

Скрильник О.М., к.т.н.
Університет м. Монс, Бельгія

Скрильник І.І.
Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

МОДЕЛЮВАННЯ РИЗИКІВ ВИБОРУ ІНВЕСТИЦІЙНИХ ПРОЕКТІВ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ ГРАФІВ ТА НЕЧІТКИХ ВІДНОШЕНЬ

У сучасних умовах якість управління реальним виробництвом, інвестиціями набуває усе більшої актуальності. Так, наприклад, вибір найкращого варіанта за наявності кількох інвестиційних проектів, формування оптимального портфеля цінних паперів у випадку наявності кількох інвесторів є типовими задачами. Від того, наскільки об'єктивно буде здійснене оцінювання інвестиційного проекту, залежать строк окупності, варіанти його альтернативного використання, прибуток. Також важливе значення для інвесторів має зниження максимального ризику їх капіталовкладень.

При розв'язанні таких задач на практиці часто доводиться приймати рішення в умовах невизначеності, а саме: невизначеність розвитку проектів, кілька варіантів їх розвитку, відсутність єдиної методики вибору оптимального інвестування та інші.

Для розв'язання таких класів задач дослідниками використовувалися різні методи оптимізації. Фундаментальні результати у цьому напрямку належать Д. Конолі, Д. Абрамсону, М. Рандалу [1 – 3]. Але такі підходи не завжди дають уяву про множину розв'язків. Тому виникла потреба створювати моделі шаблонів, які б були універсальними структурами і охоплювали б усі варіанти розв'язків задачі, а також несли в собі інформацію про зв'язки між об'єктами.

Указані фактори призводять до появи проблеми розроблення такої моделі вибору найкращого інвестиційного проекту, котра б поєднувала детерміновані методи обчислень із невизначеністю параметрів та середовища інвестування.

Постановка задачі. Нехай існує N інвестиційних проектів $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, кожний із яких характеризується набором показників $A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,k}\}$, а також має q варіантів розвитку $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$, що визначається певним прибутком $\{E_{i,j}\}, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq q$. Проведено експертне оцінювання даних інвестиційних проектів між собою з точки зору експертів вигідності їх для інвестування. Нехай існує шкала експертних характеристик M , яка якісні оцінки зіставляє із чисельними значеннями, що належать інтервалу $[0;1]$.

Необхідно оцінити привабливість інвестування у той чи інший проект в умовах невизначеності, визначити ступінь сумніву варіантів розвитку проектів та очікуваний прибуток.

Мета й завдання дослідження. Оскільки інвестування у проекти відбувається в умовах невизначеності, то необхідно проводити дослідження, підключаючи математичний апарат теорії нечітких відношень, нечітких множин, нечітких графів. Метою роботи є розробка та аналіз математичних моделей, побудованих на основі теорії нечітких відношень та пофарбування графів з нечіткими обмеженнями.

Досягнення поставленої мети зумовило необхідність визначення та вирішення наступних завдань:

1. Сформулювати та розв'язати узагальнену задачу пофарбування нечітких графів;
2. Розробити алгоритм та програмне забезпечення пофарбування графів із накладеними нечіткими обмеженнями;
3. Розробити рекомендації щодо практичного використання здобутих результатів.

Методи дослідження. При вирішенні поставленої задачі у роботі застосовуються: теоретико-графові методи при побудові та аналізі математичних моделей; методи теорії нечітких множин для пофарбування графів із накладеними нечіткими обмеженнями, методи теорії нечітких відношень.

Теоретичні основи розв'язання проблеми. Розвиток математичного апарату зумовив появу нових методів, за допомогою яких можна розв'язувати погано формалізовані задачі, тому актуальним є пофарбування нечітких графів та практичне застосування отриманих результатів.

