

УДК 621.311

А.М. Сільвестров, В.А. Святненко, О.М. Скринник

Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Київ

## ПРЕДСТАВЛЕННЯ КУСКОВО-АНАЛІТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЄДИНОЮ АНАЛІТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ

Дослідження, результати яких наведено у публікації, підтверджують можливість розробки запропонованим методом достатньо простої аналітичної моделі, яка за точністю апроксимації відповідає вимогам сучасних методів математичного та об'єктно-орієнтованого моделювання. Розроблені даним методом моделі можуть бути застосовані для аналітичних розрахунків оптимальних режимів роботи нестационарних стохастичних об'єктів, діагностики їх стану, інтерполяції та екстраполяції змінних об'єкта та для інших цілей шляхом ідентифікації локальних математичних моделей та об'єднання їх у повну аналітичну.

**Ключові слова:** нелінійна модель, об'єкт ідентифікації, апроксимація, аналітична модель, транзистор, коефіцієнт нелінійних спотворень.

### Вступ

Останнім часом все більшу увагу приділяють чисельним методам комп'ютерного моделювання об'єктів ідентифікації ([1 – 3] та ін.). Це обґрунтовано складністю процесів у об'єкті, що досліджується (кусково-нелінійні залежності між змінними, логіка переключення від однієї моделі до іншої) та майже необмеженими можливостями сучасних електронно-обчислювальних машин (ЕОМ). Однак заміна теоретичних досліджень чисельними на ЕОМ призводить до втрати загальності рішення. Множина рішень чисельним моделюванням завжди обмежена. Існує ймовірність не змодельованої ситуації на об'єкті, яка може бути небажаною. Це стосується кусково-аналітичних моделей, заміни диференціальних залежностей різницевидами (особливо для нестійких об'єктів), апроксимації багатомірних нелінійних залежностей на кінцевій множині експериментальних даних поліномами високого порядку та ін. Тому доцільно використовувати аналітичні рішення, користуючись чисельними методами і ЕОМ лише, як допоміжними засобами. Розглянемо задачу отримання єдиної аналітичної залежності для моделі, яку подано кусково-аналітичними частковими моделями з логікою переключення від однієї до іншої залежно від координат об'єкта.

### Основна частина

Більшість нелінійних елементів реальних об'єктів мають кусково-аналітичну залежність  $y(x)$ . Під час аналізу і синтезу систем з такими елементами виникають незручності, пов'язані з врахуванням граничних умов переходу від однієї області змінних  $x$ ,  $y$  до сусідньої, за якого можуть виникати розриви  $y(x)$  та її похідних. В той час, як в реальній системі ці явища відсутні. Багато мати аналітичну модель  $y(x)$  в усій області зміни  $x$ ,  $y$ , щоб виключити складну логіку зміни структури  $y(x)$  та некоректності диференціювання

$dy/dx$ ,  $d^2y/dx^2$ , ... в точках стиковки. Таку умову можна забезпечити, якщо залежність  $y(x)$  подати зваженою аналітичними в усьому діапазоні функціями ваги  $\eta_i(x)$  сумою:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) \cdot y_i(x), \quad (1)$$

де для виділення області  $x$  від 0 до  $x = a$ ,

$$\eta_1(x) = \left(1/\sqrt{1+a^{-2}x^2}\right)^m, \quad x \in [0, a], a > 0;$$

для області  $x$  від  $x = a$  до  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\eta_2(x) = \left(|a^{-1}x|/\sqrt{1+a^{-2}x^2}\right)^m, \\ x \in [0, \infty], x \in [-a, -\infty];$$

для області  $x \in [a, b]$ :

$$\eta_3(x) = \left(1/\sqrt{1+b^{-2}x^2}\right)^m - \left(1/\sqrt{1+a^{-2}x^2}\right)^m.$$

Значення  $m$  береться за умови близькості з точністю до  $\varepsilon$  моделі  $\hat{y}(x)$  до реальної залежності  $y(x)$ . Тобто  $m$  збільшується до значення  $m^*$ , за якого похибка близькості  $y(x)$  до  $\hat{y}(x)$  буде близька до  $\varepsilon$ . Аналітична залежність (1) дозволяє (якщо  $x$  функція часу  $x(t)$ ), обчислити аналітичні вирази похідних

