МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ПОЛТАВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА»

КАФЕДРА БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

СЕРГІЙ ЖИГИЛІЙ

СТАТИКА

Частина 1

КУРС ЛЕКЦІЙ

з дисципліни «Теоретична механіка»
для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання

ПОЛТАВА 2023

УДК 531/534 (о7)
ББК 22.21я7
Ж 68

Рецензент:
***О.О. Довженко**, професор кафедри будівельних конструкцій, канд. техн. наук, професор, Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка».*

Рекомендовано до друку навчально-методичною радою Навчально-наукового інституту архітектури, будівництва та землеустрою
Протокол № 7 від 14 червня 2023 р.

Жигилій С.М.
Статика, ч. 1: курс лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти / С.М. Жигилій. – Полтава: Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», 2023. – 202 с.: іл. 114, бібліогр. 7

Курс лекцій «Статика, ч.1» є складовою частиною загального курсу лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» й містить лекції до семи основних тем першого розділу теоретичної механіки. У лекціях усебічно розглянуто та пояснено низку положень і питань теоретичної механіки, які є базовими та належне знання яких визначає успішне засвоєння наступних розділів і тем теоретичної механіки та готовність до розв'язування практичних задач про рівновагу матеріальних тіл. Для самоконтролю студентами своїх знань лекції супроводжено розбитими на шість окремих блоків питаннями, досить простими за своїм змістом, які у повному обсязі охоплюють і контролюють зміст лекцій.
Для студентів (усіх форм навчання) та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

У авторській редакції

41.14.02.01

ЗМІСТ

Передмова 5
Вступ до теоретичної механіки. 7
Тема 1. Основні поняття, визначення й аксіоми статики 11
§ 1.1. Предмет і дві основні задачі статики 11
§ 1.2. Основні поняття та визначення статики . . . 11
§ 1.3. Аксіоми статики 22
Питання для самоконтролю та експрес-тестування Ст-1 . 28
Тема 2. Збіжна система сил. 32
§ 2.1. Додавання двох сил, що прикладені в одній точці. Силовий трикутник 32
§ 2.2. Зведення збіжної системи сил до канонічного вигляду. Силовий многокутник 37
§ 2.3. Проекція на вісь вектора сили 41
§ 2.4. Аналітичний спосіб визначення рівнодійної збіжної системи сил 48
§ 2.5. Умови рівноваги збіжної системи сил 50
§ 2.6. Теорема про три сили 52
§ 2.7. Деякі види в'язей та їх реакції 54
§ 2.8. Поняття про ферми. Вимоги до розрахункової схеми простої плоскої ферми 67
§ 2.9. Розрахунок ферм способом вирізання вузлів 71
Питання для самоконтролю та експрес-тестування Ст-2 . 77
Питання для самоконтролю та експрес-тестування Ст-3 . 82
Питання для самоконтролю та експрес-тестування Ст-4 . 86
Тема 3. Теорія моментів сил 90
§ 3.1. Момент сили відносно точки 91
§ 3.2. Момент сили відносно осі 96
§ 3.3. Залежність між моментами сили відносно точки та відносно осі 100
§3.4. Теореми Варіньона про момент рівнодійної збіжної системи сил 104
§ 3.5. Формули Ейлера для моментів сили відносно декартових координатних осей 105
Тема 4. Теорія пар сил 108
§ 4.1. Зведення до канонічного вигляду системи з двох паралельних однаково напрямлених сил 108
§ 4.2. Зведення до канонічного вигляду системи з двох антипаралельних сил 112
§ 4.3. Зведення до канонічного вигляду паралельної системи сил 115
§ 4.4. Пара сил. Момент пари сил 115

§ 4.5. Властивості пар сил 121
§ 4.6. Розподілені по довжині навантаження. Рівнодійні розподілених навантажень 124
§ 4.7. Реакція абсолютно жорсткого затиснення . . 127
Питання для самоконтролю та експрес-тестування Ст-5 . 129
Тема 5. Умови рівноваги різних систем сил 134
§ 5.1. Зведення сили до даної точки. Метод Пуансо 134
§ 5.2. Зведення довільної системи сил до центра зведення. Головний вектор. Головний момент. Теорема Пуансо 136
§ 5.3. Аналітичне визначення головного вектора та головного моменту системи сил 139
§ 5.4. Умови рівноваги просторової довільної системи сил 142
§ 5.5. Умови рівноваги різних систем сил 143
Тема 6. Зведення різних систем сил до канонічного вигляду 148
§ 6.1. Зміна положення центра зведення. Інваріанти системи сил (інваріанти зведення) 148
§ 6.2. Геометричний і механічний змісти другого інваріанту 152
§ 6.3. Зведення просторової довільної системи сил до силового гвинта (динами) 155
§ 6.4. Окремі випадки зведення просторової довільної системи сил до канонічного вигляду 164
§ 6.5. Класифікація канонічних виглядів різних систем сил за допомогою інваріантів зведення . . . 168
§ 6.6. Теорема Варіньона у загальному вигляді 169
Тема 7. Прикладні задачі статики. Статичні розрахунки конструкцій і споруд 171
§ 7.1. Поняття про прості конструкції та споруди. Визначення опорних реакцій плоских простих конструкцій 171
§ 7.2. Визначення зусиль у стержнях плоских ферм способом Ріттера 179
§ 7.3. Поняття про систему матеріальних тіл і про плоскі складені конструкції 184
§ 7.4. Способи визначення опорних реакцій плоских складених конструкцій 191
Питання для самоконтролю та експрес-тестування Ст-6 . 194
Додатки 200
Літературні джерела 202

ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка, яка є науковою основою і підґрунтям усіх сучасних технічних наук, має надзвичайно важливе значення в навчанні й інженерній підготовці студентів усіх технічних спеціальностей. Будь-кому свідомому зрозуміло, що навчальна дисципліна «Теоретична механіка» формує й надає необхідний і достатній обсяг знань для подальшого успішного засвоєння всіх суміжних загальних та спеціальних інженерних дисциплін.

Самостійна робота студентів – важлива складова організації процесу навчання у ЗВО, актуальність якої стрімко зростає через цілу низку відомих подій і явищ, що відбуваються в Україні та системі її вищої освіти останнім часом. Самостійна робота формує у здобувачів вищої освіти пізнавальні здібності та спрямованість на безперервну самоосвіту й включає різноманітні види індивідуальної і колективної освітньої діяльності, що здійснюється на аудиторних та позааудиторних заняттях під керівництвом викладача чи без його безпосередньої участі. Керована самостійна робота студентів – досить складна й різноманітна за своїм змістом творча діяльність, пов'язана з передаванням і засвоєнням знань, умінь, навичок і способів пізнавальної діяльності від викладача до студента. Постає потреба у різноманітній навчальній літературі (підручниках, посібниках, курсах і конспектах лекцій та ін.), за допомогою яких студенти різних форм навчання могли б самостійно якісно навчатися.

Зміст курса лекцій «Статика, ч. 1» з дисципліни «Теоретична механіка» відповідає робочим програмам цієї навчальної дисципліни для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» і є одним із результатів багаторічної праці автора на декількох викладацьких посадах кафедри теоретичної механіки. Набутий досвід зумовив і становить зміст навчального посібника, при написанні якого автор прагнув до максимально повного та доступного подання розглядуваних питань.

Курс лекцій містить лекції до семи основних тем першого розділу теоретичної механіки. У лекціях усебічно розглянуто та пояснено низку положень і питань теоретичної механіки, які є базовими та належне знання яких визначає успішне засвоєння наступних розділів і тем теоретичної механіки. Нумерація тем і формул лекцій відповідає тому курсу теоретичної механіки, що викладає автор; для читачів, які не є безпосередніми студентами, зазначену нумерацію необхідно сприймати за умовну. Основні поняття, визначення та висновки, які *бажано* (насправді, мається на увазі – *обов'язково треба*) вивчити *напам'ять*, позначені в тексті символом ⓘ. Рекомендації, зауваження, поради та уточнення позначено символом 🚑. Поняття з відповідних розділів вищої математики, що застосовуються при розгляді та доведенні тих чи інших понять теоретичної механіки, позначено символом 🕸, а приклади (які за суттю є нескладними задачами) – символом ⚒.

Для самоконтролю студентами своїх знань лекції супроводжені ***питаннями***, які також використовуються в білетах для проведення запланованих робочою програмою дисципліни протягом відповідного змістового модуля визначеної кількості експрес-тестувань. Особливістю цих запитань є те, що кожне запитання оцінене певною кількістю балів, які студент має можливість отримати при написанні експрес-тестування (кількість балів залежить від складності самого питання і точності відповіді на нього). Білети для експрес-тестувань, на проведення кожного з якого відводиться 15 хв., містять по 15 запитань та складені таким чином, що правильні й повні відповіді на всі питання білету оцінюються у 100 балів (отримані бали за кожне експрес-тестування з урахуванням їх вагомого множника входять окремими доданками до загальної рейтингової оцінки знань студентів). Приклад одного з білетів для проведення експрес-тестування наведено у додатку А, а приклад варіанта відповіді на запитання цього білета – у додатку Б.

Автор

ВСТУП ДО ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Механіка є однією з найстародавніших наук[1]. Ось як, наприклад, слово ***механіка*** визначає енциклопедичний словник:

> ***МЕХАНІКА*** [походить від грецького слова mĕchanikē (technë), що в перекладі означає *мистецтво будування машин* (за іншими джерелами – *хитрість, хитрування*)] – наука, що вивчає механічний рух твердих, рідинних та газоподібних матеріальних тіл і взаємодії між ними. В основу класичної механіки покладені *закони Ньютона*. Методами механіки вивчають рухи будь-яких матеріальних тіл (за винятком мікрочастинок), швидкості яких значно менші ніж швидкість світла. Закони механіки використовують для розрахунків машин, механізмів, будівельних споруд, транспортних засобів (у т. ч. літаків і ракет), рухів різноманітних космічних тіл і т. п. Залежно від того, рух яких об'єктів розглядається, розподіляють: *механіку матеріальної точки* та *системи матеріальних точок*, *механіку твердого тіла*, *механіку суцільного та сипучого середовищ*, *механіку тіл змінної маси, механіку ґрунтів* і т. д. Рухи тіл із швидкостями, близькими до швидкості світла, та рухи в сильних гравітаційних полях розглядають у *релятивістській механіці*, а рухи мікрочастинок – у *квантовій механіці*.

Уже з наведеного визначення видно, яку важливу роль наука механіка відіграє в житті людства. Взагалі, виникнення й розвиток механіки тісно пов'язані з потребами практичної діяльності людства: з розвитком землеробства (створенням й удосконаленням різних знарядь праці, підйомом вод річок для зрошування); з будівництвом різного призначення споруд, виникненням і зростанням міст; розвитком різних ремесел і мореплавання та ін.

Теоретична ж механіка є однією з частин загальної механіки.

🛈 ***Теоретична механіка*** – це наука про найбільш загальні закони механічного руху матеріальних тіл і механічні взаємодії між матеріальними тілами.

У наведеному визначенні теоретичної механіки вжито поняття *матеріального тіла*, *механічного руху* та *механічної взаємодії*, які

[1] Існує навіть така суперечка між деякими математиками та механіками при вирішенні питання: яка з наук виникла першою? Математики, звісно, вважають що математика. На що механіки заперечують: «Ні, механіка! А математика виникла лише як апарат, необхідний для розв'язування механічних задач». Залишимо пошук відповіді на це питання для бажаючих.

у розглядуваному курсі ще ніяк не означені й тому вважаються невідомими. На початку вивчення теоретичної механіки такі випадки, коли одні поняття вводяться через інші, ще невідомі, зустрічаються доволі часто. Тільки після остаточного введення та вивчення основних понять й визначень теоретичної механіки складеться суцільна та чітка картина цих понять.

Іншу частину механіки складають різні загальні й спеціальні технічні науки, що присвячені проектуванню та розрахунку всіляких конкретних будівель, споруд, двигунів, механізмів і машин або їх частин (деталей). Але всі ці науки базуються на законах і методах теоретичної механіки. Отже, теоретична механіка є ***науковою основою та підґрунтям*** усіх сучасних технічних наук.

Усе викладене дає можливість зрозуміти, яке важливе значення має теоретична механіка в навчанні й інженерній підготовці студента технічного ВНЗ як фундамент для засвоєння суміжних загальних дисциплін (опір матеріалів, деталі машин, теорія механізмів і машин тощо) та спеціальних інженерних дисциплін.

Теоретична механіка належить до класу природничих наук (тобто до наук про природу, які вивчають різноманітні властивості ***матерії***[2] та усякі форми її існування) і має справу з однією з форм існування матерії – ***речовиною***. З речовини складаються всі фізичні тіла, їх молекули, атоми та суб'ядерні частинки (протони, електрони, фотони, нейтрино й ін.).

ⓘ ***Матеріальне тіло*** – це фізичне тіло, що має свої форму і геометричні розміри та складається з певної кількості речовини й, отже, має певну масу спокою.

Теоретична механіка має справу тільки з матеріальними тілами; нематеріальні ж об'єкти (думки, соціально-політичні відносини, душа, астральне тіло й т. ін.) є предметами вивчення інших наук і псевдонаук.

ⓘ ***Механічний рух матеріального тіла*** – це процес переходу розглядуваного тіла з одного положення в просторі в інше певним способом у певній залежності від часу.

Механічний рух є найпростішою формою руху матерії.

Рух у більш загальному значенні – це не тільки *зміна положення* матеріальних тіл, але й всіляка *зміна* живих організмів чи істот, суспільно-економічних формацій та ін. Різні види рухів є об'єктами вивчення різних наук. Але, наприклад, теплові, хімічні, електричні форми руху матерії, пов'язані з механічним переміщенням молекул, атомів, електронів. Тому й немало законів механічного руху вико-

[2] Як відомо, ***матерія*** – об'єктивна реальність, яка існує незалежно від людських свідомості та відчуття.

ристовують у науках, що вивчають деякі немеханічні форми руху матерії. Найбільш складні форми руху матерії вивчають у фізіології, психології, соціології, бо вищою формою руху матерії є мислення та свідомість; оскільки такі форми руху матерії приводять і до зміни її якості, то закони простого механічного руху навряд чи можуть бути використаними в цьому випадку.

Як випливає з наведеного вище визначення, всякий механічний рух відбувається в просторі та в часі. Простір і час є формами існування (буття) матерії; ці поняття нерозривно пов'язані, їх єдність проявляється в русі.

Простір і ***час*** у класичній механіці постулюються як ***абсолютні поняття***, властивості яких не пов'язані одне з одним і не залежать від матеріальних тіл, які перебувають у русі. Такі уявлення про простір і час сформульовані засновником класичної механіки Ісааком Ньютоном (4.01.1643 – 31.3.1727) у його загальновідомій праці «Математичні начала натуральної філософії» (1687 р.). Отже, у теоретичній механіці розглядають:

- ⓘ – ***простір*** як *абсолютно нерухомий*, у всіх напрямках *однорідний* та *суцільний*, *тривимірний*, усі вимірювання в якому відповідають законам евклідової геометрії[3];
- ⓘ – ***час*** як *універсальний*, тобто протікає тільки в одному напрямку в усіх точках простору однаково та не залежить від швидкості руху тіл[4].

Подальший (у післяньютонівський час) розвиток філософії та фізики привів до інших уявлень про реальні простір і час. У релятивістській механіці, що базується на теорії відносності, видатний учений XX століття Альберт Ейнштейн (14.3.1879 – 18.4.1955) довів, що геометричні властивості фізичного простору й властивості часу нерозривно поєднані з властивостями матерії, що рухається в просторі та часі. Але цей взаємозв'язок особливо відчутно проявляється при великих швидкостях, близьких до швидкості світла, й (або) поблизу велетенських скупчень речовини. При звичайних

[3] На теперішній час, як результат виконаних численних вимірювань, у світовій науці припускають, що евклідова геометрія досить точно описує геометричні співвідношення реального світу, починаючи з відстаней, разів у *10* менших, ніж розміри ядер (тобто з відстаней $10^{-16}\,м$), до відстаней, близьких до «розмірів Всесвіту» (тобто відстаней $10^{26}\,м$); однак, якщо справедливі передбачення теорії відносності, то на цих відстанях ($10^{26}\,м \approx 10$ *млрд. світлових років*) має почати виявлятися неевклідовість простору. Також вважають, що на відстанях, менших ніж $10^{-16}\,м$, геометрія Евкліда продовжує бути справедливою, але невідомо до скільки малих відстаней.

[4] Незалежність властивостей абсолютних простору та часу пов'язана з гіпотезою про можливість миттєвої передачі взаємодії через певний порожній нерухомий простір. Зрозуміло, що миттєвих взаємодій не існує, оскільки ніяка взаємодія не може поширюватися (передаватися) зі нескінченно великою швидкістю.

швидкостях і при русі не поблизу велетенських скупчень речовини (наприклад, у Земних умовах) ***простір і час знаходяться у надзвичайно малій залежності від властивостей матерії*** й тому цією залежністю у теоретичній механіці ***нехтують***.

У Міжнародній системі одиниць СІ (від *System International*) для вимірювання елементів простору застосовують одиницю довжини – метр (*м*), а для часу – секунду (*сек*). Також широко вживають похідні та позасистемні одиниці вимірювання – сантиметр (*см*), міліметр (*мм*), кілометр (*км*), хвилина (*хв.*), година (*год.*) та ін.

ⓘ ***Механічна взаємодія*** між матеріальними тілами – це взаємодія з намаганням змінити характер механічного руху кожного з тіл, що бере участь у розглядуваній механічній взаємодії (або взаємодія з намаганням змінити кінематичний стан кожного з цих тіл).

В одних випадках механічна взаємодія приводить до зміни характеру механічного руху, в інших – ні. Для наочності можна розглянути ситуації, які виникають, наприклад, у міському тролейбусі у часи пік. Пересування пасажира переповненим тролейбусом приводить до виникнення тих чи інших механічних взаємодій. Найчастіше взаємодії між пасажирами однієї вагової категорії спричиняють відповідні зміни механічних рухів їх. Взаємодія ж якої-небудь тендітної студентки з тролейбусними поручнями (або з дебелим дядьком) ніякої зміни характеру механічного руху останніх не викликає.

Притягання або відштовхування намагнічених або наелектризованих тіл також є прикладом механічної взаємодії.

Зрозуміло, що у результаті механічної взаємодії матеріальне тіло може: а) ***рухатися*** певним чином; б) знаходитися в стані ***нерухомості*** (або в ***спокої***), який є окремим випадком механічного руху. Кожний з цих станів називають ***кінематичним станом тіла***.

Традиційно курс теоретичної механіки у технічних ВНЗ складається з трьох частин:

- ***статики***;
- ***кінематики***;
- ***динаміки***.

СТАТИКА

ТЕМА 1 ► ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ВИЗНАЧЕННЯ Й АКСІОМИ СТАТИКИ

- Предмет і дві основні задачі статики
- Основні поняття та визначення статики
- Аксіоми статики

§1.1. ПРЕДМЕТ І ДВІ ОСНОВНІ ЗАДАЧІ СТАТИКИ

 Статика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчають *механічні взаємодії між матеріальними тілами* й *умови рівноваги матеріальних тіл*.

Часто-густо намагання змінити механічний рух при механічній взаємодії між матеріальними тілами взагалі ні до якого руху не приводить (можна згадати байку відомого байкаря І.А. Крилова про лебедя, рака та щуку, які намагалися тягти воза). У такому разі говорять, що тіло (в нашому прикладі – віз) знаходиться у *рівновазі*. Під ***рівновагою*** будемо розуміти стан *спокою* тіла по відношенню до інших матеріальних тіл (у нашому прикладі – по відношенню до пагорба, на якому розгорталися події байки). Стан спокою (чи ***рівноваги***) тіла є поняттям ***відносним***, адже нерухомість розглядуваного тіла завжди визначають відносно якогось іншого тіла, яке, природно, рухається у просторі, оскільки *абсолютно* нерухомих тіл в природі не існує (той же пагорб бере участь у складному русі разом із Землею: обертається навколо Земної осі, рухається по замкненій орбіті навколо Сонця і т. д.). Але на практиці в інженерних розрахунках ***рівновагу*** певного розглядуваного тіла по відношенню до Землі (або до тіла, що жорстко пов’язане з Землею) ***вважають*** умовно ***абсолютною***.

 У статиці розглядають і вирішують ***дві основні задачі***:

1) зведення різних систем сил до найпростішого (канонічного) вигляду (або знаходження умов заміни одних систем сил іншими, їм еквівалентними);

2) знаходження умов рівноваги різних систем сил.

§1.2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИКИ

Теоретична механіка розглядає та вивчає рух і взаємодію не реальних фізичних тіл, а деяких ідеалізованих уявлень – моделей цих фізичних тіл. Звісно, що будь-яка ідеалізація припустима доти, поки між моделлю й реальним фізичним тілом відсутні суттєві розбіжності з точки зору розглядуваної задачі. Згадані моделі й уходять до складу основних понять теоретичної механіки.

У цьому параграфі подано тільки деякі основні поняття та визначення, які необхідні на початковому етапі усвідомлення статики; інші поняття та визначення будуть уводитися до розглядання по мірі необхідності.

ⓘ ***Матеріальна точка*** – це матеріальне тіло, розмірами якого в умовах розглядуваної задачі можна знехтувати.

Матеріальна точка має масу та здатність взаємодіяти з іншими матеріальними тілами. Так, при вивченні рухів планет Сонячної системи навколо Сонця їх уважають матеріальними точками, оскільки розміри самих планет знехтувально малі в порівнянні з розмірами їх орбіт. Але, вивчаючи обертальний рух будь-якої зі згаданих планет навколо своєї осі, приймати її за матеріальну точку неможливо. Матеріальне тіло будь-якої форми також можна розглядати як матеріальну точку у разі, коли всі точки цього тіла виконують абсолютно однаковий рух: наприклад, будь-який вантаж при прямолінійному переміщенні його на тросі підйомного крана можна моделювати матеріальною точкою.

ⓘ ***Механічна система*** (або ***система матеріальних точок***) – це така *сукупність матеріальних точок*, в якій положення та рух кожної точки залежать від положення та руху усіх інших точок цієї системи.

Певна річ, найпростішою механічною системою є відповідна сукупність *двох* матеріальних точок.

З наведеного визначення можна зробити висновок, що будь-яке фізичне тіло є механічною системою (або системою матеріальних точок), яка складається з *безлічі* точок. Окремим випадком є *абсолютно тверде тіло*.

ⓘ ***Абсолютно тверде тіло*** – така механічна система, віддаль між точками якої лишається сталою при будь-якій механічній взаємодії цього тіла з будь-якими іншими тілами.

Оскільки в класичній теоретичній механіці розглядають тільки абсолютно тверді тіла, то надалі такі тіла називатимемо *твердими тілами* чи просто – *тілами*.

У дійсності всі тіла під зовнішнім силовим впливом змінюють свої розміри та форму. Наприклад, стержень, виготовлений з будь-якого матеріалу, що застосовують у практичній діяльності (сталь, алюміній чи дерево), при розтягуванні подовжується, а при стисненні – скорочується. Також змінює форму залізобетонна балка перекриття, якщо на неї встановити технологічний верстат – балка при цьому згинається. Але в багатьох випадках деформації тіл, тобто зміни їх розмірів і форм, дуже малі, та ними в першому наближенні можна знехтувати. Таким чином, поняття абсолютно твердого тіла є ідеалізацією, необхідною для спрощення вивчення різних станів тіл. Вивчення механіки абсолютно твердого тіла дає змогу перейти до вивчення механіки тіл, що деформуються, до механіки рідин, газів і т.д. Так, після вивчення теоретичної механіки в курсі опору матеріалів досліджують деформації тіл, які мають важливе значення та знехтувати якими неможливо. Своєю чергою там уведуть інші абстракції-ідеалізації й знехтують тими властивостями тіл, які мають другорядне значення.

Тіла, які розглядають у теоретичній механіці, можуть бути *вільними* або *невільними*.

ⓘ ***Вільне матеріальне тіло*** – тіло, рух якого в просторі безпосередньо не обмежений іншими тілами.

Прикладами вільних матеріальних тіл є планети Сонячної системи, визначальне значення для руху яких за їх траєкторіями має гравітаційне тяжіння Сонця, але немає ніякого «паркану» чи інших фізичних тіл, «впираючись» в які, планети «змушені» рухатися своїми траєкторіями.

ⓘ ***Невільне матеріальне тіло*** – тіло, рух якого в просторі в одному чи декількох напрямках обмежений іншими тілами.

З невільними тілами пересічний громадянин зустрічається на кожному кроці: *підручник*, що лежить на столі; *верстат*, що закріплений на фундаменті, *вантаж*, підвішений на тросі підйомного крана, тощо.

ⓘ ***В'язь*** – це певне матеріальне тіло, що обмежує рух розглядуваного тіла, яке в такому разі, звісно, є невільним.

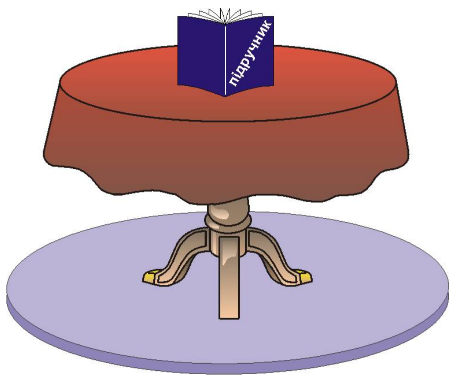


Рис. 1.1

Так на рисунку 1.1, для підручника, що лежить на столі, в'яззю є стіл.

Поняття в'язі є відносним. Якщо ситуацію з підручником на столі розглядати далі (рис. 1.1), то для стола в'яззю є підлога, а стіл стає вже невільним матеріальним тілом, на яке спричиняє механічну дію підручник. Тому при розв'язуванні конкретних задач необхідно чітко розуміти та визначатися з тілами, які обирають до розглядання, та з відповідною класифікацією цих тіл.

Тепер уведемо важливе поняття *сили*, яке надзвичайно широко використовують не тільки у теоретичній механіці, але й у всіх інших інженерних науках.

ⓘ ***Сила*** – це фізична величина, яка є мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами й характеризує (визначає) величину та напрям цієї взаємодії.

Наприклад, за законом всесвітнього тяжіння взаємодії планет Сонячної системи та Сонця визначають сили взаємного притягання.

У теоретичній механіці не вивчають фізичну природу чи походження діючих сил, а розглядають лише їхню механічну дію.

За спостереженнями, які багаторазово підтверджені практикою, ***сила є векторною величиною***, а її дія на тверде тіло однозначно характеризується трьома параметрами:

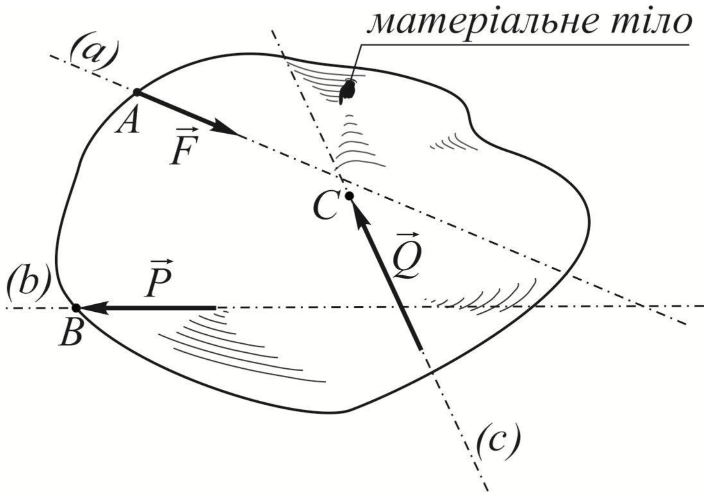
- числовим значенням або величиною (модулем) сили;
- напрямком дії сили;
- точкою прикладання сили.

Фізичну величину, яку повністю визначає тільки дійсне число, називають ***скалярною величиною*** або ***скаляром***. Прикладами скалярних величин є температура тіл, час, об'єм тощо; ці величини визначають додатні, від'ємні чи рівні нулю числа.

Величину, яка крім числового значення характеризується певним напрямом у просторі, називають ***векторною величиною*** або ***вектором***. До їх числа відносяться такі фізичні величини, як сила, швидкість, прискорення тощо. Вектор позначають відрізком, на кінці якого ставиться стрілка, тобто *променем*. Напрям стрілки вказує напрям вектора, а довжина відрізку – величину (модуль) вектора у вибраному масштабі. Вектори розрізняють на ***вільні***, які не зв'язані з певною точкою простору, ***ковзні***, що зв'язані з певною прямою лінією, і, нарешті, ***прикладені*** (чи ***фіксовані***), які фізично зв'язані з певною точкою простору.

Є два методи проведення математичних операцій над векторними величинами. Перший полягає в тому, що оперують безпосередньо з векторами, не пов'язуючи їх з будь-якими системами координат (***графічний*** метод). При другому методі оперування, провадять операції не безпосередньо над самими векторами, а над математичними величинами, які аналітично визначають вектори у певній системі координат (***аналітичний*** метод або ***метод проекцій***).

На розрахункових схемах і малюнках силу зображують ***променем*** (стрілочкою). Точку прикладання визначають або початком, або кінцем променя (рис. 1.2). При *графічному розв'язуванні* тієї чи іншої задачі вектор сили зображують променем певної довжини, яка в обраному масштабі визначає величину (модуль) цієї сили (тобто, чим менша сила, тим коротший промінь і навпаки). В інших випадках вектор сили зображують променем довільної доцільної довжини. Найчастіше вектори сил підписують («іменують») однією літерою, над якою ставлять знак вектора (наприклад, $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{Q}$, ...).



$\vec{F}$, $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ – діючі на матеріальне тіло сили;

A, B, C – точки прикладання сил $\vec{F}$, $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ відповідно;

(a), (b), (c) – лінії дії сил $\vec{F}$, $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ відповідно

Рис. 1.2. Графічне зображення сил

ⓘ ***Лінія дії сили*** – це пряма, яка проходить по променю, який зображує діючу силу, необмежено в обидві сторони.

ⓘ ***Модуль*** або ***величина сили*** є кількісною характеристикою міри взаємодії тіл.

Позначення модулів сил: F; P, Q,...

У міжнародній системі фізичних одиниць *СІ* величину (модуль) сили вимірюють у ньютонах: $[F]=H$; вживають також і кратні одиниці вимірювання: *1 кілоньютон = 1 кН = 1000 Н*, *1 меганьютон = 1 МН =* 10^6 *Н.*

Діючи на матеріальні тіла сили є різноманітними за походженням і сутністю. У теоретичній механіці сили певним чином розподілені (класифіковані) на різні групи (рис. 1.3) залежно від їх загального характеру та конкретного впливу на кінематичний стан розглядуваного тіла.

Сили, прикладені до тієї чи іншої механічної системи, розподіляють на *зовнішні* та *внутрішні.*

ⓘ ***Зовнішні сили*** – це сили, що діють на точки певної механічної системи з боку матеріальних тіл (або точок), які не входять до складу розглядуваної системи.

ⓘ ***Внутрішні сили*** – це сили взаємодії між матеріальними тілами (або точками) однієї і тієї самої механічної системи.

Розподіл сил на зовнішні та внутрішні є умовним – дивись, наприклад, рисунок 1.4,б та пояснення до нього.

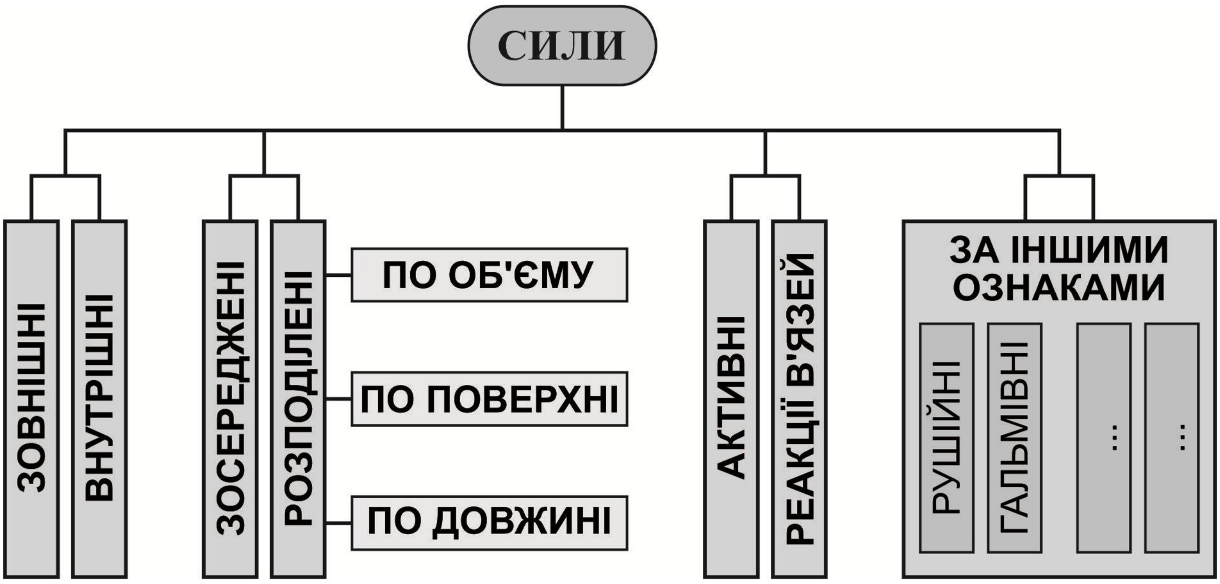


Рис. 1.3. Класифікація сил

За ***способом прикладання*** до матеріальних тіл сили класифікують на *зосереджені* та *розподілені*.

ⓘ ***Зосереджена сила*** – це сила, що прикладена на досить обмеженій площі, розмірами якої можна знехтувати; вважається що кожна зосереджена сила прикладена в одній точці.

Поняття зосередженої сили є ідеалізацією, оскільки на практиці прикласти силу до матеріального тіла в одній точці *неможливо*.

ⓘ ***Розподілена сила*** – це сила, що не є зосередженою; розподілені сили в усіх інженерних науках називають ***розподіленими навантаженнями***, які можуть бути розподіленими по ***довжині***, ***поверхні*** чи ***об'єму***.

Дія вітру на скло вікна – приклад розподіленого по поверхні навантаження, власна сила ваги масивного бетонного фундаментного блоку – приклад розподіленого по об'єму навантаження, тиск леза ковзанів на поверхню льоду – приклад розподіленого по довжині навантаження).

Між невільним матеріальним тілом та в'яззю, що обмежує рух цього тіла, виникає механічна взаємодія, мірою якої є сила, якій надано окрему (власну) назву *реакція в'язі.* Через це сили, прикладені до невільних механічних систем, розподіляються на *активні сили* та *реакції в'язей.*

ⓘ ***Активна сила*** – це сила, яка *завжди* прагне спричинити рух матеріального тіла, до якого вона прикладена, та ніяк не залежить ні від накладених на тіло в'язей, ні від дії інших сил.

ⓘ ***Реакція в'язі*** (чи ***реактивна сила***, чи ***сила реакції***) – це сила, з якою в'язь діє на розглядуване невільне тіло, обмежуючи рух його певних точок (або рух усього тіла) у одному чи декількох напрямках, та яка залежить від дії інших сил.

Реакція в'язі виникає лише за умови дії на розглядуване тіло якої-небудь активної сили (або декількох активних сил); в цьому розумінні реакція в'язі має пасивну сутність і тому також називається ***пасивною силою***.

Найчастіше реакція в'язі перешкоджає тому чи іншому рухові матеріального тіла, до якого вона прикладена, але не обов'язково (дивись, наприклад, на рис. 1.4,б силу $\vec{F}_{тр3}$ та відповідні пояснення).

Розглянемо матеріальне тіло 1 у вигляді прямокутної призми, що знаходиться на похилій шорсткій площині (рис. 1.4,а). Активною силою є сила тяжіння $\vec{G}_1$, що прагне викликати рух тіла 1 вертикально вниз. Оскільки рух цього тіла обмежено площиною, то тіло 1 є невільним, а сила $\vec{G}_1$ змушує його *ковзати вздовж площини вниз* зі швидкістю $\vec{v}$. Якщо ж розглянути ситуацію, коли аналогічне матеріальне тіло 2 тягнеться мотузкою по площині *вгору* якоюсь людиною (будемо вважати цю людину матеріальним тілом 3) (рис. 1.4,б), то сили тяжіння $\vec{G}_2$ та $\vec{G}_3$ перешкоджають тілам 2 і 3 (до яких вони прикладені) рухатися. Але сили $\vec{G}_2$ та $\vec{G}_3$ ніяк не залежать від дії інших сил і накладених в'язей та прагнуть примусити тіла 2 і 3 рухатися вниз і тому є активними силами.

Сили $\vec{N}_1$ і $\vec{F}_{тр1}$ на рисунку 1.4,а є двома ***реакціями похилої шорсткої площини*** на дію матеріального тіла 1, які обмежують його рух у відповідних напрямках. Сила $\vec{N}_1$ називається *нормальною реакцією* площини; вона виникає завжди без будь-якого зв'язку із фактом наявності чи відсутності тертя. Сила $\vec{F}_{тр1}$ називається *силою тертя ковзання*; інколи цією силою нехтують. При збільшенні тиску на площину (наприклад, за умови прикладання до тіла 1 додаткової сили $\vec{P}$ будь-якої фізичної природи) модулі сил N_1 і $F_{тр1}$ також збільшаться. Тобто, обидві реакції (N_1 і $F_{тр1}$) *залежать від дії інших сил* і тому є *пасивними* силами. Аналогічні міркування та висновки на рисунку 1.4,б стосуються і реакцій $\vec{N}_2$ і $\vec{F}_{тр2}$, які прикладені до матеріального тіла 2, та реакції $\vec{N}_3$, яка прикладена до матеріального тіла 3. Якщо ж на цьому рисунку розглянути рух матеріального тіла 3, то єдиною причиною цього руху є сила тертя ковзання $\vec{F}_{тр3}$ (якщо тертя буде відсутнім або недостатнім, то рух тіла *3* по площині вгору взагалі буде неможливим); отже, у даному випадкові реакція площини (сила тертя ковзання $\vec{F}_{тр3}$) є єдиною ***рушійною силою***, яка, однак, *залежить від дії інших сил* і тому є *пасивною* силою.

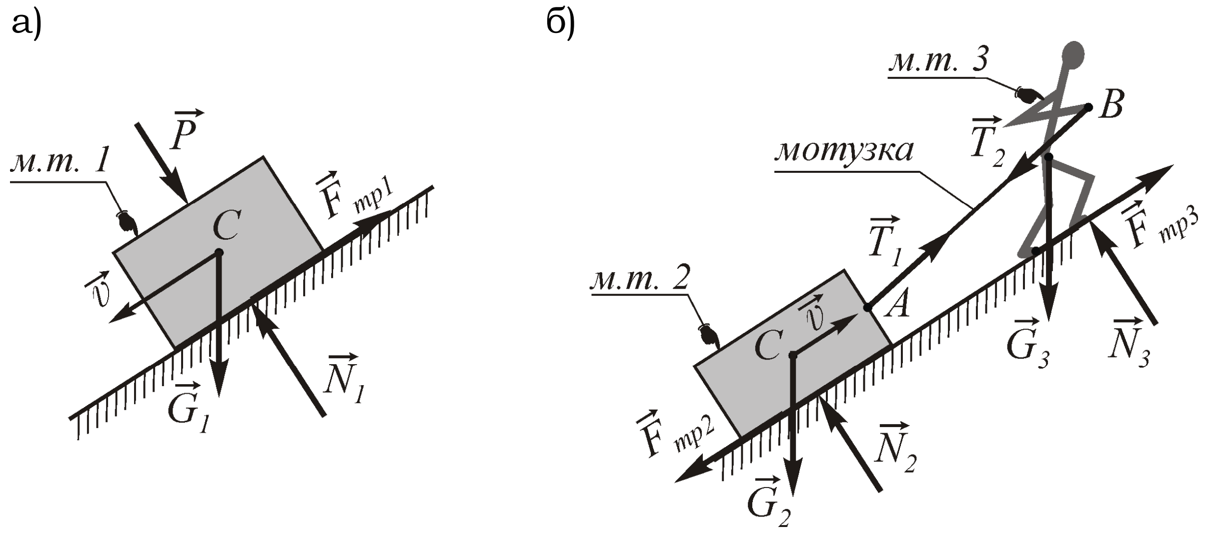


Рис. 1.4. До класифікації діючих сил

Якщо на рисунку 1.4,б розглядати рух тільки тіла *2*, то до нього у точці *A* прикладена сила $\vec{T}_1$ – ***реакція мотузки*** на дію тіла *2*, яка по відношенню до цього тіла є *зовнішньою* силою; оскільки ж ця сила спричиняє рух тіла *2*, то вона також є і *рушійною* (таким чином, сила $\vec{T}_1$ для тіла *2* є ***зовнішньою реактивною рушійною силою***). Якщо ж розглядати рух особи, що тягне мотузкою матеріальне тіло *2*, то прикладена до цієї особи у точці *B* сила $\vec{T}_2$, що діє з боку мотузки, також є ***реакцією мотузки*** на дію тіла *3* (далі буде розглянуто та доведено, що $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$ та зазначені сили визначають ***силу натягу*** мотузки); по відношенню ж до тіла *3* сила $\vec{T}_2$ є *зовнішньою* та ***гальмівною*** (оскільки рухові розглядуваного тіла вона перешкоджає).

Якщо ж на рисунку 1.4,б досліджувати рух *механічної системи*, що складається з матеріальних тіл *2* та *3*, з’єднаних нерозтяжною мотузкою, то сили $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ є *внутрішніми силами* зазначеної системи. Усі інші сили, зображені на рис. 1.4 у будь-якому випадку є *зовнішніми* силами.

Діючі сили можуть бути класифікованими й за іншими ознаками, наприклад, на *рушійні* та *гальмівні*, на *сталі* та *змінні* тощо.

Тепер перейдемо від розгляду дії однієї сили окремо, до розгляду дії декількох сил одночасно.

🛈 ***Система сил*** – це сукупність сил, прикладених до одного матеріального тіла.

Так, на рисунку 1.5 зображено десять різних сил; але чотири з них прикладені до матеріального тіла A, а інші шість – до матеріального тіла B; отже, на рисунку є (зображено) *дві системи сил*.

Позначення системи сил: $\left\{\vec{S},\vec{N},\vec{P}_1,\vec{P}_2\right\}$, $\left\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\vec{F}_4,\vec{F}_5,\vec{F}_6,\right\}$.

Якщо всі сили системи «іменовані» однією і тією ж літерою з різними індексами, то в такому випадку системи сил можна позначати $\left\{\vec{F}_i\right\}$ або $\left\{\vec{F}\right\}$. Отже, будемо говорити (оскільки так воно і є), що на рисунку 1.5 до тіла A прикладена система сил $\left\{\vec{S},\vec{N},\vec{P}_1,\vec{P}_2\right\}$, а до тіла B – $\left\{\vec{F}\right\}$, або $\left\{\vec{F}_i\right\}$, або ж $\left\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\vec{F}_4,\vec{F}_5,\vec{F}_6\right\}$.

