{p + j\omega}{(p - j\omega)(p + j\omega)} =$$

$$= \frac{p}{p^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Звідси

$$\cos \omega t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$\sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Таблиця 7

Оригінал	Зображення
$d(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
A	$\frac{A}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{p + \alpha}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$
$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$	$\frac{1}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$

3. Зображення операції диференціювання

Маємо $f(t) \text{®} F(p)$. Знайдемо зображення похідної цієї функції $f'(t) = \varphi(t)$. Оскільки $\varphi(t) \text{®} \Phi(p)$, то

$$\Phi(p) = \int_0^{\Gamma} \varphi(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\Gamma} f'(t) e^{-pt} dt.$$

Інтегруючи за частинми, отримаємо

$$\Phi(p) = \left| e^{-pt} f(t) \right|_0^{\infty} - (-p) \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = f(0) + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0),$$

тобто $f'(t) \text{®} pF(p) - f(0)$, де $f(0) = f(t)$ при $t = 0$.

Для зображення n -похідної вираз буде мати вигляд

$$f^{(n)}(t) \text{®} p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{(n-k)} f^{(k-1)}(0),$$

де $f(0) = f(t)|_{t=0}$, $f^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$.

4. Зображення інтеграла

Маємо $f(t) \text{®} F(p)$, і потрібно визначити зображення функції, яка є

інтегралом від $f(t)$, тобто $\varphi(t) = \int_0^t f(t) dt$. Оскільки $f(t) = \varphi'(t) \text{®} p\Phi(p) - \varphi(0)$,

а $\varphi(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$ то $f(t) \text{®} p\Phi(p)$. Але зображення $f(t) \text{®} F(p)$, тоді

можна записати $F(p) = p\Phi(p)$.

Таким чином, маємо кінцевий вираз $\int_0^t f(t) dt \text{®} \frac{F(p)}{p}$, тобто інтегрування

функції $f(t)$ у межах від 0 до t відповідає діленню зображення цієї функції на p .

4.3.2. Теорема операторного методу аналізу

А. Теорема запізнення

Вона дозволяє визначити зображення функції $\varphi(t) = f(t - t_1)$, яка відрізняється від $f(t)$ тим, що зсунена праворуч уздовж осі часу на t_1 , що ілюструється на рисунку 50.

Припустимо, що $f(t) \textcircled{R} F(p)$, а $f(t - t_1) \textcircled{R} \Phi(p)$, тоді

$$\Phi(p) = \int_0^{\Gamma} f(t - t_1) e^{-pt} dt = \int_{t_1}^{\Gamma} f(t - t_1) e^{-pt} dt, \text{ бо на інтервалі } 0 \div t_1 \text{ функція } f(t) = 0.$$

Якщо позначимо $t - t_1 = \tau$, то $t = \tau + t_1$, $dt = d\tau$. Для нової змінної нижня межа інтегрування стане рівна 0 і

$$\int_0^{\infty} f(t - t_1) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p(\tau + t_1)} d\tau = e^{-pt_1} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{-pt_1} F(p).$$

Отже, запізнення функції на час t_1 відповідає множенню її зображення на e^{-pt_1} .

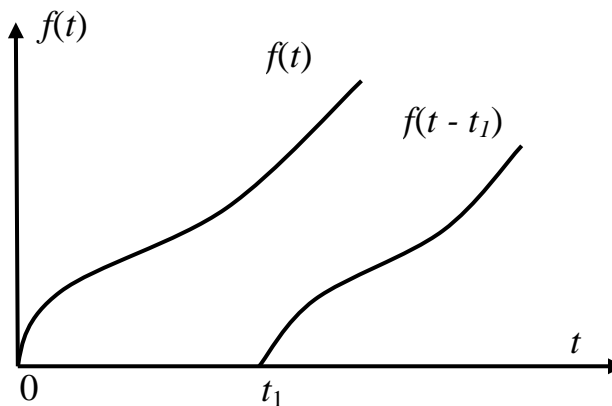


Рис. 50

Б. Теорема зміщення

Вона дозволяє за відомим зображенням функції $f(t) \textcircled{R} F(p)$ знайти зображення нової функції $\varphi(t)$, яка відрізняється від $f(t)$ експоненціальним множником $e^{-\alpha t}$, де α – постійне число.