З точки зору експерта кожний із N проектів є «більш вигідним» або «менш вигідним» для інвестування. Тобто на основі експертної характеристики проекти можна класифікувати, даючи якісні оцінки, такі як «більш», «менш», «кращий», «гірший». Оскільки існує шкала експертних характеристик M , яка якісні оцінки зіставляє із чисельними значеннями функції належності $\mu(x_i, x_j) \in M$, $1 \leq (i, j) \leq N$, то результатом порівняння проектів між собою буде матриця (1)

$$\begin{bmatrix} \mu_{\tilde{G}}(x_1, x_1) & \mu_{\tilde{G}}(x_1, x_2) & \cdots & \mu_{\tilde{G}}(x_1, x_N) \\ \mu_{\tilde{G}}(x_2, x_1) & \mu_{\tilde{G}}(x_2, x_2) & \cdots & \mu_{\tilde{G}}(x_2, x_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{\tilde{G}}(x_N, x_1) & \mu_{\tilde{G}}(x_N, x_2) & \cdots & \mu_{\tilde{G}}(x_N, x_N) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Відповідно, отриману матрицю можна представити у вигляді нечіткої множини $\tilde{G} = X_1 \times X_2$, де $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $X_2 = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.

Так як $X_1 = X_2 = X$, то множина впорядкованих пар (x_i, x_j) , $1 \leq (i, j) \leq N$ є нечітким графом у сенсі Бержа, для якого виконуються умови: $\tilde{G} \cap \bar{\tilde{G}} = \emptyset$; $\tilde{G} \cup \bar{\tilde{G}} = X_1 \times X_2$.

Отже, дану проблему можна розв'язати на основі теорії нечітких графів у термінах носія нечіткого відношення [4, 5].

Якщо ж множина варіантів розвитку проектів $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ буде відігравати роль фарб, пофарбування нечіткого графа $\tilde{G}$ у кольори з набору C дасть уявлення про ступінь імовірності розвитку i -го проекту за j -им варіантом та можливий прибуток $\{E_{i,j}\}, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq q$. Розв'язок можна представити у вигляді нечіткого відношення $\tilde{\mathfrak{R}}(C)$ (2)

$$\tilde{\mathfrak{R}}(C) = \begin{bmatrix} \mu_{\tilde{G}}(x_1, c_1) & \mu_{\tilde{G}}(x_2, c_1) & \cdots & \mu_{\tilde{G}}(x_N, c_1) \\ \mu_{\tilde{G}}(x_1, c_2) & \mu_{\tilde{G}}(x_2, c_2) & \cdots & \mu_{\tilde{G}}(x_N, c_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{\tilde{G}}(x_1, c_q) & \mu_{\tilde{G}}(x_2, c_q) & \cdots & \mu_{\tilde{G}}(x_N, c_q) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

та матриці очікуваних прибутків E (3)

$$E = \begin{bmatrix} E_{x1,c1} & E_{x2,c1} & \cdots & E_{xN,c1} \\ E_{x1,c2} & E_{x2,c2} & \cdots & E_{xN,c2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{x1,cq} & E_{x2,cq} & \cdots & E_{xN,cq} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Оскільки $\mu_{\tilde{G}}(x, c)$ – значення функції належності у нечіткому відношенні $\tilde{\mathfrak{R}}$, то задача пофарбування нечіткого графа сформулюється таким чином: для нечіткого графа $\tilde{G}$ потрібно відшукати таке нечітке відношення, для якого виконуються умови (4, 5)

$$\mu_{\tilde{G}}(x_i, c_n) + \mu_{\tilde{G}}(x_j, c_n) \leq 1 + \varepsilon(\mu_{\tilde{G}}(x_r, c_k), \mu_{\tilde{G}}(x_r, c_k)), \quad (n, k) = 1 \dots K; \quad (4)$$

$$\mu_{\tilde{G}}(x_i, x_j) > \delta, \quad (i, j) = 1 \dots |E|, \quad (5)$$

де $\varepsilon(\mu_{\tilde{G}}(x_r, c_k), \mu_{\tilde{G}}(x_r, c_k)) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_k \frac{1}{|E|} \sum_{r=1}^{|E|} (\mu_{\tilde{G}}(x_r, c_k) - \mu_{\tilde{G}}(x_r, c_k))^2}$ – відносна

евклідова відстань;

$\delta = \frac{1}{|E|^2} \sum_{i=1}^{|E|} \sum_{j=1}^{|E|} |\mu_{\tilde{G}}(x_i, x_j) - 1|$ – відносна відстань Хемінга;

$\mu_{\tilde{G}}(x_j, c_n)$ – значення функції належності у нечіткому відношенні $\tilde{\mathfrak{R}}$;

$\mu_{\tilde{G}}(x_i, x_j)$ – значення функції належності нечіткого графа $\tilde{G}$;

K – кількість кольорів.