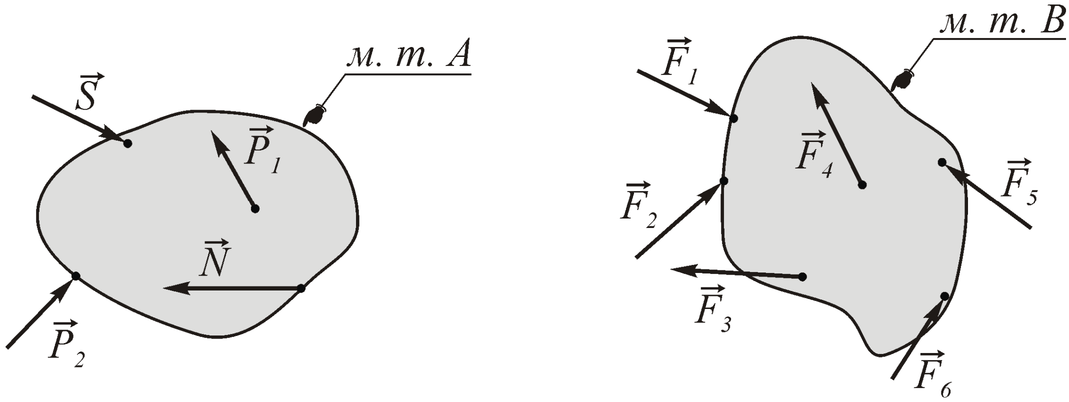


Рис. 1.5. Системи сил $\left\{\vec{S},\vec{N},\vec{P}_1,\vec{P}_2\right\}$ і $\left\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\vec{F}_4,\vec{F}_5,\vec{F}_6\right\}$

Як і окремі сили, системи сил також можуть бути класифіковані за різними ознаками (див. рис. 1.6):

- за ***динамічною*** (або механічною) дією на матеріальне тіло, в результаті якої зазначене тіло перебуває в тому чи іншому кінематичному стані;
- за ***геометричним*** розташуванням ліній дій сил системи в просторі.

🛈 ***Зрівноважена система сил*** – система сил, під дією якої матеріальне тіло знаходиться у стані спокою (у рівновазі) чи виконує *поступальний прямолінійний рівномірний рух*[1].

[1] У деяких підручниках це визначення подають як одну з ***аксіом статики***.

Про зрівноважену систему сил говорять, що сумарна механічна дія її на тіло дорівнює нулеві.

Символьний запис умови або ознаки зрівноваженої системи сил:

$$\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4\} \backsim 0 \quad \text{або} \quad \{\vec{P}\} \backsim 0.$$

Будь-яка система сил, що не належить до зрівноваженої, є ***незрівноваженою системою сил***.

Отже, з динамічної точки зору існує ***два види систем сил***, кожна з яких певним чином впливає на кінематичний стан матеріального тіла, до якого вона прикладена.

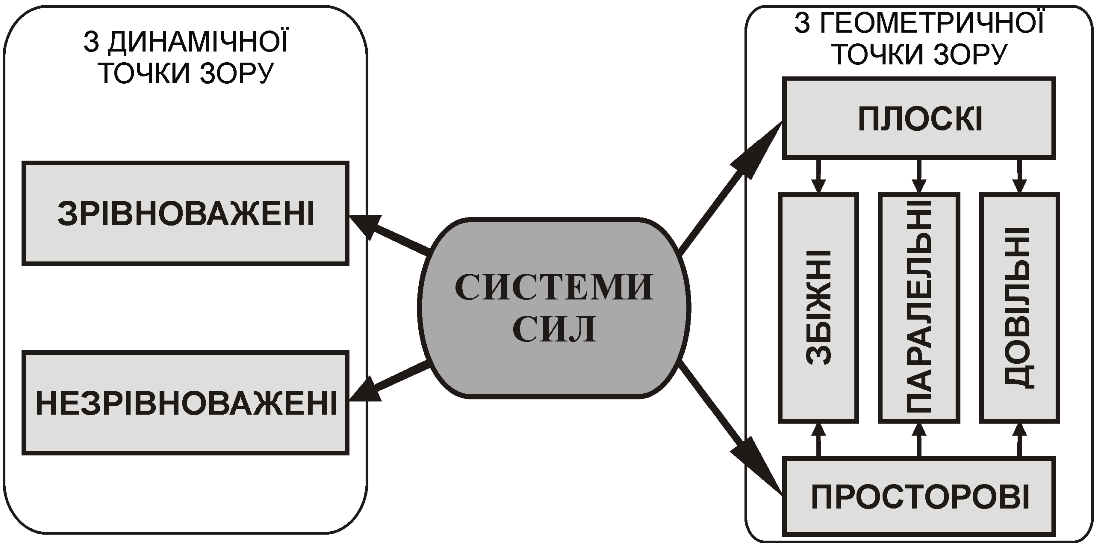


Рис. 1.6. Класифікація систем сил

З геометричної точки зору системи сил розподіляють на *плоскі* та *просторові*.

Плоска система сил – це така система сил, лінії дій сил якої належать одній площині.

Якщо лінії дій сил певної системи не належать одній площині, то зазначена система сил є ***просторовою***.

Як кожна плоска, так і кожна просторова система сил, своєю чергою, може бути *збіжною*, *паралельною* чи *довільною*.

Збіжна система сил – така система сил, лінії дій сил якої перетинаються в одній точці.

Паралельна система сил – така система сил, лінії дій сил якої паралельні одна одній.

🛈 ***Довільною система сил*** є тоді, коли вона не відноситься ні до збіжної, ні до паралельної.

Довільна система сил може містити в собі певну сукупність сил, лінії дій яких перетинаються в одній точці, і іншу сукупність сил, лінії дій яких паралельні одна одній; тобто, з геометричної точки зору довільна система сил ***є найбільш загальним випадком системи сил***, а збіжну та паралельну системи сил можна розглядати як *окремі випадки* довільної системи сил.

Отже, з геометричної точки зору існує ***шість видів систем сил*** (треба чітко розуміти, що кожна з цих систем сил може бути як зрівноваженою так і незрівноваженою).

🛈 ***Еквівалентні системи сил*** – це такі системи сил, під дією яких (кожної окремо) матеріальне тіло перебуває в однаковому кінематичному стані.

З цього визначення випливає, що якщо дві системи сил еквівалентні деякій третій системі, то вони еквівалентні між собою. Будь-яку складну або громіздку систему сил завжди можна замінити простішою еквівалентною їй системою сил.

Символьний запис умови або ознаки еквівалентності систем сил:

$$\left\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_{33}\right\} \backsim \left\{\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3\right\} \quad \text{або} \quad \left\{\vec{P}_{33}\right\} \backsim \left\{\vec{S}_3\right\}.$$

Запис у попередньому рядочку необхідно розуміти й вимовляти так: система $\left\{\vec{P}\right\}$ з тридцяти трьох сил еквівалентна системі сил $\left\{\vec{S}\right\}$ з трьох сил або (що те саме) система $\left\{\vec{P}\right\}$ з *33* сил зводиться до системи сил $\left\{\vec{S}\right\}$ з трьох сил.

🛈 ***Рівнодійна***[2] – це ***сила***, яка *одна* еквівалентна певній системі сил.

У загальному випадку рівнодійну зазвичай позначають $\vec{R}$. Символьний запис умови або ознаки еквівалентності заданої системи сил рівнодійній:

$$\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_{127}\right\} \backsim \vec{R} \quad \text{або} \quad \left\{\vec{F}_{127}\right\} \backsim \vec{R}.$$

Важливо розуміти, що *не кожна система сил* може бути *еквівалентною одній силі* (або *не кожна система сил зводиться до рівнодійної*).

[2] У деяких підручниках і джерелах застосовують також і термін ***рівнодіюча***.

§1.3. АКСІОМИ СТАТИКИ

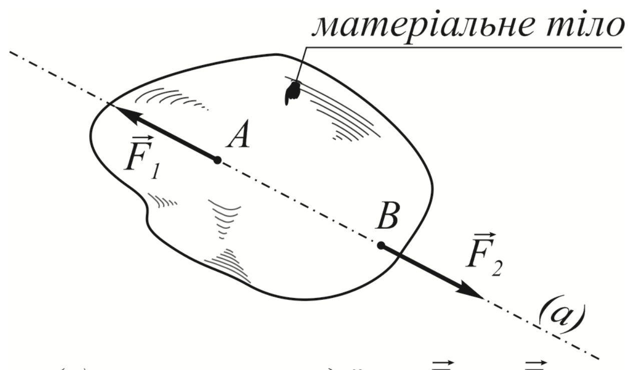
Уся механіка базується на деяких положеннях, які приймають без математичних доведень, бо вони є результатом узагальнення багаточисельних дослідів і спостережень, які безліч разів були підтверджені практикою. Ці положення називають *аксіомами* та є загальною основою для висновків, перетворень і доведень статики.

ⓘ ***Аксіома 1.*** Дві сили утворюють зрівноважену систему сил тоді і лише тоді, коли вони рівні за величиною (модулем), протилежні за напрямком і мають спільну лінію дії.

Якщо на рисунку 1.7 модулі $F_1 = F_2$, то

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \backsim 0.$$

Аксіома 1 визначає *найпростішу зрівноважену систему сил*, але, звісно, зрівноважена система сил може складатися і з більшої кількості сил.



(a) - спільна лінія дії сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$

Рис. 1.7

Аксіома 1 виконується *без будь-яких додаткових умов* лише при дії зазначених сил на абсолютно тверде тіло; у випадку дії таких двох сил на яке-небудь, наприклад, пружне тіло рівноваги останнього може і не бути.

ⓘ ***Аксіома 2.*** Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї відкинути будь-яку зрівноважену систему сил.

Нехай до тіла прикладена якась система сил $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4\}$; якщо до цієї системи додати зрівноважену систему сил, наприклад, $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$, то кінематичний стан тіла не зміниться. Символьно останню фразу можна подати у вигляді: якщо на тіло діє система сил $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4\}$ та є інша система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \backsim 0$, то

$$\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4\} \backsim \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{F}_1, \vec{F}_2\}.$$

ⓘ **Наслідок** з аксіоми 2: силу, прикладену до абсолютно твердого тіла, можна ***переносити по лінії її дії*** (чи ***переносити вздовж лінії її дії***).

Доведення:

а) нехай до абсолютно твердого тіла у точці A прикладена сила $\vec{F}$ й (a) – лінія дії цієї сили (рис. 1.8,а); звісно, що сила $\vec{F}$ спричиняє певну механічну дію на тіло;

б) візьмемо на прямій (a) довільну точку B і згідно з *аксіомою 2* прикладемо в цій точці зрівноважену систему сил, яку оберемо відповідно до *аксіоми 1*; тобто у точці B прикладемо дві рівні за величиною та протилежні за напрямком сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, які мають спільну лінію дії (a), а модулі F_1 і F_2 цих сил приймемо рівними модулю F сили $\vec{F}$ (рис. 1.8,б); у результаті дістанемо, що

$$\left\{\vec{F}_1;\vec{F}_2;\vec{F}\right\}\backsim\vec{F};$$

в) далі врахуємо, що відповідно до *аксіоми 1* дві сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_2$ утворюють зрівноважену систему сил, яку згідно з *аксіомою 2* відкинемо (рис. 1.8,в); тоді отримаємо, що

$$\vec{F}_1\backsim\vec{F};$$

г) оскільки ж $\vec{F}_1=\vec{F}$, то відповідно до положень векторної алгебри можна вважати й стверджувати, що в точці B тіла виявилася прикладеною сила $\vec{F}$ (рис. 1.8,г).

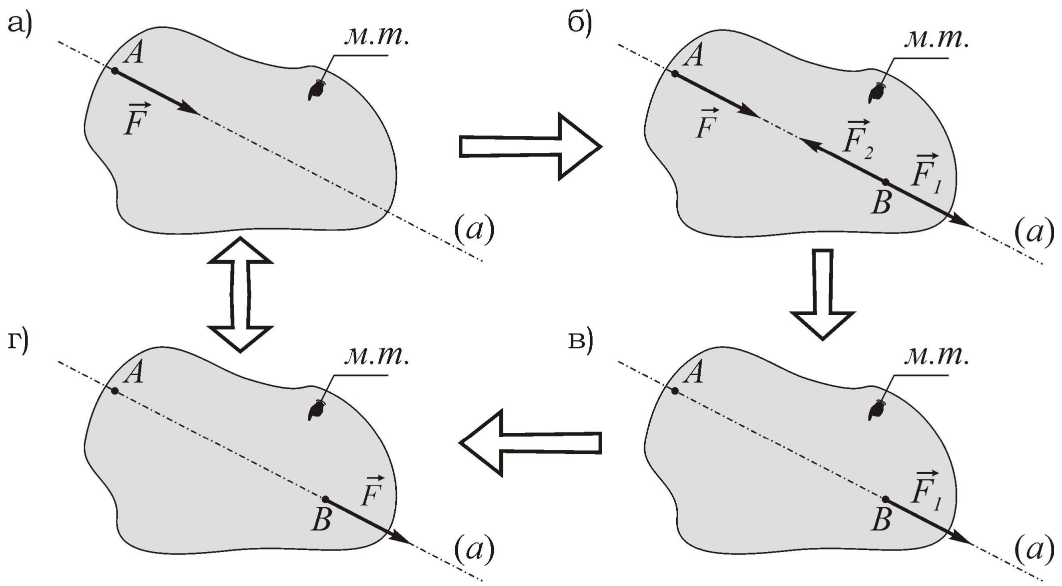


Рис. 1.8

Виконані дії і перетворення свідчать, що кінематичний стан тіла ніяк не змінився, що і треба було довести.

ⓘ **Висновок** з аксіоми 2: вектор сили – ***ковзний вектор***.

Аксіома 2, наслідок з неї й отриманий висновок можуть застосовуватися лише для сил, що діють на *абсолютно тверде тіло*.

ⓘ ***Аксіома 3*** (***аксіома*** або ***правило паралелограма сил***). Рівнодійна двох сил, що прикладені до матеріального тіла в одній точці, прикладена в тій же точці й визначається за величиною і напрямком діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.

Якщо розглянути дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що прикладені в точці A (рис. 1.9,а) певного матеріального тіла (яке на рисунку не показано), то їх рівнодійною є сила $\vec{R}$, яка збігається з діагоналлю AD паралелограма $ABCD$; сторони AB й AC цього паралелограма утворюють вихідні (задані) сили, а сторони BD і CD добудовані відповідним чином (див. рис. 1.9,б).

Аксіома 3 визначає дві важливі обставини:

☝ дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що прикладені в одній точці, мають рівнодійну $\vec{R}$, тобто вони еквівалентні одній силі:

$$\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\right\} \backsim \vec{R};$$

✌ аксіома повністю й однозначно встановлює *модуль*, *точку прикладання* та *напрямок* рівнодійної $\vec{R}$.

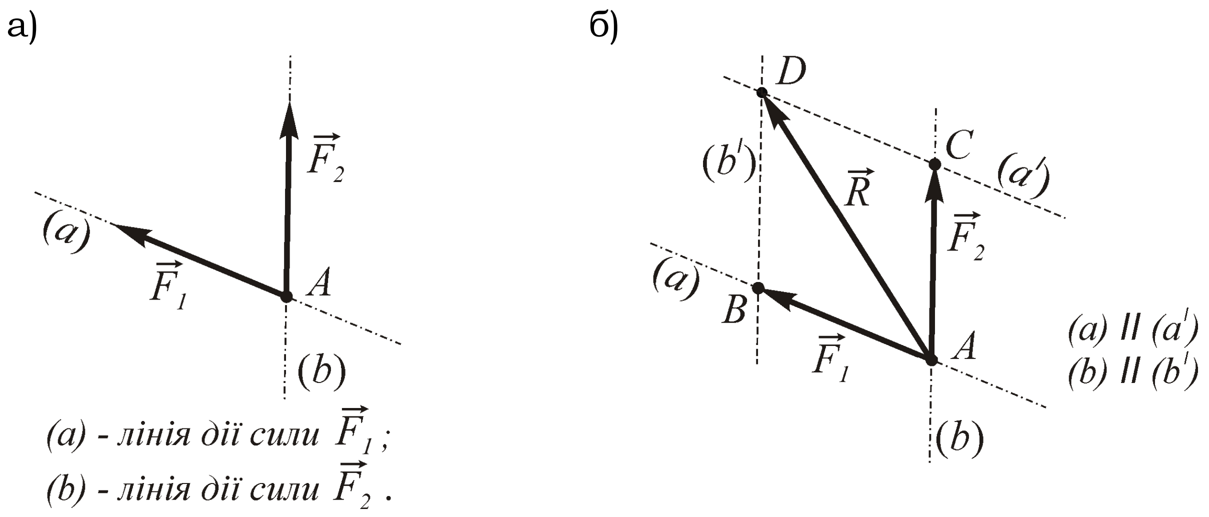


Рис. 1.9. Аксіома паралелограма сил

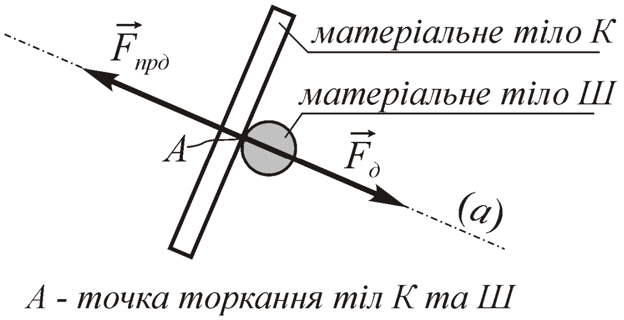
Аксіома 3 має застосування у будь-яких випадках (і в разі дії сил на не абсолютно тверде тіло).

Аксіоми 2 і 3 надають можливість у разі необхідності переходити від якоїсь певної системи сил до іншої, їй еквівалентної.

ⓘ ***Аксіома 4*** (***аксіома рівності дії та протидії***)**.** Усякій механічній дії відповідає рівна їй за величиною й протилежна за напрямком протидія.

Розглянемо механічну взаємодію, наприклад, тіла K (нехай це буде ключка для гри в канадський хокей) та тіла $Ш$ (шайби) (рис. 1.10,а). Якщо тіло K діє на тіло $Ш$ силою $\vec{F}_{д}$, прикладеною у точці A торкання цих тіл, то за аксіомою 4 тіло $Ш$ буде діяти на тіло K з рівною за величиною та протилежно направленою силою $\vec{F}_{прд}$, прикладеною у тій же точці; при цьому обидві сили матимуть спільну лінію дії (a).

а)



б)

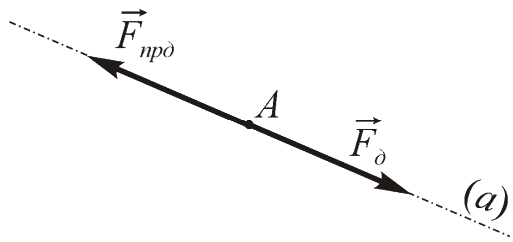


Рис. 1.10. Аксіома рівності дії та протидії

Якщо неуважно поставитися до змісту цієї аксіоми (наприклад, зосередитися тільки на силах, забувши про тіла K та $Ш$), то може скластися враження, що сили $\vec{F}_{д}$ і $\vec{F}_{прд}$ (рис. 1.10,б) підпадають під умову *аксіоми 1* (див. рис. 1.7). Насправді ніякої мови ні про яку рівновагу вестися не може, оскільки у розглядуваному випадку сили $\vec{F}_{д}$ і $\vec{F}_{прд}$: 1) рівні за величиною; 2) протилежні за напрямком; 3) мають спільну лінію дії. Ці три умови аксіоми *1*, безперечно, виконуються. Але сили $\vec{F}_{д}$ і $\vec{F}_{прд}$ прикладені до різних матеріальних тіл, тобто вони ***не утворюють системи сил*** і, отже, мова у аксіомі *4* іде зовсім про іншу в порівнянні з аксіомою *1* ситуацією. Тому й немає ніякої підстави вести мову про рівновагу.

Аксіома рівності дії та протидії сформульована Ісааком Ньютоном і відома як один із ***основних законів класичної механіки***, який беззаперечно свідчить про те, що в природі не існує (і не може існувати) односторонньої дії.

ⓘ ***Аксіома 5*** (***принцип звільнення від в'язей***). Усяке невільне тіло умовно можна розглядати як вільне, якщо до діючих на тіло активних сил додати (приєднати) реакції умовно відкинутих в'язей.

Застосування цієї аксіоми в статиці дозволяє вивчати та розглядати рівновагу усіх невільних тіл, умовно вважаючи їх вільними. Наприклад, якщо розглянути матеріальне тіло A на горизонтальній площині (рис. 1.11,а), то ця площина обмежує рух тіла A і, отже, є в'яззю, а саме тіло є невільним тілом, на яке діє активна сила тяжіння $\vec{G}$.

Якщо горизонтальну площину відкинути, замінивши її дію на тіло реакцією $\vec{N}$, то тіло A можна розглядати як вільне, до якого прикладені дві сили $\vec{G}$ і $\vec{N}$, що утворюють систему сил $\{\vec{G}, \vec{N}\}$ (рис. 1.11,б), яку можна відповідно до викладеного в §1.2 класифікувати. В цьому і полягає основний метод розв'язування задач про рівновагу різних матеріальних тіл.

Аксіому 5 вживають, досліджуючи рухи тіл, й у динаміці.

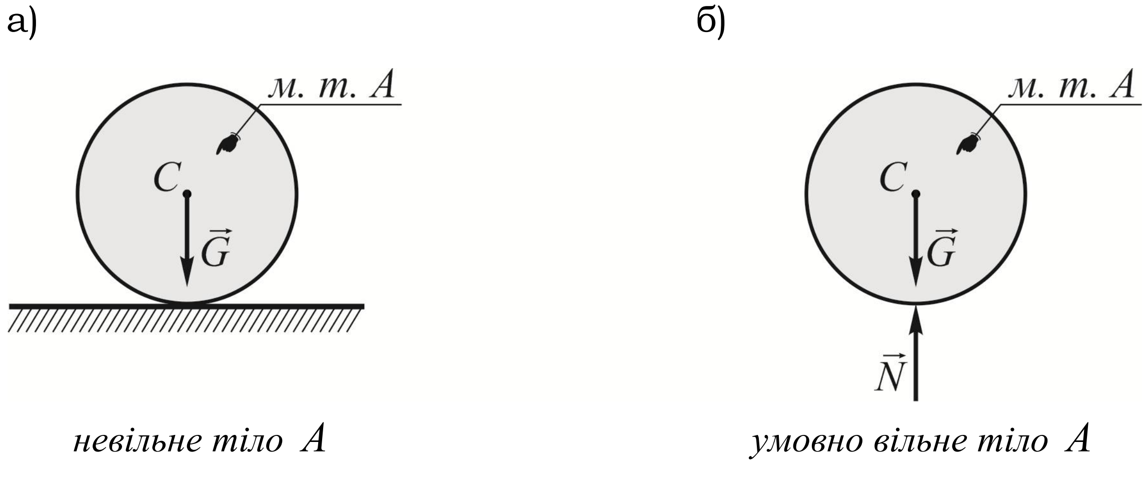


Рис. 1.11. Принцип звільнення від в'язей

ⓘ ***Аксіома 6*** (***принцип про твердіння***). Якщо не абсолютно тверде тіло (тіло, що деформується) перебуває в стані рівноваги, то його рівновага не порушиться, якщо це тіло затвердне.

Твердіння, про яке йдеться в аксіомі, не треба розуміти як фізичний процес, схожий, наприклад, на процес замерзання. «Твердіння» є лише формою вислову, його треба розглядати як процес накладання додаткових в'язей, що перетворюють не абсолютно тверде тіло (у ширшому розумінні – змінну механічну систему) в абсолютно тверде тіло (незмінну механічну систему). Наприклад, рівновага ланцюга не порушиться, якщо його ланки приварити одна до одної.

Принцип про твердіння широко застосовують в інженерних розрахунках. Він дає змогу, наприклад, при складанні рівнянь рівноваги тіла, що деформується (паса, троса, ланцюга тощо), або будь-якої змінної конструкції розглядати їх як абсолютно тверді тіла та застосовувати до них методи статики твердого тіла; потім складають додаткові рівняння, що враховують або умови рівноваги окремих частин конструкції, або деформації тіл (так задачі, де враховують деформації розглядуваних тіл, розв'язують у курсі опору матеріалів).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТА ЕКСПРЕС-ТЕСТУВАННЯ Ст-1

(ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ВИЗНАЧЕННЯ Й АКСІОМИ СТАТИКИ – тема 1)

1. Дайте визначення теоретичної механіки? (8)
2. Що таке механічний рух? (8)
3. На яких уявленнях про простір базується теоретична механіка? (7)
4. На яких уявленнях про час базується теоретична механіка? (7)
5. Які одиниці вимірювання просторових параметрів у Міжнародній системі одиниць СІ? (2)
6. Які одиниці вимірювання часу у Міжнародній системі одиниць СІ? (2)
7. Що таке механічна взаємодія між матеріальними тілами? (8)
8. Що таке статика? (8)
9. Скільки основних задач розглядають і вирішують у статиці? (4)
10. Які основні задачі розглядають і вирішують у статиці? (11)
11. Що таке рівновага матеріального тіла? (8)
12. Що таке матеріальна точка? (9)
13. Як називають матеріальне тіло, розмірами якого в умовах розглядуваної конкретної задачі можна знехтувати? (4)
14. Що таке механічна система? (9)
15. Що таке система матеріальних точок? (9)
16. «Механічна система» та «система матеріальних точок» – це однакові чи різні поняття? (2)
17. Яке тіло називають абсолютно твердим? (9)
18. Як називають певну механічну систему, віддаль між точками якої залишається сталою при дії на цю механічну систему будь-якої системи сил? (5)
19. Яке тіло називають вільним? (8)
20. Як називають тіло, рух якого в просторі не обмежений ніякими іншими тілами? (4)
21. Яке тіло називають невільним? (8)
22. Як називають тіло, рух якого в просторі обмежений якимись іншими тілами? (4)
23. Що таке в’язь? (9)

24. Як називають певне матеріальне тіло, що обмежує рух якого-небудь іншого тіла? (4)
25. Як називають матеріальне тіло T_1, що обмежує рух іншого матеріального тіла T_2? Яким у цьому разі є тіло T_2? (4+4)
26. Що таке сила? (9)
27. Яка фізична величина є мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами? (5)
28. Сила є величиною векторною чи скалярною? (4)
29. Що характеризує (або визначає) сила? (7)
30. Скількома параметрами характеризується сила? (4)
31. Якими параметрами характеризується сила? (9)
32. Що таке лінія дії сили? (5)
33. Що таке модуль сили? (6)
34. Однаковими чи різними є поняття «модуль сили» та «величина сили»? (2)
35. Що в теоретичній механіці зазвичай позначають символом $\vec{F}$ (або $\vec{P}$)? (5)
36. Що в теоретичній механіці зазвичай позначають символом F (або P)? (5)
37. Які одиниці вимірювання сили у Міжнародній системі одиниць СІ? (2)
38. Яку силу називають зовнішньою? (9)
39. Яку силу називають внутрішньою? (9)
40. Як розподіляють сили за способом прикладання? (8)
41. Яку силу називають зосередженою? (9)
42. Яку силу називають розподіленою? (9)
43. Якім терміном зазвичай називають розподілені сили? (7)
44. Чим за своєю фізичною суттю є розподілені навантаження? (6)
45. Які існують види розподілених навантажень за їх розподіленням в просторі? (9)
46. Яку силу називають активною? (9)
47. Чи залежить (**так** чи **ні**) активна сила від дії інших сил? (4)
48. Прикладом якої сили є сила тяжіння певного матеріального тіла? (5)
49. Яка фізична величина є мірою механічної взаємодії між певним матеріальним тілом і в’яззю, що обмежує рух цього тіла? (7)
50. Яку силу називають реактивною? (9)

51. Що таке реакція в'язі? (9)
52. Однакові чи різні поняття «реактивна сила» та «реакція в'язі»? (2)
53. Чи залежить (**так** чи **ні**) реактивна сила від дії інших сил? (4)
54. Як називають силу, що змушує певне матеріальне тіло рухатися? (8)
55. Як називають силу, що перешкоджає рухові певного матеріального тіла? (8)
56. Що таке система сил? (8)
57. Що утворює певна сукупність сил, яка прикладена до одного матеріального тіла? (5)
58. Як називають певну сукупність сил, що прикладена до одного матеріального тіла? (5)
59. Яке поняття теоретичної механіки символьно позначають $\left\{\vec{F}_i\right\}$ або $\left\{\vec{F}\right\}$? (5)
60. Як розподіляють системи сил з геометричної точки зору? (9)
61. Яка система сил є плоскою збіжною? (7)
62. Яка система сил є просторовою паралельною? (7)
63. Яку систему сил називають просторовою збіжною? (7)
64. Яку систему сил називають плоскою паралельною? (7)
65. Яку систему сил називають довільною? (6)
66. Скільки існує видів систем сил з геометричної точки зору? (4)
67. Як розподіляють системи сил з динамічної точки зору? (8)
68. Яка система сил є зрівноваженою? (9)
69. Якщо під дією певної системи сил матеріальне тіло T знаходиться у стані спокою (у рівновазі), то зазначена система сил є якою? (5)
70. Що означає аналітичний (символьний) запис $\left\{\vec{P}_1,\vec{P}_2,\vec{P}_3,\vec{P}_4\right\}\backsim 0$? (6)
71. Чому дорівнює сумарна механічна дія на тіло зрівноваженої системи сил? (5)
72. Чи може бути (**так** чи **ні**) плоска паралельна система сил зрівноваженою? (2)
73. Чи може бути (**так** чи **ні**) просторова збіжна система сил незрівноваженою? (2)
74. Чи може бути (**так** чи **ні**) плоска система сил просторовою? (1)
75. Яка система сил є незрівноваженою? (4 або 9)

76. Скільки існує видів систем сил з динамічної точки зору? (4)
77. Чи може бути (**так** чи **ні**) незрівноважена система сил плоскою довільною? (2)
78. Чи може бути (**так** чи **ні**) зрівноважена система сил просторовою паралельною? (2)
79. Які системи сил є еквівалентними? (9)
80. Як називають дві певні системи сил, під дією яких (кожної окремо) матеріальне тіло знаходиться в однаковому кінематичному стані? (5)
81. Що означає аналітичний (символьний) запис $\left\{\vec{P}_{33}\right\} \backsim \left\{\vec{S}_{3}\right\}$? (6)
82. Чи може бути (**так** чи **ні**) еквівалентною деякій системі сил одна єдина сила? (4)
83. Як називають силу, що еквівалентна певній системі сил? (6)
84. Що таке рівнодійна сила? (9)
85. Чи кожна система сил може бути еквівалентною одній силі? (3)
86. Сформулюйте аксіому №1. (10)
87. Що утворюють дві сили, які рівні за величиною, протилежні за напрямком, мають спільну лінію дії та прикладені до одного тіла? (5)
88. Коли дві сили утворюють зрівноважену систему сил? (7)
89. Сформулюйте аксіому №2. (10)
90. Сформулюйте наслідок з аксіоми №2. (6)
91. Сформулюйте висновок з аксіоми №2. (6)
92. Вектор сили це фіксований, ковзний чи вільний вектор? (4)
93. Сформулюйте аксіому №3. (10)
94. За яким правилом визначають рівнодійну двох сил, що прикладені до матеріального тіла в одній точці? (4)
95. Сформулюйте аксіому №4. (10)
96. Сформулюйте аксіому №5. (10)
97. В якому разі невільне матеріальне тіло умовно можна розглядати як вільне? (7)
98. У чому полягає принцип звільнення від в’язей? (10)
99. Сформулюйте аксіому №6. (10)
100. У чому полягає принцип про твердіння? (10)

ТЕМА 2 ► ЗБІЖНА СИСТЕМА СИЛ

- Додавання двох сил, що прикладені в одній точці. Силовий трикутник
- Зведення збіжної системи сил до канонічного вигляду. Силовий многокутник
- Проекція на вісь вектора сили
- Аналітичний спосіб визначення рівнодійної збіжної системи сил
- Умови рівноваги збіжної системи сил
- Теорема про три сили
- Деякі види в'язей та їх реакції
- Поняття про ферми. Вимоги до розрахункової схеми плоскої простої ферми
- Розрахунок ферм способом вирізання вузлів

§ 2.1. ДОДАВАННЯ ДВОХ СИЛ, ЩО ПРИКЛАДЕНІ В ОДНІЙ ТОЧЦІ. СИЛОВИЙ ТРИКУТНИК

Якщо до певного матеріального тіла в його будь-якій точці K прикладені дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, кут між лініями дій (a) і (b) яких дорівнює φ, то рівнодійну $\vec{R}$ цих сил визначає аксіома 3 як діагональ KE паралелограма $KCED$, сторонами KC та KD якого є вектори сил (рис. 2.1).

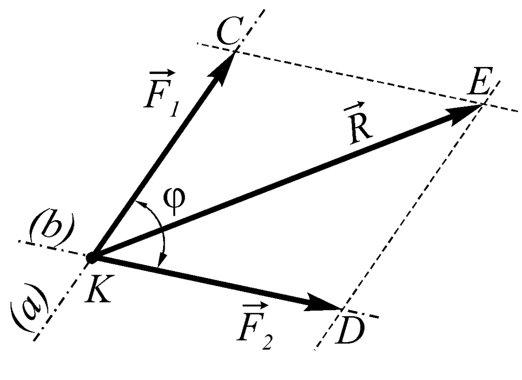


Рис. 2.1.
Паралелограм сил

Паралелограм $KCED$ називають ***паралелограмом сил***.

За поняттями векторної алгебри про суму двох векторів

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \qquad \textbf{(2.1)}$$

Формула (2.1) є ***векторною формою*** визначення[1] рівнодійної двох сил, що прикладені в одній точці, згідно з якою

🛈 ***рівнодійна*** двох сил, що прикладені до тіла в одній точці, ***дорівнює векторній*** (***геометричній***) ***сумі*** цих двох ***сил***.

Якщо задачу про визначення рівнодійної $\vec{R}$ двох заданих сил розв'язувати графічно, то для її знаходження можна будувати трикутник KCE (рис. 2.2), який є однією з половинок паралелограма сил. Для цього до кінця вектора $\vec{F}_1$ першої сили необхідно прикласти початок вектора $\vec{F}_2$ другої сили. З'єднуючи початок першого вектора з кінцем другого, отримаємо вектор, який і визначає рівнодійну $\vec{R}$.

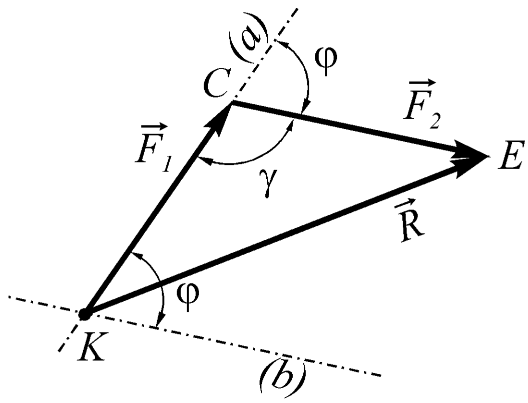


Рис. 2.2.
Силовий трикутник

Утворену в такий спосіб геометричну фігуру називають ***силовим трикутником***, а довжини його сторін KC, CE і KE визначають модулі F_1, F_2 та R відповідно[2].

🛈 ***Графічно*** рівнодійну двох сил, що прикладені в одній точці, визначає ***замикаюча сторона*** силового трикутника, двома іншими сторонами якого є вектори заданих сил.

Звернімо увагу на те, що сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ розташовані по обходу контуру силового трикутника в одному напрямку, який визначає напрямок першої сили (у цьому разі – $\vec{F}_1$), а рівнодійна $\vec{R}$ – у протилежному.

Важливо розуміти, що силовий трикутник є додатковою *векторною схемою*, на якій будують трикутник векторів, рівних розглядуваним силам, та яка *відповідає векторній залежності* (2.1); тобто не слід зазначену дію сприймати так, що начебто сила $\vec{F}_2$ на рисунку 2.2 змінила точку свого прикладання.

[1] Векторна форма запису (визначення) будь-якої фізичної величини є найбільш компактною та зручною при доведенні різних теорем і законів механіки; її поширено застосовують у теоретичних наукових дослідженнях; при розв'язуванні практичних задач або у виробничій діяльності використання векторної форми визначення тієї чи іншої фізичної величини досить обмежене.

[2] Легко бачити, що результат залишиться незмінним, якщо побудову силового трикутника починати не з вектора $\vec{F}_1$, а з вектора $\vec{F}_2$.

Якщо позначити в силовому трикутнику $\angle KCE = \gamma$, то за *теоремою косинусів*

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\gamma .$$

Оскільки ж $\gamma = 180^\circ - \varphi$ (див. рис. 2.2), а з тригонометрії відомо, що $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, то

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\varphi ,$$

звідки модуль рівнодійної двох сил, що прикладені в одній точці

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi} . \qquad \textbf{(2.2)}$$

Формула (2.2) – це ***аналітичний спосіб*** (або ***аналітична форма***)[3] визначення модуля рівнодійної двох сил, що прикладені в одній точці.

Розглянемо можливі випадки розташування двох сил.

1. Нехай $\varphi = 0$ (рис. 2.3,а); тоді у формулі (2.2) $\cos\varphi = \cos 0 = 1$ і дістаємо, що

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot 1} = \sqrt{F_1^2 + 2F_1F_2 + F_2^2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2}$$

або

$$R = F_1 + F_2 ; \qquad \textbf{(2.3)}$$

тобто в цьому випадку модуль рівнодійної визначає *арифметична сума* модулів діючих сил, а напрямок рівнодійної збігається з їх напрямком.

2. Нехай $\varphi = 90^\circ$ (рис. 2.3,б); у цьому разі у формулі (2.2) $\cos\varphi = \cos 90^\circ = 0$, а

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot 0}$$

[3] Словосполучення «аналітичний спосіб визначення» передбачає знаходження якоїсь фізичної величини (в цьому разі – модуля рівнодійної) за допомогою (або у вигляді) певної математичної формули (або декількох формул), з якої (яких) у разі потреби, підставляючи необхідні чисельні значення й виконавши відповідні математичні дії, можна знайти й чисельне значення шуканої величини.

або

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\,, \qquad \textbf{(2.4)}$$

тобто теорема косинусів трансформується у *теорему Піфагора*.

3. Нехай $\varphi = 180^\circ$ і $F_1 > F_2$ (рис. 2.3,в); тоді маємо, що в формулі (2.2) $\cos\varphi = \cos 180^\circ = -1$ й

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cdot(-1)} =$$

$$= \sqrt{F_1^2 - 2F_1F_2 + F_2^2} = \sqrt{(F_1 - F_2)^2}$$

або

$$R = F_1 - F_2; \qquad \textbf{(2.5)}$$

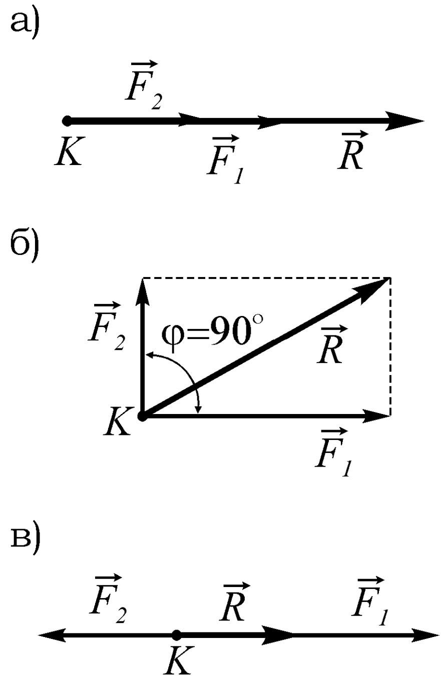


Рис. 2.3

очевидно, що в цьому разі модуль рівнодійної визначає *арифметична різниця* модулів діючих сил, а рівнодійна напрямлена в напрямку більшої сили $\vec F_1$.

Таким чином, формули (2.1)÷(2.5) *однозначно* встановлюють рівнодійну $\vec R$ двох сил $\vec F_1$ і $\vec F_2$ через ці сили.

Можна сказати, що в розглядуваному параграфі для двох сил, які прикладені в одній точці, розв'язана *перша основна задача статики*: канонічним виглядом системи з двох сил, прикладених в одній точці, є *рівнодійна*; тобто, у такому разі

$$\{\vec F_1, \vec F_2\} \backsim \vec R.$$

Нерідко, проводячи різноманітні дослідження та (чи) розрахунки-розв'язування, виникає потреба зворотної дії, пов'язаної з необхідністю розкладання певної сили на дві (або навіть більше) її складові; таку дію й називають *розкладанням сили на складові*.

Розглянемо декілька випадків розкладання сили вздовж двох заданих напрямків.

Нехай є сила $\vec F$, що прикладена в точці K, та прямі AB і CD (рис. 2.4,а). Задача про розкладання сили по двох напрямках, які паралельні заданим прямим, зводиться до побудови такого *паралелограма*, діагональ якого визначає вектор розглядуваної сили $\vec{F}$, а сторони паралельні прямим AB і CD. Для виконання цього проведімо через кінець і початок вектора $\vec{F}$ прямі, що паралельні до AB і CD (рис. 2.4,б); відповідні сторони отриманого паралелограма і визначають шукані складові, які позначимо, наприклад, $\vec{F}'$ і $\vec{F}''$. Звісно, $\vec{F} \backsim \{\vec{F}', \vec{F}''\}$.

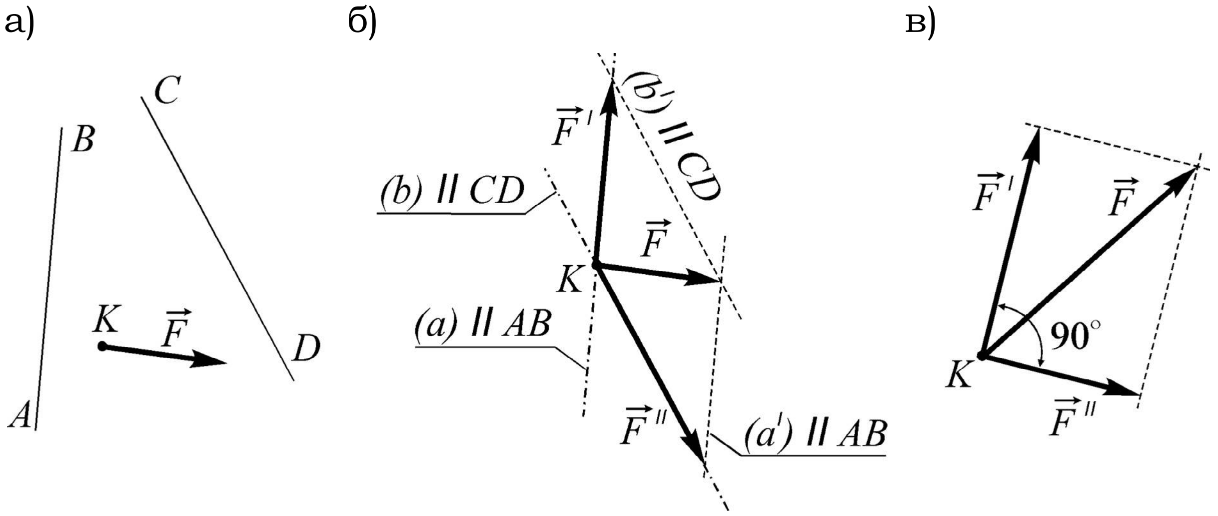


Рис. 2.4. Розкладання сили на складові

Якщо силу розкладати на дві ***ортогональні складові***, то в такому разі *правило паралелограма* вироджується в ***правило прямокутника*** – див. рисунок 2.4,в, де $\vec{F}' \perp \vec{F}''$.