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

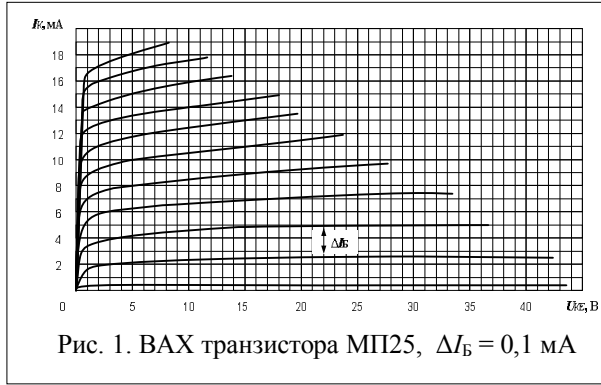
і т.і. Для кінцевого значення  $m$  похідні будуть гладкими функціями часу, які можна обчислити за допомогою відповідних програм (Mathcad, MATLAB та ін.) на ЕОМ.

Якщо нелінійність  $y(x_1, \dots, x_n)$  багатовимірною кусково-поліноміальною, то її об'єднання в єдину аналітичну досягається аналогічно одномірній (1),

тільки функції ваги багатомірні  $\eta_i(x_1, \dots, x_k, x_n)$ , де  $x_k$  – незалежні змінні, наприклад, у вигляді добутків часткових одномірних функцій  $\eta_{ij} = \eta_i(x_j)$ :

$$\eta_i(x_1, \dots, x_n) = \eta_{i1}(x_1) \cdot \eta_{i2}(x_2) \cdot \dots \cdot \eta_{in}(x_n). \quad (2)$$

Для прикладу розглянемо вольт-амперну характеристику (ВАХ)  $I_K(U_{KE})$  біполярного транзистора МП25 (рис. 1).



Кусково-лінійна залежність  $I_K(U_{KE})$  (рис.2) для фіксованого значення струму  $I_B$  транзистора МП25 дорівнює:

$$\hat{I}_K(U_{KE}, I_{Bi}) = \begin{cases} \beta_{1i} \cdot U_{KE}, & \text{якщо } U_{KE} < 0.8 \text{ V}, i = \overline{1, n} \\ \beta_{2i} + \beta_{3i} \cdot U_{KE}, & \text{якщо } U_{KE} \geq 0.8 \text{ V}, \end{cases} \quad (3)$$

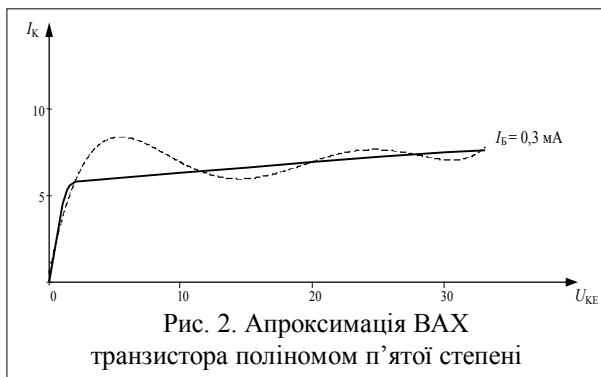
Щоб позбавитися логічних складових опису (3) замінимо логічні складові аналітичними для всього діапазону зміни відповідних аргументів. Тоді, замість (3), отримаємо аналітичну на всьому інтервалі  $U_{KE}$  модель:

$$\hat{I}_K = (\beta_{1i} \cdot U_{KE}) \cdot \eta_1 + (\beta_{2i} + \beta_{3i} \cdot U_{KE}) \cdot \eta_2, \quad (4)$$

де 
$$\eta_1(U_{KE}) = \left(1 + (U_{KE}/0,8)^m\right)^{-1},$$

$$\eta_2(U_{KE}) = \left(1 + (0,8/U_{KE})^m\right)^{-1}, \quad m \gg 1.$$

При описі цієї залежності, за обмеженою кількістю вимірів, єдиним в цьому діапазоні степеневим поліномом матимемо наближену апроксимацію з небажаною пульсацією між вимірами (рис. 2, пунктир).