Розроблено алгоритм швидкого пофарбування нечітких графів, який засновано на теорії нечітких множин та алгебраїчних операціях із нечіткими відношеннями. При цьому було введено та використано наступні поняття.

«Слабким ребром» нечіткого графа $\tilde{G}$ названо значення функції належності $\mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_j) < 0,5$ нечіткого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$, «сильним ребром» – значення нечіткого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$, що задовольняє умову $\mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_j) \geq 0,5$.

Редукцією нечіткого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$ по «слабкому ребру» є операція відшукування індукованого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j \xrightarrow{r} x_i \tilde{\mathfrak{R}}' x_j$, де $\Gamma\{x_k\} = \{x_r\}$, індексу (k, r) відповідають екстремуми $h(\tilde{\mathfrak{R}})$ нечіткого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$ [6 – 11].

Зв'язок між нечітким графом $\tilde{G}$ та чітким G представлено через нечітке відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$ (6), причому $x_i \mathfrak{R} x_j \supset x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j = \{(x_i, x_j) | \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_j)\}$ таким чином:

$$x_i \mathfrak{R} x_j = \begin{cases} 1, \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_j) \geq \delta; \\ 0, \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_j) < \delta, \end{cases} \quad (6)$$

де δ – відносна відстань Хемінга.

Алгоритм пофарбування нечітких графів складається з наступних кроків.

Крок 1. У нечіткому відношенні $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$ знайти таке «слабке ребро» $\mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_k, x_r)$, щоб $\mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_k, x_r) = h(\tilde{\mathfrak{R}})$, де $h(\tilde{\mathfrak{R}}) = \bigvee_{x,y} \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x, y) = \bigvee_{y,x} \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x, y)$ – глобальна проекція нечіткого відношення $\tilde{\mathfrak{R}}$.

Крок 2. Знайти індуковане відношення $\tilde{\mathfrak{R}}'$ за допомогою операції редукції нечіткого графа (7)

$$\mu_{\tilde{\mathfrak{R}}'}(x_i, x_j) = \begin{cases} \max[\mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_k, x_k), \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_r, x_r)], & \text{якщо } i = r \text{ та } j = r; \\ \max[\mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_r), \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_k)], & \text{якщо } j = r; \\ \max[\mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_r, x_j), \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_k, x_j)], & \text{якщо } i = r. \end{cases} \quad (7)$$

Крок 3. Сформувати підмножину

$$L^{(n+1)}\{x\} = \left\{ \frac{x_k}{\bar{\mu}_{\tilde{\mathfrak{R}}'}(x_k, x_r)}, \frac{x_r}{\bar{\mu}_{\tilde{\mathfrak{R}}'}(x_r, x_k)} \right\} \cup L^{(n)}\{x\},$$

де $L^{(n)}\{x\}$ підмножина відібраних вершин, утворена попередніми ітераціями $L^{(n)}\{x\} = \emptyset$, якщо лічильник ітерацій алгоритму дорівнює одиниці.

Крок 4. Повторювати виконання кроків 2 – 4 до тих пір, поки не знайдемо таке редукзоване відношення, для якого виконується умова (8)

$$\bigwedge_{x_i, x_j} \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_j) > 0,5. \quad (8)$$

Крок 5. Знайти всі можливі підмножини $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n$ на множині $L\{x\}$, виконуючи попарно операцію порівняння (9, 10)

$$\text{if } L^{(n)}\{x\} \cap L^{(n+1)}\{x\} \neq \emptyset, \quad (9)$$

$$\text{then } \tilde{C}_n = L^{(n)}\left\{\frac{x}{\mu_{\tilde{C}}(x, c)}\right\} \cup L^{(n+1)}\left\{\frac{x}{\mu_{\tilde{C}}(x, c)}\right\} \quad (n, i) = 1 \dots |L|. \quad (10)$$

