

Шкуруній О.А., к.т.н., професор,  
Митрофанов П.Б., к.т.н., доцент.

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

## ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ КІНЦЕВИМ ЧИСЛОМ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ПОЗДОВЖНИХ СИЛ

*Анотація:* розглянута задача обчислення спектру частот вільних коливань стержневих систем із кінцевим числом ступенів вільності при згинанні з урахуванням поздовжніх сил. Наведені приклади кількісної оцінки впливу поздовжніх сил на частоти вільних коливань.

*Annotation:* considered the problem of calculating a frequencies of free oscillations of rod systems with finite number of freedom degrees in bending with considering of longitudinal forces. Showing examples of quantitative assessment influence of longitudinal forces on the frequencies of free oscillations.

**Постановка проблеми.** Відомо, що при розрахунку лінійно-деформованих стержневих систем із кінцевим числом ступенів вільності на малі вільні коливання для обчислення спектру частот складається і розв'язується частотне рівняння [1,2]. Коефіцієнти цього рівняння виражаються через відповідні елементи матриць жорсткості або податливості системи. Зазвичай елементи таких матриць визначаються за недеформованою схемою системи і залежать від її механічних властивостей. При розрахунку системи за деформованою схемою проявляється взаємний вплив окремих видів деформацій, наприклад, при згинанні стержня поперечним навантаженням поздовжні сили викликають додаткове згинання. Це призводить до того, що жорсткість буде залежати від поздовжньої сили, а, відповідно, і частоти вільних коливань такої динамічної системи теж залежатимуть від поздовжнього навантаження.

**Мета роботи.** Кількісна оцінка впливу поздовжніх сил на спектр частот вільних коливань динамічної стержневої системи з кінцевим числом ступенів вільності при згинанні.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо вільні коливання консольної балки з точковою масою  $m$  на її кінці (рис. 1, а). ( $EI=\text{const}$ ;  $EA=\text{const}$ ).

Якщо поздовжня сила дорівнює нулю, то тоді колова частота вільних коливань без урахування сил опору  $\omega$  обчислюється за формулою

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta_{11}}}, \quad (1)$$

де  $\delta_{11} = \frac{\ell^3}{3EI}$  (рис. 1, б).

У випадку, коли  $N \neq 0$ , обчислимо переміщення  $\delta_{11}^c$  від  $F=1$  (при  $N < 0$  – стискання, рис. 1, в) і переміщення  $\delta_{11}^p$  (при  $N > 0$  – розтягування).

Відповідні диференціальні рівняння зігнутої осі балки будуть мати вигляд:

– для  $N < 0$ ,  $EIy'' = -Ny + \delta_{11}^c N + (\ell - x)$ ; (2)

– для  $N > 0$ ,  $EIy'' = Ny - \delta_{11}^p N + (\ell - x)$ . (3)

Позначимо  $k^2 = \frac{N}{EI}$  і запишемо загальні розв'язки для (2 і 3) у вигляді:

– для  $N < 0$ ,  $y = -\left(\frac{\ell + N\delta_{11}^c}{N}\right) \cos kx + \frac{1}{kN} \sin kx + \frac{(\ell - x)}{N} + \delta_{11}^c$ ; (4)

– для  $N > 0$ ,  $y = \left(\frac{\ell + N\delta_{11}^p}{N}\right) \operatorname{ch} kx - \frac{1}{kN} \operatorname{sh} kx - \frac{(\ell - x)}{N} + \delta_{11}^p$ . (5)

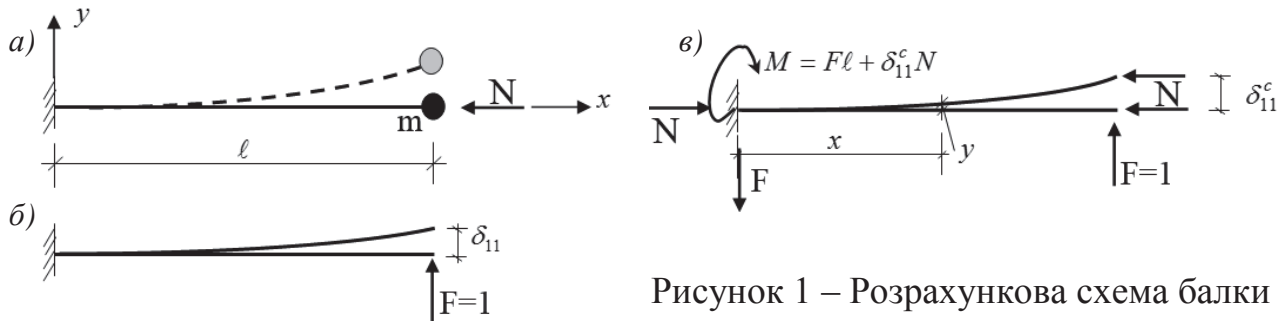


Рисунок 1 – Розрахункова схема балки

Для визначення необхідних переміщень  $\delta_{11}^c$  і  $\delta_{11}^p$  використаємо умови: при  $x = \ell$  і  $N < 0$   $y = \delta_{11}^c$ ; при  $x = \ell$  і  $N > 0$   $y = \delta_{11}^p$ .