Найчастіше силу $\vec{F}$ (або будь-яку іншу) розкладають на дві ***ортогональні складові***, які ***напрямлені вздовж координатних осей***, наприклад, горизонтальної осі Ox і вертикальної осі Oy (див. рис. 2.5,а), через що ці складові позначають (або іменують) $\vec{F}_x$ і $\vec{F}_y$, «натякаючи», що вони напрямлені уздовж відповідних осей. Але таке позначення може привести до деякої плутанини (див. далі рис. 2.11 і відповідні коментарі до нього).

Для уникнення зазначеної плутанини, на скромну думку автора, краще застосовувати позначення $\vec{H}_F$ і $\vec{V}_F$ (див. рис. 2.5,б), «натякаючи», що це горизонтальна (***H****orizontal*) і вертикальна (***V****ertical*) складові сили $\vec{F}$. Також досить доречно вживати позначення $\vec{X}_F$ і $\vec{Y}_F$.

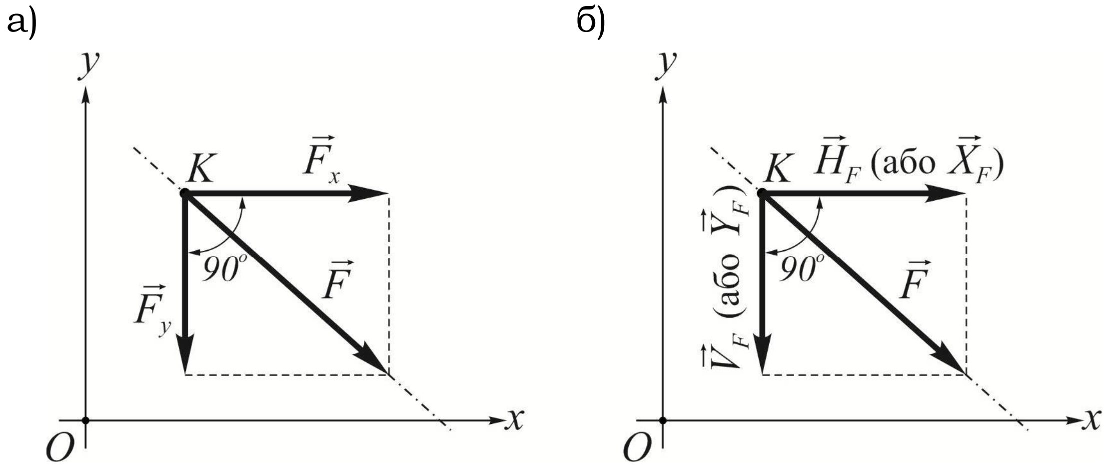


Рис. 2.5. Розкладання сили на дві ортогональні складові

§ 2.2. ЗВЕДЕННЯ ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ. СИЛОВИЙ МНОГОКУТНИК

Для спрощення міркувань спочатку розглянемо випадок, коли на абсолютно тверде тіло діє збіжна система сил $\{\vec{F}\}_{вих}$, яка складається тільки з чотирьох сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ і $\vec{F}_4$ прикладених у точках A_1, A_2, A_3 та A_4 (рис. 2.6,а). З'ясуємо, до якого канонічного вигляду зводиться задана система сил (або іншими словами – розв'яжімо для збіжної системи сил $\{\vec{F}\}_{вих}$ *першу основну задачу статики*). Для цього здійснимо такі дії:

1. Позначимо точку перетину ліній дій сил заданої системи як K і відповідно до наслідку з аксіоми 2 перенесімо всі сили вздовж їх ліній дій, приклавши ці сили у точці K (рис. 2.6,б);

2. Будуючи силовий трикутник KAB, сторонами якого є сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, отримаємо їх рівнодійну $\vec{R}_1$ (рис. 2.6,в); за формулою (2.1)

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

3. Додавши сили $\vec{R}_1$ і $\vec{F}_3$, отримаємо їх рівнодійну $\vec{R}_2$ (рис. 2.6,в); оскільки за формулою (2.1) $\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3$, то, урахувавши, що $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, отримаємо

$$\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 .$$

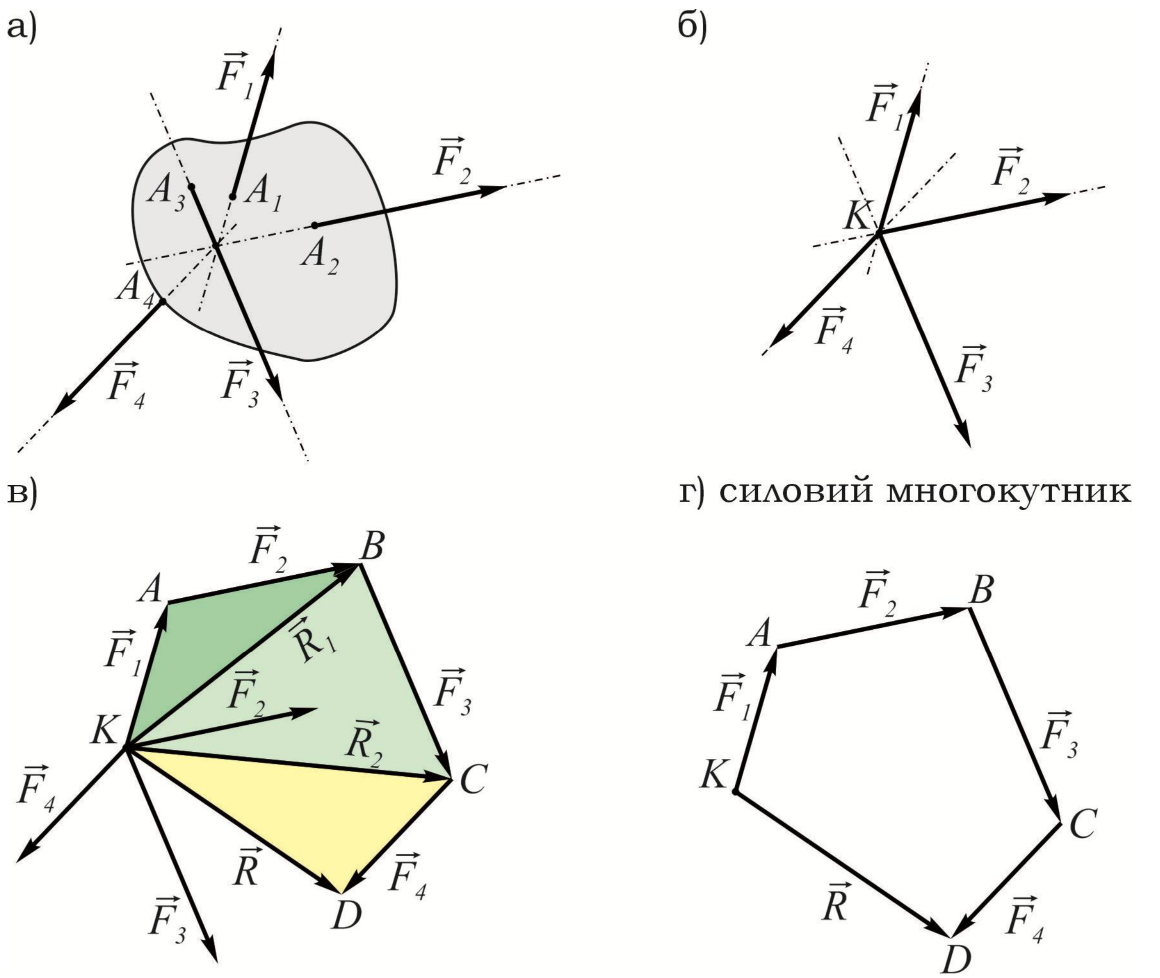


Рис. 2.6. Зведення збіжної системи сил до канонічного вигляду[4]

4. На кінець додаємо сили $\vec{R}_2$ і $\vec{F}_4$ і отримуємо силу $\vec{R}$, яка є замикаючою стороною силового трикутника KCD (рис. 2.6,в); за формулою (2.1) $\vec{R} = \vec{R}_2 + \vec{F}_4$, де $\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, через що

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

або

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i \, .$$

[4] Важливо розуміти, що у загальному випадкові, коли збіжна система сил є просторовою, побудовані силові трикутники KAB, KBC і KCD на рисунку 2.6,в перебувають у різних площинах, а для плоскої збіжної системи сил усі ці силові трикутники розташовані в одній площині.

Безсумнівно, що *подальше спрощення* вихідної системи $\{\vec{F}\}_{вих}$ *неможливе.*

Оскільки в результаті виконаних дій отримано, що

$$\vec{R} \backsim \{\vec{F}\}_{вих},$$

то, відповідно до визначення рівнодійної (див. §1.2), сила $\vec{R}$ є ***рівнодійною*** заданої збіжної системи сил, і, отже, *канонічним виглядом* $\{\vec{F}\}_{вих}$ *є рівнодійна.*

Не важко усвідомити, що аналогічними послідовними діями можна звести до канонічного вигляду та знайти рівнодійну якої завгодно збіжної системи сил, що складається з будь-якої кількості сил $\vec{F}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Таким чином, дістаємо ***висновок***, що

ⓘ кожна ***збіжна система сил*** завжди ***зводиться до*** однієї сили – ***рівнодійної*** (або: ***канонічним виглядом*** якої завгодно ***збіжної системи сил є рівнодійна***, або: ***збіжна система сил*** за дією ***еквівалентна*** одній силі – ***рівнодійній***), яка прикладена в точці перетину ліній дій сил системи та дорівнює векторній (геометричній) сумі всіх сил системи:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_i + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \qquad \textbf{(2.6)}$$

де n – кількість сил системи.

Формула (2.6) визначає рівнодійну збіжної системи сил у ***векторній формі***.

Узагальнюючи, наведений на рисунку 2.6,в, процес геометричного додавання сил на їх довільну кількість n, зрозуміло, що задача ***графічного*** визначення рівнодійної $\vec{R}$ системи сил $\{\vec{F}_i\}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ зводиться до встановлення *положення* кінця вектора $\vec{R}$. Це *положення* встановлюють шляхом послідовного знаходження положень точок A, B, C, D, ... , які є вершинами *векторного многокутника* $KABCD...$. Сторони цього многокутника геометрично рівні відповідним силам розглядуваної системи сил: $\overrightarrow{KA} = \vec{F}_1$, $\overrightarrow{AB} = \vec{F}_2$, $\overrightarrow{BC} = \vec{F}_3$, $\overrightarrow{CD} = \vec{F}_4$ і т. д. Отож, щоб графічно знайти рівнодійну $\vec{R}$ збіжної системи сил необхідно у певному *масштабі сил*[5] побудувати векторний многокутник, прилучаючи послідовно до кінця сили $\vec{F}_1$ початок сили $\vec{F}_2$ і далі сили $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, ..., $\vec{F}_i$, ..., $\vec{F}_n$. Проміжні рівнодійні $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, ... можна не будувати (див. рис. 2.6,г). Рівнодійною $\vec{R}$ є вектор, проведений з точки K перетину ліній дій сил в останню вершину побудованого векторного многокутника.

ⓘ Утворений в такий спосіб многокутник називають ***силовим многокутником***.

Отже,

ⓘ ***графічно*** рівнодійну збіжної системи сил визначає замикаюча стороною силового многокутника, сторонами якого є вектори сил розглядуваної системи.

Рівнодійна $\vec{R}$ збіжної системи сил завжди напрямлена від початку вектора першої сили до кінця вектора останньої сили; при цьому сили розглядуваної системи розташовані по обходу контуру силового многокутника в одному напрямку (який визначає напрямок першої сили), а рівнодійна $\vec{R}$ – у протилежному. Очевидно, що кількість сторін силового многокутника дорівнює $(n+1)$, де n – кількість сил системи.

Таким чином, у розглядуваному параграфі викладено **два** способи (векторний та графічний) визначення рівнодійної збіжної системи сил. Про використання векторного способу мова вже йшла. Графічний спосіб є досить простим й інколи ефективним, але лише за певних умов, а саме:

- кількість сил невелика (до 5 ÷ 7 сил);
- модулі сил приблизно одного порядку (інакше дуже важко вибирати зручний для користування масштаб сил);
- система сил є плоскою (адже досить важко прикладати початок наступної сили до кінця попередньої, якщо сили розглядуваної системи розташовані не в одній площині).

Розглянемо **третій** спосіб визначення рівнодійної збіжної системи сил.

Оскільки рівнодійна – це сила, а сила – це *вектор*, то відповідно до положень векторної алгебри

---

[5] При розв'язуванні практичних задач вектори всіх сил необхідно відкладати в якому-небудь довільно вибраному *масштабі сил*, обираючи який доцільно керуватися зручністю обчислень і графічного зображення векторів сил; зазвичай масштаб визначає, скільки *Н* (ньютонів) припадає на *1мм*, наприклад: в *1мм* – μ_F H; значення μ_F і є ***масштабом сил*** (або ***силовим масштабом***).

$$\vec{R} = \vec{i} \cdot R_x + \vec{j} \cdot R_y + \vec{k} \cdot R_z, \qquad \textbf{(2.7)}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ – орти[6] декартових координатних осей x, y та z відповідно; R_x, R_y, R_z – *проекції* рівнодійної *сили* на зазначені осі.

Отож, ми підійшли до *питання* про *проекцію сили на координатну вісь*. Можна було б нагадати, що поняття проекції вектора $\vec{a}$ на вісь уводилося в курсі векторної алгебри, де нічого не йшлося про фізичний зміст самого вектора $\vec{a}$: це міг бути і вектор сили, і вектор швидкості, й вектор прискорення і т.д. Але поняття проекції сили на координатну вісь є одним з основних понять теоретичної механіки та багатьох інженерно-технічних дисциплін, які вивчають після та на базі теоретичної механіки. Тому розглянемо це поняття окремо і ретельно.

§ 2.3. ПРОЕКЦІЯ НА ВІСЬ ВЕКТОРА СИЛИ (ЯК І БУДЬ-ЯКОГО ІНШОГО ВЕКТОРА)

У цьому параграфі з'ясуємо *певні поняття* ортогональної *проекції на вісь вектора* ***сили***; ці поняття мають загальне значення і є справедливими при проектуванні на вісь *будь-якої* іншої фізичної (й не тільки) *векторної величини.*

Умовимося чітко розуміти та розрізняти такі ***поняття***:

1) ***що таке*** проекція сили на вісь;
2) ***що визначає*** проекцію сили на вісь;
3) ***чому дорівнює*** проекція сили на вісь.

Розглянемо довільні вісь x і силу $\vec{F}$ (рис. 2.7,а), що прикладена у точці A та лежить на прямій (a); позначимо кут між додатними напрямками вектора сили й осі x (або орта $\vec{i}$) як α.

Якщо позначити кінець вектора $\vec{F}$ точкою B, то відрізок AB і його довжина визначають величину (або модуль) F сили $\vec{F}$. Опустімо із точок A та B перпендикуляри на вісь x; точки перетину цих перпендикулярів з віссю x назвемо A_x та B_x відповідно (див. рис. 2.7,б). З нарисної геометрії відомо, що точки A_x та B_x є проекціями на вісь x точок A та B, а відрізок A_xB_x – проекцією відрізка AB на цю ж вісь.

[6] Як відомо з векторної алгебри, ***орт*** певної ***осі*** – це вектор, напрям якого збігається з напрямком розглядуваної осі (справедливе також і твердження, що орт осі визначає напрям цієї осі) та ***модуль*** якого ***дорівнює одиниці***; наприклад, $\vec{i}$ – орт осі x та $i = |\vec{i}| = 1$.

Очевидно, що в контексті розглядуваного в цьому параграфі питання, відрізок A_xB_x і є *проекцією сили* $\vec{F}$ *на вісь* x.

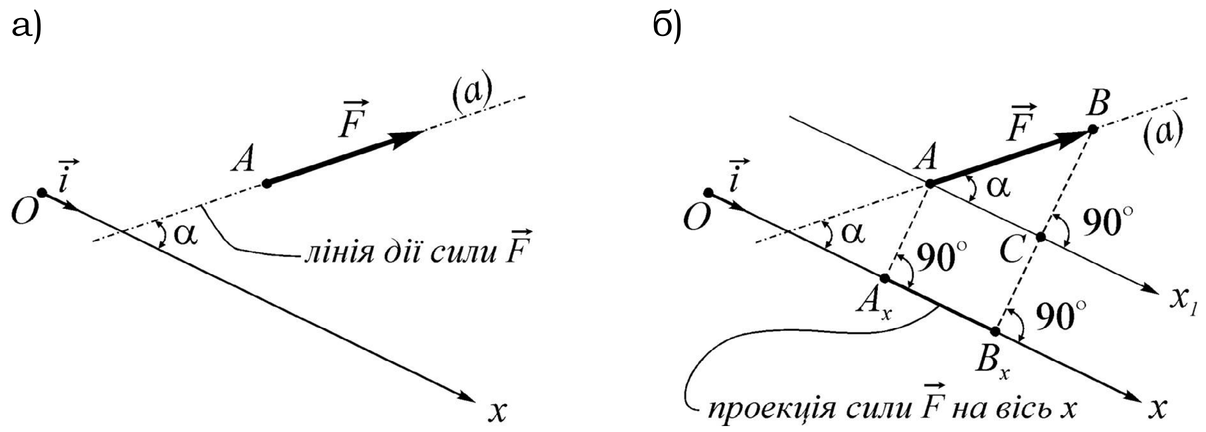


Рисунок 2.7. Проекція сили на вісь

що таке проекція сили на вісь

ⓘ ***Проекція сили на*** певну ***вісь*** – ***це відрізок*** цієї осі, що розташований між перпендикулярами, проведеними з початку та кінця вектора сили на цю вісь.

Проекцію сили на вісь вважають додатною, якщо ця сила напрямлена у бік додатного напрямку осі, й від'ємною, коли сила напрямлена у протилежний бік.

Зазвичай проекцію сили $\vec{F}$ на вісь x *позначають* як F_x (тоді, природно, P_y – це проекція сили $\vec{P}$ на вісь y, а G_z – проекція сили $\vec{G}$ на вісь z); інколи у випадках, коли йдеться тільки про одну-єдину силу, її проекцію, наприклад, на вісь x позначають X.

Визначимо тепер величину (або чисельне значення) проекції сили на вісь. Для цього через точку A проведімо вісь x_1, яка паралельна осі x – див. рисунок 2.7,б, з якого зрозуміло, що $AC = A_xB_x = F_x$[7], а кут BAC дорівнює куту α: $\angle BAC = \alpha$. Якщо ж розглянути прямокутний трикутник ABC, то відповідно до понять елементарної тригонометрії

$$cos\,\alpha = \frac{AC}{AB},$$

звідки

$$AC = AB \cdot cos\,\alpha .$$

[7] Про це ж говорить одна з теорем векторної алгебри: *проекції вектора* на будь-які паралельні й однаково напрямлені осі *дорівнюють одна одній.*

Урахувавши, що $AC = F_x$, а $AB = F$, матимемо:

$$F_x = F \cdot cos\alpha . \qquad (*)$$

Оскільки на рисунку 2.7 сила $\vec{F}$ напрямлена у бік додатного напрямку осі x, то її *проекція* на цю вісь *додатна*.

Виконаємо тепер просту арифметичну дію – помножимо на одиницю праву частину останньої рівності, що, звісно, ніяк не змінить її значення:

$$F_x = F \cdot 1 \cdot cos\alpha \qquad (**)$$

та подивимося на цей вираз більш уважно, згадавши визначення скалярного добутку двох векторів.

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – це скалярна величина, яка дорівнює добутку модуля a першого вектора на модуль b другого та на косинус кута α між додатними напрямками цих векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot cos\alpha .$$

Запишімо тепер скалярний добуток векторів $\vec{F}$ та $\vec{i}$:

$$\vec{F} \cdot \vec{i} = F \cdot i \cdot cos\alpha = F \cdot 1 \cdot cos\alpha . \qquad (***)$$

Оскільки праві частини виразів (**) і (***) рівні, то, зрозуміло, що рівні й ліві їх частини. Прирівнявши зазначені частини й адаптувавши отриманий результат на поняття проекції сили $\vec{F}$ на осі y і z, приходимо до ***висновку***:

що визначає проекцію сили на вісь

проекцію сили на вісь визначає скалярний добуток вектора сили на орт осі:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \vec{F} \cdot \vec{i} = F \cdot i \cdot cos\alpha = F \cdot 1 \cdot cos\alpha = F \cdot cos\alpha \\ F_y &= \vec{F} \cdot \vec{j} = F \cdot j \cdot cos\beta = F \cdot 1 \cdot cos\beta = F \cdot cos\beta \\ F_z &= \vec{F} \cdot \vec{k} = F \cdot j \cdot cos\gamma = F \cdot 1 \cdot cos\gamma = F \cdot cos\gamma , \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.8)}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ – орти декартових координатних осей x, y і z; α, β і γ – відповідно кути між додатними напрямками осей x, y та z і додатним напрямком сили $\vec{F}$.

Визначення проекції вектора сили (як і будь-якого іншого вектора) на певну координатну вісь у вигляді скалярного добутку (2.8) зазвичай застосовують при доведеннях тих чи інших теорем і залежностей механіки й у різноманітних теоретичних наукових дослідженнях.

Формули (2.8) є беззаперечним математичним свідченням того, що проекція сили на вісь – це ***алгебраїчна скалярна*** величина. Дійсно, якщо кут між додатним напрямком осі, на яку здійснюється проектування, і вектором сили лежить у межах $[0°, 90°[$, то косинус такого кута й відповідна проекція додатні; якщо ж цей кут лежить у межах $]90°, 180°]$, то косинус такого кута й відповідна проекція від'ємні.

Визначимо тепер проекцію P_x сили $\vec{P}$ на вісь x (див. рис. 2.8, де φ – кут між додатними напрямками цієї сили й осі x (або орта $\vec{i}$). Очевидно, що

$$\varphi = 180° - \alpha,$$

де α – *гострий кут* між віссю та *лінією дії* сили $\vec{P}$.

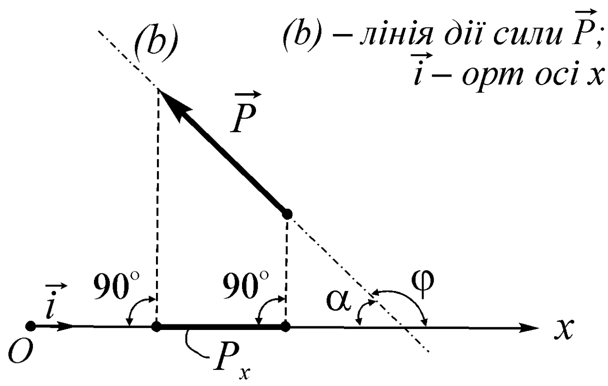


Рис. 2.8

З урахуванням означеного значення кута φ за формулою (2.8), дістанемо, що

$$P_x = \vec{P} \cdot \vec{i} = P \cdot \cos\varphi = P \cdot \cos(180° - \alpha),$$

оскільки ж

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$$

то остаточно отримуємо:

$$P_x = -P \cdot \cos\alpha. \qquad (****)$$

Таким чином, у розглядуваному випадкові проекція P_x сили $\vec{P}$ на вісь x виявилася величиною від'ємною, що й має бути, оскільки вектор сили $\vec{P}$ напрямлений протилежно до напрямку осі x (див. рис. 2.8).

Якщо порівняти формули (*) і (****), то можна бачити, що в цих формулах фігурує кут α, який в обох випадках визначає *гострий кут між лінією дії сили та віссю*. Зрозуміло, що мати справу з гострими кутами завжди приємніше, ніж з іншими кутами, оскільки будь-яка тригонометрична функція гострого кута завжди є величиною додатною. Через це, при практичному знаходженні значення проекції сили на вісь зазвичай використовують ***гострий кут між лінією дії сили та віссю***, а знак проекції при цьому визначають безпосередньо з рисунка (з розрахункової схеми).

чому дорівнює проекція сили на вісь

ⓘ ***Проекція*** F_x ***сили*** $\vec{F}$ ***на вісь*** x дорівнює взятому зі знаком плюс чи мінус добутку модуля F сили на косинус гострого кута α між лінією дії сили $\vec{F}$ і віссю x:

$$F_x = \pm F \cdot cos\,\alpha\,; \qquad \textbf{(2.9)}$$

знак плюс обирають у тому разі, коли напрямок сили $\vec{F}$ збігається з напрямком осі x; в іншому разі обирають знак мінус.

Розглянемо окремі можливі випадки:

1) якщо кут $\alpha = 90^\circ$, то лінія дії сили $\vec{F}$ перпендикулярна до осі x (рис. 2.9,а); у цьому разі в формулі (2.9) $cos\,\alpha = 0$, через що $F_x = 0$, тобто *проекція сили* $\vec{F}$ *на вісь* x *дорівнює нулю* (або *сила* $\vec{F}$ *не проектується на вісь* x);

2) якщо кут $\alpha = 0$, то лінія дії сили $\vec{F}$ паралельна до осі x, а напрямок сили збігається з напрямком осі (рис. 2.9,б); у цьому разі в формулі (2.9) $cos\,\alpha = 1$, через що $F_x = F$, тобто *сила* $\vec{F}$ *проектується на вісь* x *у натуральну (дійсну) величину зі знаком плюс.*

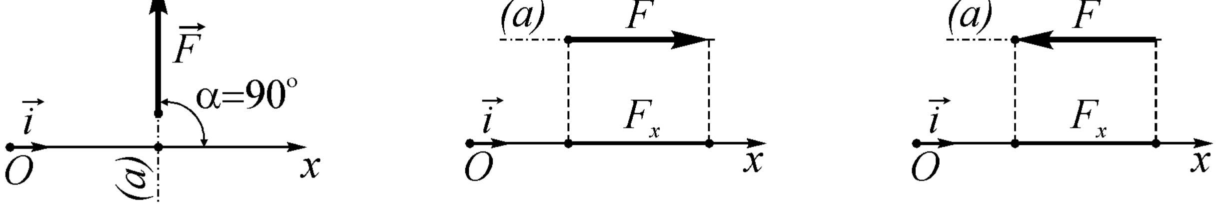


Рис. 2.9. Окремі випадки проектування сили на вісь

3) якщо кут $\alpha = 180^\circ$, то лінія дії сили $\vec{F}$ паралельна до осі x, але сила протилежна за напрямком до осі (рис. 2.9,в); у цьому разі в формулі (2.9) $\cos\alpha = -1$, через що $F_x = -F$, тобто *сила $\vec{F}$ проектується на вісь x у натуральну (дійсну) величину зі знаком мінус.*

Розглянемо певну силу $\vec{F}$, що прикладена у точці A та лінія дії (a) якої належить площині xOy. Нехай (a) утворює з віссю x гострий кут α; якщо гострий кут між (a) та віссю y позначити β (рис. 2.10,а), то, звісно,

$$\beta = 90^\circ - \alpha .$$

Зобразимо проекції F_x і F_y сили $\vec{F}$ на координатні осі (рис. 2.10, б) та за формулою (2.9) знайдімо їх значення:

$$F_x = +F \cdot \cos\alpha = F \cdot \cos\alpha , \quad F_y = +F \cdot \cos\beta = F \cdot \cos\beta .$$

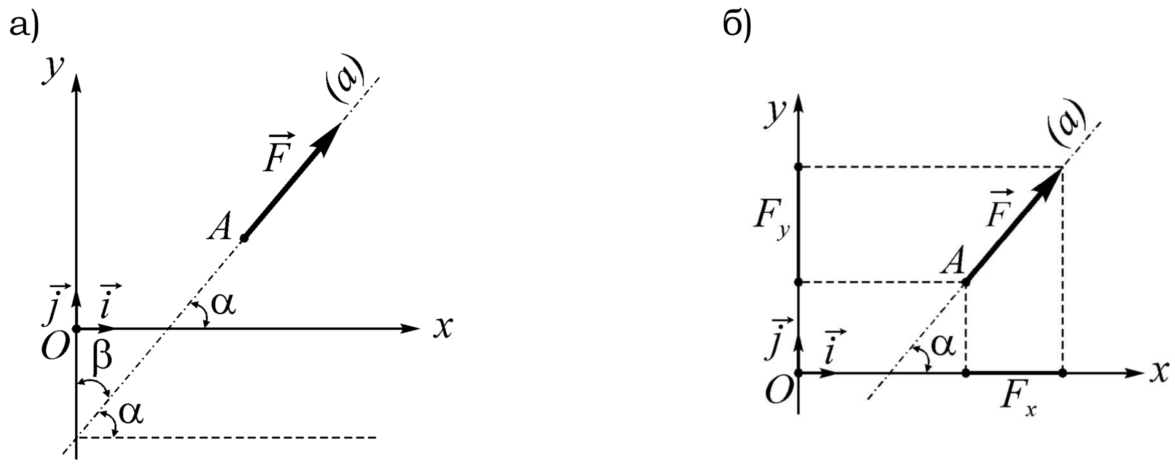


Рис. 2.10

Тому що $\beta = 90^\circ - \alpha$, то відповідно до елементарної тригонометрії

$$\cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha) \quad \text{і} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha ,$$

з урахуванням чого дістаємо, що проекція

$$F_y = F \cdot \sin\alpha .$$

Остання отримана формула у деяких студентів викликає незрозумілі ***сумніви*** та ***запитання*** з приводу присутності в ній множника у вигляді функції $sin\alpha$ – мовляв, відповідно до формули (2.9) при знаходженні значення проекції сили на вісь *необхідно* модуль цієї сили *множити* ***на косинус*** відповідного кута, а тут *множиться* ***на синус***. Треба чітко розуміти, що в цій формулі множник $sin\alpha$ якраз і визначає необхідний для проектування на вісь y косинус гострого кута β між лінією дії сили $\vec{F}$ та віссю y, оскільки $sin\alpha = cos\beta$.

З викладених тут міркувань та рисунку 2.10,б можна зробити досить важливий для «початківця-проектувальника» ***висновок***:

при практичному проектуванні будь-якої сили на дві ортогональні осі, що знаходяться в одній площині з лінією дії розглядуваної сили, достатньо знати і використовувати лише певний гострий кут між лінією дії цієї сили й однією зі зазначених осей; більше того – взагалі можна й не знати безпосереднього значення використовуваного кута, а достатньо мати (знати) значення хоча б якої-небудь з тригонометричних функцій його: косинуса чи синуса.

Ні в якому разі не слід ототожнювати поняття проекцій сили на осі й її ортогональних складових уздовж цих осей. ***Проекція*** сили на вісь – ***величина скалярна***, яка характеризується: 1) знаком; 2) числовим значенням, а ***складова*** сили – ***величина векторна***, яка характеризується: 1) точкою прикладання; 2) напрямком дії; 3) числовим значенням (модулем) сили. Отже, число, яке визначає проекцію сили на вісь, може бути як додатнім, так і від'ємним, що залежить від взаємного розташування вектора сили й осі; число ж, що визначає величину (модуль) сили незалежно ні від чого завжди тільки додатне.

Так, на рисунку 2.11,а зображена сила $\vec{F}$, що розкладена на дві складові сили $\vec{F}_x$ і $\vec{F}_y$, напрямлених уздовж координатних осей Ox і Oy (див. також рис. 2.5), та її відповідні проекції F_x і F_y. Неважко бачити й усвідомити, що:

1) *проекція* $F_x > 0$ й одночасно є проекцією на вісь Ox сил $\vec{F}$ і $\vec{F}_x$;

2) *проекція* $F_y < 0$ й одночасно є проекцією на вісь Oy сил $\vec{F}$ і $\vec{F}_y$;

3) за загальноприйнятими традиційними позначеннями *модулі* складових $\vec{F}_x$ і $\vec{F}_y$ – це відповідно F_x і F_y, які завжди тільки додатні;

4) у такому разі виникає певна плутанина, оскільки різні поняття механіки (*модулі* складових сил та їх *проекції* на відповідні осі) мають однакові «*імена*».

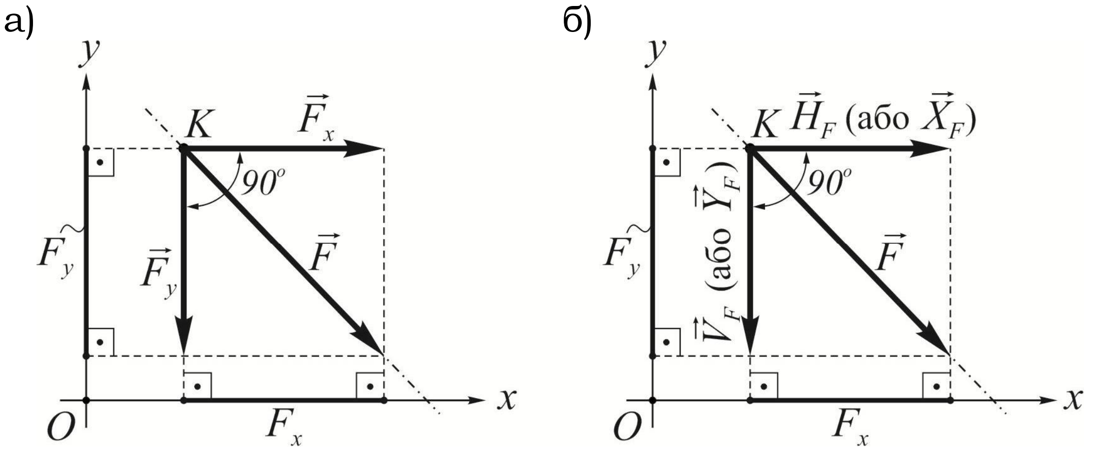


Рис. 2.11. Про позначення ортогональних складових сили

Якщо ж позначити горизонтальну і вертикальну складові відповідно як $\vec{H}_F$ (або $\vec{X}_F$) і $\vec{V}_F$ (або $\vec{Y}_F$) (див. рис. 2.11,б), то ніякої плутанини не виникає: F, H_F (або X_F) і V_F (або Y_F) – модулі (завжди тільки додатні величини), а F_x і F_y – проекції (можуть бути як додатними, так і від'ємними).

§ 2.4. АНАЛІТИЧНИЙ СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ РІВНОДІЙНОЇ ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ

Розглянемо збіжну систему сил $\left\{\vec{F}_i\right\}$ $(i = 1,2,...,n)$, що прикладена до твердого тіла. Нехай $\vec{R}$ – рівнодійна цієї системи сил. За формулою (2.6)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_i + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Проектуючи обидві частини цієї векторної рівності, наприклад, на вісь x, дістанемо

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{ix} + ... + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} .$$

Отримана залежність свідчить, що

ⓘ ***проекція рівнодійної збіжної системи сил*** на певну вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій сил заданої системи на ту ж вісь.

Символьний запис $\sum_{i=1}^{n} F_{ix}$ (який і означає суму проекцій усіх сил системи на вісь x) для економії часу, паперу, чорнила та власної енергії будемо записувати у вигляді $\sum X$ (у деяких джерелах зустрічається також позначення $\sum X_i$).

Аналогічно визначають і проекції рівнодійної $\vec{R}$ на декартові осі y та z. Тоді

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum X, \\ R_y &= \sum Y, \\ R_z &= \sum Z \end{aligned}\right\}$$

(2.10)– ***проекції рівнодійної збіжної системи сил*** на декартові координатні осі.

Відповідно до положень векторної алгебри модуль рівнодійної за її проекціями на декартові осі визначає формула $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$; урахувавши значення (2.10), дістанемо:

$$R = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2}$$

(2.11)– ***модуль рівнодійної збіжної системи сил***.

Напрямок вектора $\vec{R}$ визначають ***напрямні косинуси***:

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(\vec{R}\hat{;}\vec{i}\right) &= \frac{R_x}{R} = \frac{\sum X}{\sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2}}; \\ \cos\left(\vec{R}\hat{;}\vec{j}\right) &= \frac{R_y}{R} = \frac{\sum Y}{\sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2}}; \\ \cos\left(\vec{R}\hat{;}\vec{k}\right) &= \frac{R_z}{R} = \frac{\sum Z}{\sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(2.12)}$$

Отже, усі три параметри, що характеризують рівнодійну збіжної системи сил, визначені:

- модуль – за формулою (2.11);
- напрямком дії сили – за формулами (2.12);
- точка прикладання – точка перетину ліній дій сил системи.

Таким чином, *перша основна задача статики* для збіжної системи сил розв'язана повністю.

§ 2.5. УМОВИ РІВНОВАГИ ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ

З'ясуємо тепер питання: коли прикладена до абсолютно твердого тіла збіжна система сил $\{\vec{F}_i\}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ є зрівноваженою. Іншими словами – знайдемо умови рівноваги збіжної системи сил (або – розв'яжімо для збіжної системи сил *другу основну задачу статики*).

Оскільки сумарна механічна дія *зрівноваженої системи сил* на тіло дорівнює нулю, а будь-яка збіжна система сил $\{\vec{F}_i\}$ зводиться до рівнодійної $\vec{R}$, то розглядувана система буде зрівноваженою тоді, коли $\vec{R} = 0$. Урахувавши ж, що згідно з формулою (2.6) $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, дістаємо ***векторну умову рівноваги***[8] збіжної системи сил:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0. \qquad \textbf{(2.13)}$$

ⓘ Збіжна система сил є зрівноваженою тоді, коли ***векторна (геометрична) сума сил*** системи ***дорівнює нулю***.

Графічно *рівність нулю геометричної суми сил* системи означає, що при побудові силового многокутника кінець останньої сили $\vec{F}_n$ збігається з початком першої сили $\vec{F}_1$ (див. рис. 2.12, де зображена певна зрівноважена збіжна система сил $\{\vec{F}_1 \div \vec{F}_5\}$ та її силовий многокутник).

Отже,

ⓘ ***графічною умовою*** рівноваги збіжної системи сил ***є замкненість*** її ***силового многокутника***.

Кількість сторін силового многокутника кожної зрівноваженої збіжної системи сил дорівнює кількості n сил розглядуваної системи (див., наприклад, рис. 2.12).

---

[8] У деяких джерелах уживають також назву ***механічна умова рівноваги***.

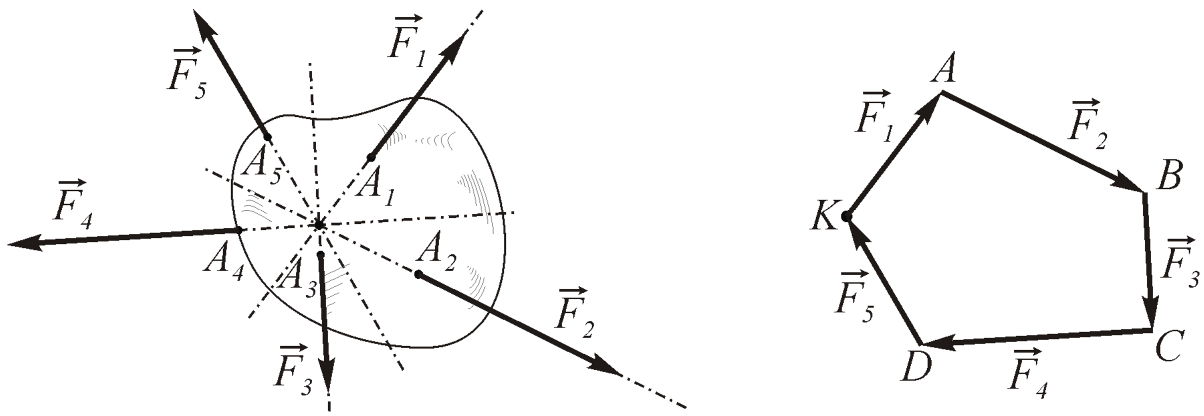


Рис. 2.12. Зрівноважена збіжна система сил

Знайдімо тепер аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил. Оскільки за формулою (2.11)

$$R = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2},$$

то виконання умови $\vec{R} = 0$ можливе в єдиному разі, коли

$$\left.\begin{aligned} \sum X &= 0, \\ \sum Y &= 0, \\ \sum Z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.14)}$$

Отримані умови (формули, залежності) (2.14) є ***аналітичними умовами*** рівноваги збіжної системи сил:

ⓘ для рівноваги збіжної системи сил необхідно та достатньо, щоб ***алгебраїчні суми проекцій сил*** цієї системи на декартові координатні осі ***дорівнювали нулю***.

У деяких джерелах залежності (2.14) означають як *рівняння рівноваги* збіжної системи сил, що, безумовно, є *помилковим твердженням*. ***Рівняння рівноваги*** – це рівняння, які складають для конкретної розглядуваної системи сил на підставі відповідних умов рівноваги. Рівняння рівноваги, як правило, містять ті чи інші невідомі (шукані) величини й у кожному випадку мають вигляд, що залежить від кількості та напрямків сил розглядуваної системи, а умови рівноваги просторової збіжної системи сил завжди мають вигляд (2.14).

Якщо збіжна система сил є плоскою, наприклад, $\{\vec{F}\} \in xOy$, то жодна з сил системи проектуватися на вісь z не буде (тобто, $\sum Z \equiv 0$ і при складанні відповідного рівняння рівноваги неодмінно буде виходити тотожність $0=0$). Урахувавши це, із загальних умов (2.14) дістанемо

ⓘ ***аналітичні умови*** рівноваги ***плоскої*** збіжної системи сил:

$$\left.\begin{aligned} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.15)}$$

відповідно до яких можна скласти *два рівняння рівноваги* плоскої збіжної системи сил.

§ 2.6. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ СИЛИ[9]

ⓘ ***Теорема***: якщо тверде тіло знаходиться у рівновазі під дією трьох непаралельних сил, які лежать в одній площині, то лінії дій цих сил перетинаються в одній точці

або

ⓘ якщо плоска система з трьох непаралельних сил є зрівноваженою, то вона є збіжною.

Нехай певне матеріальне тіло перебуває *у рівновазі* під дією трьох непаралельних сил, лінії дій яких лежать в одній площині; тоді зазначені сили утворюють *зрівноважену плоску непаралельну систему сил*, тобто $\{\vec{F}\}_{вих} = \{\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3\} \backsim 0$.

Доведімо, що у такому разі лінії дій сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ та $\vec{F}_3$ перетинаються в одній точці.

