

МОДЕЛЮВАННЯ ЗНИЖЕННЯ РИЗИКУ ІНВЕСТИТОРІВ ПРИ УПРАВЛІННІ СПІЛЬНИМ ПОРТФЕЛЕМ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Задача формування й оптимізації спільного інвестиційного портфеля цінних паперів розв'язана за допомогою нового підходу з використанням побудови p -мірного паттерна на основі пофарбування відповідної теоретико-графової моделі зі зваженими вершинами [1, 2].

Постановка задачі. Нехай маємо n рівноправних інвесторів з власними капіталами $xw_1, xw_2, \dots, xw_n$, які вони хочуть розподілити певним чином для формування індивідуальних портфелів та спільного портфеля цінних паперів. Нехай також на ринку обертається q видів паперів, що мають ефективності $E = \{E_1, E_2, \dots, E_q\}$ (E_i – випадкова ефективність, наприклад, прибуток за деякий період часу цінних паперів i -го виду.). Проблема полягає у зниженні значення максимального ризику інвесторів.

Метод розв'язування. Відомо, що диверсифікація портфеля дає позитивний результат, тобто при збільшенні числа видів цінних паперів у портфелі ризик стає обмеженим і наближується до нуля. Тобто, відповідно для зменшення ризику портфеля потрібно збільшити номенклатуру цінних паперів у ньому. Але при цьому розмір часток капіталовкладень за окремими видами паперів зменшується, а, отже, знижується відсоток прибутку від більш прибуткових паперів.

Знизити значення максимального ризику або збільшити кількість цінних паперів у портфелі без зменшення відсоткового співвідношення часток капіталу за окремими видами паперів можливо у таких випадках:

1. Об'єднання портфелів декількох інвесторів в один;
2. Формування спільного портфеля шляхом об'єднання часток капіталу.

У першому випадку номенклатура цінних паперів автоматично збільшується при об'єднанні портфелів, а, отже, ризик відповідно зменшується. Проте, ця ситуація провокує боротьбу за контроль портфеля між учасниками.

У другому випадку право контролю за портфелем зберігається у кожного учасника, проте інвестори виділяють певну частку власного капіталу для формування спільного портфеля, який належить усім учасникам. Розподіл прибутку в такому разі відбувається за домовленою схемою, наприклад, в еквіваленті вкладених коштів кожного з учасників. Хоча формально існує $n + 1$ портфель, у реальності придбані папери зберігаються у n учасників, тобто реально існує n портфелів. У цьому випадку оптимізація спільного портфеля відбувається за рахунок спільних коштів, вона передбачає купівлю та розподіл цінних паперів між учасниками.

Отже, зменшити ризик інвесторів можна завдяки формуванню спільного портфеля шляхом об'єднання часток їх капіталів. Ризик спільного портфеля обчислюється за формулами $\sigma_{\Sigma} = \frac{\bar{\sigma}_p}{\sqrt{q}}$; $\bar{\sigma}_p = \max \sigma_{pj}; j=1 \dots n$, де σ_{Σ} – ризик спільного портфеля, тобто ризик для кожного з учасників; $\bar{\sigma}_p$ – максимальний ризик портфельів учасників; σ_{pj} – значення ризику для j-го портфеля.

Визначено, яким чином відбувається оптимізація портфельів кожного з учасників. Нехай кожний із учасників виділяє певну частку свого капіталу для формування спільного портфеля, тоді капітал кожного з інвесторів буде дорівнювати $XW_i = w_{vpi} + W_i; 1 \leq i \leq n$, де w_{vpi} – частка капіталу i-го інвестора, котру він планує вкласти в спільний портфель; W_i – капітал, що i-ий інвестор планує вкласти у власний портфель, який буде для кожного учасника розподілений по різному $W_i = \sum_{k=1}^q w_{i,k}$.

Капітал, виділений кожним учасником для формування спільного портфеля, у цьому разі дорівнює $\sum_{i=1}^n w_{vpi} = W_{max}$.