Якщо $\varphi(t) = f(t)e^{-\alpha t}$, то зображення

$$\Phi(p) = \int_0^{\Gamma} \varphi(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\Gamma} f(t) e^{-(\alpha + p)t} dt.$$

Позначимо $p + \alpha = p_1$, одержимо

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = F(p_1) = F(p + \alpha).$$

Таким чином, множення часової функції $f(t)$ на експоненціальний множник $e^{-\alpha t}$ спричинює „зміщення” в області зображення незалежної змінної p на α , тобто $f(t)e^{-\alpha t} \rightarrow F(p + \alpha)$.

В. Теорема згортки.

Вона полягає в наступному: якщо $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$ тоді

$$\Phi(p) = F_1(p)F_2(p) \textcircled{R} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau.$$

Таким чином, результат множення зображень двох функцій збігається зі згорткою їх оригіналів.

Г. Теорема уподобання

Вона дозволяє визначити зображення функції $\varphi(t) = f(\alpha t)$, де α – будь-яка додатна постійна. За цією теоремою $f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, де $f(t) \rightarrow F(p)$. Множення аргументу оригіналу на додатне постійне число α спричиняє ділення аргументу зображення та самого зображення $F(p)$ на те ж саме число α .

4.4. Поняття про неспотворену передачу сигналів

У реальних пристроях завжди мають місце спотворення сигналів. Але їх намагаються зробити настільки малими, щоб вони не перевищували допустимого рівня, тобто практично були відсутніми.

Будемо вважати, що інформація, яка є в сигналі, відображається його формою. Тоді неспотворена передача сигналу буде означати

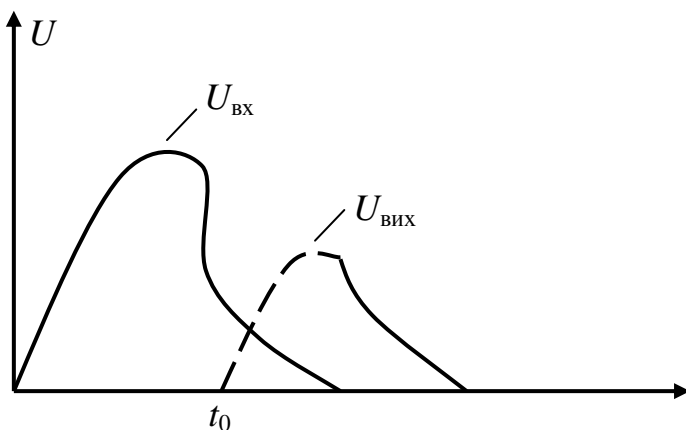


Рис. 51

незмінність його форми. При неспотвореній передачі можливі зміна амплітуди і зсув сигналу, але форма зберігається (рис. 51).

З'ясуємо, якими характеристиками повинно володіти лінійне коло, щоб забезпечувалося неспотворене передавання сигналів. Умовою такого передавання при часовому описі є співвідношення

$S_{\text{вих}}(t) = K S_{\text{вх}}(t - t_0)$, де K – постійний множник, що враховує зміни амплітуди, t_0 – час затримки, котрий визначає зсув сигналу в часі.

Використовуючи спектральний опис, створимо перехід від часового представлення до спектрального: $\Phi_{\text{вих}}(i\omega) = T(i\omega)\Phi_{\text{вх}}(i\omega)$, де $T(i\omega) = K e^{-i\omega t_0} = |T(i\omega)| e^{j\theta(\omega)}$ – комплексна передавальна функція кола.

Таким чином, для неспотвореної передачі сигналу, яка супроводжується тільки змінами його амплітуди і затриманням на час t_0 , АЧХ кола повинна бути сталою в усьому діапазоні частот, а ФЧХ – лінійною (рис. 52).