Тоді з рівнянь (4) і (5) одержимо:

– при  $N < 0$   $\delta_{11}^c = \frac{\ell^3}{3EI} \frac{3(\operatorname{tg} k\ell - k\ell)}{(k\ell)^3}$ ; (6)

– при  $N > 0$   $\delta_{11}^p = \frac{\ell^3}{3EI} \frac{3(k\ell - \operatorname{th} k\ell)}{(k\ell)^3}$ . (7)

Отже, при обчисленні частот вільних коливань з урахуванням поздовжніх сил у формулу (1) замість  $\delta_{11}$  потрібно підставляти значення, обчислені за формулами (6) і (7). Результати обчислення переміщень  $\delta_{11}^c$  і  $\delta_{11}^p$  та співвідношення частот  $\omega^c / \omega$  і  $\omega^p / \omega$  наведено на рисунках 2 і 3.

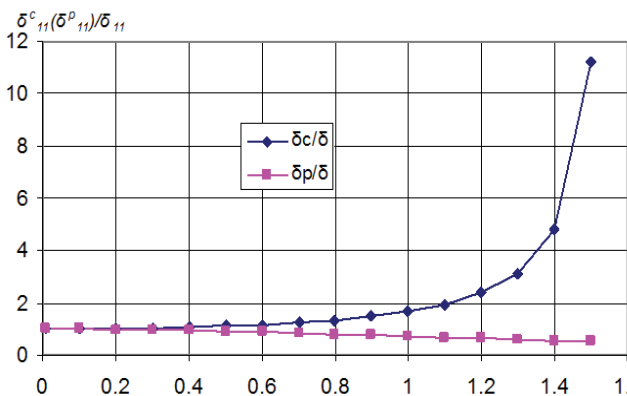


Рисунок 2 – Переміщення  $\delta_{11}^c$  і  $\delta_{11}^p$ , при  $\ell^3 / (3EI) = 1$  обчислене за (6) та (7)

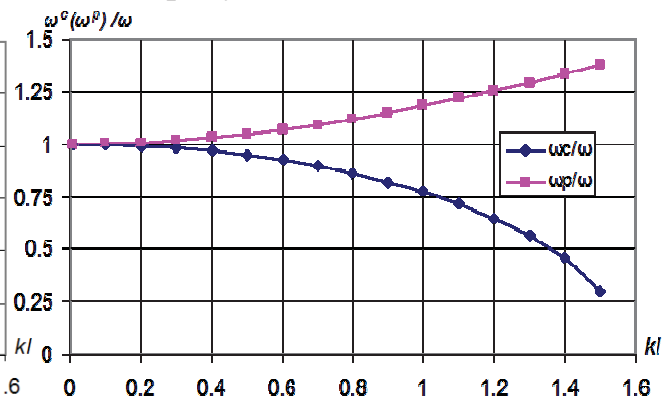


Рисунок 3 – Залежність співвідношень частот  $\omega^c / \omega$  і  $\omega^p / \omega$  від  $kl$

Залежність співвідношення частот  $\omega^c / \omega$  від співвідношення  $N/N_{кр}$  показано на рисунку 4. Як видно із графіка, вплив поздовжньої стискуючої сили на частоту вільних коливань до співвідношення  $N/N_{кр} = 0,1$  складає

менше 5%, а далі зі збільшенням поздовжньої сили співвідношення частот суттєво зменшується. Наприклад, при  $N/N_{кр} = 0,58$ ,  $\omega^c / \omega = 0,65$ .

Розглянемо динамічну стержневу систему с двома ступенями вільності (рис. 5).