ВАХ транзистора двовимірною  $u(x_1, x_2)$  кусково-поліноміальна. Її об'єднання в єдину аналітичну досягається аналогічно одномірній, тільки функції ваги  $\eta_i(x_1, x_2)$ , задаються у вигляді добутків часткових функцій  $\eta_{ij} = \eta_i(x_j)$ , де  $x_k$  – незалежні змінні  $U_{KE}, I_K$ , тобто

$$\eta_i(x_1, x_2) = \eta_{i1}(x_1) \cdot \eta_{i2}(x_2).$$

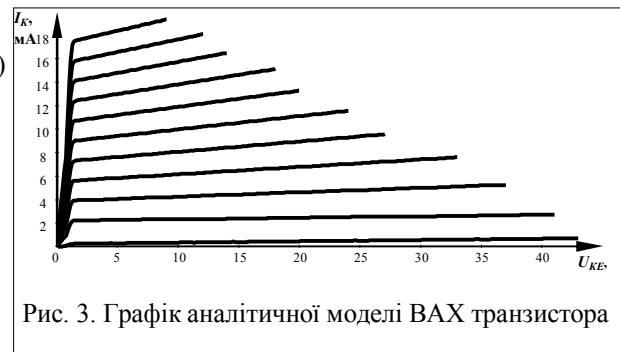
За допомогою функції  $\eta_3(I_B) = \left(1 + (I_B/1.1)^m\right)^{-1}$  обмежимо модель (2) діапазоном  $I_B$  від 0 до 1,1 мА і апроксимуємо залежність коефіцієнтів  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) від другої змінної  $I_B$ , лінійною моделлю:

$$\hat{\beta}_i(I_B) = \gamma_{i0} + \gamma_{i1} \cdot I_B.$$

В результаті отримуємо єдину для всього діапазону аналітичну модель

$$\hat{I}_K = (\beta_1(\gamma) \cdot U_{KE} \cdot \eta_3) \cdot \eta_1 + ((\beta_2(\gamma) + \beta_3(\gamma) \cdot U_{KE}) \cdot \eta_3) \cdot \eta_2, \quad (4)$$

графік якої (рис. 3) співпадає з наданим графіком (рис. 1) із середньо квадратичною похибкою 2,6%, а для робочої зони вона менше 1%.



Враховуючи значення  $\beta_i, \eta_1, \eta_2$ , маємо аналітичну модель (4) вихідних характеристик транзистора, увімкненого за схемою зі спільним емітером (СЕ):

$$\hat{I}_K(U_{KE}, I_B) = \frac{(10.227 \cdot I_B + 0.204) \cdot U_{KE}}{9.313 \cdot U_{KE}^{10} + 1} + \frac{16.652 \cdot I_B + (0.252 \cdot I_B) \cdot U_{KE} + 0.511}{0.107 \cdot U_{KE}^{-10} + 1}. \quad (5)$$

Вхідні характеристики (рис. 4) для схеми з СЕ апроксимуються виразом  $I_B(U_{BE}) = 10 \cdot U_{BE}^2$ .

Режими роботи підсилювального каскаду знаходяться за рівнянням навантаження. Напряга колектора  $U_{KE} = U_{вих}$  за наявності навантаження  $R_K$  в його колі, відповідно до другого закону Кірхгофа, дорівнює

$$U_{KE} = E_K - R_K \cdot I_K = 30 - 10 \cdot I_K, \quad (6)$$

де  $I_K$  пов'язане з  $I_B$  та  $U_{KE}$  рівнянням (5).

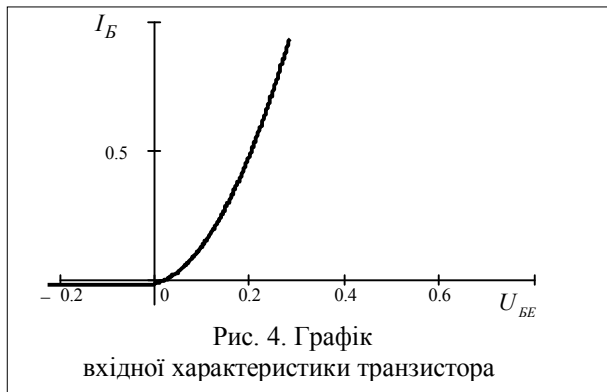


Рис. 4. Графік вхідної характеристики транзистора

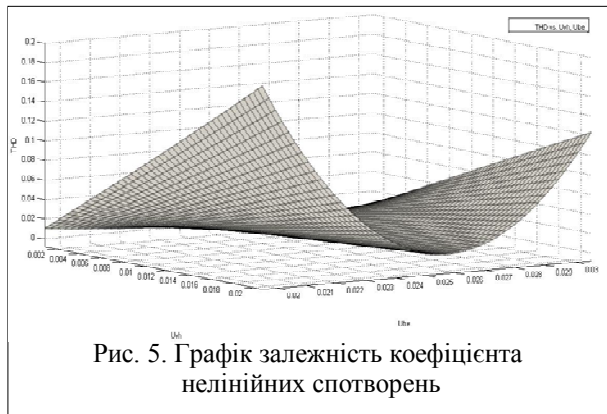


Рис. 5. Графік залежності коефіцієнта нелінійних спотворень

Однією з основних характеристик якості підсилювача є коефіцієнт нелінійних спотворень. Цей показник характеризує ступінь відмінності форми сигналу від синусоїдальної і дорівнює відношенню середньоквадратичного значення всіх вищих гармонік сигналу до напруги першої гармоніки.