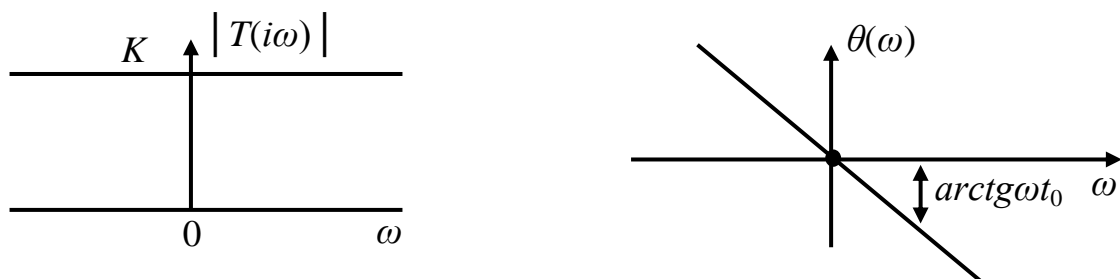


Рис. 52

5. АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Для визначення стійкості стану рівноваги необхідно визначити, як веде себе система при малих відхиленнях від стану рівноваги.

Позначимо через y мале відхилення величини i , u від значення в стані рівноваги. Будемо вважати, що поведінка системи при малих значеннях y описується лінійним диференціальним рівнянням

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0.$$

Розв'язання цього рівняння можна шукати у вигляді суми доданків вигляду $y = Ae^{pt}$. Характеристичне рівняння цього диференціального рівняння має вигляд

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Отже, можна записати розв'язання диференціального рівняння

$$y = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}.$$

Тут постійні A_1 є A_n визначаються з початкових умов, а p_1 є p_n – корені характеристичного рівняння.

У загальному випадкові характеристичні рівняння мають дійсні корені $p_i = \alpha_i$ та комплексно спряжені корені $p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$.

Якщо серед загального числа n -коренів вийде m -дійсних, то загальне розв'язання диференціального рівняння можна подати у вигляді суми m

експоненціальних членів і $s = \frac{n-m}{2}$ осциляційних:

$$y = \sum_{i=1}^m A_i e^{\alpha_i t} + \sum_{j=1}^s \beta_j e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t + \varphi_j).$$

Якщо $\alpha_i > 0$, то експоненціальний доданок зростає, якщо $\alpha_i < 0$, то зменшується.

Якщо $\alpha_j > 0$, то амплітуда $\beta_j e^{\alpha_j t}$ осцилюючого доданка зростає, якщо $\alpha_j < 0$, то зменшується.

Цей аналіз дозволяє зробити висновок, що коли всі корені характеристичного рівняння мають від'ємну дійсну частину, відхилення у відстану рівноваги з часом затухає – стан рівноваги буде стійким.

Якщо хоча б один корінь p_k має додатну дійсну частину, система буде нестійкою.

Ці умови дістали назву *критерії стійкості*.

5.1. Критерій стійкості Гурвіца

Критерій Гурвіца (Рауса – Гурвіца) встановлює умови, за яких дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння є від'ємними. Для цього потрібно записати головний визначник, використовуючи правило:

– перший стовпець має коефіцієнти характеристичного рівняння з непарними індексами в порядку збільшення.

– у кожному рядкові праворуч розташовуються коефіцієнти в порядку зменшення їх індексів:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0\dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0\dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2\dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4\dots \end{vmatrix};$$

– із головного визначника потрібно виділити n визначників (n – ступінь характеристичного рівняння).

Перший визначник виключає один рядок і один стовпець

$$D_1 = |a_1| = a_1.$$

Другий – два стовпці й два рядки

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Третій визначник

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \text{ і т.д.}$$

Критерій Гурвіца встановлює, що всі корені характеристичного рівняння при $a_0 > 0$ мають від'ємні дійсні частини, якщо всі n -визначники D_k ($k = 1 \dots n$) додатні.

При складанні визначників слід уважати коефіцієнти $a_i = 0$, якщо індекс $i > n$.

Наприклад:

а) характеристичне рівняння другого ступеня

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0.$$

Припустимо, $a_0 > 0$, $D_1 = a_1 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0$;

б) характеристичне рівняння третього ступеня

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Припустимо, що $a_0 > 0$, $D_1 = a_1 > 0$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1 a_2 a_3 - a_3 a_0 a_3) > 0.$$

5.2. Критерій стійкості Михайлова

Характеристичний поліном $D(p)$ можна записати у вигляді

$$D(p) = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n).$$

Проводимо заміну $j\omega = p$.