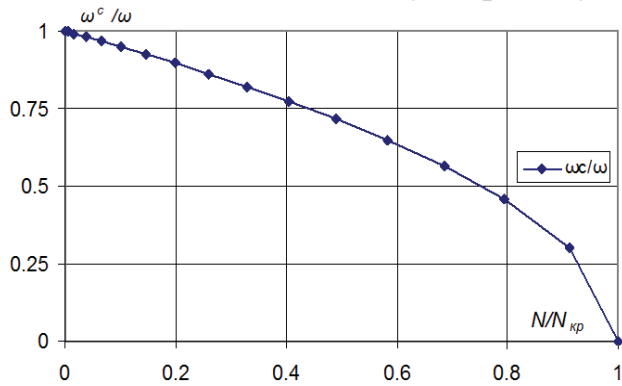


Рисунок 4 – Залежність співвідношення частот  $\omega^c / \omega$  від співвідношення  $N/N_{кр}$

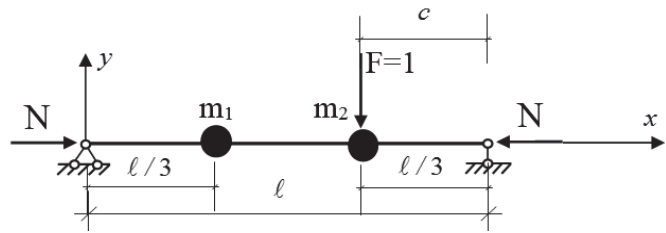


Рисунок 5 – Розрахункова схема динамічної системи ( $m_1=m_2=m$ )

Диференціальні рівняння зігнутої осі балки (рисунок 5) мають вигляд:

– для ділянки ліворуч від сили F при  $N < 0$  ( $0 \leq x \leq l - c$ )

$$EIy'' = -Ny - Fcx / l ; \quad (8)$$

– для ділянки праворуч від сили F при  $N < 0$  ( $l - c \leq x \leq l$ )

$$EIy'' = -Ny - F(l - c)(l - x) / l . \quad (9)$$

Після розв'язання системи рівнянь (8) і (9) одержимо рівняння зігнутої осі, яке ліворуч від сили F (рис. 5) має вигляд [3]

$$y = \frac{F \cdot \sin(kc)}{Nk \cdot \sin(kl)} \sin(kx) - \frac{F \cdot c}{N \cdot l} x , \quad (10)$$

за умови, що  $k^2 = N / EI$ .

Рівняння (10) дозволяє обчислити переміщення в точках розташування мас динамічної системи від  $F=1$ .

Враховуючи те, що динамічна система симетрична, одержимо:

при  $x = 2l/3$ ,  $c = l/3$ ,  $\delta_{22} = \delta_{11}$ ,

при  $x = l/3$ ,  $c = l/3$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ .

Таким чином, вирази для цих переміщень будуть мати вигляд:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{F \cdot \sin(kl/3)}{Nk \cdot \sin(kl)} \sin\left(\frac{2kl}{3}\right) - \frac{2Fl}{9N} = \frac{F \cdot l}{N} \left( \frac{9 \cdot \sin(kl/3) \cdot \sin(2kl/3) - 2kl \cdot \sin(kl)}{9kl \cdot \sin(kl)} \right), \quad (11)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{F \cdot \sin(kl/3)}{Nk \cdot \sin(kl)} \sin(kl/3) - \frac{F \cdot l}{9N} = \frac{F \cdot l}{N} \left( \frac{9 \cdot \sin(kl/3) \cdot \sin(kl/3) - kl \cdot \sin(kl)}{9kl \cdot \sin(kl)} \right). \quad (12)$$

$$\frac{Fl}{N} = \frac{Fl}{k^2 EI} = \frac{1 \cdot l^3}{(kl)^2 EI}.$$

$$\text{При } kl = 0, \delta_{11} = \delta_{22} = \frac{8}{486} \cdot \frac{l^3}{EI}, \text{ а } \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7}{486} \cdot \frac{l^3}{EI}.$$

Результати обчислення спектра частот  $\omega_1$  і  $\omega_2$  залежно від  $kl$  та їх співвідношення  $\omega_1 / \omega_2$  наведені на рисунках 6, 7 і 8 відповідно.

Залежність частоти  $\omega_1$  від співвідношення  $N/N_{кр}$  показано на рисунку 9. Як видно із графіка, вплив поздовжньої стискуючої сили на частоту основного

тону складає менше 5% до співвідношення  $N/N_{кр} = 0,1$ , а далі зі збільшенням поздовжньої сили частота суттєво зменшується. Наприклад, при  $N/N_{кр} = 1 \cdot 10^{-5}$  частота  $\omega_1 = 5,692/a$ , а при  $N/N_{кр} = 0,58$  частота зменшилась до  $\omega_1 = 3,675/a$ , що складає 35,4%.