Маючи аналітичні вирази  $U_{KE}(U_{BX}, U_{BE0})$  та враховуючи, що  $U_{KE}(I_B) = -0,36 \cdot e^{-3,43 \cdot I_B} - 0,016$ , використовуємо МАТКАД для знаходження значення 30-ї гармоніки і визначаємо залежності коефіцієнта нелінійних спотворень (КНС) від величини вхідного синусоїдального сигналу  $U_{BX}$  та напруги спокою бази  $U_{BE0}$ :

$$\begin{aligned} \text{КНС}(U_{BX}, U_{BE0}) = & 527,0 \cdot U_{BX}^3 - 2,387 \cdot U_{BX}^2 \cdot U_{BE0} + \\ & + 49,1 \cdot U_{BX}^2 + 2,33 \cdot 10^5 \cdot U_{BX} \cdot U_{BE0} - 1,91 \cdot 10^4 \cdot U_{BX} \times (6) \\ & \times U_{BE0} + 153 \cdot U_{BX} - 3,83 \cdot U_{BE0}^2 + 0,124 \cdot U_{BE0} - 0,0008. \end{aligned}$$

Рівняння (7) дає можливість ще на етапі проектування мати уявлення щодо граничних меж використання підсилювача, а також вибирати оптимальний режим його роботи. Поверхня, що ілюструє цю залежність, зображена на рис. 5.

## Висновок

Дослідження, результати яких наведено у публікації, підтверджують можливість розробки запропонованим методом достатньо простої аналітичної моделі складних нелінійностей. Розроблені даним методом моделі можуть бути застосовані для аналітичних розрахунків оптимальних режимів роботи нелінійних об'єктів та для інших цілей шляхом ідентифікації локальних математичних моделей та об'єднання їх у повну аналітичну без суттєвого ускладнення моделі. Також доцільно використання даного методу для стискування інформації шляхом заміни табличних та графічних довідкових даних про об'єкти різної природи нескладними аналітичними моделями.

## Список літератури

1. Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М., Коц О.П. Комп'ютерні методи прикладної математики. – К.: Академперіодика, 2002. – 480 с.
2. Методи теорії автоматичного управління / под. ред. Н.Д. Егунова. – М.: МГТУ ім. Баумана, 2000. – 748 с.
3. Бірюк П.І., Меньяйленко О.С., Половцев О.В. Методи прогнозування. – Луганськ: Альма-матер, 2008. – 607 с.

Надійшла до редколегії 20.01.2017

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.І. Сінько. Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Київ.

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЕДИНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ

А.Н. Сильвестров, В.А. Святненко, А.Н. Скрынник

Исследования, результаты которых приведены в публикации, подтверждают возможность разработки предложенным методом достаточно простой аналитической модели, которая по точности аппроксимации соответствует требованиям современных методов математического и объектно-ориентированного моделирования. Разработанные данным методом модели могут быть применены для аналитических расчетов оптимальных режимов работы нестационарных стохастических объектов, диагностики их состояния, интерполяции и экстраполяции переменных объекта и для других целей путем идентификации локальных математических моделей и объединения их в полную аналитическую.

**Ключевые слова:** нелинейная модель, объект идентификации, аппроксимация, аналитическая модель, транзистор, коэффициент нелинейных искажений.

## REPRESENTATION OF PIECEWISE-ANALYTICAL MODELS UNIFIED ANALYTICAL

A.M. Silvestrov, V.A. Svyatnenko, O.M. Skrynnyk

The research results are presented in the publication confirm the possibility of developing quite simple analytical model with the proposed method. The accuracy of the approximation meets the requirements of modern mathematical methods and object-oriented modeling. The developed model by this method can be used for analytical calculation of optimal modes of stochastic non-stationary objects, diagnosis of their condition, interpolation and extrapolation variable object. Also for other purposes by identifying local mathematical models and combining them into a full analytical.

**Keywords:** nonlinear model, object identification, approximation, analytical model, transistor, total harmonic distortion.