Тоді $D(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)$ і кожний із співмножників можемо відобразити на комплексній площині вектором

$$\underline{r}_k = j\omega - p_k = r_k e^{j\varphi_k}.$$

Звідси характеристичний поліном буде мати вигляд

$$D(j\omega) = a_0 e^{j \sum_{k=1}^n \varphi_k} r_1 r_2 \dots r_n.$$

Позначимо $r_1 r_2 \dots r_n = \prod_{k=1}^n r_k$, а $\sum_{k=1}^n \varphi_k = \varphi$. Звідси

$$D(j\omega) = a_0 e^{j\varphi} \prod_{k=1}^n r_k.$$

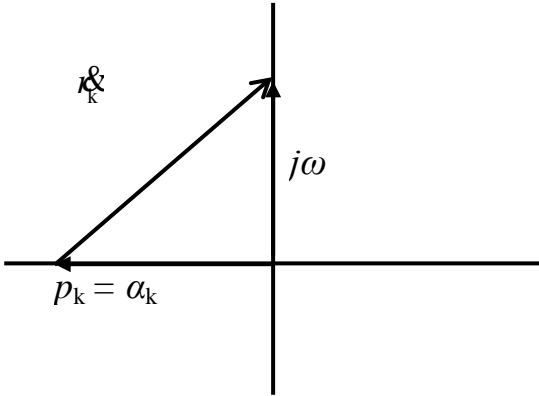


Рис. 53

При зміні ω кожен вектор r_k змінює положення, φ – характеризує направлення результуючого вектора $D(j\omega)$.

Розглянемо, в яких межах змінюється аргумент φ при зміні ω від 0 до ∞ у різних випадках.

1. Корінь $p_k = a_k < 0$. Тоді при зміні ω від 0 до ∞ φ_k змінюється від 0 до $\pi/2$

(рис. 53). Поворот вектора проти годинникової стрілки вважаємо додатним, за годинниковою стрілкою – від’ємним.

2. Корені $p_{k,k+1} = a_k \pm j\beta_k$ – з від’ємною дійсною частиною (рис. 54).

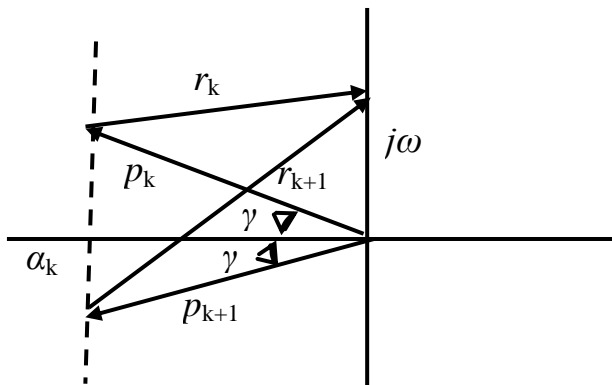


Рис. 54

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} + \gamma;$$

$$\varphi_{k+1} = \frac{\pi}{2} - \gamma;$$

$$\varphi_k + \varphi_{k+1} = 2\frac{\pi}{2};$$

$$\gamma = \arctg \frac{\beta_k}{\alpha_k}.$$

3. $p_k = a_k > 0$ (рис. 55).

Тоді φ_k змінюється від 0 до $-\pi/2$.

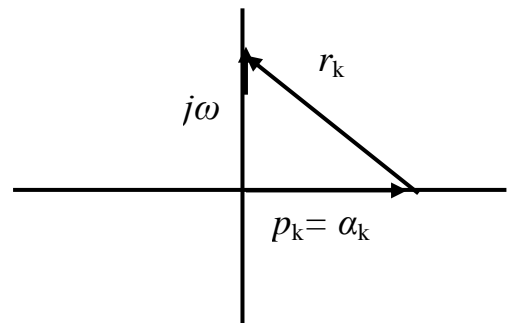


Рис. 55

4. $p_{k,k+1} = \alpha_k \pm j\beta_k, \alpha_k > 0$ (рис. 56).