Доведення

Спочатку розглянемо які-небудь дві з діючих на матеріальне тіло сил, наприклад, $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, що прикладені до тіла у точках A і B відповідно. Знайдімо точку K перетину ліній дій цих сил (рис. 2.13,а). Перенесімо сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ уздовж їх ліній дій у знайдену точку K і за правилом паралелограма знайдемо їх рівнодійну $\vec{R}$, яка також буде прикладеною у точці K (рис. 2.13,б). Певна річ, оскільки

$$\{\vec{F}_1; \vec{F}_2\} \backsim \vec{R}, \quad \text{то} \quad \{\vec{F}\}_{вих} \backsim \{\vec{R}; \vec{F}_3\}.$$

[9] У назві параграфа вжито стислу назву теореми; розгорнута назва – **теорема про рівновагу матеріального тіла під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині**.

Урахувавши, що за умовою задачі $\{\vec{F}\}_{вих} \backsim 0$, то і отримана в результаті здійснених перетворень система з двох сил

$$\{\vec{R}; \vec{F}_3\} \backsim 0.$$

Але за аксіомою № 1 виконання останньої умови можливо лише тоді, коли сили $\vec{F}_3$ (яка прикладена до розглядуваного тіла десь у певній точці C) і $\vec{R}$ мають спільну лінію дії, тобто коли лінія дії сили $\vec{F}_3$ також проходить через точку K (рис. 2.13,в).

Отже, лінії дій усіх заданих сил проходять через точку K (рис. 2.13, г), *що і треба було довести.*

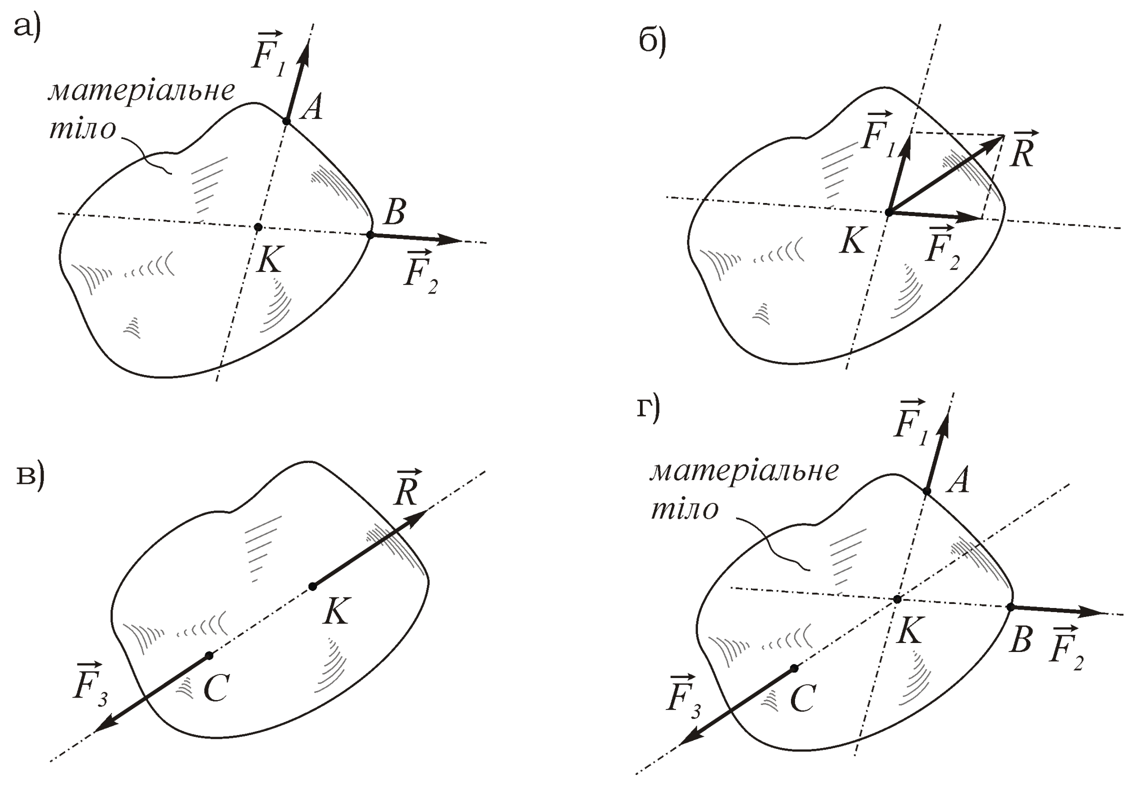


Рис. 2.13. До доведення теореми про три сили

Слід мати на увазі, що факт перетину в одній точці ліній дій трьох сил, прикладених до твердого тіла, є лише ***необхідною*** умовою для рівноваги цього тіла. Перетинання ліній дій зазначених сил в одній точці не є ***достатньою*** умовою, якою є замкненість силового трикутника, побудованого на силах, або виконання умови (2.15). Тобто ***зворотне викладення*** теореми про три сили ***не є справедливим***.

§ 2.7. ДЕЯКІ ВИДИ В'ЯЗЕЙ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ

Для початку згадаємо, що реакція тієї чи іншої в'язі є ***силою***, яка визначає механічну взаємодію між невільним тілом і зазначеною в'яззю. Тому реакцію, як і будь-яку силу, характеризують три параметри: модуль, напрямок дії та точка прикладання.

У більшості задач статики, пов'язаних із знаходженням реакцій в'язей, шуканими параметрами є *модуль* і *напрямок* реакції тієї чи іншої в'язі, а *точка прикладання* практично завжди відома. *Лінії дії* реакцій багатьох видів в'язей також відомі. Сила реакції в'язі направлена в сторону, протилежну тій, куди ця в'язь не дає змоги рухатися тілу. Коли в'язь одночасно перешкоджає рухові тіла по декількох напрямках, то напрям реакції в'язі невідомий. У загальному випадкові реакцію тієї чи іншої в'язі найчастіше позначають символом (літерою) $\vec{R}$ з відповідним індексом[10]. У окремих випадках певним реакціям надають «***власні*** імена». Розглянемо деякі види в'язей і з'ясуємо найголовніші властивості їх реакцій.

Почнемо з ***горизонтальної площини*** й на її прикладі означимо нескладні міркування про її реакцію, не наводячи таких міркувань для інших в'язей, поданих в цьому параграфі.

Отже, розглянемо ***рівновагу*** матеріального тіла сферичної форми, що знаходиться на горизонтальній площині. Нехай тіло торкається площини у точці A. Активною силою, що прагне викликати рух тіла вниз по вертикалі, є сила тяжіння $\vec{G}$, а площина унеможливлює такий рух (рис. 2.14,а).

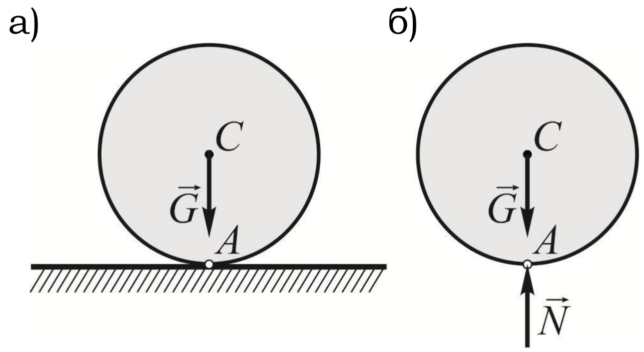


Рис. 2.14. В'язь у вигляді горизонтальної площини

Якщо застосувати принцип звільнення від в'язей, то в точці торкання тіла з площиною необхідно прикласти реакцію відкинутої площини. Тоді розглядуване тіло стане умовно вільним тілом, яке перебуває у рівновазі під дією двох сил. На підставі *аксіоми 1* ці дві сили мусять бути рівними за величиною, протилежними за напрямками й мати спільну лінію дії. Таким чином, реакція горизонтальної площини направлена *перпендикулярно* до цієї площини або, іншими словами, по *нормалі*

[10] Через таке позначення реакції в'язі на початковому етапі вивчення теоретичної механіки деякі студенти плутають поняття ***рівнодійної*** та ***реакції в'язі***, *чого робити не варто.*

до площини, через що цю реакцію називають ***нормальною реакцією*** й «іменують» літерою $\vec{N}$ (див. рис. 2.14,б).

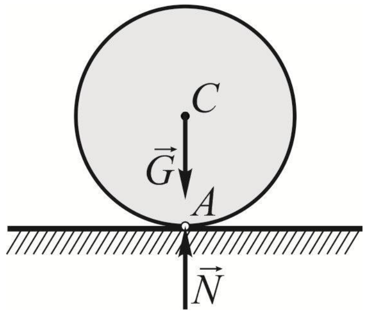


Рис. 2.15

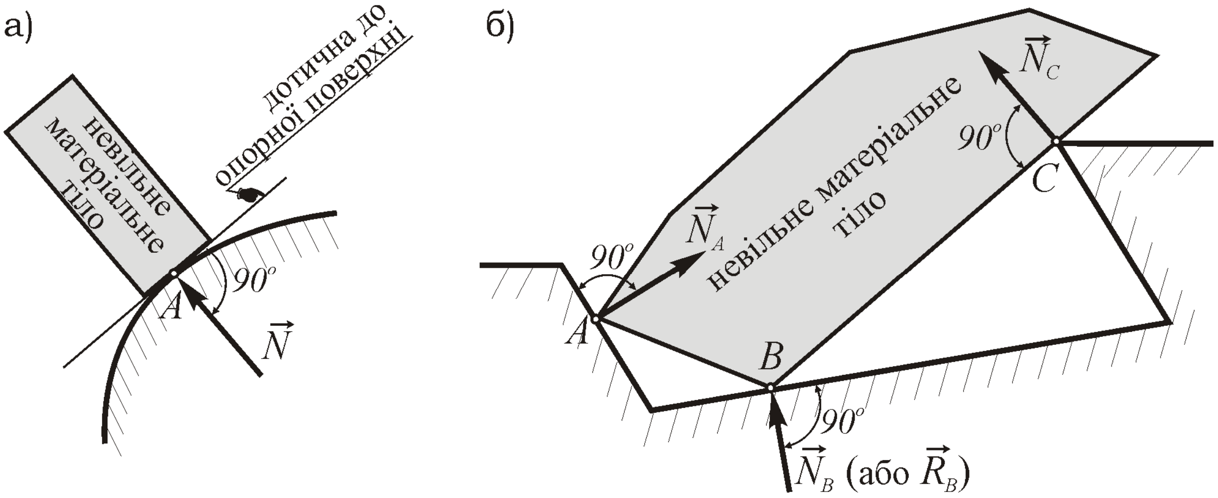
При розв'язуванні багатьох практичних задач для економії часу, паперу та чорнила можна не наводити *два* рисунки: спочатку невільне матеріальне тіло як на рисунку 2.14,а, а потім – умовно вільне тіло як на рисунку 2.14,б. Достатньо зображувати і саму в'язь, і одразу її реакцію, як це наведено на рисунку 2.15 (бажано також реакції в'язей зображувати чорнилом іншого кольору).

Узагалі-то, *горизонтальна площина* є окремим випадком в'язі у вигляді будь-якої *поверхні* чи *площини*.

ⓘ Якщо тертям між поверхнею (площиною) та розглядуваним тілом нехтують, то таку площину (поверхню) називають ***ідеально гладкою*** (чи ***гладенькою***).

1. *Ідеально гладка поверхня (площина)*

Ідеально гладка поверхня «дозволяє» тілу, рух якого вона обмежує, вільно ковзати по цій поверхні й тому її реакція $\vec{N}$ (або $\vec{R}$) завжди прикладена до тіла в точці його дотику до в'язі, «лежить» на *нормалі до опорної поверхні* й напрямлена протилежно до напрямку тиску тіла на поверхню (див. рис. 2.15, рис. 2.16,а і спирання тіла у точках A та B на рис. 2.16,б).



Точки A, B і C – точки торкання невільних матеріальних тіл опорних поверхонь

Рис. 2.16. В'язі у вигляді ідеально гладенької поверхні (площини) і точкова опора та їх реакції

2. ***Точкова опора*** (без тертя)

Точкова опора (див. на рис. 2.16,б спирання тіла у точці C) є окремим випадком ідеально гладенької поверхні.

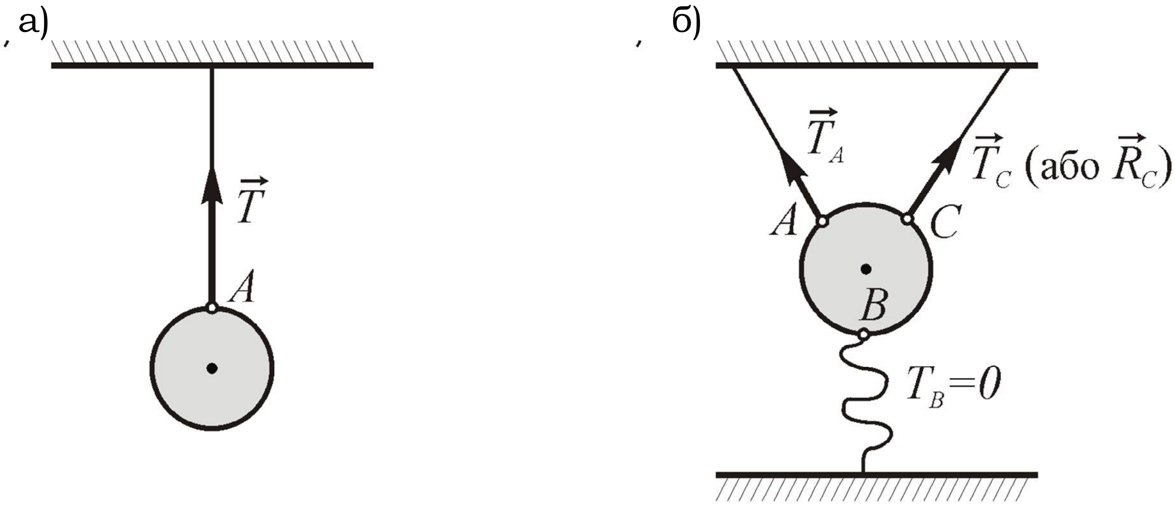
Винесена точкова опора в окремий вид в'язі, оскільки в такому разі неможливо провести нормаль до опорної поверхні й опорна реакція $\vec{N}_C$ також прикладена в точці дотику тіла до опори, але проходить *по нормалі до поверхні* самого *тіла.*

3. ***Гнучка в'язь*** (нитка, канат, трос, ланцюг, дріт тощо)

У теоретичній механіці всі такі в'язі розглядають як *невагомі* та *нерозтяжні.*

Фізична особливість будь-якої гнучкої в'язі полягає в тому, що вона чинить протидію тільки тій зовнішній дії, яка прагне розтягувати цю в'язь. Отже, реакція гнучкої в'язі виникає й не дорівнює нулеві, лише коли ця в'язь сприймає розтягувальну зовнішню дію.

Реакцію гнучкої в'язі зазвичай «іменують» $\vec{T}$; вона прикладена в точці підвішування тіла і спрямована вздовж самої в'язі *завжди тільки від тіла*, рух якого розглядувана в'язь обмежує (рис. 2.17).



Точки A, B і C – точки підвішування невільних матеріальних тіл

Рис. 2.17. Гнучкі в'язі та їх реакції

4. В'язь у вигляді ***циліндричного шарніра***

Якщо два матеріальних тіла, наприклад, рейки A і B з'єднані одна з одною болтом C, що проходить через отвори в цих рейках, і можуть обертатися навколо повздовжньої осі з'єднувального болта, рухаючись при цьому в площинах, які перпендикулярні до осі болта (рис. 2.18,а), то таке з'єднання називають ***циліндричним шарнірним***, а вісь болта C – ***віссю*** циліндричного шарніра.

Прикладом циліндричного шарнірного з'єднання є з'єднання за допомогою підшипника. Так, якщо вал A закріплено у внутрішній обоймі підшипника D, зовнішня обойма якого закріплена у нерухомому корпусі B (рис. 2.18,б), то вал A і корпус B також з'єднані циліндричним шарніром.

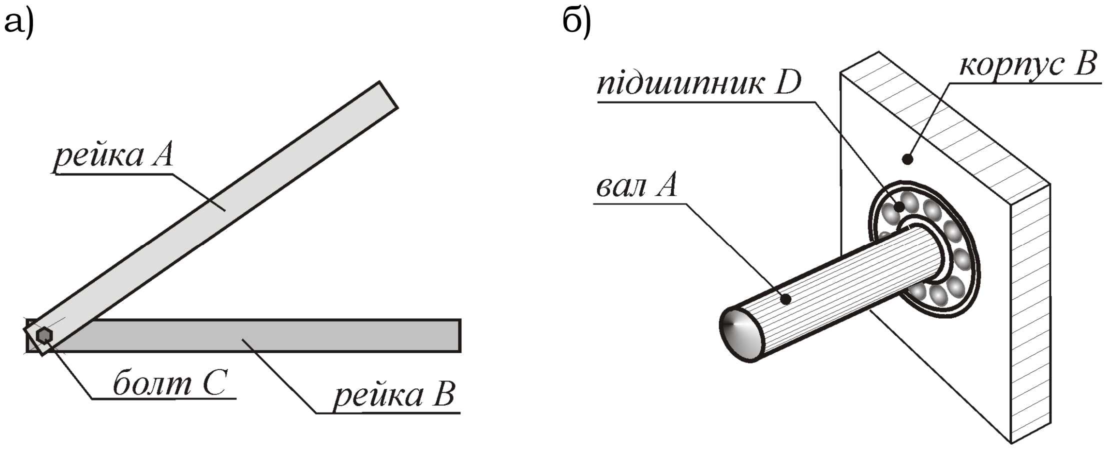


Рис. 2.18. Приклади циліндричних шарнірних з'єднань

У кривошипно-поршневому двигуні автомобіля, наприклад, «Запорожця» *палець* поршня A *обертається у втулці*, запресованій у тіло шатуна B (рис. 2.19); таке з'єднання поршня A і шатуна B також є прикладом циліндричного шарнірного з'єднання за допомогою пари «палець-втулка».

Також на рисунку 2.19 циліндричними шарнірами з'єднані й шатун B з корінним валом (так само як з'єднані між собою поршень із шатуном) і корінний вал із корпусом двигуна (як це зображено на рис. 2.18,б).

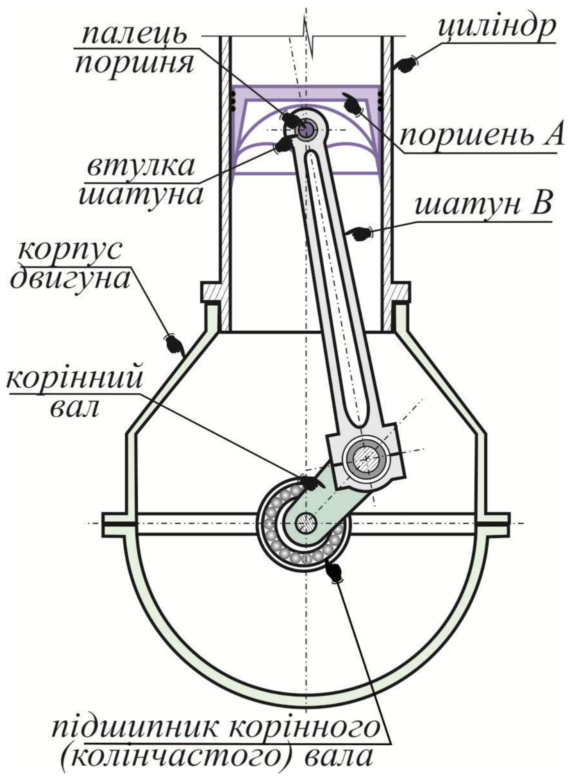


Рис. 2.19. Приклади шарнірних з'єднань

У різних галузях практичної діяльності людства крім циліндричних шарнірів використовують і ***сферичні шарніри***, поняття про які можна отримати з тих чи інших відповідних джерел (див., наприклад, [2], с. 102). Оскільки далі будемо розглядати тільки випадки циліндричних шарнірних з'єднань, то умовимося такі з'єднання позначати терміном ***шарнір*** без будь-яких уточнень.

У теоретичній механіці всі шарнірні з'єднання вважають ***ідеальними*** та ***точковими***.

Ідеальний шарнір – шарнірне з'єднання, тертям в якому нехтують.

Точковий шарнір – шарнір, розмірами якого нехтують.

На розрахункових схемах, кресленнях і рисунках шарнірне з'єднання (шарнір) зображують незафарбованим колом діаметром приблизно *2 мм* (див. рис. 2.20).

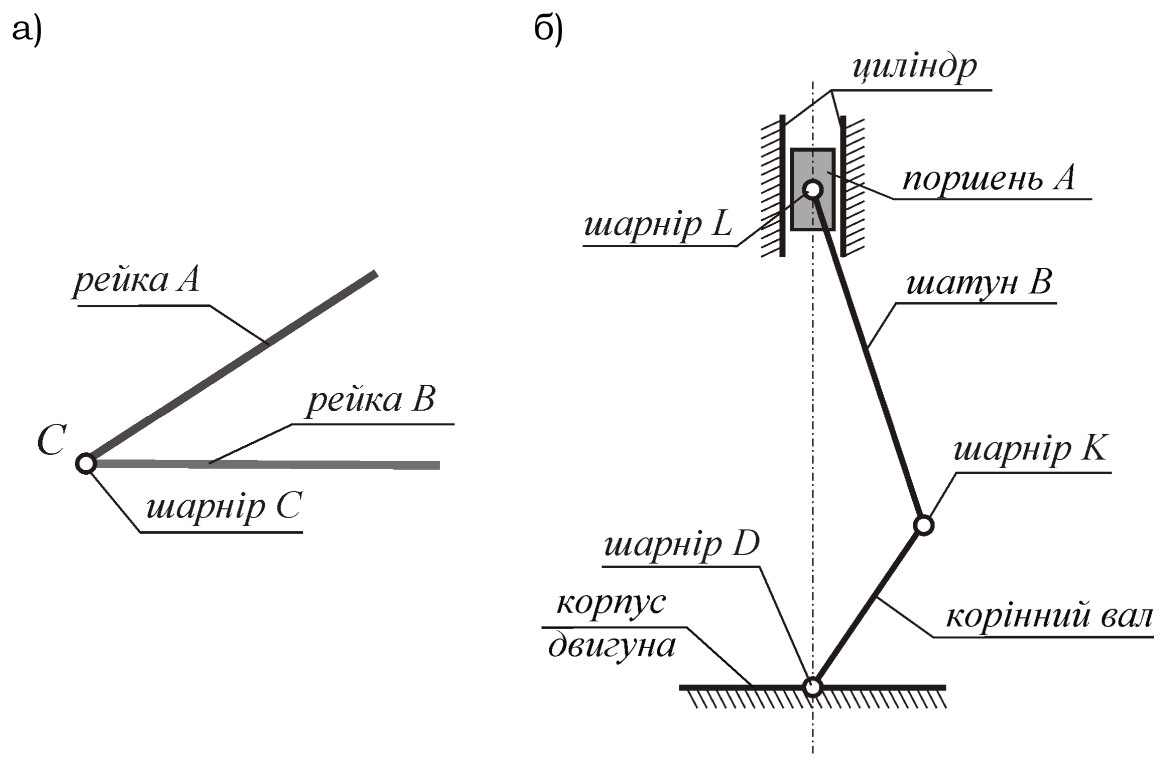


Рис. 2.20. Схематичні позначення шарнірних з'єднань

З наведених і розглянутих прикладів неважко зрозуміти, що залежно від функціонально-технологічного призначення шарніри можуть або певним чином рухатися (як шарніри K і L на рис. 2.19 та 2.20,б), або бути нерухомими (як шарніри D на рис. 2.18, 2.19 та 2.20,б); кінематичний стан шарніра C на рисунках 2.18,а та 2.20,а залежить від того, як закріплені рейки A та B (чи одна з них).

Зважаючи на визначення статики як науки про рівновагу (стан спокою) матеріальних тіл (див. §1.1), очевидно, що у ***статиці розглядають*** тільки ***нерухомі шарніри***.

Будь-яке матеріальне тіло, закріплене до *нерухомої* поверхні циліндричним шарніром, може як завгодно обертатися навколо його повздовжньої осі, що розташована перпендикулярно до площини рисунка, але та точка тіла, якою воно приєднане до самого шарніра, не може рухатися ні в якому напрямкові. Так, на рисунку 2.21 реакція $\vec{R}_D$ шарніра D прикладена до матеріального тіла в точці приєднання цього тіла до шарніра й довільно розташована в перпендикулярній до його осі площині Dxy. Тобто, для реакції $\vec{R}_D$ *невідомі* ні її *модуль* R_D, ні її *напрямок*, який визначають *невідомим кутом*, наприклад, φ.

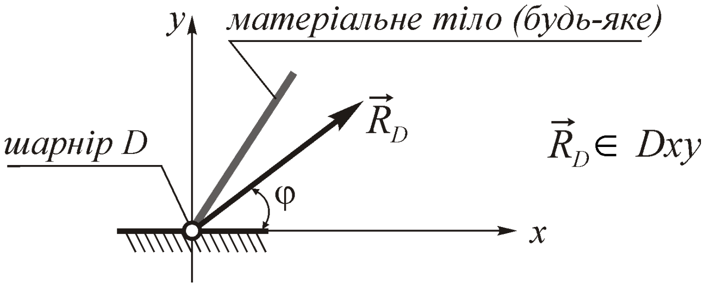


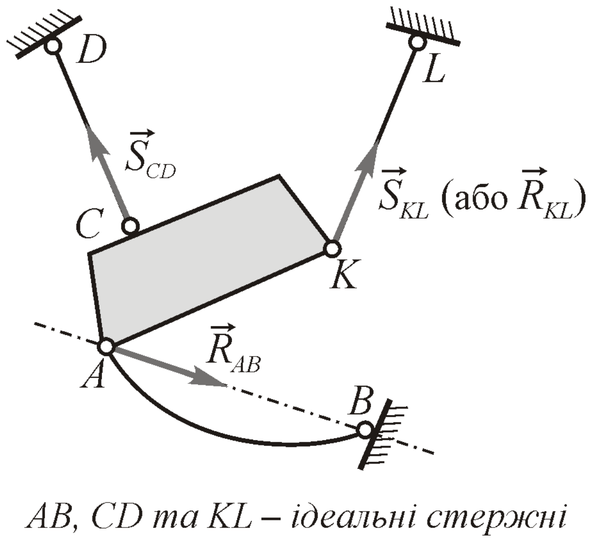
Рис. 2.21. Реакція нерухомого циліндричного шарніра

5. *Стержнева в'язь* (в'язь у вигляді ***ідеального стержня***)

ⓘ ***Ідеальний*** стержень – це тонкий невагомий абсолютно твердий стержень, що має на кінцях ідеальні точкові шарніри й будь-які сили до якого прикладені лише в його кінцевих шарнірах.

Реакція $\vec{S}$ (або $\vec{R}$) стержневої в'язі прикладена в точці з'єднання тіла та стержня, а її лінія дії проходить *через центри кінцевих шарнірів* (рис. 2.22); якщо стержень *прямолінійний* (див. на рис. 2.22 стержні CD і KL), то, звісно, реакція лежить на *повздовжній осі стержня*.

У певному розумінні стержнева в'язь є узагальненням гнучкої в'язі, але на



AB, CD та KL – ідеальні стержні

Рис. 2.22. Стержневі в'язі та їх реакції відміну від неї ідеальні стержні можуть чинити опір як *розтягувальній* зовнішній дії, так і *стискаючій*.

Розглянемо поняття про *внутрішні зусилля*, які виникають у *прямолінійних* стержнях.

🛈 Внутрішні сили взаємодії між матеріальними точками розглядуваного стержня (які в сукупності «утворюють» стержень як механічну систему), що виникають у тому чи іншому перерізі стержня, називають ***внутрішнім зусиллям*** стержня у цьому перерізі.

Застосуємо особливий метод – *метод перерізів*, який дає змогу визначати внутрішні зусилля через прикладені до тіла зовнішні сили і який є одним з можливих випадків застосувань принципу звільнення від в'язей.

Отже, нехай зображений на рисунку 2.23,а прямолінійний невагомий стержень AB перебуває у рівновазі під дією двох сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, які прикладені до його кінців. Згідно з аксіомою 1 рівновага можлива лише за умови, що ці сили рівні за величиною ($F_1 = F_2$), протилежні за напрямком і лежать на одній прямій, яка збігається з поздовжньою віссю стержня[11].

У думці переріжмо стержень розрізом у довільній його точці K на дві частини AK і KB. Тепер розглянемо, наприклад, частину KB як в'язь, що накладена на частину AK та застосуємо принцип звільнення від в'язей: відкинемо частину KB, а її дію замінимо відповідною реакцією (назвімо її поки що $\vec{R}_{KB}$), напрям котрої заздалегідь взагалі-то невідомий; ця реакція відносно частини AK є певною зовнішньою силою.

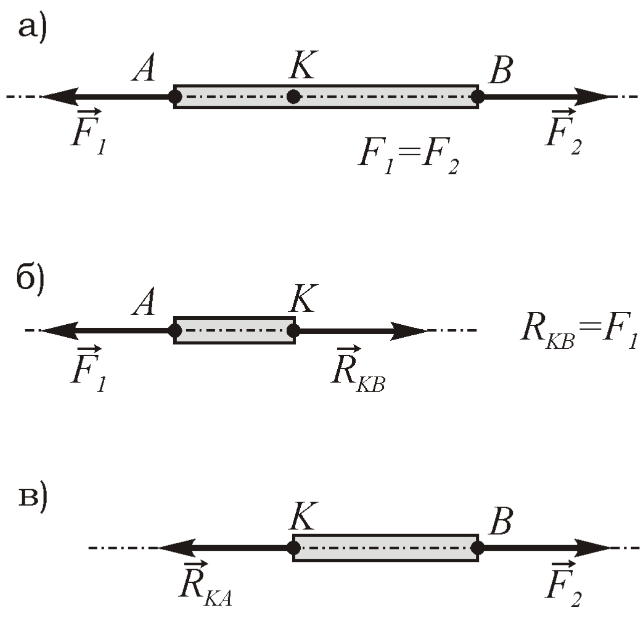


Рис. 2.23

---

[11] Необхідно твердо розуміти, що на рисунку 2.23,а сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, які для зображеного стержня AB є ***зовнішніми***, прагнуть цей стержень *розтягувати*.

Зрозуміло, що, оскільки за умовою розглядуваної ситуації стержень AB перебуває у рівновазі, то і частина AK також має бути у рівновазі, але вже під дією сил $\vec{F}_1$ та $\vec{R}_{KB}$. Тоді знову-таки згідно з аксіомою 1, сили $\vec{F}_1$ та $\vec{R}_{KB}$ повинні бути рівними за величиною, протилежними за напрямками та мати спільну лінію дії. Таким чином, реакція $\vec{R}_{KB}$ виявляється повністю визначеною (рис. 2.23,б)[12]. Очевидно, що знайдена реакція $\vec{R}_{KB}$ є мірою механічної взаємодії між частинами AK і KB й, отже, є ***внутрішньою силою***, що виникає в перерізі K стержня, яка й визначає *внутрішнє зусилля* стержня у цьому перерізі.

Зазвичай внутрішні зусилля, що виникають у стержнях, позначають літерами S (у разі потреби – з відповідними індексами). У силу довільності вибору точки K можна стверджувати, що знайдена реакція $\vec{R}_{KB}$ визначає зусилля *в будь-якому перерізі* стержня. Оскільки реакції стержнів та внутрішні зусилля в них за величиною (модулем) рівні, то для визначення зусилля в певному стержні достатньо знайти його реакцію (й навпаки). Через це реакції прямолінійних стержнів доцільно позначати $\vec{S}$ (а не $\vec{R}$) і, у разі потреби, відразу вести мову про зусилля в цих стержнях.

З'ясуємо тепер напрямки реакцій прямолінійного стержня для випадків, коли прикладені у точках A і B зовнішні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ прагнуть цей стержень розтягувати (рис. 2.24,а) та стискати (рис. 2.24,б). Звісно, в обох випадках *за аксіомою рівності дії та протидії* модулі S_1 і S_1' реакцій ***розтягнутого*** стержня та S_2 і S_2' реакцій ***стиснутого***[13] стержня є рівними модулям зовнішніх сил (тобто $S_1 = S_1' = F_1 = F_2$ і $S_2 = S_2' = F_1 = F_2$).

[12] Що буде, якщо розглядати рівновагу частини KB стержня (див. рис. 2.23,в) пропонується з'ясувати самостійно.

[13] Зауважимо, що оскільки в теоретичній механіці усі тіла розглядають як *абсолютно тверді*, то ні в якому разі *стержні* ***не можуть бути*** *ні* ***розтягнутими***, *ні* ***стиснутими***, адже такий стан передбачає зміну довжини стержнів. Тут і далі словосполучення «розтягнутий стержень» означає, що зазначений стержень сприймає розтягувальну зовнішню дію на нього (або ***працює на розтяг***), а «стиснутий стержень» – сприймає стискальну зовнішню дію (або ***працює на стиск***).

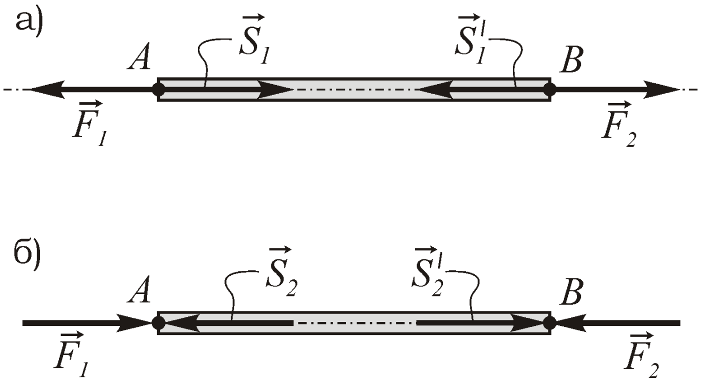


Рис. 2.24. Реакції розтягнутого та стиснутого стержнів

При цьому реакції S_1 і $S_1^{\prime}$ розтягнутого стержня *напрямлені по осі стержня від його кінців* до середини (рис. 2.24,а), а стиснутого – *по осі стержня* від середини *до його кінців* (рис. 2.24,б).

Визначення реакції будь-якого прямолінійного стержня починають з припущення, що стержень є ***розтягнутим***, зображуючи його реакцію напрямленою по осі стержня *від тіла*, рух якого цей стержень обмежує (див. на рис. 2.22 реакції $\vec{S}_{CD}$ і $\vec{S}_{KL}$). Якщо при розв'язувані виявиться, що реакцію стержня визначає *від'ємне* числове значення, то зазначений стержень у дійсності є ***стиснутим***.

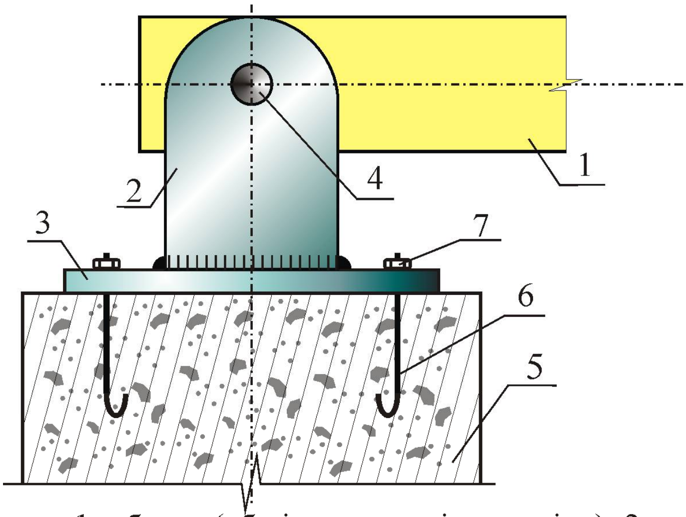
У будівельних спорудах, у механізмах і машинах (або їх частинах) дуже часто зустрічаються так звані *балкові*[14] *елементи*, які в основному застосовують для сприймання навантажень, що діють поперек до поздовжньої осі цих елементів. У балкових та інших конструкціях того чи іншого технологічного призначення використовують спеціальні опорні пристрої (в'язі), які називають ***балковими опорами***. Розглянемо три види таких в'язей.

6. *Шарнірно-нерухома опора* (один з можливих варіантів конструкції шарнірно-нерухомої опори наведено на рисунку 2.25).

Така опора дає можливість повороту балки 1 (чи іншого закріпленого матеріального тіла) навколо осі шарніра 4 опори,

[14] Назва походить від слова балка. ***Балка*** – це конструктивний несучий прямолінійний елемент (брус), розміри поперечного перерізу якого значно менші від його довжини й який, сприймаючи дію зовнішнього навантаження, передає результат цієї дії на опори. Найпоширенішим видом деформації балок є згин. Балка є основним конструктивним елементом в каркасному будівництві, будівництві мостів, кроквяної системи будівель і їх міжповерхових перекриттів. Залежно від числа опор і способу закріплення балки розподіляють на: однопролітні, багатопролітні, консольні, із затисненими кінцями, розрізні, нерозрізні тощо. За формою поперечного перерізу розрізняють балки прямокутні, таврові, двотаврові, коробчасті та ін. У сучасних спорудах використовують, як правило, сталеві, залізобетонні або дерев'яні балки.

але не дає змоги ніяких переміщень самого шарніра 4. Інколи таку опору називають *нерухомим шарніром*, оскільки за механічним змістом *шарнірно-нерухома опора нічим не відрізняється від* в'язі у вигляді *нерухомого циліндричного шарніра*.



1 – балка (або інше матеріальне тіло); 2 – металева вертикальна плита; 3 – металева горизонтальна плита; 4 – циліндричний вал (опорний шарнір); 5 – фундамент; 6 – анкерний болт; 7 – гайка

Рис. 2.25. Конструкція шарнірно-нерухомої опори (варіант)

Схематичні зображення шарнірно-нерухомих опор подано на рисунку 2.26. На рисунку 2.26,а та 2.26,б зображено застарілі позначення шарнірно-нерухомих опор, які ще зустрічаються у різних підручниках і посібниках. При використанні таких літературних джерел необхідно шарнірно-нерухомі опори зображувати так, як це наведено на рисунку 2.26,в, г, і д.

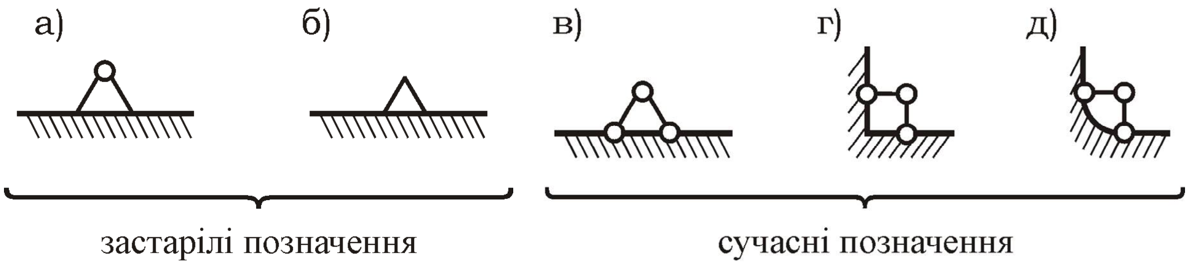


Рис. 2.26. Схематичні позначення шарнірно-нерухомих опор

Реакція $\vec{R}_A$ шарнірно-нерухомої опори A *прикладена* до тіла, рух якого вона обмежує, *в опорному* точковому *шарнірі*, а її *модуль* R_A і *лінія дії* (положення якої визначає, нехай, кут φ) – *невідомі* (рис. 2.27,а).

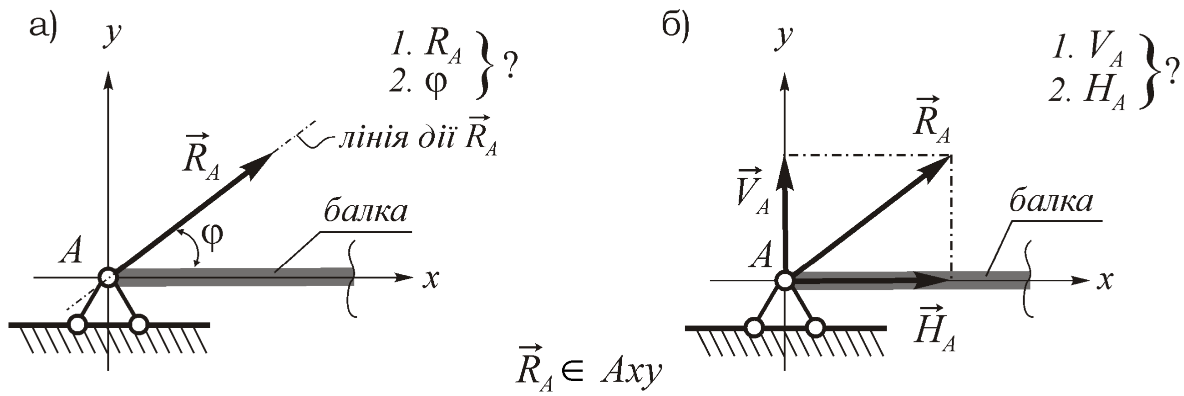
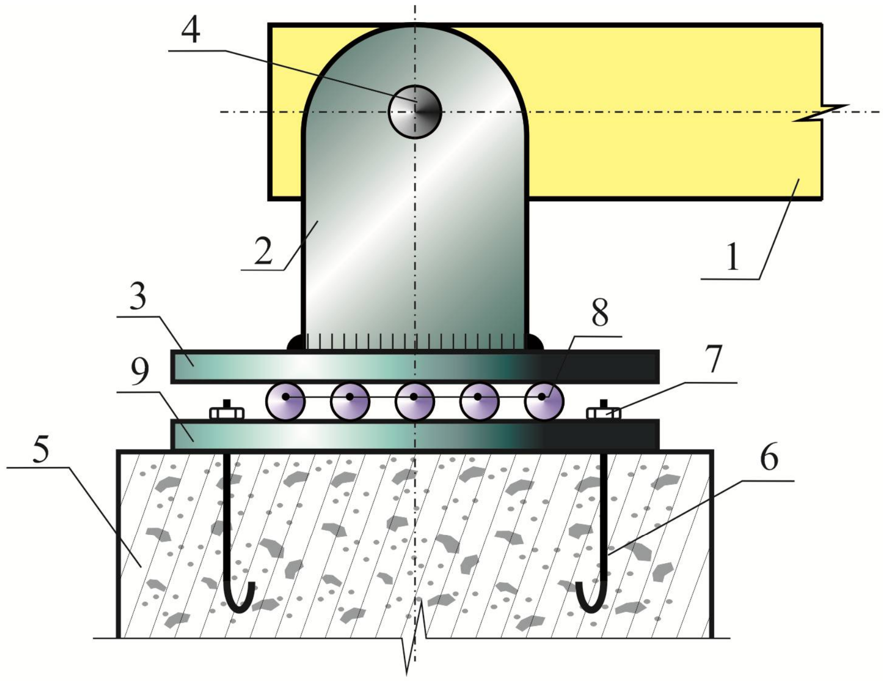


Рис. 2.27. Реакція шарнірно-нерухомої опори

В абсолютно переважній більшості інженерних задач реакцію $\vec{R}_A$ шарнірно-нерухомої опори розкладають на дві ортогональні складові: вертикальну $\vec{V}_A$ (або $\vec{Y}_A$) і горизонтальну $\vec{H}_A$ (або $\vec{X}_A$) (див. рис. 2.27,б). У такому разі невідомими також є *два параметри* – модулі V_A та H_A.