Задача формування спільного портфеля відповідає моделі

$$V_p = \sum_{i=1}^N w_i \cdot x_{i,j} \cdot V_{ij} \cdot (w_i \cdot x_{i,j})^T \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^N x_{i,j} \cdot w_i = W_{max}; 0 \leq w_i \leq W_{max}; \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^N m_i \cdot x_{i,j} \cdot w_i = m_p; \quad (3)$$

$$x_{i,j} + x_{k,j} \leq 1; x_{i,j} \in \{0,1\}; x_{k,j} \in \{0,1\}; \quad (4)$$

$$1 \leq (i,k) \leq N; 1 \leq j \leq q.$$

Тут V_p є дисперсією портфеля, що визначає в кінцевому випадку його ризик; $x_{i,j} \in \{0,1\}$ є бінарною змінною (вершина графа), значення якої дорівнює 1, якщо $x_{i,j}$ пофарбована у колір E_j та 0 в іншому разі; w_i – вага вершини в графі, тобто частка капіталу (шуканий параметр); W_{max} – загальний капітал; m_i – відоме математичне очікування ефективності; m_p – бажане математичне очікування ефективності портфеля, що задається інвестором. Коваріаційна матриця V_{ij} обчислюється за формулою $V_{ij} = \text{cov}(E_i E_j)$.

У результаті отримано w_{opt}^* – частки капіталу, що вкладає інвестор у ті види цінних паперів, із яких буде формувати свій власний портфель. Для

кожного портфеля визначено його мінімальну дисперсію, а також мінімальний ризик. Визначено ризик спільного портфеля цінних $\sigma_{\Sigma} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)}{\sqrt{q}}$.

Знаючи найменший ризик спільного портфеля, визначено який цінний папір із q видів буде придбаний кожним учасником для формування спільного портфеля (при цьому враховується склад кожного власного портфеля) і яку частку свого капіталу вони для цього виділять. Граф K_n потрібно пофарбувати у кольори з множини фарб $\{E\}$ так, щоб $V_p = V_{\Sigma}$.

Дану задачу можна розв'язано за допомогою побудови відповідного паттерна на основі пофарбування його еквівалентної теоретико-графової моделі та композиційної операції між вектором оптимального розв'язку x_{opt}^* та вектором кольорів E , тобто $\mathcal{R}(E) = x_{opt}^* \circ E$. Побудований паттерн дає уяву про варіанти розподілу капіталовкладень між учасниками спільного портфеля на основі яких можна визначити оптимальний варіант з найменшим ризиком.

Правильність побудови паттерну перевіряється за допомогою критерію пофарбованості, у якому вагами кольорів у палітрі є значення ризиків цінних паперів, що формують портфель $\sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i \cdot V_{ij} \cdot w_j} \leq \sigma_{\Sigma}$. Паттерн формується таким чином, щоб його елементами були значення ризиків $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ цінних паперів.

Висновки. Розв'язок задачі пофарбування зваженого n -дольного графа дає такий розподіл цінних паперів між частками капіталу, при якому ризик портфеля є мінімальним.

При вирішенні поставленої задачі у роботі застосовуються: методи 0-1 програмування та квадратичної оптимізації для побудови математичної моделі n -мірного паттерна; евристичний метод пофарбування теоретико-графової моделі; об'єктно-орієнтований метод до програмної реалізації алгоритмів пофарбування графів.

Список літератури

1. Скрильник І.І. Алгоритм побудови n -мірних паттернів із накладеними обмеженнями // Вісник Запорізького національного університету : (Фізико-математичні науки. Біологічні науки) : наукові статті. — Запоріжжя: ЗНУ, 2006. — № 1. — С. 110 – 116.
2. Скрильник І.І. Проблема побудови n -мірних паттернів // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля : наукові статті. — Луганськ, 2009 – Ч. 2, № 1(131). — С. 245 – 252.
3. Скрильник І.І. Управління портфелем цінних паперів у випадку декількох інвесторів // Стратегические вопросы мировой науки — 2009 : V міжнар. наук.-практ. конф., 7-15 лютого 2009 р. : (Математичні методи в економіці): тези доп. — Przemyśl: Nauka i studia, 2009. — С. 65 – 68.