$$j_k = - \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right);$$

$$j_{k+1} = - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right);$$

$$j = - \frac{2\pi}{2}.$$

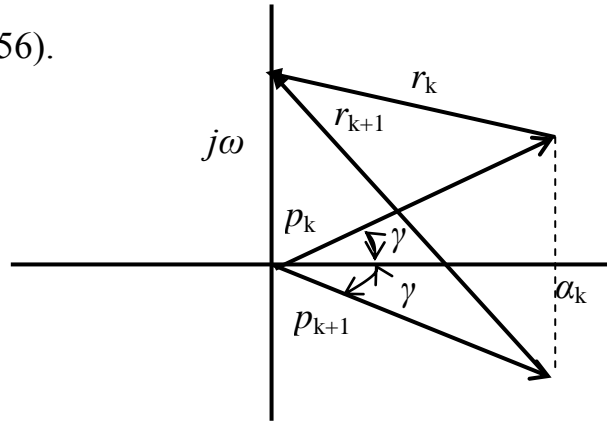


Рис. 56

Аналізуючи розглянуті приклади, можемо зробити висновок, що стан рівноваги системи, котра описується лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку, є стійким, якщо при зміні ω від 0 до ∞ вектор $D(j\omega)$ повернеться на кут $\varphi = n \frac{\pi}{2}$ проти годинникової стрілки.

5.3. Критерій стійкості Найквіста

Критерій Найквіста використовується для систем із зворотним зв'язком. Розглянемо замкнуту систему, представлену підсилювачем, охопленим зворотним зв'язком (рис. 57).

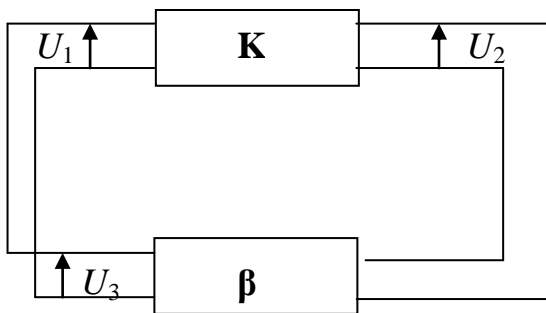


Рис. 57

Будемо мати:

$$U_3 = U_2 \beta,$$

$$U_2 = U_1 K,$$

$$U_3 = U_1 K \beta,$$

$$U_1 = U_1 K \beta.$$

Звідси отримуємо $1 = K\beta$. Останній вираз дає два рівняння: $|K\beta| = 1$ – баланс амплітуд, $\varphi = \varphi_k + \varphi_\beta = 2\pi n, n = 0, 1, 2, \dots$ – баланс фаз.

Згідно з критерієм Найквіста, висновок щодо стійкості ЕК робиться на основі розгляду характеристики розімкнутої системи (рис. 58), де $Z_{\text{вх}}$ – вхідний опір підсилювача.

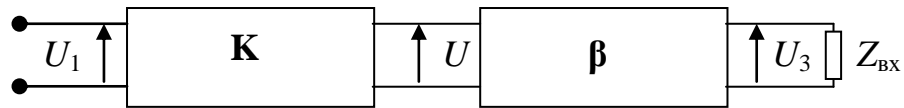


Рис. 58

Припустимо, що на вхід схеми подається гармонічна напруга \dot{U}_1 невеликої амплітуди, частота якої змінюється від 0 до ∞ .

Визначимо АЧХ як $K = \frac{U_3}{U_1}$, а ФЧХ – зсув фази між \dot{U}_3 і \dot{U}_1 .

Припустимо, що ці характеристики мають вигляд, зображений на рисунку 59.

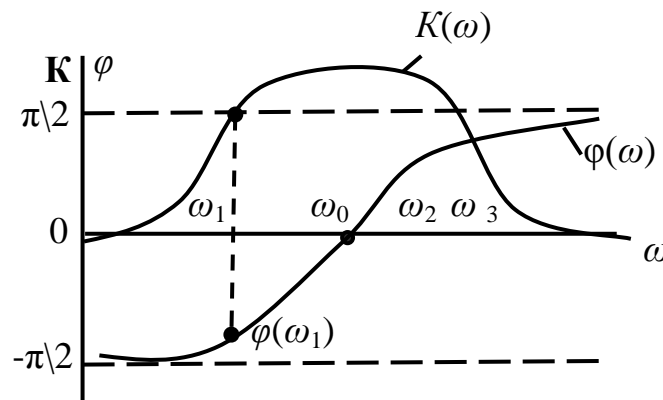


Рис. 59

Кожному значенню ω відповідають деякі значення K і φ . Побудуємо сімейство векторів $\underline{K}(\omega)$ (рис. 60), при цьому розглянемо $|\underline{K}(\omega)|$ та $\varphi(\omega)$ як полярні координати.