7. *Шарнірно-рухома опора* (один з можливих варіантів конструкції шарнірно-рухомої опори наведено на рисунку 2.28).



1- балка (матеріальне тіло); 2 - металева вертикальна плита; 3 - металева горизонтальна плита; 4 - циліндричний вал (опорний шарнір); 5 - фундамент; 6 - анкерний болт; 7 - гайка; 8 - котки; 9 - металева опорна плита.

Рис. 2.28. Конструкція шарнірно-рухомої опори (варіант)

Ця опора дає можливість повороту балки 1 навколо осі шарніра 4 та поступального руху рухомої частини опори (разом із шарніром 4) на деяку незначну віддаль. Зазначений рух є можливим за рахунок перекочування металевої горизонтальної плити 3 на котках 8 по опорній плиті 9 (у деяких випадках опорна плита 9 і, отже, вся шарнірно-рухома опора, розташовані під певним кутом до горизонталі).

Інша назва опори – ***рухомий шарнір***.

Схематичні зображення цих опор наведено на рисунку 2.29. При розв'язуванні задач, також як і у випадку шарнірно-нерухомих опор, необхідно зображувати схеми шарнірно-рухомих опор за сучасними вимогами.

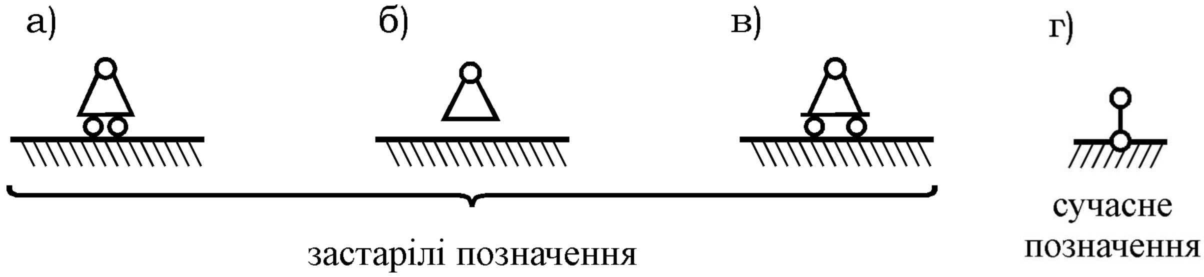


Рис. 2.29. Схематичні позначення шарнірно-рухомих опор

Реакція шарнірно-рухомої опори ***прикладена*** до тіла в опорному шарнірі, ***напрямлена по нормалі до опорної поверхні*** в якомусь (чи протилежному до нього) напрямкові, а *модуль* її *невідомий* (рис. 2.30).

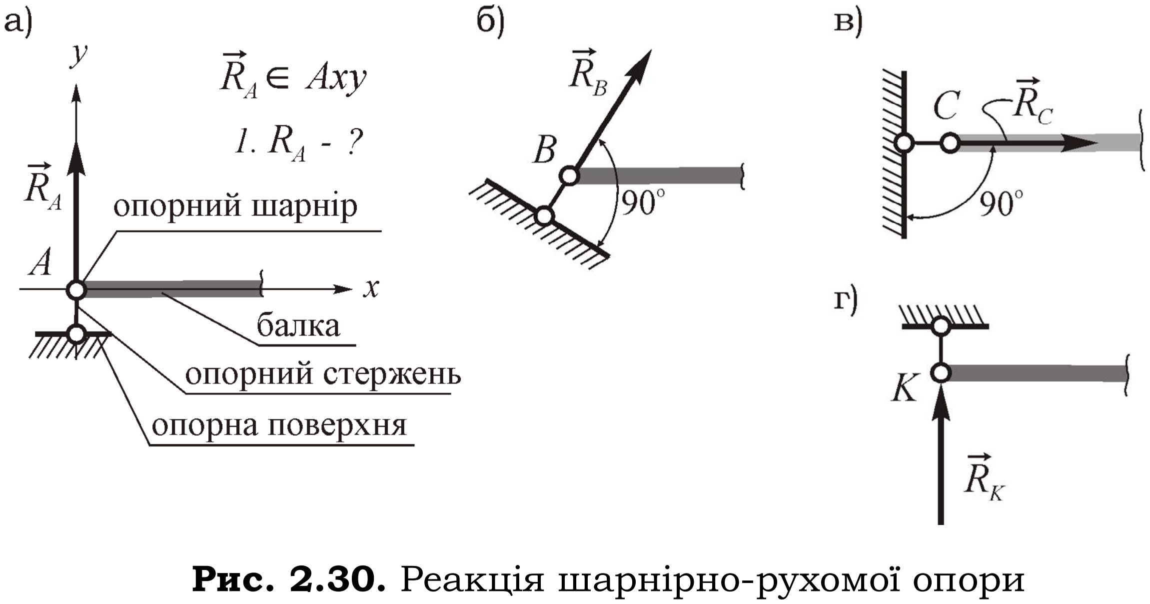


Рис. 2.30. Реакція шарнірно-рухомої опори

Оскільки *нормаль* завжди утворює прямий кут з *дотичною* до опорної поверхні, то лінія дії реакції будь-якої шарнірно-рухомої опори завжди ***проходить під прямим кутом до*** відповідної ***дотичної***; оскільки ж опорний стержень шарнірно-рухомої опори також завжди розташований під прямим кутом до зазначеної дотичної, то також можна говорити, що лінія дії реакції шарнірно-рухомої опори ***проходить по поздовжній осі*** відповідного ***опорного стержня*** самої опори.

Підпливши влітку на човні до опор мосту через річку Ворсклу поблизу Південного вокзалу м. Полтави, можна побачити приклади виконання та використання шарнірно-рухомих і шарнірно-нерухомих опор. Постає справедливе запитання: «Для чого в мостобудуванні[15] використовують обидва типи опор?» Для з'ясування відповіді розглянемо найпростішу конструкцію мосту, що складається з простої балки, яка своїми кінцями спирається на дві опори (рис. 2.31).

Шарнірно-нерухома опора мосту забезпечує загальну нерухомість мосту. Якщо інша опора – шарнірно-рухома, то при незначній зміні довжини балки, наприклад, від зміни температури чи при її згинанні від діючого зовнішнього навантаження, рухома частина цієї опори відповідно зміщується. Це зміщення настільки незначне, що користувачі мосту його ніяк не відчувають. Але це дає можливість уникати додаткових напружень у балці.

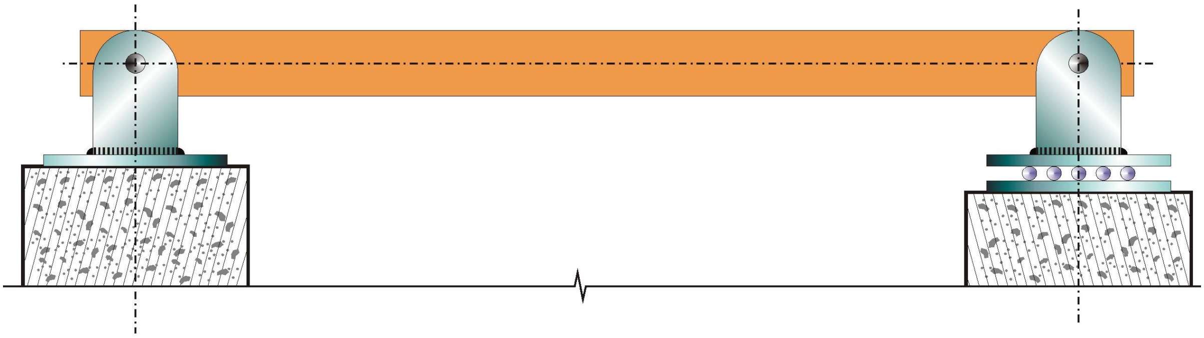


Рис. 2.31

Використання ж у такій ситуації двох шарнірно-нерухомих опор приводило б до виникнення великих напружень у балці або до деформації чи навіть руйнування її чи самих опор.

8. Абсолютно жорстке затиснення

На відміну від двох попередніх видів балкових опор для ознайомлення з абсолютно жорстким затисненням немає ніякої потреби нікуди плавати. Більше того, немає ніякого сумніву, що кожен із

[15] Причина застосування цих опор в усіх інших випадках і конструкціях аналогічна до розглядуваної в цьому питанні.

студентів уже знайомий з цією опорою, оскільки кожна людина хоч раз у житті виходила на балкон багатоповерхового будинку.

Закріплення балкона і є прикладом абсолютно жорсткого затиснення (рис. 2.32).

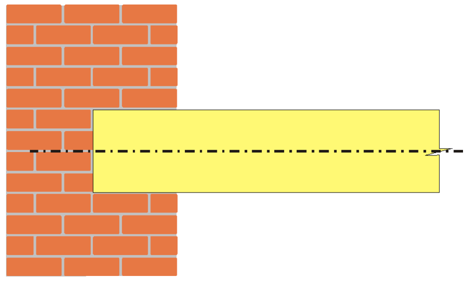


Рис. 2.32. Абсолютно жорстке затиснення (варіант)

Схематичне зображення абсолютно жорсткого затиснення подано на рисунку 2.33. Ця опора не дозволяє ніяких переміщень закріпленого тіла.

Інформацію про реакцію абсолютно жорсткого затиснення дивись далі в § 4.5 і на рисунку 4.10.

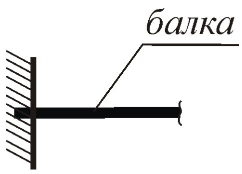


Рис. 2.33

§ 2.8. ПОНЯТТЯ ПРО ФЕРМИ. ВИМОГИ ДО РОЗРАХУНКОВОЇ СХЕМИ ПЛОСКОЇ ПРОСТОЇ ФЕРМИ[16]

ⓘ ***Ферма*** – це геометрично незмінна (жорстока) конструкція, що утворена (складається) зі стержнів, з'єднаних між собою своїми кінцями.

За виробничим призначенням існують:

- *будівельні* ферми (застосовують у різних будівельних спорудах, найчастіше для перекриття великих за розмірами в плані приміщень та облаштування дахів, звідси й інша назва – *кроквяні* ферми);
- *мостові* ферми (застосовують у конструкціях мостів);
- *кранові* ферми (є тими чи іншими елементами різноманітних підйомних пристроїв);
- *інші* ферми.

За матеріалом виготовлення ферми поділяють на: *дерев'яні, залізобетонні, металеві, полімерні.*

Для розрахунків у межах теоретичної механіки матеріал виготовлення ферми не має ніякого значення.

Якщо поздовжні осі всіх стержнів ферми лежать в одній площині, то таку ферму називають ***плоскою***; в іншому разі – ***просторовою***.

[16] Даний параграф не має безпосереднього відношення до положень розглядуваної теми; у ньому наведено загальноосвітні поняття про ферми, без яких неможливо розглядати питання наступного параграфа.

Місця з'єднання стержнів ферми називають ***вузлами ферми***. Вузли, якими ферма спирається на зовнішні опори, називають **опорними вузлами** (див. на рис 2.34 вузли A і B). Відстань по горизонталі між опорними вузлами (та довжину цієї відстані) називають **прольотом ферми**. Якщо певна частина ферми знаходиться ззовні від крайньої опори, то цю частину називають **консоллю ферми** (інколи так виявляється розташованою вся ферма, яка в такому разі є **консольною фермою**). Стержні, з яких складається верхній зовнішній контур ферми, утворюють **верхній пояс ферми** (або називають **верхнім поясом ферми** – див. на рис. 2.34 стержні $1 \div 6$); стержні нижнього зовнішнього контуру називають **нижнім поясом ферми** (див на рис 2.34 стержні $7 \div 13$). Вертикальні стержні ферми називають **стояками**, а похилі – **розкосами** (див. на рис 2.34 стержні $14 \div 18$ та $19 \div 27$ відповідно). Всі стержні ферми утворюють **решітку** (або **ґрати**) ферми.

За виглядом зовнішнього контуру плоскої ферми їх розподіляють на:

- трикутні;
- з паралельними поясами;
- сегментні з ламаним верхнім поясом;
- сегментні з криволінійним верхнім поясом;
- полігональні;
- інші.

Існують й інші ознаки, за якими ферми можуть бути класифіковані тим чи іншим чином, що розглядають у наступних після теоретичної механіки вузькоспеціалізованих інженерних науках.

ⓘ ***Простою*** називають таку ***ферму***, яка складається з *мінімально необхідної* для утворення геометрично незмінної (жорсткої) конструкції *кількості прямолінійних стержнів*.

Про просту ферму говорять, що вона *не має зайвих стержнів*.

Основна задача ***розрахунку ферм*** полягає у ***визначенні*** *внутрішніх сил* ***(зусиль)***, що виникають у стержнях ферми внаслідок дії на неї активних зовнішніх сил.

При проведенні розрахунків, пов'язаних зі знаходженням внутрішніх зусиль у стержнях, розглядають не реальну ферму, а її *графічну модель*, яку називають ***розрахунковою схемою ферми***. В статиці розрахункові схеми ферм утворюють і зображують на основі певних *вимог*, які за суттю є *припущеннями*, що дають змогу спростити задачу розрахунку ферм, але не приводять до суттєвого спотворення отримуваних результатів.

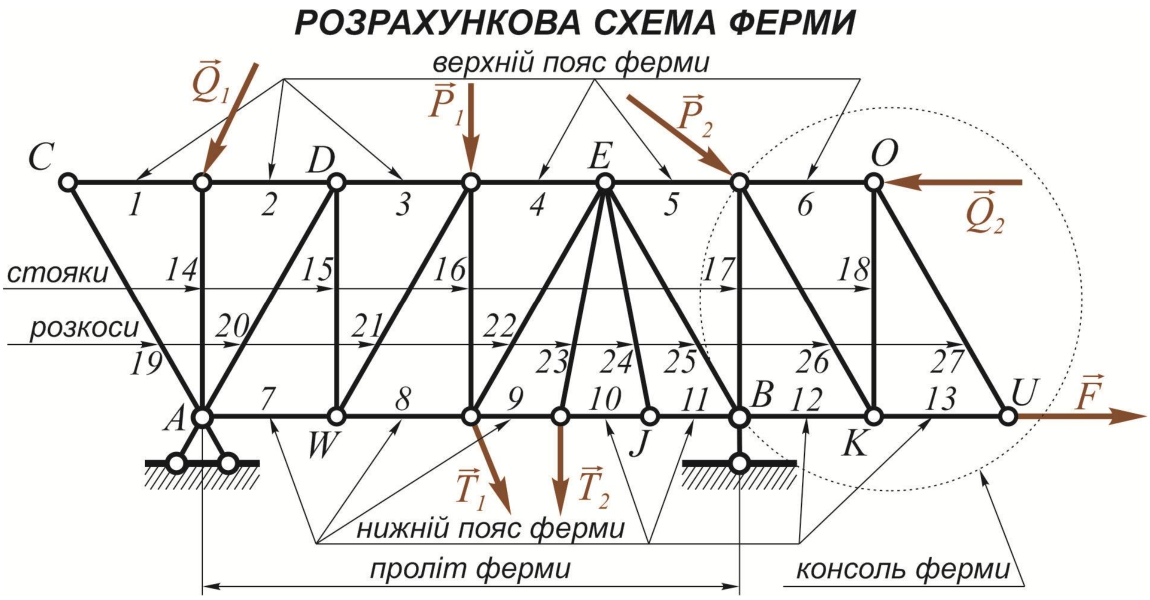


Рис. 2.34. Розрахункова схема ферми й елементи ферми

Вимоги до розрахункової схеми плоскої простої ферми:

1. Вузли ферми розглядають як *ідеальні точкові шарніри*.

2. Осі всіх стержнів ферми розташовані в одній площині, яка називається *середньою площиною ферми*.

3. Усі діючи на ферму сили *прикладені тільки в її вузлах*, а лінії дій усіх сил розташовані в середній площині ферми.

При виконанні останньої вимоги на обидва кінці будь-якого стержня ферми діють тільки *збіжні системи сил*, кожна з яких зводиться до однієї сили, через що можна вважати, що кожний стержень перебуває у рівновазі під дією тільки двох сил, прикладених до обох його кінців. Але за першою аксіомою статики ці дві сили повинні мати однаковий модуль, протилежний напрямок та спільну лінію дії, яка не може проходити інакше, ніж по осі розглядуваного стержня; за такого припущення всі стержні ферми *працюють* тільки на розтяг або стиск (але ніяк не на згин або інші деформації).

4. Усі стержні ферми вважають *ідеальними.*

Тобто кожний стержень розглядають як *невагомий* і *абсолютно твердий*; у разі необхідності врахування ваги стержнів, вага кожного розподіляється між кінцевими шарнірами стержня.

5. Ферма складається із ряду послідовно з'єднаних *трикутників*, сторонами яких є стержні з вузлами у вершинах.

За такого з'єднання стержні й утворюють жорстку конструкцію.

Викладені вимоги (особливо 1, 3 і 4) *не відповідають дійсності*; наприклад, у реальних фермах стержні у вузлах найчастіше з'єднують жорстко: зварюють, з'єднують заклепками та ін. Але дотримання цих вимог-припущень дає можливість просто й швидко отримувати результати, які в абсолютно переважній більшості практичних випадків є задовільними для розрахунків ферм.

З'ясуємо зв'язок між *кількістю вузлів* і мінімально необхідною для утворення плоскої простої ферми *кількістю стержнів*. Міркуємо так:

- ***елементарна ферма***, яка є основою для створення плоскої простої ферми, містить *три вузли*, що з'єднані *трьома стержнями* (див. рис. 2.35,а, де вузли I, II і III з'єднані стержнями 1, 2 і 3, через які завжди можна провести певну площину);
- для приєднання до елементарної ферми *кожного наступного вузла* потрібно *два стержні*, що знаходяться у зазначеній площині та не лежать на одній прямій (див. рис. 2.35,б).

Тоді для плоскої ферми, яка має B вузлів, мінімальну кількість C стержнів, необхідних для утворення простої ферми, буде визначати залежність

$$C = 3 + (B - 3) \cdot 2 = 3 + 2 \cdot B - 6\,,$$

або

$$C = 2 \cdot B - 3\,. \qquad \textbf{(2.16)}$$

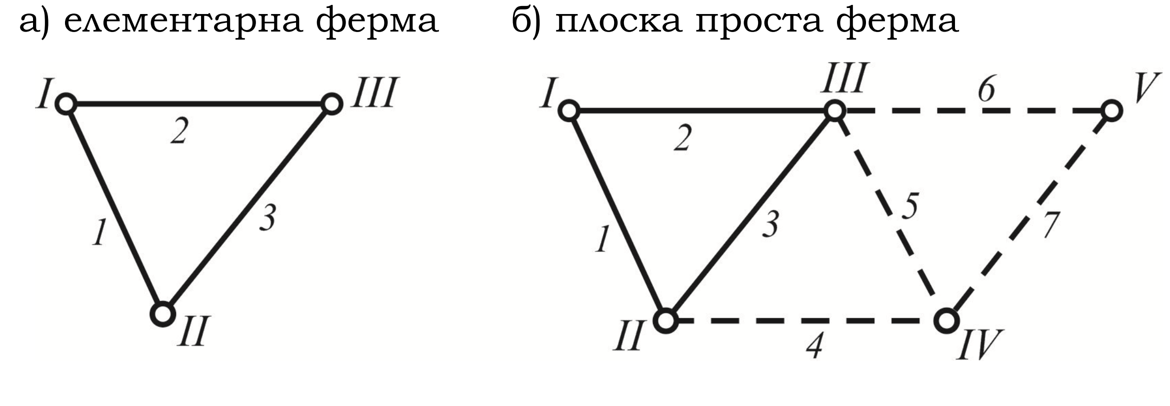


Рис. 2.35

При виконанні умови (2.16) плоска ферма є ***простою*** та ***статично визначуваною*** (тобто може бути розрахована методами статики).

Для плоскої ферми на рисунку 2.34 кількість стержнів $C = 27$, а кількість вузлів $B = 15$, тоді $2 \cdot B - 3 = 2 \cdot 15 - 3 = 27$; оскільки рівність (2.16) виконується, то зображена ферма є плоскою простою.

Якщо для певної ферми

$$C > 2 \cdot B - 3,$$

то це свідчить, що зазначена ***ферма*** містить зайві для утворення плоскої простої ферми стержні та ***є статично невизначуваною.***

Наприклад, для зображеної на рисунку 2.36 плоскої ферми кількість стержнів $C = 17$, кількість вузлів $B = 9$; оскільки

$$C = 17 > 2 \cdot B - 3 = 15,$$

то ферма не належить до простих, має два «зайвих» стержні й, отже, є статично невизначуваною.

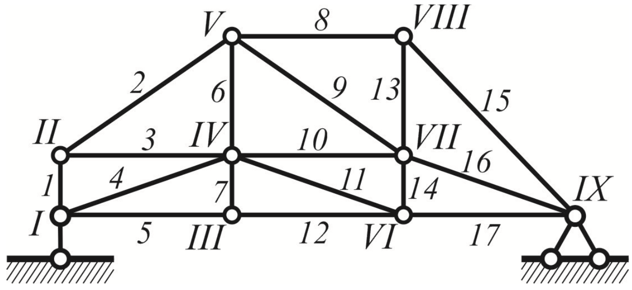


Рис. 2.36

Якщо

$$C < 2 \cdot B - 3,$$

то кількість стержнів недостатня для створення плоскої простої ферми; така шарнірно-стержнева конструкція є геометрично змінною, тобто певним ***механізмом***.

§ 2.9. РОЗРАХУНОК ФЕРМ СПОСОБОМ ВИРІЗАННЯ ВУЗЛІВ

Простий та надійний *спосіб вирізання вузлів*, що базується на поняттях про *рівновагу збіжної системи сил*, застосовують, як правило, при розрахунках ферм у тому разі, коли необхідно визначити зусилля в усіх стержнях ферми. Суть, логіка, вимоги та ***алгоритм*** цього способу полягає в такому:

1. Якщо необхідно, то визначають опорні реакції в'язей, котрі обмежують рух усієї ферми в цілому (так звані *зовнішні* опорні реакції).

При цьому ферму розглядають як абсолютно тверде матеріальне тіло, що перебуває у рівновазі під дією прикладених до неї активних і реактивних сил, котрі утворюють *певну систему сил*; зрозуміло, що від виду цієї системи сил у кожному розглядуваному випадкові залежать умови та рівняння рівноваги ферми.

Попереднє визначення зовнішніх опорних реакцій не є обов'язковою дією, але, як правило, це суттєво спрощує процес безпосереднього визначення зусиль у стержнях ферми.

Інколи зовнішньою в'яззю для розглядуваної ферми є стержнева в'язь або навіть декілька стержневих в'язей; у такому разі необхідно чітко визначити, які стержні входять до складу самої ферми, а які стержні є зовнішніми в'язями; для плоскої простої ферми це можна зробити, враховуючи вимогу **5** до розрахункової схеми такої ферми або використовуючи умову (2.16).

2. Оскільки вся ферма перебуває у рівновазі, то, певна річ, і кожний її вузол також перебуває у рівновазі.

3. Для кожного окремого вузла ферми в'язями, які безпосередньо обмежують його рух, є стержні, що перетинаються (сходяться) в цьому вузлі (так звані *внутрішні* в'язі).

Наприклад, на рисунку 2.34 для вузла D ферми його внутрішніми в'язями є стержні 2, 3, 15 і 20.

4. Застосовуючи аксіому №5, вузли ферми *послідовно* звільняють від внутрішніх в'язей (***вирізають***) і розглядають рівновагу кожного вузла ферми окремо під дією: а) ***зовнішніх сил***, що прикладені до *вирізаного* вузла (до зовнішніх сил відносяться як задані активні сили, так і зовнішні опорні реакції); б) ***реакцій стержнів***, які перетинаються в цьому вузлі.

На рисунку 2.34 для вузла U ферми зовнішньою силою є активна сила $\vec{F}$, а для вузла B – зовнішня опорна реакція $\vec{R}_B$.

5. При *аналітичному* розв'язуванні задачі визначення *дійсних зусиль* у стержнях ферми починають з припущення, що всі стержні є ***розтягнутими***[17], через що на розрахунковій схемі кожного вузла реакції стержнів зображують напрямленими вздовж їх осей *від* розглядуваного *вузла* (див. рис. 2.37, де подано розрахункові схеми вузлів O та K ферми з рис. 2.34); якщо внаслідок розв'язання виявиться, що реакцію певного стержня визначає *від'ємне* числове значення, то зазначений стержень у дійсності є ***стиснутим***; отриманий знак мінус ураховують в усіх подальших обчисленнях.

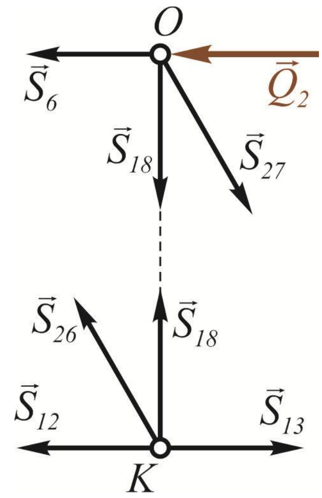


Рис. 2.37

При розрахунках ферм реакція будь-якого стержня фігурує двічі, оскільки кожний стержень обмежує рух двох вузлів, розташованих на його кінцях. Необхідно розуміти й ураховувати, що реакції певного стержня на зазначені вузли завжди рівні за величиною та протилежні за напрямом (див. на рисунку 2.37 реакцію

[17] Див. виноску 13 на с. 59.

$\vec{S}_{18}$ 18-ого стержня на вузли O і K). Досить часто реакцію 18-ого стержня на вузол O позначають, наприклад, $\vec{S}'_{18}$, а на вузол K – $\vec{S}''_{18}$, указуючи, що $\vec{S}'_{18} = -\vec{S}''_{18}$ та $S'_{18} = S''_{18}$.

6. Оскільки всі вузли ферми розглядають як *точкові* шарніри, то до кожного вузла виявляється прикладеною ***збіжна система сил***.

7. Вибирають систему координат, *записують умови* та *складають* відповідні *рівняння рівноваги* збіжної системи сил, що діє на певний вирізаний вузол.

Інколи раціональний вибір напрямку координатних осей дає змогу спростити рівняння рівноваги та процес їх подальшого розв'язування; у разі потреби осі варто напрямляти так, щоб одна з них проходила б паралельно до певної шуканої реакції стержня; тоді зазначена реакція буде проектуватися на так проведену вісь у дійсну (натуральну) величину, а на іншу вісь (чи інші осі) проектуватися не буде.

Якщо координатні осі напрямлені «традиційно»: вісь x – горизонтально праворуч, а вісь y – вертикально вгору, то такі осі можна і не зображувати, уявляючи їх у думці; якщо ж з певних доречних міркувань для якогось вирізаного вузла напрямки координатних осей вибрані іншими, то їх необхідно показувати на розрахунковій схемі цього вузла.

Знову звернемо увагу на слова *записують* і *складають*: умови рівноваги ***записують***, адже їх зовнішній вигляд є незмінним для кожного вирізаного вузла; рівняння ж рівноваги ***складають*** та їх вигляд залежить від діючих на вирізаний вузол сил (див. також у § 2.5 відповідне зауваження на с. 49).

8. Тому що рівновагу тіла під дією плоскої збіжної системи сил визначають два рівняння, а під дією просторової збіжної системи сил – три (див. § 2.5, умови (2.15) та (2.14) відповідно), то ***послідовність*** вирізання (обходу) вузлів для *плоских* ферм має бути такою, щоб для кожного вирізуваного вузла кількість стержнів, реакції яких ще невідомі, не перевищувала *двох*, а для *просторових* ферм – *трьох*.

Дотримання останньої умови забезпечує те, що реакції стержнів, які на момент вирізання певного вузла ферми є невідомими, знаходять безпосередньо із рівнянь рівноваги вирізаного вузла.

9. Реакції стержнів на розрахункових схемах вузлів позначають символами $\vec{S}_i$, де i – номер відповідного стержня (див. рис. 2.37), й, знайшовши реакцію певного стержня, усвідомлюють, що вона й визначає внутрішнє зусилля в цьому стержні (див. також § 2.7, в'язь за № 5, рис. 2.23 і 2.24 та відповідні міркування на с. 58 ÷ 60).

З наведеного алгоритму неважко усвідомити, що аналітичний розрахунок будь-якої *плоскої* ферми способом вирізання вузлів забезпечує можливість для кожного вузла скласти *2* (два) рівняння рівноваги; тоді для *плоскої простої* ферми, яка містить B вузлів, усього можна скласти $2B$ рівнянь рівноваги. Оскільки ж кількість стержнів такої ферми визначає залежність (2.16) $C = 2 \cdot B - 3$, то з усіх складених рівнянь *три* з них є «*зайвими*». Ці «зайві» рівняння вживають або *для **загальної перевірки** розрахунків*, або для знаходження зовнішніх опорних реакцій ферми (у разі, коли ці реакції не визначені попередньо).

При розрахунках *плоских* простих ферм вирізанням вузлів можна застосовувати ***графічний спосіб розв'язування***, будуючи для кожної плоскої збіжної системи сил, прикладеної до розглядуваного вузла, многокутник сил, який згідно з графічною умовою рівноваги (див. § 2.5, рис. 2.12 та відповідні міркування) має бути замкненим; збудовані силові многокутники відразу будуть ***визначати дійсні напрямки*** реакцій усіх стержнів.

Графічний спосіб розв'язування, як самостійний варіант розрахунку ферми, досить суттєво ускладнюється, коли загальна кількість сил, які діють на вирізаний вузол, більше від трьох, а таких випадків – абсолютна більшість.

Побудовою силових многокутників, пересвідчуючись у їх замкненості, можна *перевіряти* правильність аналітичного розрахунку *кожного вузла* ферми.

Зусилля в окремих стержнях ферми, завантаженої зовнішніми силами, можуть бути рівними нулю; такі стержні називають ***нульовими***.

Розглянемо ***леми***, які дають змогу визначати нульові стержні плоскої ферми, не виконуючи ніяких розрахунків, увівши спочатку поняття *незавантаженого* вузла.

ⓘ ***Незавантажений*** вузол ферми – *вузол*, до якого не прикладені ніякі зовнішні сили.

Наприклад, на рисунку 2.34 незавантаженими є вузли C, D, E, W, J та K; усі інші вузли ферми – завантажені.

ⓘ ***Лема 1***. Якщо у незавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться два стержні, то обидва стержні є нульовими.

Розглянемо рисунок 2.38,а, де наведена розрахункова схема вирізаного вузла C плоскої ферми, зображеної на рисунку 2.34. На цей вузол, що перебуває у рівновазі, діють тільки дві сили $\vec{S}_1$ та $\vec{S}_{19}$, які є реакціями відповідних стержнів. Як відомо (див. § 1.3, аксіому 1), дві сили утворюють зрівноважену систему сил *тоді й лише тоді*, коли вони рівні за величиною, протилежні за напрямком і *мають спільну лінію дії*. Оскільки ж $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_{19}$ не лежать на одній прямій, то рівновага вузла C можлива лише за умови, що $S_1 = 0$ і $S_{19} = 0$, про що й говорить ***лема 1***.

Величина кута φ при цьому не має ніякого значення, він може мати будь-яке значення в межах від 0 до $180°$ ($0 < \varphi < 180°$).

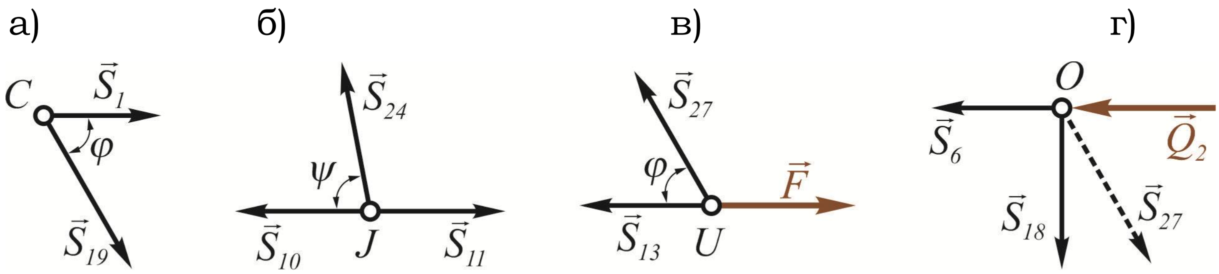


Рис. 2.38. Розрахункові схеми вузлів C, J, U та O

ⓘ ***Лема 2***. Якщо у незавантажному вузлі плоскої ферми сходяться три стержні, два з яких лежать на одній прямій, а третій примикає під будь-яким кутом, то третій стержень є нульовим, а зусилля у перших двох рівні між собою.

Розглянемо на рисунку 2.38,б розрахункову схему вузла J плоскої ферми, зображеної на рисунку 2.34; напрямляючи координатні осі «традиційно», запишімо умови та складімо рівняння рівноваги цього вузла:

$$\begin{array}{r|l} \sum X = 0 & -S_{10} - S_{24} \cdot cos\psi + S_{11} = 0; \\ \sum Y = 0 & S_{24} \cdot sin\psi = 0. \end{array}$$

Звідки $S_{24} = 0$, а $S_{10} = S_{11}$, що і визначає ***лема 2***.

ⓘ ***Лема 3***. Якщо у завантаженому вузлі плоскої ферми сходяться два стержні й до вузла прикладена будь-яка зовнішня сила, лінія дії якої збігається з віссю одного зі стержнів, то зусилля в цьому стержні за модулем дорівнює модулю прикладеної сили, а інший стержень є нульовим.

Розглянемо на рисунку 2.38,в розрахункову схему вузла U плоскої ферми, зображеної на рисунку 2.34; напрямляючи координатні осі «традиційно», запишімо умови та складімо рівняння рівноваги цього вузла:

$$\begin{array}{r|l} \sum X = 0 & -S_{13} - S_{27} \cdot cos\varphi + F = 0\,; \\ \sum Y = 0 & S_{27} \cdot cos(90^\circ - \varphi) = 0\,. \end{array}$$

Звідки $S_{27} = 0$ та $S_{13} = F$, що і визначає ***лема 3***.

Застосовуючи на практиці ***лему 3***, важливо чітко усвідомлювати та враховувати *характер дії* зовнішньої сили на той стержень, вісь якого збігається з лінією дії зазначеної сили. В одних випадках зовнішня сила буде прагнути *розтягувати* відповідний стержень і тоді зусилля в цьому стержні дорівнюватиме модулю прикладеної сили з *доданім* знаком (див. рис. 2.38,в). В іншому разі зовнішня сила буде *стискати* відповідний стержень; тоді зусилля в цьому стержні дорівнюватиме модулю прикладеної сили, але з *від'ємним* знаком (див. викладені у наступному абзаці пояснення-міркування та рис. 2.38,г).

Оскільки *механічна дія кожного нульового стержня на вузли відсутня*, то умовно можна вважати, що відсутні й самі нульові стержні (тобто у думці такі стержні можна відкидати від ферми, що ніяк не позначиться на характері та значенні зусиль у всіх інших стержнях). Тоді для зображеної на рисунку 2.34 плоскої ферми її вузол O, розрахункова схема якого наведена на рисунку 2.38,г, також може бути розрахований за ***лемою 3***: якщо у думці відкинути 27-ий стержень як нульовий, то $S_{18} = 0$, а $S_6 = -Q_2$ (знак *мінус* обрано через те, що прикладена до вузла O сила $\vec{Q}_2$ прагне *стискати* 6-ий стержень).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТА ЕКСПРЕС-ТЕСТУВАННЯ Ст-2

(ЗБІЖНА СИСТЕМА СИЛ – тема 2, §§ 2.1÷2.6)

1. Що таке система сил? (4)
2. Які системи сил є еквівалентними? (4)
3. Як називають дві певні системи сил, під дією яких (кожної окремо) матеріальне тіло перебуває в однаковому кінематичному стані? (2)
4. Чи може бути еквівалентною деякій системі сил одна-єдина сила? (1)
5. Що таке рівнодійна сила? (4)
6. Як називають силу, що еквівалентна певній системі сил? (3)
7. Сформулюйте аксіому №3. (5)
8. За яким правилом визначають рівнодійну двох сил, що прикладені до певного тіла в одній точці? (1)
9. Як розподіляють системи сил з геометричної точки зору? (4)
10. Яка система сил є просторовою збіжною? (3)
11. Яка система сил є плоскою збіжною? (3)
12. У чому полягає перша основна задача статики? (4)
13. Сила є величиною векторною чи скалярною? (2)
14. Скількома параметрами характеризується сила? (2)
15. Яка система сил є зрівноваженою? (4)
16. Чи може бути просторова збіжна система сил зрівноваженою? (1)
17. У чому полягає друга основна задача статики? (4)
18. Сформулюйте аксіому №2. (5)
19. Сформулюйте наслідок з аксіоми №2. (3)
20. Сформулюйте висновок з аксіоми №2. (3)
21. Сформулюйте аксіому №1. (5)
22. Що утворюють дві сили, які рівні за величиною, протилежні за напрямком, мають спільну лінію дії та прикладені до одного тіла? (2)
23. Коли дві сили утворюють зрівноважену систему сил? (3) [1]
24. Що таке паралелограм сил? (6)
25. Навести формулу, яка у векторній формі визначає рівнодійну сил $\vec{F}$ і $\vec{P}$, що прикладені до твердого тіла в одній точці. (9)
26. Що визначає формула $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, де $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ – сили, які прикладені до твердого тіла в одній точці? (6)
27. Що таке силовий трикутник? (7)

---

[1] Перші 23 наведені питання, які є в білетах для експрес-тестування Ст-2, відносяться до попередньої теми і використовувалися в білетах для експрес-тестування Ст-1.

28. Якщо $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ – сили, прикладені до твердого тіла в одній точці, а $\vec{R}$ – рівнодійна цих сил, то як розташовані всі згадані тут сили в силовому трикутнику, котрий визначає рівнодійну сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$? (7)
29. За якою математичною теоремою в загальному випадкові визначають модуль R рівнодійної двох сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що прикладені до твердого тіла в одній точці (навести тільки назву теореми)? (5)
30. Навести формулу, за якою в загальному випадкові аналітично визначають модуль R рівнодійної двох сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що прикладені до твердого тіла в одній точці. (9)
31. Що визначає формула $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\varphi}$, де F_1 і F_2 – модулі сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, які прикладені до твердого тіла в одній точці, а α – кут між напрямками векторів $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$? (6)
32. У якому випадкові модуль рівнодійної двох сил, що прикладені до певного твердого тіла в одній точці, дорівнює арифметичній сумі модулів цих сил? (7)
33. У якому випадкові модуль рівнодійної двох сил, що прикладені до певного твердого тіла в одній точці, визначає теорема Піфагора? (7)
34. У якому випадкові модуль рівнодійної двох сил, що прикладені до певного твердого тіла в одній точці, дорівнює арифметичній різниці модулів цих сил? (7)
35. Як називають дію, зворотну до визначення рівнодійної двох сил, які прикладені до твердого тіла в одній точці? (8)
36. На які характерні складові найчастіше розкладають силу? (7)
37. У якому випадкові при розкладанні певної сили $\vec{P}$ на дві її складові $\vec{P}'$ і $\vec{P}''$ обидві складові є більшими за величиною, ніж сама сила? (відповідь подати у вигляді відповідної схеми) (8)
38. У якому випадкові при розкладанні певної сили $\vec{Q}$ на дві її складові $\vec{Q}'$ і $\vec{Q}''$ обидві складові є меншими за величиною, ніж сама сила? (відповідь подати у вигляді відповідної схеми) (8)

39. До якого найпростішого (канонічного) вигляду зводиться будь-яка збіжна система сил? (8)
40. Чому еквівалентна за дією будь-яка збіжна система сил? (8)
41. Де прикладена рівнодійна розглядуваної збіжної системи сил? (8)
42. Навести формулу, яка визначає рівнодійну будь-якої збіжної системи сил у векторній формі. (9)
43. Що визначає формула $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, де $\{\vec{F}_i\}$ $(i = 1,2,...,n)$ – збіжна система сил? (6)
44. Що у формулі $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, яка визначає рівнодійну збіжної системи сил $\{\vec{F}_i\}$, позначено символом n? (5)
45. Де найбільш широко застосовують векторну форму запису (визначення) рівнодійної збіжної системи сил? (5)
46. Як графічно визначають рівнодійну збіжної системи сил? (9)
47. Якщо $\{\vec{F}_i\}$ $(i = 1,2,...,n)$ – збіжна система сил, а $\vec{R}$ – рівнодійна цієї системи сил, то як розташовані всі згадані тут сили у відповідному силовому многокутникові, що визначає рівнодійну $\vec{R}$? (7)
48. Якщо $\{\vec{F}_i\}$ $(i = 1,2,...,8)$ – збіжна система сил, а $\vec{R}$ – рівнодійна цієї системи сил, то скільки сторін має відповідний силовий многокутник, що визначає рівнодійну $\vec{R}$? (7)
49. Якщо $\vec{Q}$ – певна сила, то що в формулі $\vec{Q} = \vec{i} \cdot Q_x + \vec{j} \cdot Q_y + \vec{k} \cdot Q_z$ визначають Q_x, Q_y і Q_z? (8)
50. Якщо $\vec{Q}$ – певна сила, то що в формулі $\vec{Q} = \vec{i} \cdot Q_x + \vec{j} \cdot Q_y + \vec{k} \cdot Q_z$ позначено символами i, j та k? (8)
51. Що таке проекція сили на вісь? (9)
52. Що визначає проекцію сили на вісь? (9)
53. Що визначає скалярний добуток $\vec{G} \cdot \vec{k}$, де $\vec{G}$ – певна сила, а $\vec{k}$ – орт осі z? (6)
54. Чому дорівнює проекція сили на вісь? (9)
55. Коли проекція сили на певну вісь за величиною є меншою за модуль самої сили? (7)

56. Коли проекція сили на певну вісь за величиною дорівнює модулю самої сили? (6)
57. Коли сила проектується на певну вісь у натуральну величину?
58. Коли проекція сили на певну вісь за величиною є більшою за модуль самої сили? (5)
59. Коли проекція сили на певну вісь дорівнює нулеві? (6)
60. Коли сила не проектується на певну вісь? (6)
61. Коли проекція сили на вісь є додатною величиною? (5)
62. Коли проекція сили на вісь є від'ємною величиною? (5)
63. Яка різниця між поняттями проекцій певної сили на ортогональні координатні осі та складових цієї сили вздовж тих самих осей? (10)
64. Чому дорівнює проекція рівнодійної збіжної системи сил на певну координатну вісь? (9)
65. Навести формулу, за якою аналітично визначають модуль рівнодійної будь-якої збіжної системи сил. (9)
66. Яка векторна умова рівноваги збіжної системи сил? (9)
67. Яка графічна умова рівноваги збіжної системи сил? (9)
68. Що можна сказати про збіжну систему сил, силовий многокутник якої виявився замкнутим? (6)
69. Якщо $\{\vec{F}_i\}$ ($i = 1, 2, ..., 11$) – зрівноважена збіжна система сил, то скільки сторін має силовий многокутник цієї системи сил? (7)
70. Яка аналітична умова рівноваги просторової збіжної системи сил? (9)
71. Яка аналітична умова рівноваги плоскої збіжної системи сил? (9)
72. Якщо є дві абсолютно різні плоскі збіжні системи сил $\{\vec{F}_i\}$ ($i = 1, 2, ..., 234$) та $\{\vec{P}_j\}$ ($j = 1, 2, ..., 7$), то однаковими чи різними будуть умови рівноваги цих систем сил? (5)
73. Якщо є дві абсолютно різні просторові збіжні системи сил $\{\vec{F}_i\}$ ($i = 1, 2, ..., 27$) та $\{\vec{P}_j\}$ ($j = 1, 2, ..., 63$), то однаковими чи різними будуть рівняння рівноваги цих систем сил? (5)
74. Сформулюйте теорему про три сили (теорему про рівновагу матеріального тіла під дією трьох непаралельних сил, розташованих у одній площині). (9)

75. Якщо тверде тіло знаходиться у рівновазі під дією трьох непаралельних сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$, які належать одній площині, то як розташовані лінії дій цих сил? (6)
76. Чи завжди правильне твердження: «Якщо тверде тіло знаходиться у рівновазі під дією трьох непаралельних сил, які лежать в одній площині, то лінії дій цих сил перетинаються в одній точці»? (5)
77. Чи завжди правильне твердження: «Якщо на тверде тіло діють три непаралельні сили, які лежать в одній площині, та лінії дій цих сил перетинаються в одній точці, то зазначене тіло перебуває у рівновазі»? (6)

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТА ЕКСПРЕС-ТЕСТУВАННЯ Ст-3

(ДЕЯКІ ВИДИ В'ЯЗЕЙ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ – тема 2, § 2.7)

1. Яке тіло називають вільним? (4)
2. Як називають тіло, рух якого в просторі не обмежений ніякими іншими тілами? (2)
3. Яке тіло називають невільним? (4)
4. Як називають тіло, рух якого в просторі обмежений якимись іншими тілами? (2)
5. Що таке в'язь? (4)
6. Як називають певне матеріальне тіло, що обмежує рух якого-небудь іншого тіла? (2)
7. Яка механічна величина є мірою механічної взаємодії між певним матеріальним тілом і в'яззю, що обмежує рух цього тіла? (3)?
8. Що таке реакція в'язі? (4)
9. Реакція в'язі є величиною векторною чи скалярною? (2)
10. Сформулюйте аксіому №5. (5)
11. У якому разі невільне матеріальне тіло умовно можна розглядати як вільне? (3)
12. У чому полягає принцип звільнення від в'язей? (5)
13. Сформулюйте теорему про три сили (теорему про рівновагу матеріального тіла під дією трьох непаралельних сил, розташованих у одній площині). (5)[1]
14. Куди напрямлена сила реакції у випадку, коли в'язь перешкоджає рухові тіла в одному певному напрямку? (9)
15. Що можна сказати про напрямок реакції у випадку, коли в'язь одночасно перешкоджає рухові тіла по декількох напрямках? (8)
16. Яким символом (літерою) зазвичай позначають реакцію тієї чи іншої в'язі в загальному випадкові? (6)
17. Яку поверхню (площину) називають ідеально гладенькою? (7)
18. Яким символом (літерою) зазвичай позначають реакцію ідеально гладенької поверхні? (6)
19. Що відомо про реакцію ідеально гладенької поверхні? (9)
20. Що відомо про реакцію точкової опори? (9)

[1] Перші 13 наведених запитань, які є в білетах для експрес-тестування №3, належать до попередніх тем і використовувалися у відповідних білетах.