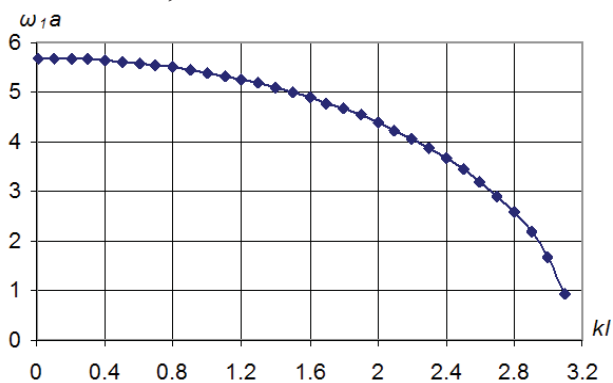


Рисунок 6 – Залежність частоти  $\omega_1$  від  $kl$  при  $a = \sqrt{ml^3 / (EI)}$

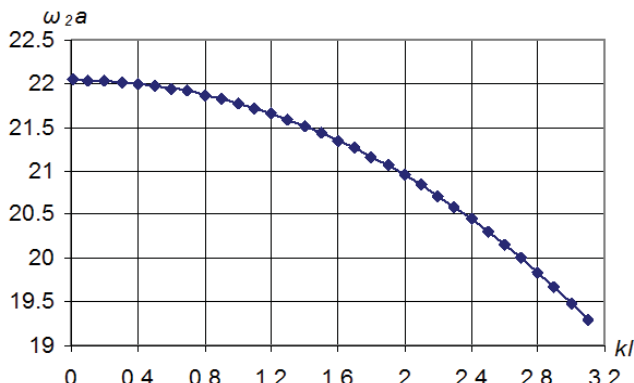


Рисунок 7 – Залежність частоти  $\omega_2$  від  $kl$  при  $a = \sqrt{ml^3 / (EI)}$

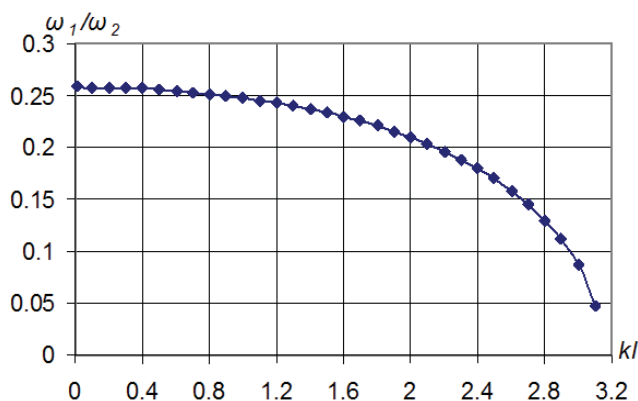


Рисунок 8 – Залежність співвідношення частот  $\omega_1 / \omega_2$  від  $kl$

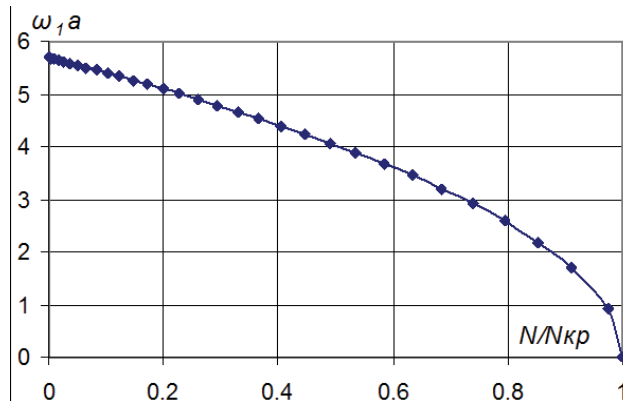


Рисунок 9 – Залежність частоти  $\omega_1 a$  від співвідношення  $N/N_{кр}$  при  $a = \sqrt{ml^3 / (EI)}$

**Висновки.** Аналіз кількісної оцінки впливу поздовжніх сил на спектр частот вільних коливань динамічної стержневої системи з кінцевим числом ступенів вільності при згинанні показав:

- 1) поздовжні сили суттєво змінюють частоти вільних коливань (див. рисунки 3, 4, 6, 7 та 9);
- 2) стискаючі сили зменшують частоти вільних коливань, а розтягуючі – збільшують їх;
- 3) поздовжні сили змінюють також положення частот на спектрі частот вільних коливань (див. рисунок 8).

#### Література

1. Бабаков Н.М. Теория колебаний. – М.: Госуд. изд-во техникотеоретич. лит., 1958. – 628 с.
2. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: Учебник для вузов / А.Ф.Смирнов, А.В.Александров, Б.Я.Лащенко, Н.Н.Шапошников; Под ред. А.Ф.Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с., ил.
3. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наукова думка, 1972. – 501 с.