Крок 7. Утворити нечітке відношення $\tilde{\mathfrak{R}}(C)$, що є пофарбуванням нечіткого графа (11).

	x_1	x_2	...	x_n
c_1	$\mu_{\tilde{C}}(x_1, c_1)$	$\mu_{\tilde{C}}(x_2, c_1)$	...	$\mu_{\tilde{C}}(x_n, c_1)$
c_2	$\mu_{\tilde{C}}(x_1, c_2)$	$\mu_{\tilde{C}}(x_2, c_2)$	...	$\mu_{\tilde{C}}(x_n, c_2)$
...	...	...	...	...
c_n	$\mu_{\tilde{C}}(x_1, c_m)$	$\mu_{\tilde{C}}(x_2, c_m)$	...	$\mu_{\tilde{C}}(x_n, c_m)$

(11)

Крок 8. Застосовуючи операцію (6), знайти матрицю пофарбування графа G .

Реалізація алгоритму. Нехай існує п'ять інвестиційних проектів $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Експертні оцінки результатів порівняння проектів між собою представлено у таблиці 1.

Таблиця 1

Експертні оцінки порівняння проектів між собою

$\tilde{\mathfrak{R}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0,8	0,3	0,9	0,7	0,1
x_2	0,2	0,6	0,7	0,9	1
x_3	0,6	0,8	0,9	0,4	0,8
x_4	0,9	0,8	0,2	0,7	0,8
x_5	0,3	0,6	0,8	0,9	0,7

Отримані експертні оцінки представимо як матрицю суміжності нечіткого графа $\tilde{G}$, зображення якого представлено на рисунку 1.

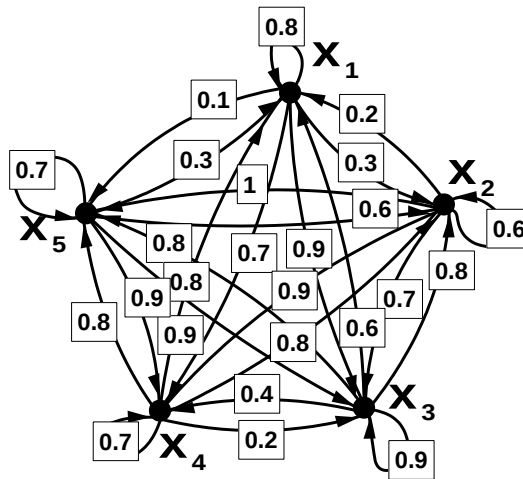


Рис. 1. Нечіткий граф $\tilde{G}$

Для даного нечіткого відношення $x_i \tilde{\mathcal{R}} x_j$ обчислюємо $h(\tilde{\mathcal{R}}) = 0,1$, що відповідає «слабкому ребру» між вершинами x_1, x_5 (табл. 2).

Таблиця 2

Нечітке відношення $\tilde{\mathcal{R}}'$				
$\tilde{\mathcal{R}}'$	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	0,6	0,7	0,9	1
x_3	0,8	0,9	0,4	0,8
x_4	0,8	0,2	0,7	0,9
x_5	0,6	0,9	0,9	0,8

$$L^{(i)}\{x\} = \left\{ \frac{x_1}{0,9}, \frac{x_5}{0,7} \right\}.$$

Отже, редукований нечіткий граф буде мати такий вигляд (рис. 3).

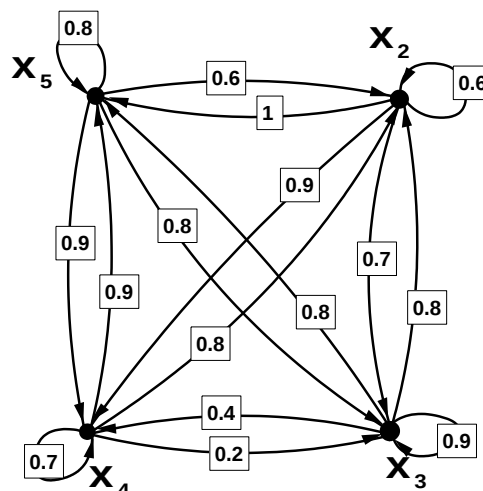


Рис. 3. Редукований нечіткий граф

Далі шукаємо найменший редукований граф. $h(\tilde{\mathfrak{R}}')=0,2; k=3; r=2$.