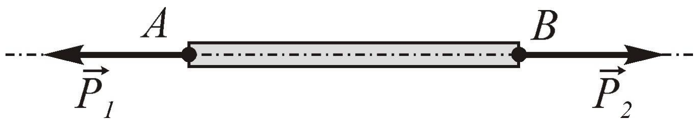
21. Нехай $\vec{N}_A$ – реакція певної ідеально гладенької поверхні та при розрахунках отримано, що $N_A = -12\,kH$; що означає знак мінус у наведеному записі? (11) [2]
22. Навести приклади гнучких в’язей. (7)
23. Яку Ви знаєте особливість гнучкої в’язі? (7)
24. Як зазвичай позначають реакцію гнучкої в’язі? (6)
25. Що відомо про реакцію гнучкої в’язі? (9)
26. Коли реакція гнучкої в’язі не дорівнює нулеві? (7)
27. Яке з’єднання називається циліндричним шарнірним? (9)
28. Що таке ідеальний шарнір? (7)
29. Що таке точковий шарнір? (7)
30. Якими у теоретичній механіці вважають всі шарнірні з’єднання? (7)
31. Як на розрахункових схемах (кресленнях або рисунках) позначають шарнірні з’єднання (шарніри)? (6)
32. Що відомо про реакцію нерухомого шарніра? (9)
33. Нехай $\vec{R}_A$ – реакція певного нерухомого шарніра A та при розрахунках отримано, що $R_A = -17{,}2\,kH$; що означає знак мінус у наведеному записі? (7)
34. Що таке стержнева в’язь (ідеальний стержень)? (9)
35. Яким символом (літерою) зазвичай позначають реакцію стержневої в’язі (реакцію стержня)? (6)
36. Що відомо про реакцію стержневої в’язі? (9)
37. Як напрямлена реакція *розтягнутого*[3] стержня? (8)

---

[2] Повне розуміння наведеної, на перший погляд простої, ситуації передбачає три варіанта відповіді: 1) початкове зображення реакції $\vec{N}_A$ ідеально гладенької поверхні не правильне; 2) у розрахунках припущені помилки; 3) сумарна дія зовнішніх сил, прикладених до невільного матеріального тіла, така, що точка A цього тіла не тисне на ідеально гладеньку поверхню, через що ніякої реакції $\vec{N}_A$ виникати не може й в такому разі зазначена поверхня не може виконувати функцію в’язі. Іншими словами: якщо правильно виконані усі дії-розрахунки, то такого випадку, коли $N_A = -12\,kH$, бути не може.

[3] Необхідно твердо розуміти й пам’ятати, що теоретична механіка має справу з *абсолютно твердими тілами* й в її межах стержні не можуть бути ні розтягнутими, ні стиснутими, оскільки обидва зазначені стани передбачають зміну розмірів стержнів (подовження чи скорочення їх). Під словосполученням «*розтягнутий стержень*» необхідно розуміти стержень, який зовнішні сили, що діють на нього, прагнуть розтягнути, але сам стержень цій зовнішній дії протидіє і працює на розтяг; безсумнівно, «*стиснутий стержень*» – це стержень, який зовнішні сили, що діють на нього, прагнуть стиснути й, отже, стержень працює на стиск.

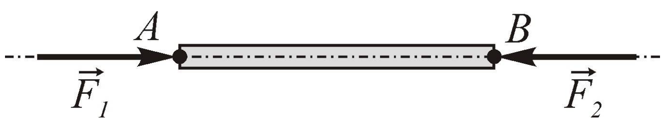
38. Якщо $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ – зовнішні сили, що прикладені до стержня, то зображений стержень є *розтягнутим* чи *стиснутим*[3]? (7)



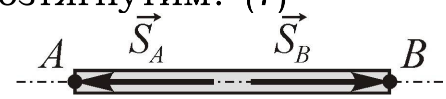
39. Якщо $\vec{S}_A$ і $\vec{S}_B$ – внутрішні зусилля, що виникають у стержні від дії якихось зовнішніх сил, то зображений стержень є стиснутим чи розтягнутим? (7)

40. Як напрямлена реакція *стиснутого*[3] стержня? (8)

41. Якщо $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ – зовнішні сили, що прикладені до стержня, то зображений стержень є *розтягнутим* чи *стиснутим*[3]? (7)



42. Якщо $\vec{S}_A$ і $\vec{S}_B$ – внутрішні зусилля, що виникають у стержні від дії якихось зовнішніх сил, то зображений стержень є стиснутим чи розтягнутим? (7)



43. Якщо $\vec{S}_A$ і $\vec{S}_B$ – внутрішні зусилля, що виникають у стержні від дії якихось зовнішніх сил, то $S_A = S_B$ чи $S_A \neq S_B$? (7)

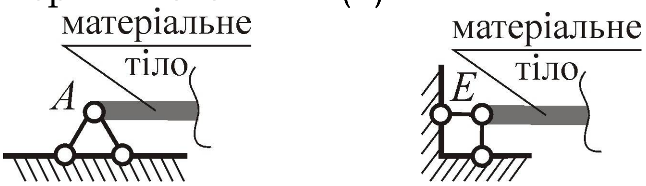
44. Якими на початку практичних розрахунків зазвичай приймають усі стержні, що входять до складу розглядуваної механічної системи? (7)

45. Нехай $\vec{S}_{AB}$ – реакція певного ідеального стержня AB і при розрахунках отримано, що $S_{AB} = -16\,kH$; що означає знак мінус у наведеному записі? (7)

46. Які обмеження на рух закріпленого тіла накладає шарнірно-нерухома опора? (9)

47. Навести схематичне (схематичні) зображення шарнірно-нерухомої опори. (7)

48. Яка опора (в'язь) обмежує рух зображеного на рисунку матеріального тіла? (7)



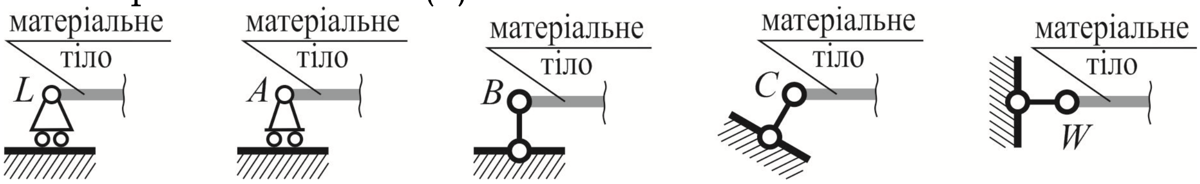
49. Що відомо про реакцію шарнірно-нерухомої опори? (9)

50. Нехай $\vec{R}_K$ – реакція певної шарнірно-нерухомої опори K та при розрахунках отримано, що $R_K = -29\,kH$; що означає знак мінус у наведеному записі? (7)

51. Які обмеження на рух закріпленого тіла накладає шарнірно-рухома опора? (9)

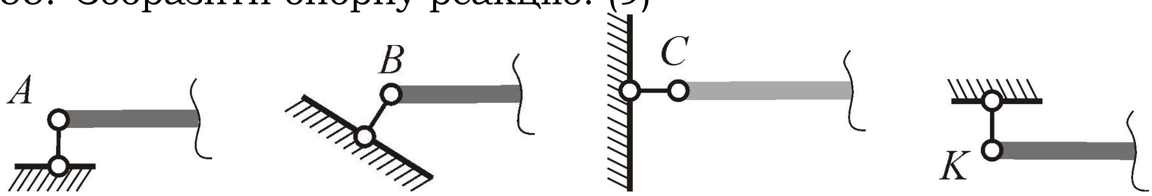
52. Навести схематичне (схематичні) зображення шарнірно-рухомої опори. (7)

53. Яка опора (в'язь) обмежує рух зображеного на рисунку матеріального тіла? (7)



54. Що відомо про реакцію шарнірно-рухомої опори? (9)

55. Зобразити опорну реакцію. (9)

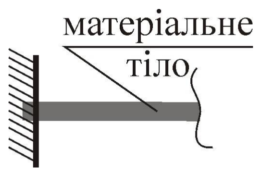


56. Нехай $\vec{R}_D$ – реакція певної шарнірно-рухомої опори D та при розрахунках отримано, що $R_D = -32{,}9\,kH$; що означає знак мінус у наведеному записі? (7)

57. Які обмеження на рух закріпленого тіла накладає абсолютно жорстке затиснення? (9)

58. Навести схематичне зображення абсолютно жорсткого затиснення. (7)

59. Яка опора обмежує рух зображеного на рисунку матеріального тіла? (7)



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТА ЕКСПРЕС-ТЕСТУВАННЯ Ст-4

(ПОНЯТТЯ ПРО ФЕРМИ. СПОСІБ ВИРІЗАННЯ ВУЗЛІВ – тема 2, §§ 2.8÷2.9)

1. Яке тіло називають абсолютно твердим? (2)
2. Що таке в’язь? (4)
3. Що є мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами? (4)
4. Якими параметрами характеризується сила? (4)
5. Що таке реакція в’язі? (4)
6. Що таке точковий шарнір? (2)
7. Що таке ідеальний стержень (стержнева в’язь)? (4)
8. Що відомо про реакцію стержневої в’язі? (4)
9. Що відомо про реакцію шарнірно-рухомої опори? (4)
10. Що відомо про реакцію шарнірно-нерухомої опори? (4)
11. Яка система сил є плоскою збіжною? (4)
12. Яка система сил є просторовою збіжною? (4)
13. Яка система сил є зрівноваженою? (4)
14. Як називають силу, що еквівалентна певній системі сил? (3)
15. Сформулюйте аксіому №1. (4)
16. Сформулюйте аксіому №3. (4)
17. Сформулюйте аксіому №5. (4)
18. Що таке проекція сили на вісь? (4)
19. Чому дорівнює проекція сили на вісь? (4)
20. Коли сила проектується на вісь у натуральну величину? (2)
21. Коли сила не проектується на вісь? (2)
22. До якого найпростішого (канонічного) вигляду зводиться будь-яка збіжна система сил? (4)
23. Навести формулу, яка визначає рівнодійну будь-якої збіжної системи сил у векторній формі. (4)
24. Як графічно визначають рівнодійну збіжної системи сил? (4)
25. Чому дорівнює проекція рівнодійної збіжної системи сил на певну координатну вісь? (4)
26. Навести формулу, за якою аналітично визначають модуль рівнодійної будь-якої збіжної системи сил. (4)
27. Яка графічна умова рівноваги збіжної системи сил? (4)
28. Яка аналітична умова рівноваги плоскої збіжної системи сил? (4)
29. Що можна сказати про збіжну систему сил, силовий многокутник якої виявився замкнутим? (4)

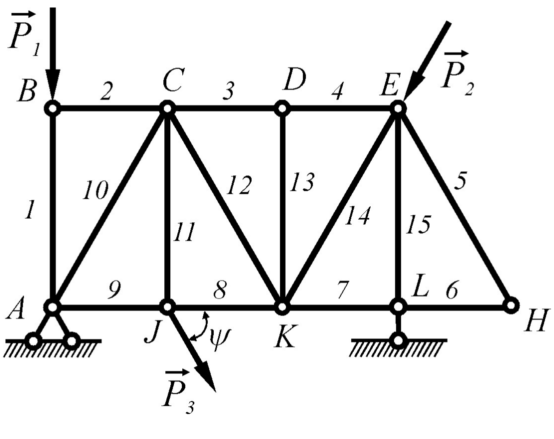
30. Сформулюйте теорему про три сили (теорему про рівновагу матеріального тіла під дією трьох непаралельних сил, розташованих у одній площині). (4)[1]
31. Що таке ферма? (9)
32. Яка ферма є плоскою? (5)
33. Яка ферма є просторовою? (5)
34. Що таке вузол ферми? (5)
35. Що таке опорний вузол ферми? (6)
36. Що таке проліт ферми? (5)
37. Кожний стержень ферми з'єднує скільки вузлів її? (2)
38. Яка ферма є простою? (9)
39. Що означає розрахувати ферму? (9)
40. У теоретичній механіці кожен вузол ферми вважають (розглядають) як ……… (закінчити фразу). (8)
41. За якої умови всі стержні ферми будуть працювати тільки або на розтяг, або на стиснення? (7)
42. За якої умови всі стержні ферми будуть працювати тільки або на розтяг, або на стиснення? Чому? (10)
43. Зобразити елементарну ферму. (8)
44. Що таке плоска проста ферма? (9)
45. Що в формулі $C = 2 \cdot B - 3$ позначено літерою C? (6)
46. Що в формулі $C = 2 \cdot B - 3$ позначено літерою B? (6)
47. Що при розрахунках ферм визначає формула $C = 2 \cdot B - 3$? (7)
48. Запишіть формулу, що визначає зв'язок між кількістю B вузлів ферми та мінімально необхідною для утворення плоскої простої ферми кількістю C стержнів. (9)
49. При виконанні якої умови плоска ферма є простою? (9)
50. Що таке внутрішня в'язь при розрахунках ферм? (9)
51. Якими приймають всі стержні ферми на початку аналітичного розрахунку ферми? (5)
52. Як направляють реакції всіх стержнів ферми на початку аналітичного розрахунку ферми? (6)
53. Яким чином при розрахунку ферми встановлюють, на котрий вид деформації працює той чи інший стержень ферми? (6)
54. У якій послідовності необхідно вирізати вузли, розраховуючи плоскі прості ферми? (7)

[1] Перші 30 наведених питань, які є в білетах для експрес-тестування №4, належать до попередніх тем і використовувалися у відповідних білетах.

55. В якій послідовності необхідно вирізати вузли, розраховуючи плоскі прості ферми? Чому? (10)
56. Що таке нульовий стержень? (6)
57. Що таке завантажений вузол ферми? (6)
58. Що таке незавантажений вузол ферми? (6)
59. Сформулюйте лему №1 про нульові стержні. (9)
60. Сформулюйте лему №2 про нульові стержні. (9)
61. Сформулюйте лему №3 про нульові стержні. (9)

На рисунках **А** та **Б**:

62. Чи всі зображені стержні входять до складу плоскої простої ферми? Відповідь обґрунтуйте. (10)
63. Що є зовнішніми опорами плоскої простої ферми? (9)
64. Що відомо про зовнішні опорні реакції плоскої простої ферми? (10)
65. Назвіть опорні вузли ферми. (7)
66. Назвіть завантажені вузли ферми. (6)
67. Назвіть незавантажені вузли ферми. (6)
68. Який з вузлів можна розрахувати за лемою №1? Розрахуйте. (10)
69. Який з вузлів можна розрахувати за лемою №2? Розрахуйте. (10)
70. Який з вузлів можна розрахувати за лемою №3? Розрахуйте. (10)
71. Нехай $S_9 = -12\,kH$. Знайти зусилля у стержнях 8 і 11. (11)



$P_1 = 8\,kH$, $P_2 = 14\,kH$,

$P_3 = 20\,kH$,

$\cos\psi = 0{,}6$, $\sin\psi = 0{,}8$

Рисунок **А**

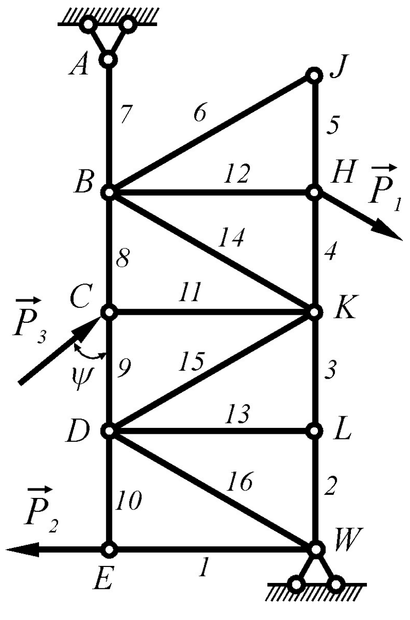


Рисунок **Б**

На рисунках **В** та **Г**:

72. Чи всі зображені стержні входять до складу плоскої простої ферми? Відповідь обґрунтуйте. (10)
73. Що є зовнішніми опорами зображеної плоскої простої ферми? (9)
74. Через який відрізок проходить лінія дії реакції $\vec{R}_A$? Відповідь обґрунтуйте. (10)
75. Назвіть опорні вузли зображеної ферми. (6)
76. Назвіть завантажені вузли зображеної ферми (6)
77. Назвіть незавантажені вузли зображеної ферми (6)
78. Який з вузлів зображеної ферми можна розрахувати за лемою 1? Розрахуйте. (10)
79. Який з вузлів зображеної ферми можна розрахувати за лемою 2? Розрахуйте. (10)
80. Який з вузлів зображеної ферми можна розрахувати за лемою 3? Розрахуйте. (10)

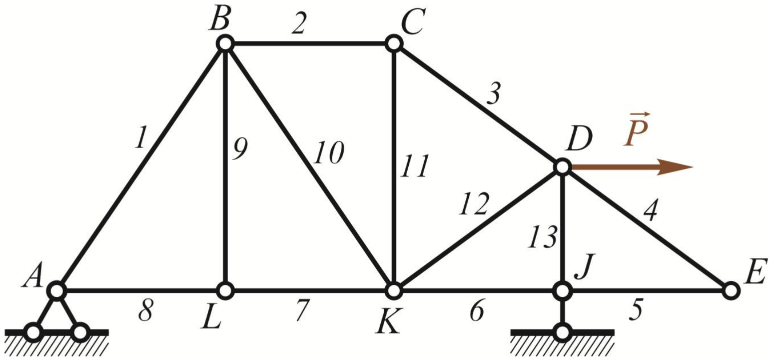


Рисунок **В**

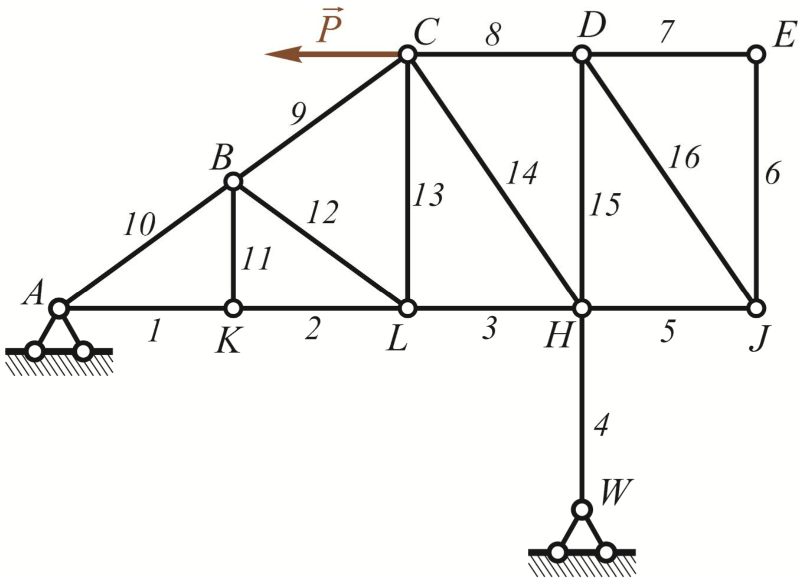


Рисунок **Г**

ТЕМА 3 ► ТЕОРІЯ МОМЕНТІВ СИЛ

- Момент сили відносно точки
- Момент сили відносно осі
- Залежність між моментами сили відносно точки та відносно осі
- Теореми Варіньона про момент рівнодійної збіжної системи сил
- Формули Ейлера для моментів сили відносно декартових координатних осей

Розглянемо простий та відомий абсолютній більшості людства процес відкручування гайки підходящим слюсарним ключем (рис. 3.1); нехай до точки A ключа в одному випадку прикладена сила $\vec{P}$, а в іншому – рівна їй за модулем сила $\vec{F}$. З повсякденного життєвого досвіду відомо, що сила $\vec{P}$ буде впливати на відкручування гайки значно ***дієвіше*** ніж сила $\vec{F}$, хоча вони й рівні за величиною та прикладені до ключа на однаковій віддалі OA від центра гайки. Не важко здогадатися, що для забезпечення умови необхідного обертання гайки, важливе ***сукупне*** значення мають: а) величина (модуль) прикладеної сили; б) певна характерна віддаль h_P (чи h_F) від точки O до лінії дії сили.

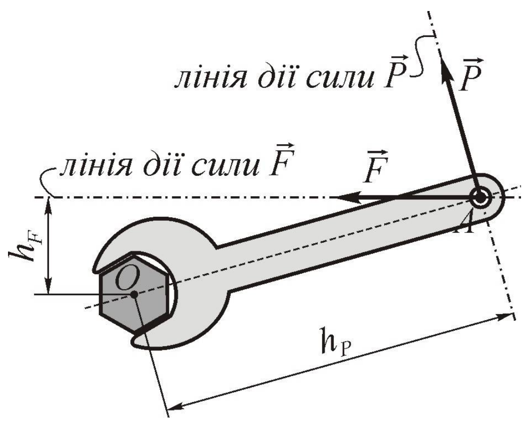


Рис. 3.1

ⓘ Обертальну дію сили на матеріальне тіло *визначає* та *характеризує* фізична величина, яку називають ***моментом сили***.

Уперше *поняття моменту сили* використав і, отже, ввів в обіг італійський художник, скульптор, архітектор, вчений та інженер Леонардо да Вінчі (15.IV.1452 – 02.V.1519), відомий своїми всесвітньо визнаними художніми роботами (н-д, розпис «Тайна вечеря» в трапезній монастиря Санта-Марія делле Граціе в Мілані, портрет Мони Лізи – так звана «Джоконда»).

Розподіляють поняття *моменту сили відносно точки* та *моменту сили відносно осі.*

§ 3.1. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ

🛈 ***Моментом сили відносно*** певної ***точки*** називають фізичну величину, яка визначає та характеризує *прагнення* цієї сили тим чи іншим чином *обертати матеріальне тіло*, до якого вона прикладена, *навколо* розглядуваної *точки*.

Розглянемо це поняття.

Нехай до вільного матеріального тіла T у точці A прикладена сила $\vec{F}$ (рис. 3.2,а), дія якої спричиняє певний кінематичний стан тіла. Візьмемо довільну точку O тіла та проведімо площину Π, що перерізає тіло, проходячи через лінію дії сили $\vec{F}$ і точку O (очевидно, що це можливо завжди при яких завгодно розташуваннях лінії дії сили та точки).

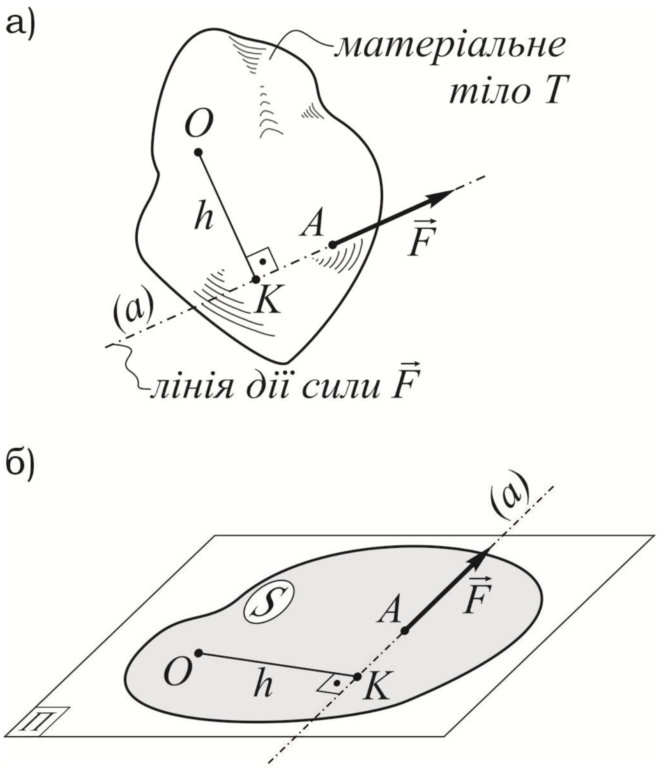


Рис. 3.2

У теорії моментів сил:

🛈 точка O – це ***моментна точка*** (або ***центр моменту***);

🛈 площину Π, що перерізає тіло, проходячи через лінію дії сили $\vec{F}$ і точку O, називають ***площиною дії сили*** $\vec{F}$;

🛈 найкоротшу віддаль h (та її довжину) від точки O до лінії дії сили $\vec{F}$ називають ***плечем сили*** $\vec{F}$ ***відносно точки*** (***центра***) O.

Зрозуміло, що *плече* h *визначає перпендикуляр*, опущений із точки O на лінію дії сили $\vec{F}$.

Зобразимо та розглянемо переріз тіла площиною Π, позначивши його S (рис. 3.2,б). Оскільки тіло T є вільним, то, звісно, й переріз S – вільне матеріальне тіло, на яке у точці A діє сила $\vec{F}$, що спричиняє відповідний кінематичний стан перерізу. *Подумки* в будь-який спосіб закріпимо переріз S у точці O. Від цього переріз перетвориться на невільне матеріальне тіло та кінематичний стан його зміниться – переріз S почне *обертатися* в площині Π навколо точки O (відповідно буде обертатися й саме матеріальне тіло T). Неважко прийти до висновку, що указане обертання залежить від:

1) розташування точки O та лінії дії сили $\vec{F}$, що визначає ***положення площини дії сили*** (тобто, площини Π);
2) напрямку дії сили $\vec{F}$, що визначає ***напрямок обертання*** перерізу S в площині Π;
3) модуля (величини) F сили та її плеча $h = OK$ відносно точки (центра) O, які в сукупності кількісно (у вигляді певного числового значення) визначають ***значимість*** (чи ***ефективність***) ***обертальної дії*** сили $\vec{F}$ відносно обраної точки O (чим більші сила та (або) її плече h – тим значиміша обертальна дія сили на тіло і тим більшим числом визначається ця значимість).

Важливо розуміти, що розглянуте обертання є умовним; тобто ідеться про те, що сила $\vec{F}$ має певний потенціал, пов'язаний із можливістю обертати тіло T разом із перерізом S в площині Π навколо точки O. Дійсне обертання можливе лише у разі виконання певних *умов*, які вивчають у наступних відповідних розділах і темах теоретичної механіки. Але кожна сила, прикладена до матеріального тіла, має те чи інше *прагнення обертати тіло* навколо будь-якої точки простору в тому чи іншому напрямкові.

З розглянутого зрозуміло, що та дія сили $\vec{F}$, яка пов'язана з намаганням обертати матеріальне тіло навколо точки O, однозначно *характеризується трьома параметрами*:

1) площиною Π дії сили $\vec{F}$;
2) напрямком «обертання»[1] тіла навколо точки O у площині Π;
3) чисельним значенням або величиною моменту сили $\vec{F}$ відносно точки (центра) O.

Спочатку розглянемо й усвідомимо *окремий випадок*, коли усі сили, що прикладені до тіла, та моментні точки належать тільки ***одній*** певній ***площині*** (так званий, $2D$ або *двовимірний* випадок). У такому разі: а) площина дії кожної сили не потребує ніякого додаткового визначення, адже усі сили мають *спільну площину дії*, яка збігається з означеною площиною; б) *напрямок обертальної дії* кожної сили відносно будь-якої точки площини *визначають знаком*; в) для *кількісного*

[1] Слово *обертання* взято у лапки оскільки, як пояснено вище, ідеться про *умовне обертання*.

вимірювання обертальної дії сили $\vec{F}$ відносно довільної точки O застосовують наступне поняття:

ⓘ ***момент сили*** $\vec{F}$ ***відносно точки*** (або ***центра***) O – це *скалярна алгебраїчна величина*, яка дорівнює взятому зі знаком плюс чи мінус добутку модуля F сили на плече h сили $\vec{F}$ відносно точки O; знак плюс обирають у тому разі, коли сила $\vec{F}$ прагне обертати тіло (або, іншими словами, площину своєї дії) навколо точки O проти руху годинникової стрілки, а знак мінус – якщо за рухом годинникової стрілки.

Якщо момент сили $\vec{F}$ відносно точки O *позначити* як $M_O(\vec{F})$, то

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \qquad \textbf{(3.1)}$$

Так, для зображеної на рисунку 3.3 сили $\vec{F}$, що прикладена у точці A й має лінію дії (a):

- момент сили $\vec{F}$ відносно точки C

$$M_C(\vec{F}) = +F \cdot h_1,$$

де $h_1 = CK$ – плече цієї сили відносно точки C і, звісно, $CK \perp (a)$;

- момент сили $\vec{F}$ відносно точки D

$$M_D(\vec{F}) = -F \cdot h_2,$$

де $h_2 = DL \perp (a)$ – плече сили $\vec{F}$ відносно точки D;

- момент сили $\vec{F}$ відносно точки E

$$M_E(\vec{F}) = 0,$$

оскільки через точку E проходить лінія дії сили $\vec{F}$ та її плече h_3 відносно точки E дорівнює нулю – $h_3 = 0$ (говорять, що у сили $\vec{F}$ ***немає плеча*** відносно точки E); також важливо розуміти, що сила $\vec{F}$ ***не здатна обертати*** площину Π навколо точки E в жодному з напрямків;

- очевидно, що при переносі сили $\vec{F}$ по лінії її дії у будь-яку іншу точку (наприклад, у точку A_1) момент цієї сили відносно кожної розглянутої точки залишиться незмінним.

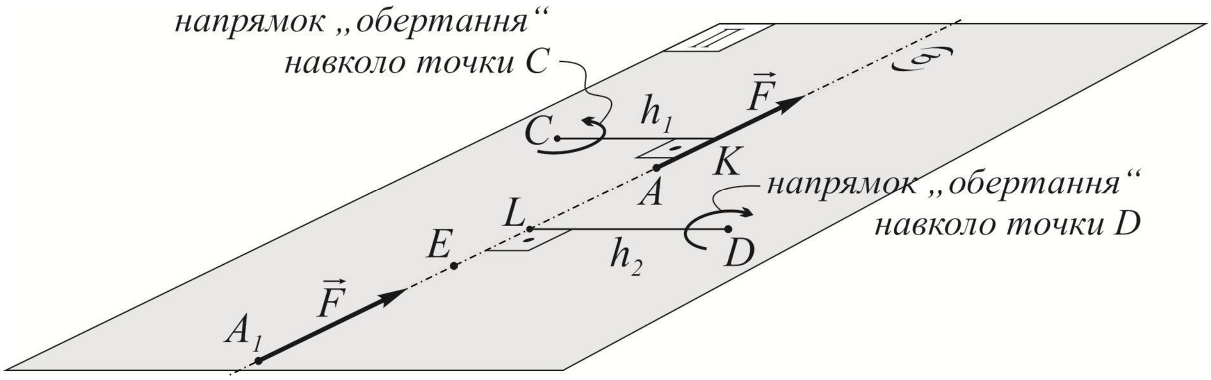


Рис. 3.3

Тепер розглянемо *загальний випадок*, коли діючи сили та точки ***довільно*** розташовані ***в просторі*** ($3D$ або *тривимірний* випадок). У цьому разі площини дій різних сил будуть різними й тому виникає потреба певним чином визначати кожну з цих площин. Як відомо з векторної алгебри, положення певної площини Π в просторі можна визначати *нормаллю до* цієї *площини*[2]. Якщо застосовувати відповідний *відрізок* означеної нормалі, то довжиною цього відрізку можна визначити модуль (або чисельне значення) моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O. Якщо ж замість відрізку вживати *напрямлений відрізок* (тобто – ***вектор***), напрямок якого визначав би напрямок «обертання», то такий вектор повністю й однозначно визначить усі три параметри, які характеризують момент сили $\vec{F}$ відносно точки (центра) O. Тому в загальному випадку

> ⓘ ***момент сили*** $\vec{F}$ ***відносно точки*** (або ***центра***) O – це *вектор* (*векторна величина*) $\vec{M}_O(\vec{F})$, який (яку) визначає векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки O у точку A прикладання сили (див. рис.3.4), на вектор сили $\vec{F}$:
>
> $$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad \textbf{(3.2)}$$

---

[2] Нормаль до тієї чи іншої площини – це пряма, що проходить під прямим кутом до розглядуваної площини.

Як відомо, згідно з правилом векторного добутку:

- модуль $M_O(\vec{F}) = r \cdot F \cdot sin\alpha$, де α – кут між додатними напрямками векторів $\vec{r}$ і $\vec{F}$;
- вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ прикладений у точці O й проходить перпендикулярно до площини, в якій знаходяться вектори $\vec{r}$ та $\vec{F}$, у тому напрямку, з якого поворот від першого множника $\vec{r}$ до другого множника $\vec{F}$ (якщо їх відкласти від однієї точки) на кут, менший ніж $180°$, видно проти руху годинникової стрілки.

За наведеним правилом й зобразимо на рисунку 3.4 вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O.

Якщо на рисунку 3.4 зобразити плече $h = OK$ сили $\vec{F}$ відносно точки O, то з нескладного геометричного аналізу відповідних елементів рисунку очевидно, що:

- вектори $\vec{r}$ та $\vec{F}$ знаходяться в площині Π дії сили $\vec{F}$;
- $\angle OAK = \alpha$ (як вертикальні кути);
- у прямокутному трикутнику OAK

$$OA \cdot sin\angle OAK = OK$$

або

$$r \cdot sin\alpha = h.$$

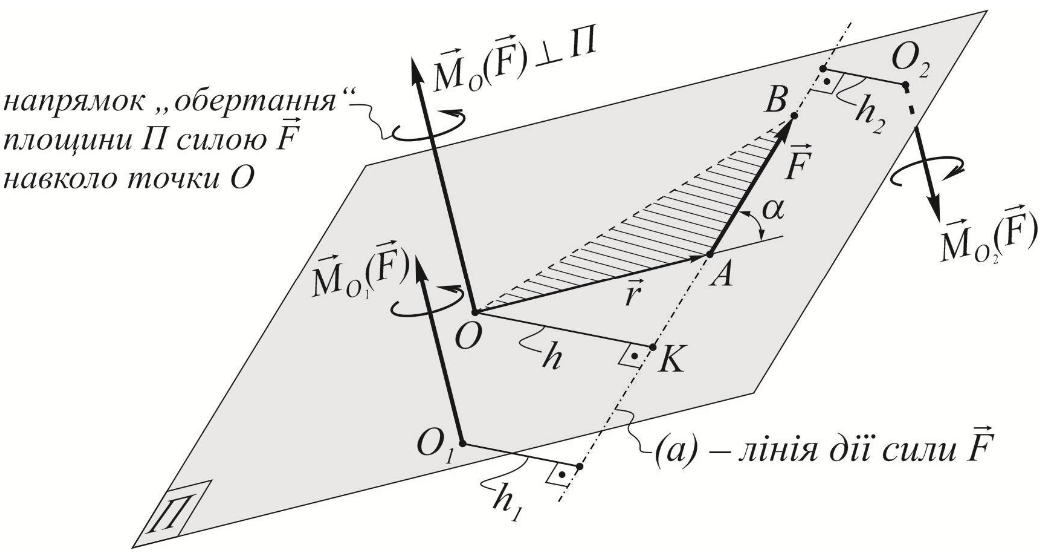


Рис. 3.4. Вектори моментів сили $\vec{F}$ відносно точок O, O_1 і O_2

Підсумовуючи розглянуте та викладене, приходимо до ***висновків***, що у теоретичній механіці (й в інших технічних науках) *вектор* $\vec{M}_O(\vec{F})$ *моменту сили* $\vec{F}$ *відносно точки (центра)* O:

1) прикладений у точці O ***фіксований вектор***, який проходить перпендикулярно до площини Π дії сили $\vec{F}$ ($\vec{M}_O(\vec{F}) \perp \Pi$);
2) напрямлений у тому напрямку, звідки видно прагнення сили $\vec{F}$ обертати площину своєї дії навколо точки O проти руху годинникової стрілки;
3) має модуль, який дорівнює добутку модуля F сили на плече h цієї сили відносно точки O:

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot h; \tag{3.3}$$

4) при переносі сили $\vec{F}$ по лінії її дії у будь-яку іншу точку вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ ніяк не змінюється;
5) якщо лінія дії сили $\vec{F}$ проходить через точку O, то у такому разі сила $\vec{F}$ не має плеча відносно точки O і $M_O(\vec{F}) = 0$.

Оскільки у Міжнародній системі одиниць СІ сила вимірюється у ньютонах, а плече – у метрах, то одиниця вимірювання моменту сили відносно точки – ньютонометр:

$$[M_O(\vec{F})] = H \cdot м.$$

§ 3.2. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ОСІ

Розглянемо важливе поняття *моменту сили відносно осі*, без якого неможливе дослідження *просторової довільної системи сил.*

> ⓘ ***Моментом сили відносно*** певної ***осі*** називають фізичну величину, яка визначає та характеризує *прагнення* цієї сили тим чи іншим чином *обертати матеріальне тіло*, до якого вона прикладена, *навколо* даної *осі*.

Розглянемо об'ємне матеріальне тіло T, що жорстко насаджене на вертикальний вал, закріплений у внутрішніх обоймах горизонтально розташованих підшипників D і J. Сумістимо з повздовжньою віссю вала, наприклад, координатну вісь z. У такому разі тіло T разом з валом за поняттями теоретичної механіки є *одним* матеріальним тілом, рух якого обмежено циліндричними шарнірами D і J (див. рис. 2.18,б), через що це тіло має можливість вільно обертатися навколо осі z.

Нехай до тіла у його точках C, B і A прикладені сили $\vec{G}$, $\vec{P}$ і $\vec{F}$ й (див. рис.3.5,а):

- лінія дії (g) сили $\vec{G}$ є паралельною осі z;
- лінія дії (b) сили $\vec{P}$ перетинає вісь z у певній точці B_1;
- лінія дії (a) сили $\vec{F}$ є мимобіжною осі z.

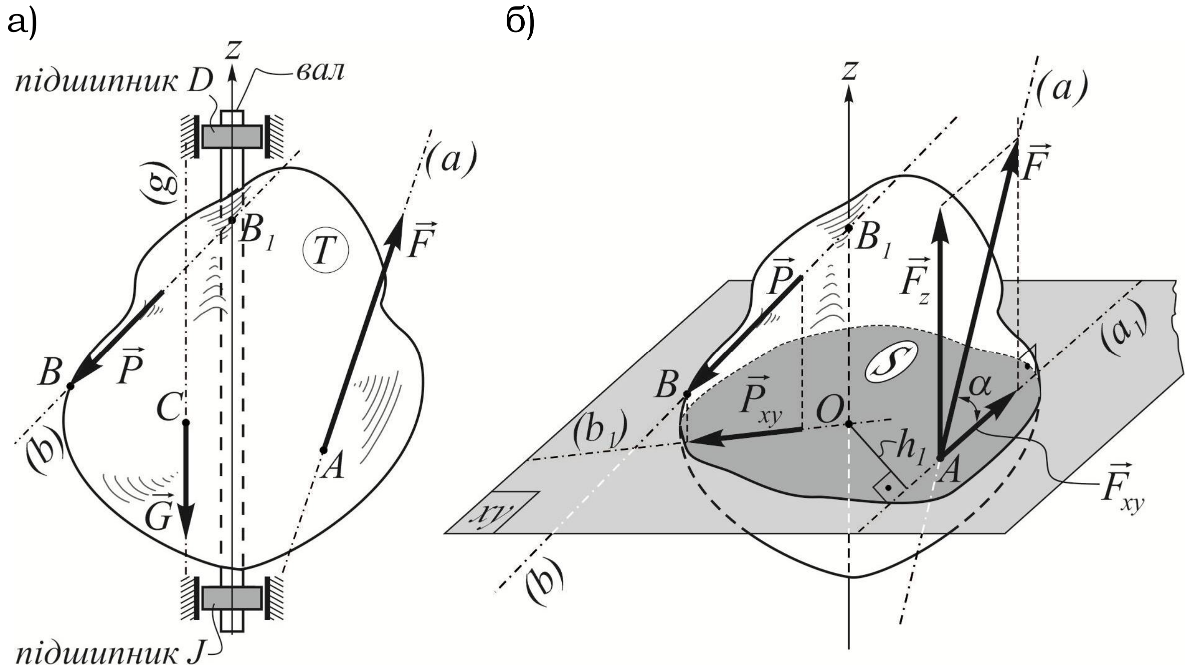


Рис. 3.5

З’ясуємо обертальну дію кожної з сил на тіло T.