Траєкторія кінця вектора $\underline{K}(\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ , тобто годограф вектора, називається *амплітудно-фазовою характеристикою*.

Аналізуючи представлення амплітудно-фазової характеристики, можна сформулювати критерій Найквіста: *стан рівноваги замкненої системи є*

стійким, якщо амплітудно-фазова характеристика розімкненої системи не оточує точку з координатами (1, 0).

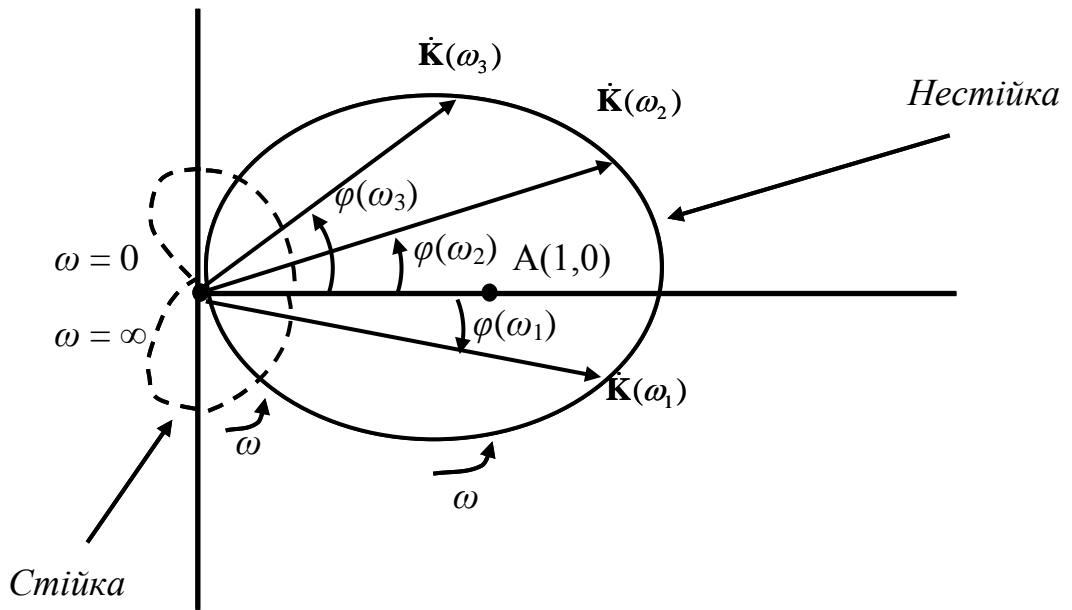


Рис. 60

ВИСНОВКИ

У навчальному посібнику в доступній для студентів формі викладено загальні положення основних методів аналізу лінійних електричних кіл. Автори сподіваються, що прийнята в посібнику класифікація методів аналізу в часовій та частотній області для стаціонарних і нестаціонарних режимів роботи електричних кіл допоможе тим, хто навчається, вибирати оптимальні шляхи розрахунку складних електричних схем.

Зрозуміло, що викладені методи аналізу не вичерпують усього різноманіття існуючих сучасних підходів до розв'язання задач пошуку реакції електричних кіл. Рекомендована література допоможе ознайомитися із способами вирішення достатньо вузькоспеціалізованих питань.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1988. – 448 с.
2. Основи теорії кіл: підручник: Гриф МОН України. Ч. 1 / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін. – Х. : Компанія СМІТ, 2008. – 432 с.
3. Основи теорії кіл: підручник: Гриф МОН України. Ч. 2 / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін ; під ред. В.М. Школи, В.І. Правди. – Х. : Компанія “СМІТ”, 2008. – 560 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Микола Борисович Нікулін,
Олексій Іванович Тиртишніков
Юрій Миколайович Корж

Теорія електричних кіл
Методи аналізу лінійних електричних кіл
Навчальний посібник.

Частина 1.

Комп'ютерна верстка _____

Редактор Н.В. Жиги лій

Коректор С.В. Істоміна

Друк RISO

Ум. друк. арк. _____

Тираж 20 прим. Замовлення № _____ від _____ року

Поліграфічний центр
Полтавського національного технічного університету
Імені Юрія Кондратюка
36011, Полтава, Першотравневий проспект, 24

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготовників і розповсюджувачів видавничої літератури
Серія ДК №3130 від 06.03.2008 року