Таблиця 3

Нечітке відношення $\tilde{\mathfrak{R}}''$

$\tilde{\mathfrak{R}}''$	x_2	x_4	x_5
x_2	0,6	0,9	1
x_4	0,8	0,9	0,9
x_5	0,6	0,9	0,8

$$L^{(2)}\{x\} = \left\{ \frac{x_3}{0,8}, \frac{x_4}{0,6} \right\}.$$

Оскільки $h(\tilde{\mathfrak{R}}'')=0,6$, що задовольняє умову (8), то відношення $\tilde{\mathfrak{R}}'' = \tilde{J}$ є найменшим редукованим відношенням. Інші підмножини:

$$L^{(3)}\{x\} = \left\{ \frac{x_2}{0,6} \right\}; L^{(4)}\{x\} = \left\{ \frac{x_4}{0,9} \right\}; L^{(5)}\{x\} = \left\{ \frac{x_5}{0,8} \right\}.$$

$$L\{x\} = \begin{bmatrix} L^{(1)}\{x\} \\ L^{(2)}\{x\} \\ L^{(3)}\{x\} \\ L^{(4)}\{x\} \\ L^{(5)}\{x\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_1/0,9; x_5/0,7\} \\ \{x_3/0,8; x_4/0,6\} \\ \{x_2/0,6\} \\ \{x_4/0,9\} \\ \{x_5/0,8\} \end{bmatrix}.$$

Переходимо до кроку 6. Знаходимо всі можливі підмножини $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n$ на множині пар $L\{x\}$.

$$L^{(1)}\{x\} \cap L^{(2)}\{x\} = \emptyset;$$

$$L^{(1)}\{x\} \cap L^{(3)}\{x\} = \emptyset;$$

$$L^{(1)}\{x\} \cap L^{(4)}\{x\} = \emptyset;$$

$$L^{(1)}\{x\} \cap L^{(5)}\{x\} = \{x_5/0,7\}; \tilde{C}_1 = L^{(1)}\{x\} \cup L^{(5)}\{x\} = \{x_1/0,9, x_5/0,8\}.$$

$$L^{(2)}\{x\} \cap L^{(1)}\{x\} = \emptyset;$$

$$L^{(2)}\{x\} \cap L^{(3)}\{x\} = \emptyset;$$

$$L^{(2)}\{x\} \cap L^{(4)}\{x\} = \{x_4/0,6\}; \tilde{C}_2 = L^{(2)}\{x\} \cup L^{(4)}\{x\} = \{x_3/0,8, x_4/0,9\}.$$

$$L^{(2)}\{x\} \cap L^{(5)}\{x\} = \emptyset;$$

$$L^{(3)}\{x\} \cap L^{(1)}\{x\} = \emptyset;$$

$$L^{(3)}\{x\} \cap L^{(2)}\{x\} = \emptyset;$$

$$L^{(3)}\{x\} \cap L^{(4)}\{x\} = \emptyset;$$

$$L^{(3)}\{x\} \cap L^{(5)}\{x\} = \emptyset.$$

Оскільки всі можливі переходи знайдені, то $\tilde{C}_3 = L^{(3)}\{x\} = \{x_2 / 0,6\}$. Отже, маємо остаточне нечітке відношення $\tilde{\mathfrak{R}}(C)$ (табл. 4).

Таблиця 4

Нечітке відношення $\tilde{\mathfrak{R}}(C)$

$\tilde{\mathfrak{R}}(C)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\tilde{C}_1$	0,9	0	0	0	0,8
$\tilde{C}_2$	0	0	0,8	0,9	0
$\tilde{C}_3$	0	0,6	0	0	0

Перевіримо, чи задовольняє отримане відношення умові (4). Для цього обчислимо $\varepsilon(\mu_{\tilde{C}}(x_r, c_k), \mu_{\tilde{C}}(x_r, c_k))$.