Неважко зрозуміти, що сила $\vec{G}$ прагне тільки зсунути тіло вздовж осі z, *не спричиняючи* ніякого *обертання* навколо цієї осі й тому її момент відносно цієї осі дорівнює нулю:

$$M_z\left(\vec{G}\right)=0,$$

де символьний запис $M_z\left(\vec{G}\right)$ означає момент сили $\vec{G}$ відносно осі z.

Сила $\vec{P}$, лінія дії якої перетинає вісь z, тільки *тисне* на цю вісь (й, звісно, на вал) і *не може обертати* тіло T навколо осі (це стає більш очевидним, якщо перемістити силу $\vec{P}$ по її лінії дії у точку B_1). Отже, момент сили $\vec{P}$ відносно осі z також дорівнює нулю:

$$M_z\left(\vec{P}\right)=0.$$

Для визначення обертальної дії сили $\vec{F}$ (див. рис.3.5,б) проведімо через точку A перпендикулярну до осі z площину xy і позначимо точку перетину цієї площини й осі z як O, переріз тіла площиною xy – S, а кут між лінією дії (a) і площиною xy – α; розкладемо силу $\vec{F}$ на дві ортогональні складові $\vec{F}_z$, яка розташована *паралельно* до осі z, і $\vec{F}_{xy}$, яка *належить площині* xy й, отже, є перпендикулярною осі z, позначивши лінію дії складової $\vec{F}_{xy}$ як (a_1).

> ⓘ Складова $\vec{F}_{xy}$ є ***проекцією сили*** $\vec{F}$ ***на площину*** xy.

> На відміну від проекції сили на вісь, яка є *скалярною* величиною (див. § 2.3), проекція сили на певну площину – ***величина векторна***, оскільки вона характеризується не тільки чисельним значенням (модулем), але й напрямком своєї дії в цій площині.

Звісно, на рисунку 3.5,б система сил $\{\vec{F}_z, \vec{F}_{xy}\} \backsim \vec{F}$ й модулі

$$F_{xy} = F \cdot cos\alpha \quad \text{і} \quad F_z = F \cdot sin\alpha .$$

Неважко бачити, що складова $\vec{F}_z$ (так само як і сила $\vec{G}$) не спричиняє ніякої обертальної дії на тіло й її момент відносно осі z дорівнює нулю.

Складова ж $\vec{F}_{xy}$ прагне обертати переріз S в площині xy[3] навколо точки O (див. рис. 3.5,б і рис. 3.2,б) й це прагнення визначає момент сили $\vec{F}_{xy}$ відносно точки O, який згідно з формулою (3.1) дорівнює

$$M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h_1 ,$$

де h_1 – плече сили $\vec{F}_{xy}$ відносно точки O.

Отже, обертальну дію на матеріальне тіло T сили $\vec{F}$ визначає обертальна дія її складової $\vec{F}_{xy}$ на переріз S цього тіла й тому

---

[3] Зауважимо, що площина xy, безумовно, є *площиною дії сили* $\vec{F}_{xy}$.

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}_{xy}\right) = \pm F_{xy} \cdot h_1 . \qquad \textbf{(3.4)}$$

У результаті приходимо до визначення:

ⓘ ***момент*** певної ***сили*** $\vec{F}$ ***відносно*** даної ***осі*** z – це *скалярна алгебраїчна величина*, яка дорівнює взятому зі знаком плюс чи мінус добутку модуля F_{xy} проекції $\vec{F}_{xy}$ сили $\vec{F}$ на площину xy, яка перпендикулярна до осі z, на плече h_1 цієї проекції відносно точки O перетину зазначених осі й площини; знак плюс обирають у тому разі, коли з додатного кінця осі z видно, що проекція $\vec{F}_{xy}$ прагне обертати тіло T (або, що те саме, площину своєї дії) відносно цієї осі проти руху стрілки годинника, а знак мінус – якщо за рухом стрілки годинника.

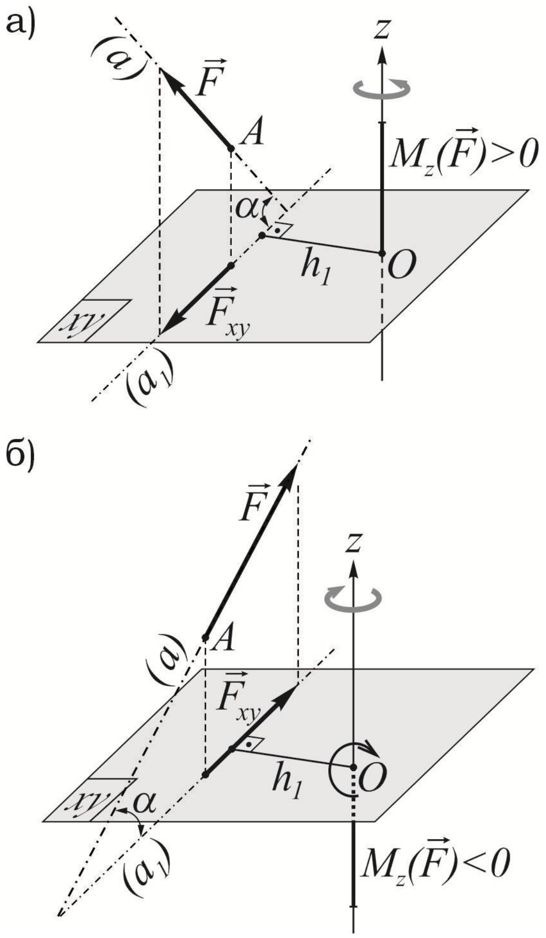


Рис. 3.6

З рисунка 3.5,б видно, що при обчисленні моменту за формулою (3.4) площину xy можна проводити через будь-яку точку осі z.

Таким чином, щоб знайти момент $M_z\left(\vec{F}\right)$ довільної сили $\vec{F}$ відносно осі z (див. рис. 3.6) необхідно:

1) провести площину xy, перпендикулярну до осі z (у будь-якому місці);

2) спроектувати силу $\vec{F}$ на цю площину й знайти модуль F_{xy} проекції $\vec{F}_{xy}$;

3) опустити з точки O перетину осі з площиною перпендикуляр на лінію дії $\vec{F}_{xy}$ і знайти його довжину h_1;

4) обчислити добуток

$$F_{xy} \cdot h_1;$$

5) з’ясувати знак моменту.

Момент певної сили $\vec{F}$ відносно осі z зображують відрізком цієї осі, відкладеним від точки O у додатному напрямкові осі z, якщо $M_z(\vec{F})>0$ (див. рис. 3.6,а), і у від'ємному – якщо $M_z(\vec{F})>0$ (див. рис. 3.6,б).

Момент сили відносно осі дорівнює нулеві у двох випадках:

☝ сила паралельна осі, оскільки в цьому разі в формулі (3.4) $F_{xy}=0$ (див. на рис. 3.5 сили $\vec{G}$ і $\vec{F}_z$);

✌ лінія дії сили перетинає вісь, оскільки в цьому разі в формулі (3.4) $h_1=0$ (див. на рис. 3.5,б силу $\vec{P}$, лінія дії проекції $\vec{P}_{xy}$ якої на площину xy проходить через точку O й тому у цієї проекції *немає плеча* відносно точки O).

Очевидно, що обидва випадки можна об'єднати одним правилом:

> ⓘ якщо через *лінію дії сили і вісь* можна *провести площину*, то ***момент*** цієї ***сили відносно*** даної ***осі дорівнює нулеві***.

§ 3.3. ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ МОМЕНТАМИ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА ВІДНОСНО ОСІ

Скориставшись знаннями елементарної й аналітичної геометрій, векторної алгебри й нарисної геометрії, установимо залежність між моментом певної сили $\vec{F}$ відносно довільної точки O і моментом цієї сили відносно осі z, яка проходить саме через точку O.

Нехай на матеріальне тіло у точці A, положення якої визначає радіус-вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$, діє сила $\vec{F}$ (див. рис. 3.7,а, де тіло не зображено). Спроектувавши вектор $\vec{F}$ на перпендикулярну до осі z площину xy, дістанемо на цій площині проекції $\vec{F}_{xy}$, A_1 і B_1 відповідно самої сили $\vec{F}$ і точок A та B. Також зобразимо на цьому рисунку:

1) трикутник OAB, який лежить в площині Π дії сили $\vec{F}$;

2) трикутник OA_1B_1, який лежить в площині xy дії сили $\vec{F}_{xy}$;

3) вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O (згідно з рисунком 3.4 $\vec{M}_O(\vec{F})\perp \Pi$);

4) момент $M_z(\vec{F})$ сили $\vec{F}$ відносно осі z (згідно з рисунком 3.6 відрізок, що зображує $M_z(\vec{F})$, лежить на осі z).

За формулою (3.3) модуль моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O

$$M_O\left(\vec{F}\right) = F \cdot h\,, \tag{*}$$

а за формулою (3.4) момент сили $\vec{F}$ відносно осі z

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}_{xy}\right) = +F_{xy} \cdot h_1, \tag{**}$$

де h і h_1 – плечі сил $\vec{F}$ і $\vec{F}_{xy}$ відносно точки O.

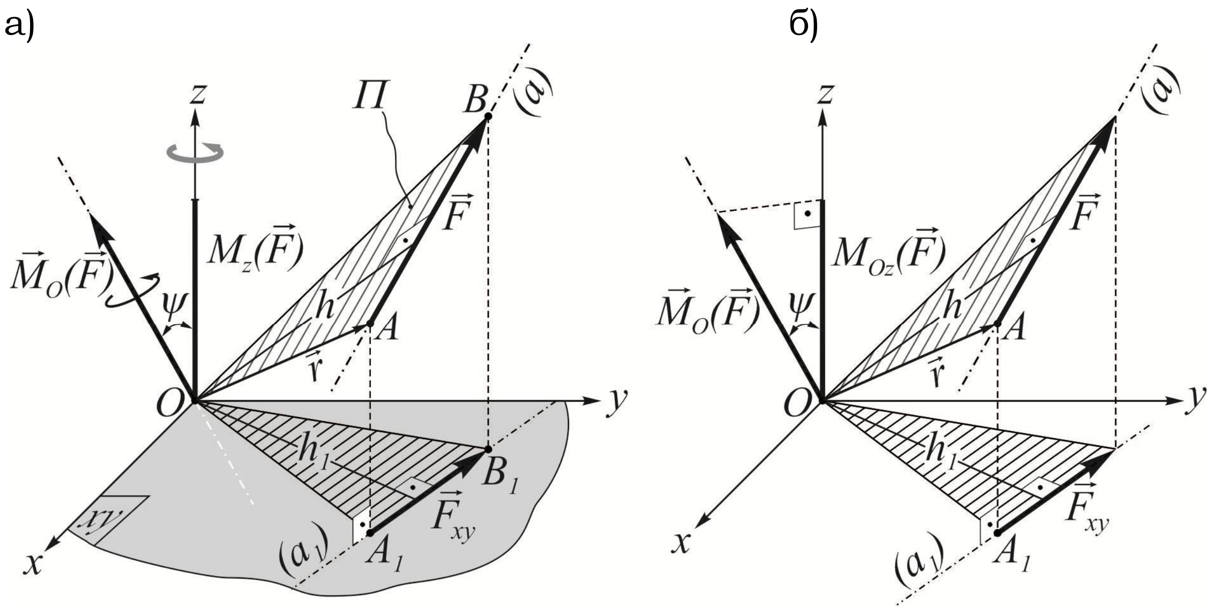


Рис. 3.7

Знайдемо тепер площі трикутників OAB і OA_1B_1:

$$A_{OAB} = \frac{AB \cdot h}{2} \quad \text{і} \quad A_{OA_1B_1} = \frac{A_1B_1 \cdot h_1}{2}.$$

Якщо ж урахувати, що довжини відрізків AB і A_1B_1 визначають відповідно модулі F і F_{xy} (тобто, $AB = \left|\vec{F}\right| = F$ і $A_1B_1 = \left|\vec{F}_{xy}\right| = F_{xy}$), то формулам площ трикутників можна надати вигляду

$$A_{OAB} = \frac{F \cdot h}{2} \quad \text{і} \quad A_{OA_1B_1} = \frac{F_{xy} \cdot h_1}{2}. \tag{***}$$

Порівнюючи рівності (*), (**) і (***), бачимо, що

$$M_O(\vec{F}) = 2 \cdot A_{OAB} \quad \text{і} \quad M_z(\vec{F}) = 2 \cdot A_{OA_1B_1}. \qquad (****)$$

З рисунка 3.7,а видно, що трикутник OA_1B_1 є проекцією трикутника OAB на площину xy; тоді, як відомо з аналітичної геометрії, добуток площі A_{OAB} трикутника OAB на косинус *кута* між площинами цих трикутників дорівнює площі $A_{OA_1B_1}$ трикутника OA_1B_1. А з векторної алгебри відомо, що зазначений *кут* дорівнює куту між нормалями до цих площин. Оскільки ж вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ напрямлений по нормалі до площини Π, а вісь z проходить по нормалі до площини xy, то, позначивши кут між $\vec{M}_O(\vec{F})$ і віссю z як ψ, дістанемо, що кут між площинами трикутників OA_1B_1 і OAB також дорівнює ψ, через що

$$A_{OAB} \cdot cos\psi = A_{OA_1B_1}.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на два, дістанемо

$$2 \cdot A_{OAB} \cdot cos\psi = 2 \cdot A_{OA_1B_1}.$$

Узявши до уваги рівності (****), встановлюємо остаточно, що

$$M_O(\vec{F}) \cdot cos\psi = M_z(\vec{F}). \qquad \textbf{(3.5)}$$

Оскільки добуток $M_O(\vec{F}) \cdot cos\psi$ – це проекція вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на вісь z (див. рис. 3.7,б), то рівність (3.5) можна подати у вигляді

$$M_{Oz}(\vec{F}) = M_z(\vec{F}). \qquad \textbf{(3.5)}$$

Таким чином,

ⓘ якщо точка O лежить на осі z, то ***проекція*** $M_{Oz}(\vec{F})$ ***вектора*** $\vec{M}_O(\vec{F})$ ***моменту*** певної ***сили*** $\vec{F}$ ***відносно точки*** O ***на*** цю ***вісь дорівнює моменту*** $M_z(\vec{F})$ ***сили*** $\vec{F}$ ***відносно осі*** z.

Якщо на осі z довільно обрати іншу точку O_1 (рис. 3.8), то, звичайно, вектор моменту сили $\vec{F}$ відносно цієї точки

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{F}) \neq \vec{M}_O(\vec{F}),$$

кут з віссю z

$$\psi_1 \neq \psi$$

і в загальному випадку модуль

$$M_{O_1}(\vec{F}) = 2 \cdot A_{O_1AB} \neq M_O(\vec{F})$$

через те, що площа трикутника

$$A_{O_1AB} \neq A_{OAB}.$$

Оскільки ж проекцією на площину xy обох трикутників OAB і O_1AB є один трикутник OA_1B_1, то

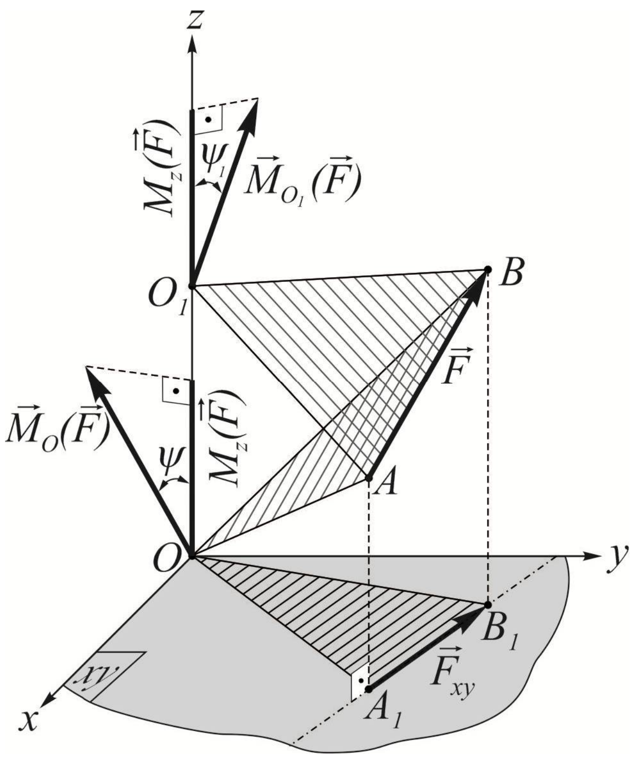


Рис. 3.8

ⓘ проекції на вісь z моментів сили $\vec{F}$ відносно будь-яких точок цієї осі мають одну й ту ж величину, рівну моменту сили $\vec{F}$ відносно осі z:

$$M_{Oz}(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cdot cos\psi = M_z(\vec{F}),$$

$$M_{O_1z}(\vec{F}) = M_{O_1}(\vec{F}) \cdot cos\psi_1 = M_z(\vec{F}).$$

§ 3.4. ТЕОРЕМИ ВАРІНЬОНА ПРО МОМЕНТ РІВНОДІЙНОЇ ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ

П’єр Варіньон (фр. *Pierre Varignon*, 1654–1723) – видатний французький вчений, математик і механік. Основний внесок Варіньон здійснив у статику, основи якої виклав у книзі «Проект нової механіки» (1687).

Теореми Варіньона про момент рівнодійної збіжної системи сил:

- вектор моменту рівнодійної збіжної системи сил *відносно* довільної *точки* дорівнює геометричній сумі векторів моментів складових сил відносно тієї ж точки.

- момент рівнодійної збіжної системи сил *відносно* довільної *осі* дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї ж осі.

Для доведення теорем розглянемо яку-небудь збіжну систему сил $\{\vec{F}\}$ з n сил; нехай лінії дій сил системи перетинаються у точці K. Як відомо (див. § 2.2), ця система сил зводиться до рівнодійної $\vec{R}$, яка прикладена в точці K.

Візьмемо довільну точку O й визначимо положення точки K радіус-вектором $\vec{r}=\overrightarrow{OK}$. Згідно з формулою (3.2) вектор моменту рівнодійної $\vec{R}$ відносно точки O

$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right)=\vec{r}\times\vec{R}.$$

Якщо за наслідком до аксіоми 2 перенести всі сили системи по їх лініям дій у точку K, то уведений радіус-вектор $\vec{r}$ буде визначати положення точки прикладання кожної сили системи. За формулою (2.6)

$$\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i;$$

підставляючи це значення у попередню рівність, отримаємо, що

$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right)=\vec{r}\times\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}\times\vec{F}_i\right),$$

де, знову таки, згідно з формулою (3.2)

$$\vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right),$$

урахувавши що, остаточно дістанемо

$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right). \qquad \textbf{(3.6)}$$

Тепер проведімо через точку O довільну вісь z та спроектуємо обидві частини рівності (3.6) на цю вісь:

$$M_{Oz}\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right).$$

Оскільки згідно з формулою (3.5) проекції

$$M_{Oz}\left(\vec{R}\right) = M_z\left(\vec{R}\right) \quad \text{і} \quad M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right) = M_z\left(\vec{F}_i\right),$$

то, урахувавши ці значення, матимемо

$$M_z\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right). \qquad \textbf{(3.7)}$$

Формули (3.6) і (3.7) – це математичні вирази, які й є доведенням теореми Варіньона про момент рівнодійної збіжної системи сил.

§ 3.5. ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА ДЛЯ МОМЕНТІВ СИЛИ ВІДНОСНО ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТНИХ ОСЕЙ

Леонард Ейлер (нім. *Leonhard Euler*, 1707–1783) – швейцарський математик і фізик, який провів більшу частину свого життя в Росії та Німеччині. Ейлер здійснив важливі відкриття в таких різних галузях математики, як математичний аналіз і теорія графів. Він також ввів велику частину сучасної математичної термінології і позначень. Ейлер відомий також завдяки своїм роботам у механіці, динаміці рідини, оптиці й астрономії, інших прикладних науках. Ейлер вважається найвидатнішим математиком 18-го століття, а, можливо, навіть усіх часів. Він також є одним з найбільш плідних – збірка всіх його творів зайняла б 60–80 томів.

Розглянемо силу $\vec{F}$, що прикладена у певній точці A, положення якої в декартовій системі координат $Oxyz$ визначають координати $x_A = x$, $y_A = y$ і $z_A = z$ (рис. 3.9). За формулою (3.2) вектор моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F} .$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки A відносно початку координат.

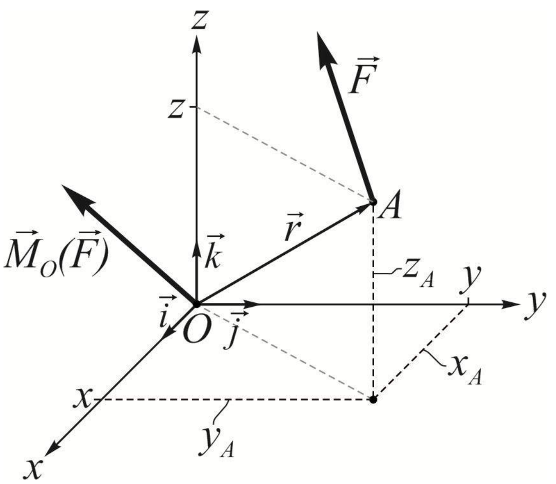


Рис. 3.9

З векторної алгебри відомо, що в декартових координатах векторний добуток $\vec{r} \times \vec{F}$ можна подати через визначник третього порядку:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ – орти декартових координатних осей x, y та z; r_x, r_y, r_z, F_x, F_y, F_z – проекції на ці осі радіус-вектора $\vec{r}$ і сили $\vec{F}$ відповідно.

Знову таки, згідно з векторною алгеброю проекції радіус-вектора

$$r_x = x_A - x_O, \quad r_y = y_A - y_O \quad \text{і} \quad r_z = z_A - z_O,$$

де x_A, y_A і z_A – координати точки A кінця вектора $\vec{r}$, а x_O, y_O і z_O – координати точки O початку цього вектора.

Оскільки $A(x, y, z)$, а $O(0,0,0)$, то

$$r_x = x - 0 = x,$$

$$r_y = y - 0 = y,$$

$$r_z = z - 0 = z.$$

Урахувавши наведене, дістаємо, що

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix},$$

а, розклавши визначник за елементами першого рядка, отримуємо

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{i}\cdot\left(y\cdot F_z-z\cdot F_y\right)+\vec{j}\cdot\left(z\cdot F_x-x\cdot F_z\right)+\vec{k}\cdot\left(x\cdot F_y-y\cdot F_x\right). \quad (*)$$

Запишімо тепер вектор $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$ у координатній формі за його проекціями $M_{Ox}\left(\vec{F}\right)$, $M_{Oy}\left(\vec{F}\right)$ і $M_{Oz}\left(\vec{F}\right)$ на декартові осі:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{i}\cdot M_{Ox}\left(\vec{F}\right)+\vec{j}\cdot M_{Oy}\left(\vec{F}\right)+\vec{k}\cdot M_{Oz}\left(\vec{F}\right);$$

урахувавши ж визначувані формулою (3.5) значення, дістанемо

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{i}\cdot M_x\left(\vec{F}\right)+\vec{j}\cdot M_y\left(\vec{F}\right)+\vec{k}\cdot M_z\left(\vec{F}\right), \quad (**)$$

де $M_x\left(\vec{F}\right)$, $M_y\left(\vec{F}\right)$ і $M_z\left(\vec{F}\right)$ – моменти сили $\vec{F}$ відносно осей x, y і z відповідно.

Оскільки ліві частини рівностей (*) і (**) однакові, то, певна річ, й праві частини їх однакові; порівнюючи праві частини цих рівностей, неважко бачити, що

$$\left.\begin{aligned} M_x\left(\vec{F}\right)&=y\cdot F_z-z\cdot F_y\,,\\ M_y\left(\vec{F}\right)&=z\cdot F_x-x\cdot F_z\,,\\ M_z\left(\vec{F}\right)&=x\cdot F_y-y\cdot F_x\,.\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(3.8)}$$

Рівності (3.8) і є ***формулами Ейлера*** для моментів сили відносно декартових координатних осей, які також називають *аналітичними виразами моментів сили відносно декартових координатних осей*. За цими формулами, знаючи проекції сили і координати точки її прикладання, можна знаходити моменти сили відносно осей.

ТЕМА 4 ► ТЕОРІЯ ПАР СИЛ

- Зведення до канонічного вигляду системи з двох паралельних однаково напрямлених сил
- Зведення до канонічного вигляду системи з двох антипаралельних сил
- Зведення до канонічного вигляду паралельної системи сил
- Пара сил. Момент пари сил
- Властивості пар сил
- Розподілені по довжині навантаження. Рівнодійні розподілених навантажень
- Реакція абсолютно жорсткого затиснення

§ 4.1. ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ СИСТЕМИ З ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОДНАКОВО НАПРЯМЛЕНИХ СИЛ

Нехай до певного матеріального тіла у точках A і B прикладені дві паралельні й однаково напрямлені сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$; при цьому $F_1 > F_2$, а $AB = \ell$ (рис. 4.1,а). З'ясуємо до якого канонічного вигляду зводиться ця система з двох сил $\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\right\}$ (або іншими словами – розв'яжімо для паралельної системи сил $\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\right\}_{вих}$ *першу основну задачу статики*). Для цього виконаємо такі легітимні дії-перетворення (див. рис. 4.1,б):

1. На підставі наслідку з аксіоми 2 перенесімо силу $\vec{F}_2$ уздовж її лінії дії у точку B', яка знаходиться на найкоротшій віддалі від точки A; позначимо цю віддаль як h: $AB' = h$ (зазначену дію можна і не робити, але для спрощення подальших міркувань краще зробити).

2. За аксіомою 2 додамо до діючої на тіло системи сил $\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\right\}$ зрівноважену систему сил $\left\{\vec{Q}_1, \vec{Q}_2\right\}$, яку оберімо відповідно до аксіоми 1, прикладаючи у точках A та B' рівні за модулем і протилежно направлені сили $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$ (їх модуль може бути будь-яким); у результаті дістанемо дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{Q}_1$, які прикладені у точці A, й дві сили $\vec{F}_2$ і $\vec{Q}_2$, що прикладені у точці B'; звісно,

$$\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2\right\} \backsim \left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\right\}_{вих}.$$

3. За аксіомою 3 визначимо для сил $\vec{F}_1$ і $\vec{Q}_1$, їх рівнодійну $\vec{R}_1$, яка також прикладена у точці A, та для сил $\vec{F}_2$ і $\vec{Q}_2$ – $\vec{R}_2$, яка прикладена у точці B'; тоді у точках A і B' отримуємо дві сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$; оскільки ж

$$\vec{R}_1 \backsim \left\{\vec{F}_1, \vec{Q}_1\right\},$$

а

$$\vec{R}_2 \backsim \left\{\vec{F}_2, \vec{Q}_2\right\},$$

то

$$\left\{\vec{R}_1, \vec{R}_2\right\} \backsim \left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\right\}_{вих}.$$

4. Зображуємо лінії дій сил $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ й знаходимо точку перетину цих ліній, позначивши її K'.

5. На підставі наслідку з аксіоми 2 перенесемо сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ уздовж їх ліній дій у точку K' й отримаємо дві сили, що прикладені в одній точці (безсумнівно, ці дві сили відповідно до викладеного у § 2.1 можна було б одразу додати, знайшовши їх рівнодійну, але для спрощення подальших міркувань вчинимо по іншому).

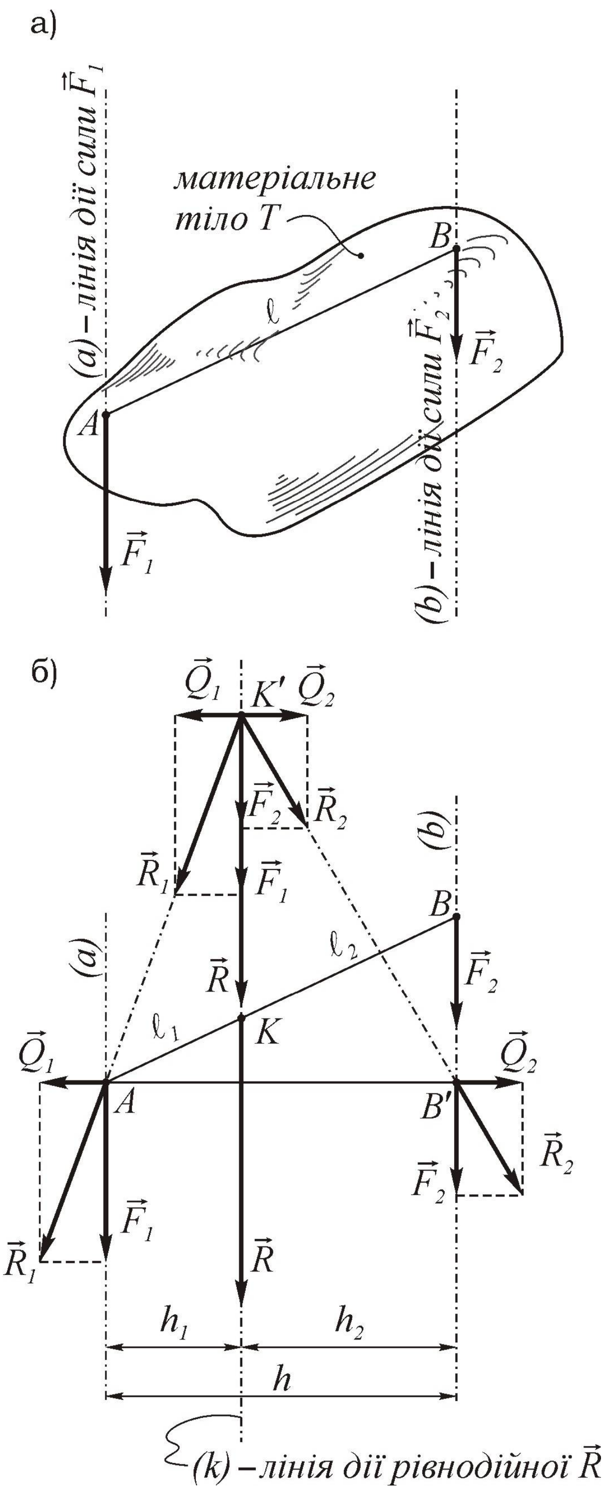


Рис. 4.1

6. Розкладемо у точці K' силу $\vec{R}_1$ на її ортогональні складові, прийнявши одну зі складових рівною $\vec{Q}_1$; зрозуміло, що інша складова обов'язково виявиться рівною $\vec{F}_1$; аналогічно розкладемо і силу $\vec{R}_2$; у результаті отримаємо прикладену у точці K' систему сил

$$\left\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{Q}_1,\vec{Q}_2\right\} \backsim \left\{\vec{F}_1,\vec{F}_2\right\}_{вих};$$

7. Оскільки $\vec{Q}_2 = -\vec{Q}_1$ й ці сили мають спільну лінію дії, то на підставі аксіоми 1

$$\left\{\vec{Q}_1,\vec{Q}_2\right\} \backsim 0,$$

через що згідно з аксіомою 2 відкидаємо зрівноважену систему сил $\left\{\vec{Q}_1,\vec{Q}_2\right\}$ й отримуємо у точці K' дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що діють в одному напрямкові по одній прямій, яку позначимо (k); неважко зрозуміти, що пряма (k) паралельна до ліній дій (a) і (b) вихідних сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$;

8. Відповідно до викладеного в § 2.1 і рисунка 2.3,а складаємо прикладені у точці K' сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ й отримуємо їх рівнодійну $\vec{R}$, яка також лежить на прямій (k) і модуль якої визначимо за формулою (2.3):

$$R = F_1 + F_2. \qquad \textbf{(4.1)}$$

9. За наслідком до аксіоми 2 перенесемо рівнодійну $\vec{R}$ уздовж її лінії дії (k) у точку K, що знаходиться на відрізку AB (цього можна було б і не робити, оскільки сила $\vec{R}$, як ковзний вектор, може бути прикладеною в будь-якій точці своєї лінії дії) та позначимо отримані відрізки: $AK = \ell_1$ та $BK = \ell_2$;

10. Визначимо положення лінії (k) і точки K; позначивши на рисунку 4.1,б найкоротші віддалі між лініями дій

(k), (a) і (b) як h_1 і h_2 та розглянувши відповідні подібні трикутники, неважко довести[1], що

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{F_2}{F_1}. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Через те, що у прямокутному трикутнику ABB' частини h_1 і h_2 катету AB' прямо пропорційні частинам ℓ_1 і ℓ_2 гіпотенузи AB, то також і

$$\frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{F_2}{F_1}. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Оскільки в результаті здійснених перетворень дістали, що

$$\vec{R} \backsim \left\{\vec{F}_1,\vec{F}_2\right\}_{вих},$$

то відповідно до визначення рівнодійної сили (див. §1.2), сила $\vec{R}$ є *рівнодійною*.

Наведені міркування й отримані формули (4.1) і (4.2) дозволяють зробити **висновок**:

> ⓘ ***система двох паралельних однаково напрямлених сил*** $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ ***зводиться до рівнодійної*** $\vec{R}$ (або: ***канонічним виглядом двох паралельних однаково напрямлених сил, що прикладені до одного матеріального тіла, є рівнодійна***), яка проходить паралельно до розглядуваних сил у тому самому напрямку, що і сили (див. рис. 4.1,б); модуль рівнодійної дорівнює сумі модулів сил, а лінія її дії проходить через точку K, яка ділить відстань між точками A і B прикладання цих сил (або найкоротшу відстань між лініями дій сил) на частини, обернено пропорційні модулям цих сил.

У певних ситуаціях виникає потреба зворотної дії – розкладання тієї чи іншої сили на дві її паралельні складові; таку задачу розв'язують аналогічно до викладеного вище.

[1] Охочим пропонується зробити це самостійно.

§ 4.2. ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ СИСТЕМИ З ДВОХ АНТИПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ

ⓘ ***Антипаралельні сили*** – дві протилежні за напрямком сили, лінії дії яких паралельні одна одній.

Розглянемо дві паралельні та протилежно напрямлені сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, (для визначеності приймімо, що $F_1 > F_2$), які прикладені до певного матеріального тіла у точках A і B, найкоротша віддаль між лініями дій яких дорівнює h (див. рис. 4.2, де саме тіло умовно не зображено). З'ясуємо до якого канонічного вигляду зводиться система $\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\right\}_{вих}$.

Для цього:

1. Розкладемо більшу силу $\vec{F}_1$ на її дві паралельні складові $\vec{F}_1'$ і $\vec{F}_1''$, які напрямлені в бік самої сили $\vec{F}_1$; при цьому складову $\vec{F}_1''$ прикладімо у точці B та приймімо, що $F_1'' = F_2$; сила $\vec{F}_1'$ виявиться прикладеною у певній точці K тіла; у результаті дістанемо, що

$$\left\{\vec{F}_1', \vec{F}_1'', \vec{F}_2\right\} \backsim \left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\right\}_{вих}.$$

2. Оскільки прийнято, що $\vec{F}_1'' = -\vec{F}_2$, то відповідно до аксіоми 1

$$\left\{\vec{F}_1'', \vec{F}_2\right\} \backsim 0$$

й, діючи за аксіомою 2, відкидаємо цю зрівноважену систему сил.

3. У результаті здійснених перетворень дістали, що

$$\vec{F}_1' \backsim \left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\right\}_{вих};$$

узявши до уваги визначення рівнодійної (див. §1.2) встановлюємо, що у даному разі сила $\vec{F}_1'$ є *рів-*

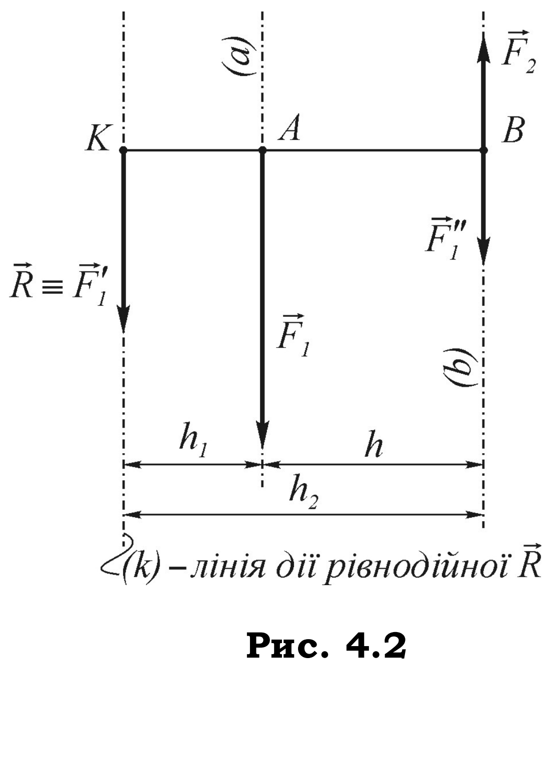


Рис. 4.2

нодійною вихідної системи (тобто $\vec{F}_1' \equiv \vec{R}$), позначимо її лінію дії як (k).

4. Визначимо тепер модуль рівнодійної й положення лінії (k) і точки K; позначивши відповідні віддалі h_1 і h_2 й адаптувавши формули (4.1) і (4.2) до сил на рисунку 4.2, дістанемо:

$$F_1' + F_1'' = F_1$$

та

$$\frac{F_1'}{F_1''} = \frac{h}{h_1}.$$

5. Оскільки ж у даному разі $F_1' = R$, а $F_1'' = F_2$, то

$$R + F_2 = F_1,$$

а

$$\frac{R}{F_2} = \frac{h}{h_1}.$$

Остаточно (після простих перетворень) дістанемо:

$$R = F_1 - F_2; \qquad \textbf{(4.3)}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{F_2}{F_1}. \qquad \textbf{(4.4)}$$

Отож, викладені міркування та отримані формули (4.3) та (4.4) дозволяють зробити **висновок**:

ⓘ система двох *не рівних за модулем* антипаралельних сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ ***зводиться до рівнодійної*** $\vec{R}$, яка проходить паралельно до розглядуваних сил в напрямку більшої за величиною сили; модуль рівнодійної дорівнює різниці модулів сил, а лінія її дії проходить через точку K, що знаходиться ззовні від більшої сили на відстанях між лініями дій сил, які (мається на увазі відстані) обернено пропорційні модулям цих сил.

Також з формул $\dfrac{R}{F_2}=\dfrac{h}{h_1}$ і (4.3) неважко отримати, що

$$h_1=\frac{F_2}{F_1-F_2}\cdot h, \qquad \textbf{(4.5)}$$

а аналізуючи формули (4.3) і (4.5), усвідомити, що:

1) якщо модуль F_1 більшої сили збільшується, то модуль R рівнодійної також збільшується, а віддаль h_1 зменшується, тобто точка K у просторі наближається до точки A;
2) якщо модуль F_1 більшої сили зменшується та наближається до значення модуля F_2 меншої сили, то модуль R рівнодійної зменшується, віддаль h_1 збільшується та точка K віддаляється від точки A;
3) якщо $F_1=F_2$, то формальне застосування формул (4.3) і (4.5) приводить до того, що $R=F_1-F_2=0$ (тобто, ***рівнодійна дорівнює нулю***), а

$$h_1=\frac{F_2}{F_1-F_2}=\frac{F_2}{0}=\infty$$

й, отже, точка K і лінія дії рівнодійної, яка «дорівнює нулеві», знаходяться в нескінченності.

Таким чином, у третьому розглянутому випадкові виникає очевидна невизначеність: для системи з двох сил $\left\{\vec{F}_1;\vec{F}_2=-\vec{F}_1\right\}$ «рівнодійна дорівнює нулю», але вони *не утворюють зрівноваженої системи сил,* оскільки не виконується одна з вимог аксіоми №1 – у зазначених сил *немає спільної лінії дії*. У цьому випадку ***рівнодійна відсутня***, а дві однакові за модулем антипаралельні сили, що не лежать на одній лінії дії утворюють іще один ***неспрощуваний динамічний елемент***, який називають ***парою сил***.

🛈 Окрім ***сили***, другим *самостійним елементом механіки*, який характеризує та визначає механічну взаємодію між тілами, є ***пара сил***.

§ 4.3. ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ПАРАЛЕЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ

Для означеного у назві теми 4 змісту викладене в §§ 4.1÷4.2 має допоміжне значення й логічно приводить до поняття пари сил.

Але проведені міркування й отримані результати мають і самостійне значення, адже по суті розв’язана задача про зведення до канонічного вигляду ***паралельної системи сил*** (просторової чи плоскої), що складається з довільної кількості сил $\vec{F}_i \ (i = 1, 2, ..., n)$.

У разі, коли усі сили системи $\{\vec{F}_n\}$ мають ***однаковий напрямок*** канонічним виглядом її є ***рівнодійна***, значення якої отримується послідовним додаванням усіх сил системи та модуль якої

$$R = F_1 + F_2 + ... + F_i + ... + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i \, , \qquad \textbf{(4.6)}$$

де n – кількість сил системи; напрямок рівнодійної збігається з напрямками сил системи, а положення точки прикладання вектора $\vec{R}$ визначається на підставі відповідних нескладних міркувань.

У разі, коли сили системи $\{\vec{F}_{n+k}\}$ спрямовані в ***протилежних напрямках***, то спочатку за формулою (4.6) визначають рівнодійну $\vec{R}_1$ тих n сил, які напрямлені в одному напрямку $\left(R_1 = \sum_{i=1}^{n} F_i \right)$, потім – рівнодійну $\vec{R}_2$ тих k сил, які напрямлені в іншому напрямку $\left(R_2 = \sum_{j=1}^{k} F_j \right)$, а потім залежно від отриманих значень $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ за формулами (4.3)÷(4.5) встановлюють канонічний вигляд даної системи сил – ***рівнодійна*** чи ***пара сил***.

§ 4.4. ПАРА СИЛ. МОМЕНТ ПАРИ СИЛ

ⓘ ***Пара сил*** – це система з двох рівних за модулем антипаралельних сил (наприклад, $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$), які не лежать на одній прямій.

Позначення пари сил: $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$.

Нехай на рисунку 4.3 $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ – пара сил, а (a) та (b) – паралельні лінії дій сил $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, що прикладені до твердого тіла (яке на рисунку не зображене) у точках A і B відповідно.

