

**РІШЕННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ У MS EXCEL**

Мета роботи розглянути можливості рішення оптимізаційних задач нелінійного програмування.

До задач нелінійного програмування відносять задачі, математичні моделі яких мають нелінійні залежності від змінних. На практиці дуже часто величини (ціни, відсоткові ставки, тарифи), які впливають на кінцевий результат, є непропорційно залежними від невідомих (об'єми товарів або інвестицій) і тому загальний результат описується нелінійним співвідношенням.

У загальному вигляді, математична модель нелінійної задачі програмування записується наступним чином.

Необхідно знайти такий вектор  $n$  невідомих  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , який досягає максимуму (мінімуму) цільової функції, тобто  $f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min)$ , та задовольняє системі обмежень:  $g_i(x_1, \dots, x_n) \{ \leq = \geq \} b_i, i = \overline{1, m}$  та вимозі невід'ємності:  $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$ .

Рішення задач нелінійного програмування виконується у надбудові «Пошук рішення», в якій реалізовано два методи: Ньютона та спряжених градієнтів. У методі Ньютона для визначення напрямку та кроку переміщення використовуються другі похідні. Це приводить к великому обсягу обчислення на кожному кроці ітераційного процесу, але скорочує кількість кроків для досягнення оптимального рішення.

Метод спряжених градієнтів використовує тільки перші похідні, це скорочує обсяг обчислень на кожному кроці ітераційного процесу, але збільшує кількість кроків. Ідея цього методу: задається початкова точка (початкове наближення у вигляді набору довільних значень невідомих) і обчислюється градієнт (початкові похідні цільової функції в діапазоні цієї точки), який визначає крок і напрям руху в наступну точку для поліпшення цільової функції. У наступних точках ця процедура повторюється, поки похідні не стануть нульовими, що говорить про досягнення екстремуму.

Особливість надбудови «Пошук рішення» щодо нелінійних моделей – «Звіт зі стійкості» який визначає тіньові ціни обмежень у вигляді множників Лагранжа і, відповідно, відсутність значення максимально допустимого збільшення обмежуючого параметра.

Розглянемо на прикладі задачу визначення оптимального плану виробництва з урахуванням доходу, що нелінійно залежить від обсягів реалізації

*Постановка задачі.* Потрібно визначити оптимальний план виробництва продуктів із використанням різних машин та можливістю придбання додаткової сировини.

*Вихідні дані:* підприємство може випускати три види продукції. На її виготовлення потрібно використовувати чотири види машин та купувати п'ять видів сировини. Дохід від реалізації продукту визначається величиною:

$$\text{Дохід} = \text{Кількість продукції} * \text{Ціна реалізації},$$

де *Ціна реалізації* задана нелінійною функцією, яка залежить від обсягів реалізації:

- якщо  $\text{кількість} \leq \text{Попит} / 4$  тоді *Ціна реалізації* = *Базовій ціні*;
- якщо  $\text{кількість} \leq \text{Попит} / 2$  тоді *Ціна реалізації* = *Базова ціна* - *Базова ціна* \* *Кількість продукції* / 2 \* *Попит*;
- якщо  $\text{кількість} > \text{Попит} / 2$  тоді *Ціна реалізації* = *Базова ціна* / 2.

Цільова функція (прибуток) є різницею між доходом від реалізації всієї продукції та затратами на їх виробництво.

*Потрібно:* визначити план виробництва продукції, який забезпечує максимальний прибуток від її реалізації при заданих обмеженнях на машинні ресурси.

Результати розрахунку та звіт зі стійкості, які отримано при застосуванні надбудови «Пошук рішення», надано на рисунках 1 та 2.

	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3				
Ресурси машин	Термін обробки (хв/од.)			Запас (мін.)	Витрати (мін.)	Залишок	Множник Ланранжа
Машина 1	20	10	10	1000	900,6	99,4	0
Машина 2	12	28	16	1200	1200,0	0,0	0,094966
Машина 3	15	6	16	800	800,0	0,0	2,3901589
Машина 4	10	15	0	800	573,9	226,1	0
Ресурси сировини	Потреби сировини (на од.)			Ціна сировини	Кількість сировини	Вартість	
Сировина 1	1	0	0	20	25,0	500,0	
Сировина 2	1	1	0	10	46,6	465,9	
Сировина 3	0	1	1	20	40,1	801,1	
Сировина 4	1	0	0	5	25,0	125,0	
Сировина 5	1	1	2	3	83,5	250,6	
План	25,0	21,6	18,5				
Базова ціна	90	100	95	Дохід	Витрати	Прибуток	
Дохід	2250,0	1079,5	1484,3	4813,9	2142,6	2671,2	
Попит	100	40	60				
Ціна реалізації	90,0	50,0	80,4				

Рис.1. Результати розрахунку

План виробництва (25,0; 21,6; 18,5) забезпечує досягнення максимального прибутку у розмірі 2671,2 умовних одиниць. При цьому дохід від реалізації всієї продукції складає 4813,9 умовних одиниць, а витрати на виробництво продукції – 2142,6 умовних одиниць. Ціни реалізації задаються нелінійними функціями, які залежать від обсягів реалізації і дорівнюють відповідно 90, 50 та 80,4 умовних одиниць для кожного продукту.

Виконуючи аналіз «Звіту зі стійкості», можна визначити числові значення невідомих плану (оптимальне рішення), нормований градієнт та дані про обмеження (це витрати ресурсів та множники Лагранжа).

В задачах нелінійного програмування множники Лагранжа – це величини, які відображають, як зміниться значення цільової функції в оптимальному рішенні при зміні обмеження на ресурси на одну умовну одиницю.

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
\$B\$41	План Потребы сировины (на од.)	25,0	0,0
\$C\$41	План Продукт 2	21,6	0,0
\$D\$41	План Продукт 3	18,5	0,0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
\$F\$29	Машина 1 Витрати (мін.)	900,6	0
\$F\$30	Машина 2 Витрати (мін.)	1200,0	0,094966
\$F\$31	Машина 3 Витрати (мін.)	800,0	2,390159
\$F\$32	Машина 4 Витрати (мін.)	573,9	0

Рис.2. Звіт зі стійкості

В даному прикладі множники Лагранжа приймають значення  $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0,09467$  та  $\lambda_3 = 2,39016$ . Відповідно до отриманих значень: ресурси 1-й та 4-й використані не повністю (не є дефіцитними), ресурси 2-й та 3-й – дефіцитні (використані повністю). Якщо збільшити ресурс 2 на одиницю, значення цільової функції збільшиться на 0,09467 умовних одиниць (на величину  $\lambda_2$ ), при збільшенні на 3 одиниці, значення функції збільшується на  $3 \cdot 0,09467 = 0,28401$ . Зростання цільової функції виконується до того часу доки ресурс буде залишатися дефіцитним.

Так само можна визначити зміну цільової функції при корегуванні кількості третього ресурсу, який так само є дефіцитним. Збільшення виконується пропорційно значенню  $\lambda_3 = 2,39016$ .

Виконання аналізу зі стійкості, при рішенні задач нелінійного програмування, надає можливість корегувати значення цільової функції при відповідних змінах обмежень.

### Список літератури

1. Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2005. – 407 с.
2. Косоруков О.А. Исследование операций: Учебник / Косоруков О.А., Мищенко А.В. // Под общ. ред. д.э.н., проф. Н.П.Тихомирова. – Издательство «Экзамен», 2003. – 448 с.
3. Задачі оптимізації в Excel [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://exsolver.narod.ru/>