$$\varepsilon(\mu_{\tilde{C}}(x_r, c_k), \mu_{\tilde{C}}(x_r, c_k)) = \sqrt{|0,9 - 1|^2 + |0,8 - 1|^2 + |0,8 - 1|^2 + |0,9 - 1|^2 + |0,6 - 1|^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} = 0,13.$$

Наприклад, для вершини (x_2, x_3) $\mu_{\tilde{C}}(x_2, x_3) = 0,7$, що є більшим, ніж δ . Тоді

$$\mu_{\tilde{C}}(x_2, C_2) + \mu_{\tilde{C}}(x_3, C_2) = 0 + 0,8 = 0,8;$$

$$1 + \varepsilon(\mu_{\tilde{C}}(x_r, c_k), \mu_{\tilde{C}}(x_r, c_k)) = 1 + 0,13 = 1,13.$$

Оскільки права частина менша, ніж ліва, то умова (4) справедлива. Аналогічно для інших вершин. Перейдемо від нечіткого пофарбування до чіткого (табл. 5).

Таблиця 5

Матриця пофарбування графа

$R(C)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
C_1	1	0	0	0	1
C_2	0	0	1	1	0
C_3	0	1	0	0	0

Отже, множина $K = \{C_1, C_2, C_3\}$ містить три типи кольорів, тобто проекти x_1, x_5 розвиватимуться за першим варіантом, проекти x_3, x_4 розвиватимуться за другим, проект x_2 – за третім варіантом.

Програмне втілення. За результатами теоретичних досліджень, створено програмний продукт Fuzzy Graph Toolbox, розроблення якого проводилося у середовищі MatLab.

Висновки. Авторами запропоновано розв'язок актуальної економічної задачі вибору інвестиційного проекту в умовах невизначеності.

В основу розв'язку задачі вибору найкращого інвестиційного проекту в умовах невизначеності покладено пофарбування відповідної теоретико-графової моделі. Розв'язок задачі пофарбування нечіткого графа дає розподіл ступенів сумніву варіантів розвитку інвестиційних проектів, що дозволяє, виходячи із наявних економічних умов, оцінити привабливість того чи іншого варіанту капіталовкладень.

При розгляді проблеми управління капіталовкладень сформульовано та розв'язано задачу пофарбування нечітких графів. Показано, що такий підхід відповідає формальній логіці інвестора та дозволяє здійснити вибір у ситуації багатовекторного розвитку проекту.

У зв'язку з тим, що в умовах управління реальними інвестиціями вибір найкращого варіанта при наявності кількох інвестиційних проектів є найбільш типовою і відповідальною задачею, остаточно рішення щодо вибору найкращого інвестиційного проекту в умовах невизначеності здійснюється експертом на основі матриці очікуваних прибутків.

Список літератури

1. Carrahan R., Pardalos P. M. An exact algorithm for the maximum clique problem // Operations Research Letters. – 1990. – № 9. – P. 375 – 382.
2. de Klerk E., Pasechnik D. V. On approximate graph colouring and MAX-k-cut algorithms based on the ϑ -function // Journal of Combinatorial Optimization. – 2004. – № 8(2004).
3. Kochenberger G.A., Glover F., Alidaee B., Rego C. An Unconstrained quadratic binary programming approach to the vertex coloring problem // Annals of Operations Research. – 2005. – № 139.
4. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с французского / Под ред. С.И. Травкина. – М: Радио и связь, 1982. – 431 с.
5. Rosenfield A. Fuzzy graphs. – In: Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes. Academic Press, 1975. – P. 77 – 95.
6. Santos E.S. Fuzzy Algorithms // Inform. and Control. Vol. 17, 1970. – P. 326 – 339.
7. Santos E.S. On Reduction of Maximum Machines // Jour. Math. Anal. and Appl, Vol. 37 №3, 1972.
8. Lee E.T., Chang C.L. Some properties of fuzzy logic // Inform. and Control, Vol. 19 №5, 1971. – P. 417 – 431.
9. Берж К. Теория графов и её применения / К. Берж. – М: ИЛ, 1962. – 319 с.
10. Дистель Р. Теория графов / Р. Дистель. – Новосибирск: ИИМ, 2002. – 335 с.
11. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М: Мир, 1978. – 427 с.