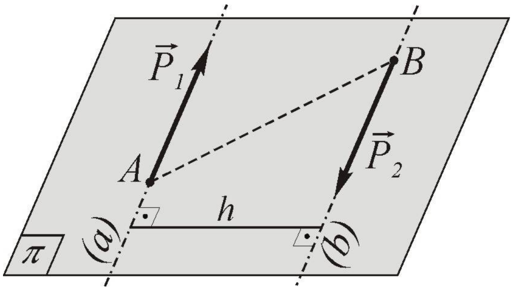


Рис. 4.3. Пара сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$

ⓘ Площину π, що проходить через лінії дій (a) і (b) сил $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, називають ***площиною дії пари сил*** $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$.

ⓘ ***Плечем пари сил*** $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ називають найкоротшу віддаль h між лініями дій сил пари (звичайно, плече пари *визначає* встановлений до лінії дій сил пари *перпендикуляр* та *його довжина*).

У разі дії пари сил на абсолютно тверде тіло кожну з сил пари відповідно до наслідку з аксіоми 2 можна переносити вздовж своєї лінії дії у будь-яку іншу точку; при цьому віддаль AB між точками прикладання сил зазначеної пари буде змінюватися, але її плече h буде лишатися незмінним.

Тому що рівні за модулем і протилежні за напрямком сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ *не мають спільної лінії дії*, то ці сили не утворюють зрівноваженої системи сил, а пара сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ прагне ***обертати*** розглядуване тіло у площині своєї дії у тому чи протилежному до нього напрямкові (так на рисунку 4.3 пара сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ прагне обертати площину π та матеріальне тіло за рухом годинникової стрілки).

Оскільки *кожну обертальну дію* характеризує та визначає відповідний *момент*, то, розглянувши певну пару сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$, знайдемо момент $\vec{M}\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ цієї пари відносно довільної точки O простору (рис. 4.4) як суму моментів сил пари відносно тієї ж точки:

$$\vec{M}\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right) = \vec{M}_O\left(\vec{P}_1\right) + \vec{M}_O\left(\vec{P}_2\right),$$

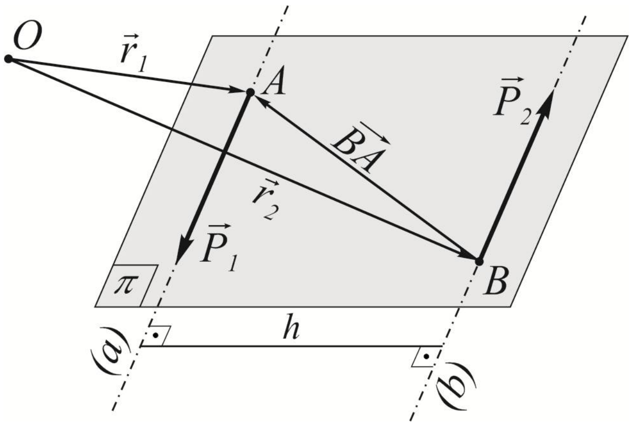


Рис. 4.4

За формулою (3.2)

$$\vec{M}_O\left(\vec{P}_1\right)=\vec{r}_1\times\vec{P}_1$$

і

$$\vec{M}_O\left(\vec{P}_2\right)=\vec{r}_2\times\vec{P}_2;$$

тоді

$$\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)=\vec{r}_1\times\vec{P}_1+\vec{r}_2\times\vec{P}_2.$$

Оскільки ж $\vec{P}_2=-\vec{P}_1$, то

$$\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)=\vec{r}_1\times\vec{P}_1+\vec{r}_2\times\left(-\vec{P}_1\right)=\vec{r}_1\times\vec{P}_1-\vec{r}_2\times\vec{P}_1=\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\times\vec{P}_1.$$

З рисунка 4.4 видно, що $\vec{r}_1=\vec{r}_2+\overrightarrow{BA}$, звідки $\vec{r}_1-\vec{r}_2=\overrightarrow{BA}$, з урахуванням чого остання векторна рівність набуває вигляду

$$\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)=\overrightarrow{BA}\times\vec{P}_1.$$

Але відповідно до формули (3.2) векторний добуток $\overrightarrow{BA}\times\vec{P}_1$ визначає вектор моменту сили $\vec{P}_1$, прикладеної у точці A, відносно точки B, тобто $\overrightarrow{BA}\times\vec{P}_1=\vec{M}_B\left(\vec{P}_1\right)$ й, таким чином, остаточно

$$\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)=\vec{M}_B\left(\vec{P}_1\right).$$

Далі врахуємо, що згідно з викладеним у § 3.1 і рисунком 3.4 $\vec{M}_B\left(\vec{P}_1\right)$ – це вектор, який прикладений у точці B і проходить перпендикулярно до площини π у тому напрямку, звідки видно прагнення сили $\vec{P}_1$ обертати площину π навколо точки B проти руху годинникової стрілки; зобразимо відповідно вектор $\vec{M}_B\left(\vec{P}_1\right)$ на рисунку 4.5.

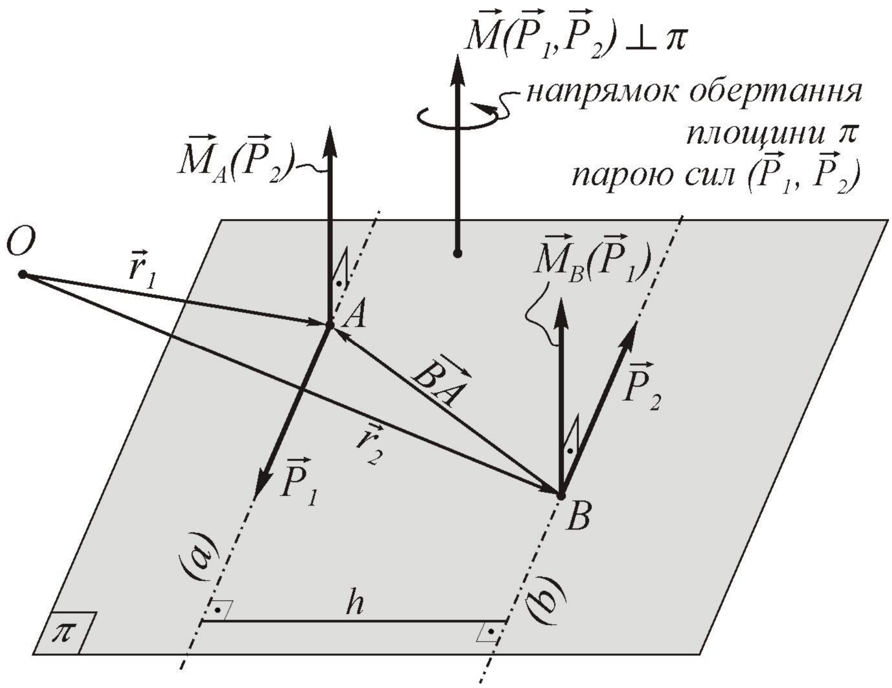


Рис. 4.5. Вектор $\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)$ моменту пари сил $\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)$

Таким чином,

ⓘ ***момент пари сил*** - це фізична *векторна* величина, яка характеризує й визначає прагнення пари сил обертати матеріальне тіло, до якого вона прикладена, у площині своєї дії.

Неважко довести, що також

$$\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)=\vec{M}_A\left(\vec{P}_2\right)=\overrightarrow{AB}\times\vec{P}_2.$$

де $\vec{M}_A\left(\vec{P}_2\right)$ – вектор, що прикладений у точці A та проходить перпендикулярно до площини π у тому напрямку, звідки видно прагнення сили $\vec{P}_2$ обертати площину π навколо точки A проти руху годинникової стрілки.

Зобразивши вектор $\vec{M}_A\left(\vec{P}_2\right)$ на рисунку 4.5, бачимо, що *напрямки* векторів $\vec{M}_A\left(\vec{P}_2\right)$ і $\vec{M}_B\left(\vec{P}_1\right)$ *однакові*.

Оскільки згідно з формулою (3.3) модулі

$$M_A\left(\vec{P}_2\right)=P_2\cdot h \quad \text{і} \quad M_B\left(\vec{P}_1\right)=P_1\cdot h,$$

а за визначенням пари сил $P_2 = P_1$, то, певна річ, $M_A\left(\vec{P}_2\right) = M_B\left(\vec{P}_1\right)$; тобто, *модулі* векторів $\vec{M}_A\left(\vec{P}_2\right)$ і $\vec{M}_B\left(\vec{P}_1\right)$ також *однакові*.

Аналізуючи й узагальнюючи отримане, робимо **висновки**:

- вектор $\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)$ моменту пари сил $\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)$ визначає векторний добуток

$$\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right) = \overrightarrow{BA} \times \vec{P}_1 = \overrightarrow{AB} \times \vec{P}_2; \qquad \textbf{(4.7)}$$

- вектор $\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)$ проходить перпендикулярно до площини дії пари сил в тому напрямку, звідки видно прагнення пари сил $\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)$ обертати площину своєї дії (тобто площину π) проти руху годинникової стрілки;
- вектор $\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)$ моменту пари сил від положення точки O ніяк не залежить;
- вектор $\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)$ може бути прикладеним *у будь-якій точці площини* π[2];
- модуль $M\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)$ дорівнює добутку модуля будь-якої з сил пари на плече пари:

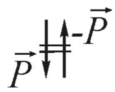
$$M\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right) = P_1 \cdot h = P_2 \cdot h. \qquad \textbf{(4.8)}$$

Якщо усі прикладені до тіла пари сил належать тільки ***одній*** певній ***площині***, то усі ці пари сил мають *спільну площину дії*, положення якої ніякого уточнення не потребує. Найчастіше у такому разі кожну з таких пар сил зображують дуговою стрілочкою, яка вказує ***напрямок*** прагнення обертати матеріальне тіло зазначеною парою в розглядуваній площині (можна також говорити, що зазначена стрілочка *вказує напрямок дії пари сил*); поруч зі стрілкою пишуть значення модуля моменту пари сил (наприклад, $\circlearrowleft M_1$ або $\circlearrowright M_2$). При цьому, якщо дугова стрілочка зображена проти руху годинникової стрілки, то момент пари сил вважають додатнім, як-

---

[2] За положеннями вищої математики такі вектори називають **вільними**.

що за рухом – від'ємним; тобто у зазначених ситуаціях момент пари сил розглядають як ***алгебраїчну величину***.

Інколи пари сил на схемах позначають як , або , або ; такі позначення вважаються застарілими.

Оскільки у системі одиниць СІ силу вимірюють у ньютонах, а плече – у метрах, то одиницею вимірювання моменту пари сил є *ньютонометр*:

$$\left[M\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)\right] = H \cdot м .$$

Відповідно до основних *понять* і *характеристик* ***сил*** існують аналогічні й для ***пар сил***.

ⓘ ***Активна пара сила*** – це така пара сил, яка прагне викликати обертання матеріального тіла, до якого вона прикладена, та ніяк не залежить ні від накладених на тіло в'язей, ні від дії інших сил і пар сил.

ⓘ ***Пасивна*** (або ***реактивна***) ***пара сил*** – це пара сил, з якою в'язь діє на розглядуване невільне тіло, перешкоджаючи обертанню цього тіла, та яка залежить від дії інших сил і пар сил.

ⓘ ***Еквівалентні пари сил*** – це такі *пари сил*, під дією яких (кожної окремо) розглядуване матеріальне тіло знаходиться в однаковому кінематичному стані.

ⓘ ***Системою пар сил*** називають сукупність декількох пар сил, прикладених до одного матеріального тіла.

ⓘ ***Зрівноважена система пар сил*** – така система пар сил, під дією якої матеріальне тіло знаходиться у стані спокою (у рівновазі) або *виконує* поступальний прямолінійний рівномірний рух.

Сумарна механічна дія на тіло зрівноваженої системи пар сил тотожна нулеві.

ⓘ ***Незрівноважена система пар сил*** – це така система пар сил, яка не є зрівноваженою.

ⓘ ***Плоска система пар сил*** - така система пар сил, в якій усі пари сил мають спільну площину дії.

ⓘ Якщо система пар сил не є плоскою, то вона є ***просторовою системою пар сил***.

ⓘ ***Еквівалентні системи пар сил*** – це такі *системи пар сил*, під дією яких (кожної окремо) матеріальне тіло знаходиться в однаковому кінематичному стані.

§ 4.5. ВЛАСТИВОСТІ ПАР СИЛ

Усі властивості витікають із того, що вектор моменту пари сил - вільний вектор (тобто властивості пар сил такі самі, як і властивості вільних векторів).

1. Пару сил, не змінюючи її механічної дії на матеріальне тіло, можна переносити та довільно обертати в площині її дії.

2. Пару сил, не змінюючи її механічної дії на тверде тіло, можна переносити в будь-яку іншу площину, що *паралельна* до площини дії зазначеної пари.

3. Дві пари сил ***еквівалентні*** тоді, коли вектори моментів цих пар геометрично рівні; тобто

$$\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)\backsim\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right), \quad \text{якщо} \quad \vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)=\vec{M}\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right).$$

Так, якщо на рисунку 4.6 $P \neq F$ і $h_1 \neq h_2$, але $P \cdot h_1 = F \cdot h_2$ і $\pi_1 // \pi_2$, то $\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)\backsim\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right)$.

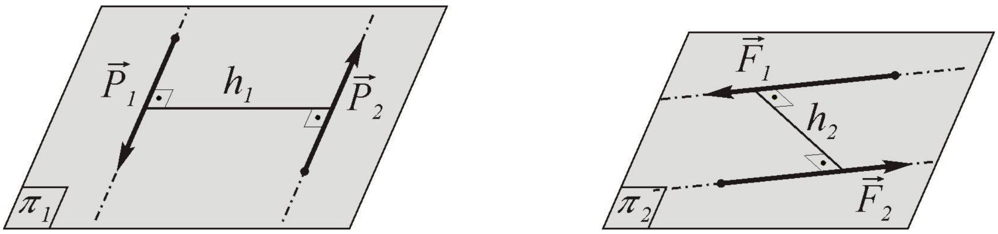


Рис. 4.6. Еквівалентні пари сил $\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)$ і $\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right)$

4. Система з n пар сил по дії еквівалентна одній парі сил, якщо вектор моменту цієї пари дорівнює геометричній сумі усіх векторів моментів пар сил розглядуваної системи:

$$\vec{M}_{екв} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \qquad \textbf{(4.9)}$$

– ***вектор моменту еквівалентної пари сил просторової системи пар сил.***

Якщо всі пари сил розглядуваної системи пар сил мають спільну площину дії, то

$$M_{екв} = \sum_{i=1}^{n} M_i \qquad \textbf{(4.10)}$$

– ***момент еквівалентної пари сил плоскої системи пар сил.***

5. Система з n пар сил є зрівноваженою тоді, коли $\vec{M}_{екв} = 0$. Оскільки для просторової системи пар сил $\vec{M}_{екв} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$, а для плоскої системи пар сил $M_{екв} = \sum_{i=1}^{n} M_i$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0 \qquad (4.11)$$

– ***умова рівноваги просторової системи пар сил***,

а

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \qquad (4.12)$$

– ***умова рівноваги плоскої системи пар сил.***

6. Дію певної пари сил можна зрівноважити тільки іншою парою сил, вектор моменту якої за модулем дорівнює модулю розглядуваної пари, а за напрямком – їй протилежний.

Розглянемо невеличкий приклад.

⚒ **Приклад 4.1.** Невагомий брус довжиною $\ell = 4\,м$ перебуває в горизонтальному положенні, будучи закріпленим у точці B шарнірно-нерухомою опорою, а точкою A спираючись на похилену під кутом α до горизонту ідеально гладку площину; на брус діє *пара сил,* момент якої $M = 48\,H \cdot м$ (рис. 4.7,а). Знайти реакції опор, якщо $cos\,\alpha = 0,8$.

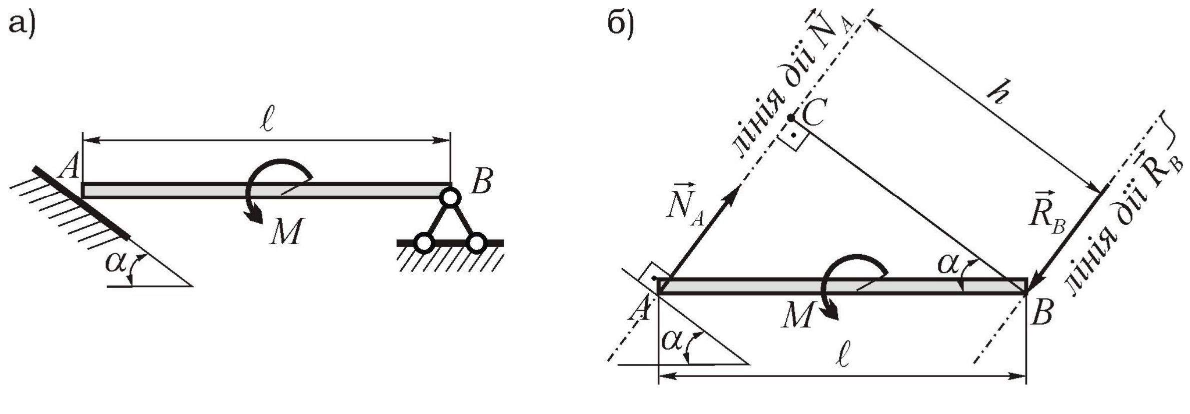


Рис. 4.7

Розв'язування. На невільний брус AB діє активна пара сил, яка прагне обертати брус в площині розташування рисунку проти руху годинникової стрілки. Рух брусу обмежений у точці A ідеально гладкою площиною, а у точці B –

шарнірно-нерухомою опорою. Застосовуючи принцип звільнення від в'язей, відкидаємо вказані опори, а їх дію замінюємо відповідними опорними реакціями. При цьому, згідно з викладеним у § 2.7, нормальна реакція $\vec{N}_A$ ідеально гладкої площини прикладена до брусу у точці A та лінія дії $\vec{N}_A$ проходить перпендикулярно до самої площини, а для реакції $\vec{R}_B$ шарнірно-нерухомої опори відома тільки точка її прикладання – точка B. Зі схеми також зрозуміло, що активна пара сил прагне притискати точку A брусу до похилої площини; тоді безумовно, що реакція $\vec{N}_A$ буде спрямована у протилежному до вказаної дії напрямкові[3]. Зобразимо цю реакцію на рис. 4.7,б, де брус розглядається як умовно вільне тіло.

Оскільки дію заданої в умові активної пари сил можна зрівноважити тільки іншою парою сил, то приходимо до висновку, що сили $\vec{N}_A$ і $\vec{R}_B$ й мають створювати зазначену іншу *пару сил*. Тоді:

1) лінія дії реакції $\vec{R}_B$ мусить бути паралельною лінії дії реакції $\vec{N}_A$;
2) напрямки векторів $\vec{R}_B$ і $\vec{N}_A$ мають бути протилежними;
3) модуль $R_B = N_A$.

З урахуванням з'ясованого зображуємо на рис. 4.7,б реакцію $\vec{R}_B$ та вказуємо плече h пари сил $\left(\vec{N}_A, \vec{R}_B\right)$, яка є *реактивною парою*, оскільки перешкоджає обертанню бруса. За формулою (4.8)

$$M\left(\vec{N}_A, \vec{R}_B\right) = N_A \cdot h = R_B \cdot h.$$

З трикутника ABC на рисунку 4.7,б встановлюємо, що

$$h = BC = AB \cdot cos\,\alpha = \ell \cdot cos\,\alpha .$$

---

[3] У розглядуваному прикладі й інших аналогічних випадках необхідно розуміти й враховувати, що за умови протилежного напрямку заданої в умові задачі активної пари сил, точка A брусу не буде тиснути на похилену площину і ніякої реакції $\vec{N}_A$ у такому разі виникати не буде. *Рівновага* брусу за такої умови взагалі *неможлива*.

Оскільки моменти обох діючих на брус пар сил мають бути однаковими, то, прирівнявши M та $M\left(\vec{N}_A, \vec{R}_B\right)$, матимемо:

$$N_A \cdot h = M \quad \text{або} \quad R_B \cdot h = M\,.$$

З отриманих рівностей, підставивши усі необхідні значення, остаточно дістанемо

$$N_A = R_B = \frac{M}{h} = \frac{M}{\ell \cdot cos\,\alpha} = \frac{48}{4 \cdot 0{,}8} = 15(H).$$

§ 4.6. РОЗПОДІЛЕНІ ПО ДОВЖИНІ НАВАНТАЖЕННЯ. РІВНОДІЙНІ РОЗПОДІЛЕНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Як відомо (див. § 1.2) *розподілені навантаження* – це діючі на ті чи інші ділянки (елементи) споруд, конструкцій чи машин *сили*, що прикладені не в одній точці, а *розподілені за* певним *неперервним законом.*

Розглянемо деякі найпростіші приклади ***розподілених по довжині навантажень*** (як правило, такі навантаження застосовують при дослідженнях плоских механічних систем, коли всі розглядувані матеріальні тіла та діючі на них сили і навантаження розташовані в одній площині). Розподілені по довжині навантаження можуть бути ***рівномірно розподіленими*** та ***нерівномірно розподіленими***. Прикладом рівномірно розподіленого по довжині навантаження є механічна дія (тиск) на балку перекриття (а точніше, на її повздовжній переріз) з боку певної посудини, що наповнена якоюсь рідиною (рис. 4.8,а); а нерівномірно розподіленого навантаження – з боку якзавгодно накиданої купи цегли (або піску) (рис. 4.8,б).

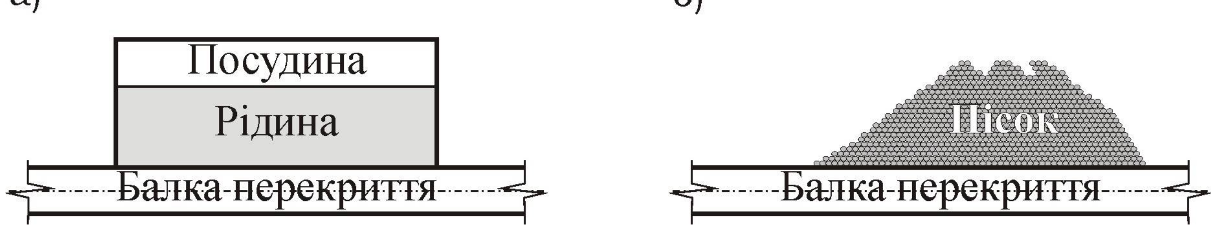


Рис. 4.8. Приклади розподілених по довжині навантажень

ⓘ Дію розподіленого навантаження характеризує фізична величина $\vec{q}$, яку називають ***інтенсивність розподіленого навантаження*** й яка визначає напрям і величину механічної дії на одиницю довжини прикладання навантаження.

Одиниця вимірювання інтенсивності розподіленого навантаження у Міжнародній системі одиниць СІ – *ньютон поділений на метр*:

$$[q] = \frac{Н}{м}.$$

ⓘ На схемах і рисунках розподілене навантаження подають графічним зображенням, що має назву ***епюра розподіленого навантаження***.

Епюра визначає місце прикладання, напрямок дії та закон (характер) розподілення навантаження по довжині ℓ його прикладання до розглядуваного матеріального тіла (конструкції, споруди тощо).

Оскільки інтенсивність $\vec{q}$ *рівномірно розподіленого* навантаження є величиною сталою, то епюра такого навантаження має вигляд *прямокутника* (рис, 4.9,а). Інтенсивність *нерівномірно розподіленого* навантаження залежить від характеру розподілення самого навантаження й в загальному випадку може змінюватися за будь-яким законом; найпростіший випадок – коли інтенсивність зростає від нуля до певного максимального значення $\vec{q}$ за лінійним законом; епюра такого навантаження має вигляд *прямокутного трикутника* (рис. 4.9,б).

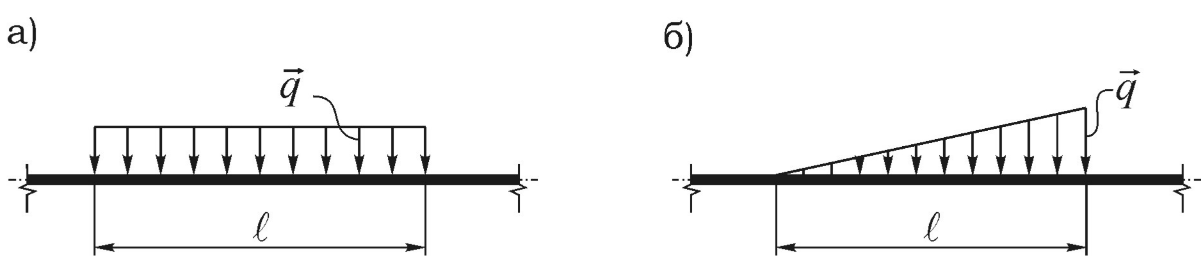


Рис. 4.9. Епюри розподілених по довжині навантажень

Зауважимо, що на епюрі рівномірно розподіленого навантаження висота кожної окремої стрілочки однакова, тому позначати та підписувати можна будь-яку зі стрілочок; на епюрі нерівномірно розподіленого за лінійним законом навантаження зазвичай (практично завжди) позначають та підписують ту крайню стрілочку, яка визначає максимальне значення інтенсивності нерівномірно розподіленого навантаження.

У багатьох випадках при тих чи інших дослідженнях механічних систем дію розподіленого навантаження інтенсивністю $\vec{q}$ можна замінювати його рівнодійною $\vec{Q}$. Значення рівнодійної $\vec{Q}$ розподіленого навантаження визначають відповідно до викладеного в § 4.3 аналогічно до визначення ***рівнодійної*** $\vec{G}$ ***паралельних сил*** тяжіння ΔG_i, що діють на елементарні частинки певної однорідної пластини, форма якої збігається з формою епюри розглядуваного розподіленого навантаження. Оскільки вага G однорідної пластини пропорційна її площі, то

ⓘ завжди ***для будь-якого*** розглядуваного ***будь-як*** розподіленого навантаження:

1) ***величина*** (або ***модуль***) Q рівнодійної ***дорівнює площі епюри*** розподіленого навантаження;
2) рівнодійна $\vec{Q}$ ***напрямлена в напрямку дії*** самого ***розподіленого навантаження*** й прикладена до того самого елемента (конструкції), на який (яку) діє зазначене навантаження;
3) ***лінія дії*** рівнодійної $\vec{Q}$ ***проходить через центр ваги епюри*** розподіленого навантаження.

Тоді, модуль рівнодійної рівномірно розподіленого на довжині ℓ навантаження

$$Q = \ell \cdot q . \qquad \textbf{(4.13)}$$

Оскільки центр ваги прямокутної епюри рівномірно розподіленого навантаження знаходиться на перетині діагоналей, то лінія дії рівнодійної $\vec{Q}$ проходить через точку перетину вказаних діагоналей і ділить довжину ℓ прикладання навантаження навпіл (див. рис. 4.10,а).

Для зображеного на рисунку 4.9,б нерівномірно розподіленого за лінійним законом навантаження (коли епюра має вигляд прямокутного трикутника) модуль рівнодійної

$$Q = \frac{\ell \cdot q}{2} . \qquad \textbf{(4.14)}$$

Оскільки центр ваги трикутної епюри знаходиться на перетині медіан, то в такому разі лінія дії рівнодійної $\vec{Q}$ проходить через точку перетину зазначених медіан і ділить довжину ℓ на відповідні частини $\frac{2\cdot\ell}{3}$ та $\frac{\ell}{3}$ (див. рис. 4.10,б)

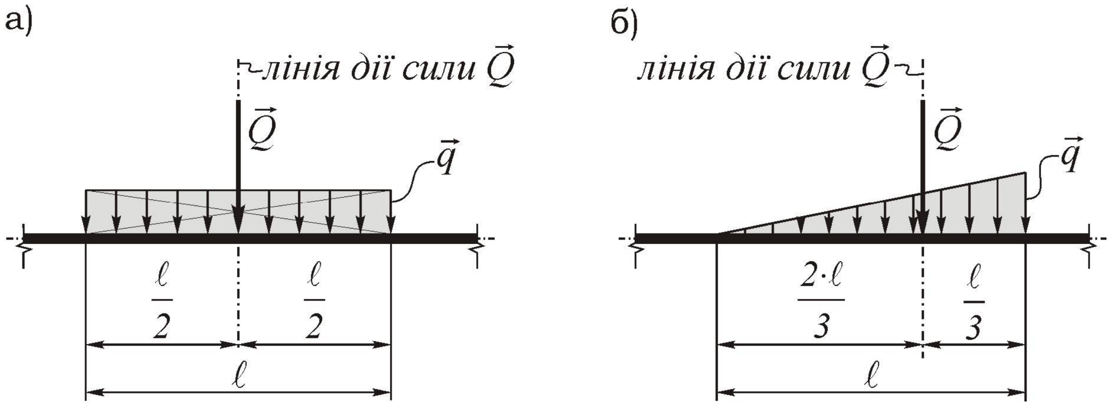


Рис. 4.10. Рівнодійні розподілених по довжині навантажень

Звернімо увагу на те, що на епюрі нерівномірно розподіленого навантаження лінія дії рівнодійної проходить ближче до прямого кута трикутної епюри та далі від відповідного гострого кута.

§ 4.7. РЕАКЦІЯ АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОГО ЗАТИСНЕННЯ

Розглянемо абсолютно жорстке затиснення (див. рис. 2.32 і 2.33); як зазначалося в § 2.7 така балочна опора не дозволяє ніяких переміщень закріпленого абсолютно твердого тіла. Реакція абсолютно жорсткого затиснення складається з:

- ***реактивної сили*** (наприклад, $\vec{R}_A$ у випадку, коли саме затиснення позначено літерою A), яка прикладена у точці затискання абсолютно твердого тіла та *перешкоджає* будь-якому *переміщенню цієї точки*;
- ***реактивної пари сил***, яка *перешкоджає повороту* (*обертанню*) затиснутого *тіла навколо точки затискання.*

Зазвичай, досліджуючи ту чи іншу *плоску* механічну *систему*, зазначену реактивну силу $\vec{R}_A$ розкладають на дві ортогональні складові: вертикальну $\vec{V}_A$ та горизонтальну $\vec{H}_A$, а дію зазначеної реактивної пари сил визначають її моментом M_A. Отже, в таких випадках вважається, що повна реакція абсолютно жорсткого затиснення складається з трьох складових

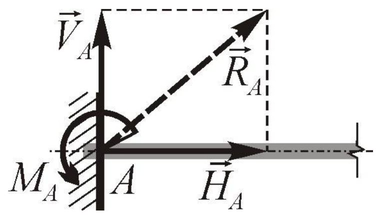


Рис. 4.11. Реакція абсолютно жорсткого затиснення

(параметрів, компонентів) – вертикальної реакції $\vec{V}_A$, горизонтальної реакції $\vec{H}_A$ та реактивної пари сил з моментом M_A (рис. 4.11).

При розв'язуванні практичних задач напрямок дії реактивної пари кожного розглядуваного абсолютно жорсткого затиснення *приймають* або з певних відповідних логічних міркувань, або *довільно*; якщо в результаті розв'язування задачі знак моменту якоїсь реактивної пари виявиться від'ємним, то це означатиме, що у дійсності напрямок дії реактивної пари цього абсолютно жорсткого затиснення протилежний до обраного.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТА ЕКСПРЕС-ТЕСТУВАННЯ Ст-5

(ТЕОРІЯ МОМЕНТІВ СИЛ – тема 3, ТЕОРІЯ ПАР СИЛ – тема 4)

1. Яке тіло називають абсолютно твердим? (3)
2. Яке тіло називають вільним? (3)
3. Яке тіло називають невільним? (3)
4. Що таке в’язь? (4)
5. Що є мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами? (4)
6. Що таке сила? (4)
7. Якими параметрами характеризується сила? (5)
8. Яку силу називають активною ? (3)
9. Яка сила є пасивною (реактивною)? (3)
10. Що таке реакція в’язі? (4)
11. Що таке ідеальний точковий шарнір? (5)
12. Яке схематичне зображення точкового шарніру? (4)
13. Що відомо про реакцію нерухомого точкового шарніру? (6)
14. Що таке ідеальний стержень (стержнева в’язь)? (5)
15. Що відомо про реакцію стержневої в’язі? (6)
16. Яке схематичне зображення шарнірно-рухомої опори? (5)
17. Що відомо про реакцію шарнірно-рухомої опори? (6)
18. Яке схематичне зображення шарнірно-нерухомої опори? (5)
19. Що відомо про реакцію шарнірно-нерухомої опори? (6)
20. Що таке система сил? (3)
21. Яка система сил є зрівноваженою? (4)
22. Чи може бути еквівалентною деякій системі сил одна єдина сила? (1)
23. Що таке рівнодійна сила? (3)
24. Як називають силу, що еквівалентна певній системі сил? (2)
25. Сформулюйте наслідок і висновок з аксіоми №2. (3)
26. Сформулюйте аксіому №1. (5)
27. Сформулюйте аксіому №3. (5)
28. Сформулюйте аксіому №5. (5)
29. Що таке проекція сили на вісь? (5)
30. Чому дорівнює (як знаходиться) проекція сили на вісь? (5)
31. Коли сила проектується на вісь у натуральну величину? (2)
32. Коли сила не проектується на вісь? (2)
33. Коли проекція сили на вісь є додатною величиною? (2)
34. Коли проекція сили на вісь є від’ємною величиною? (2) [1]

[1] Перші 34 наведених питань, які є в білетах для експрес-тестування №5, належать до попередніх тем і використовувалися у відповідних білетах.

35. Яка фізична величина визначає та характеризує обертальну дію сили на матеріальне тіло? (8)
36. Дати визначення поняття «момент сили відносно точки» ? (10)
37. Що визначає обертальну дію на матеріальне тіло сили $\vec{Q}$ відносно певної точки E розглядуваного тіла? (8)
38. Що таке площина дії сили $\vec{F}$? (8)
39. Що проходить через лінію дії розглядуваної сили $\vec{F}$ та моментну точку O? (7)
40. Як називають площину π, що проходить через лінію дії сили $\vec{Q}$ та певну точку D? (6)
41. Що таке плече сили $\vec{F}$ відносно точки O? (8)
42. Як називають найкоротшу віддаль h від певної точки E до лінії дії розглядуваної сили $\vec{G}$? (6)
43. Що визначає перпендикуляр h, встановлений із точки D на лінію дії сили $\vec{Q}$? (7)
44. Як зміниться плече h розглядуваної сили $\vec{F}$ відносно певної точки E, якщо зазначену силу перемістити по її лінії дії на $2\,м$ праворуч? (4)
45. Скількома параметрами визначається (характеризується) момент сили відносно точки? (5)
46. Якими параметрами визначається (характеризується) момент сили відносно точки? (10)
47. Що таке момент сили $\vec{F}$ відносно точки (або центра) O у випадку плоскої системи сил? (10)
48. Що визначає алгебраїчна величина, яка дорівнює взятому зі знаком плюс чи мінус добутку модуля F сили $\vec{F}$ на її плече h відносно точки K? (8)
49. Коли для плоскої системи сил момент сили відносно певної точки є додатним? (7)
50. Коли для плоскої системи сил момент сили відносно певної точки є від'ємним? (7)
51. Коли момент сили відносно певної точки дорівнює нулеві? (7)
52. Чому дорівнює момент сили відносно певної точки, якщо лінія дії цієї сили проходить через зазначену точку? (5)

53. У загальному випадкові (для тривимірних задач) момент сили відносно точки є скалярною чи векторною фізичною величиною? (4)

54. Чому дорівнює (або що визначає) вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ моменту сили $\vec{F}$, що прикладена в точці A, відносно певної точки O? (11)

55. Чи залежить (**так** чи **ні**) вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O від положення цієї точки в просторі? (4)

56. Як по відношенню до площини π дії сили $\vec{F}$ проходить вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ моменту цієї сили відносно точки O? (6 або 10)

57. Нехай у точці A до матеріального тіла прикладена певна сила $\vec{F}$. В якій точці прикладений вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ моменту зазначеної сили відносно точки O? (6)

58. Вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O є вільним, ковзним чи фіксованим вектором? (6)

59. Чому дорівнює модуль $M_O(\vec{F})$ моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O? (10)

60. Чи залежить (**так** чи **ні**) модуль $M_O(\vec{F})$ моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O від положення цієї точки в просторі? (4)

61. Як зміниться значення модуля $M_O(\vec{F})$ моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O, якщо зазначену силу перемістити вздовж її лінії дії на $0{,}5\ м$ ліворуч? (4)

62. Яка одиниця вимірювання моменту сили відносно точки? (6)

63. Які сили називають антипаралельними? (7)

64. Що таке пара сил? (9)

65. Яке символьне позначення пари сил, яка складається, наприклад, із сил $\vec{Q}$ та $\vec{F}$? (6)

66. Що утворюють дві однакові за величиною та протилежні за напрямком сили, які лежать на одній прямій? (4)

67. Що утворюють дві однакові за величиною та протилежні за напрямком паралельні сили, які не лежать на одній прямій? (8)

68. Чи завжди можна (**так** чи **ні**) провести через лінії дій сил $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, що утворюють пару сил, певну площину? (4)

69. Що таке площина дії пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$? (8)
70. Що проходить через лінії дій сил $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, які утворюють пару сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$? (7)
71. Як називають площину, що проходить через лінії дій сил $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, які утворюють пару сил? (6)
72. Що таке плече пари сил? (8)
73. Як називають найкоротшу віддаль h між лініями дій сил $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, які утворюють пару сил? (6)
74. Що визначає перпендикуляр h, проведений між лініями дій двох сил, які утворюють певну пару сил? (7)
75. Як зміниться плече h розглядуваної пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$, якщо, наприклад, силу $\vec{P}_1$ перемістити вздовж її лінії дії на $1{,}5\,м$ праворуч? (4)
76. Яким чином пара сил діє на матеріальне тіло, до якого вона прикладена? (7)
77. Яку пару сил називають активною? (7)
78. Яку пару сил називають пасивною (або реактивною)? (7)
79. Що таке система пар сил? (7)
80. Яка система пар сил є зрівноваженою? (7)
81. Чому дорівнює сумарна механічна дія на тіло зрівноваженої системи пар сил? (7)
82. Яка система пар сил є плоскою? (6)
83. Яка система пар сил є просторовою? (6)
84. Які пари сил називають еквівалентними? (7)
85. Скількома параметрами визначається (характеризується) дія певної пари сил на матеріальне тіло? (5)
86. Якими параметрами визначається (характеризується) дія певної пари сил на матеріальне тіло? (10)
87. У загальному випадкові (для тривимірних задач) момент пари сил є скалярною чи векторною фізичною величиною? (4)
88. Як по відношенню до площини дії пари сил проходить вектор $\vec{M}\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ моменту пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$? (6 або 10)
89. Чи залежить вектор $\vec{M}\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ моменту пари сил від положення певної точки в просторі? (4)
90. Вектор $\vec{M}\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ моменту пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ є вільним, ковзним чи фіксованим вектором? (6)

91. Чому дорівнює модуль $M\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ моменту пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$? (9)
92. Від чого залежить значення модуля $M\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ моменту пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$? (9)
93. Як зміниться значення модуля $M\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ моменту пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$, якщо, наприклад, силу $\vec{P}_2$ перемістити вздовж її лінії дії на $3\,м$ ліворуч? (4)
94. Чи зміниться (**так** чи **ні**) значення модуля $M\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ моменту пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$, якщо обидві сили зазначеної пари перемістити певним чином вздовж їх ліній дій? (4)
95. Як на схемах (рисунках) для плоских систем сил зображують пари сил за сучасними позначеннями? (7)
96. Коли для плоскої системи сил момент певної пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ є додатним? (7)
97. Коли для плоскої системи сил момент певної пари сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ є від’ємним? (7)
98. Чим можна зрівноважити дію певної пари сил? (8)
99. Чи залежить модуль $M\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ моменту пари сил від положення певної точки в просторі? (4)
100. Яка одиниця вимірювання моменту пари сил? (6)
101. Коли дві пари сил є еквівалентними? (8)
102. Чому по своїй дії еквівалентна довільна система з n пар сил? (7)
103. В якому разі (у загальному випадку) одна пара сил по дії еквівалентна довільній системі з n пар сил? (9)
104. Яка умова рівноваги просторової системи з n пар сил? (9)
105. Яка умова рівноваги плоскої системи з n пар сил? (9)
106. Чим та за якої умови можна зрівноважити дію певної пари сил? (9)

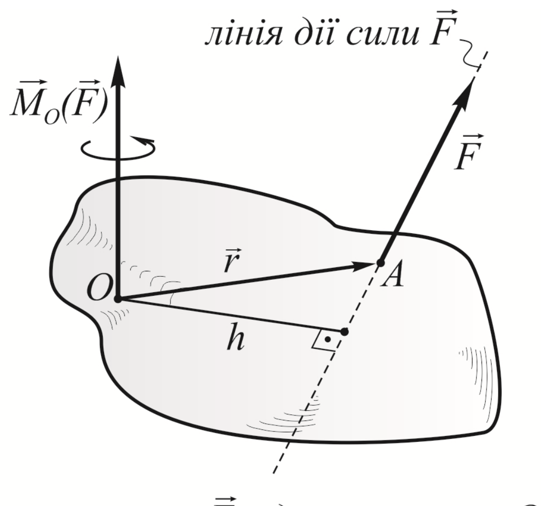
ТЕМА 5 ► УМОВИ РІВНОВАГИ РІЗНИХ СИСТЕМ СИЛ

- Зведення сили до даної точки. Метод Пуансо
- Зведення довільної системи сил до центра зведення. Головний вектор. Головний момент. Теорема Пуансо
- Аналітичне визначення головного вектора та головного моменту системи сил
- Умови рівноваги просторової довільної системи сил
- Умови рівноваги різних систем сил

§ 5.1. ЗВЕДЕННЯ СИЛИ ДО ДАНОЇ ТОЧКИ. МЕТОД ПУАНСО

Нехай до матеріального тіла в його довільній точці A прикладена сила $\vec{F}$ (рис. 5.1). Візьмемо будь-яку точку O тіла, проведімо з неї у точку A радіус-вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$ і за формулою (3.2) визначимо момент сили $\vec{F}$ відносно точки O:

$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}. \qquad (*)$$



h – плече сили $\vec{F}$ відносно точки O

Рис. 5.1

Відповідно до викладеного у § 3.1 і рисунку 3.4 зобразимо на рисунку 5.1 вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$.

Тепер згідно з аксіомами 1 і 2 прикладемо до тіла у точці O зрівноважену систему сил $\{\vec{F}',\vec{F}''\}$, прийнявши модулі цих сил $F'=F''=F$, а лінії їх дії паралельними лінії дії сили $\vec{F}$. Отримаємо еквівалентну вихідній силі $\vec{F}$ систему трьох сил $\{\vec{F},\vec{F}',\vec{F}''\}$ (рис. 5.2,а), яку будемо розглядати як сукупність:

1) сили $\vec{F}'=\vec{F}$, що прикладена в точці O;

2) пари сил $(\vec{F};\vec{F}'')$, яку називають ***приєднаною парою***.

За формулою (4.7) визначимо момент приєднаної пари:

$$\vec{M} = \vec{M}\left(\vec{F};\vec{F}''\right) = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$$

або

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (**)$$

Порівнявши значення виразів (*) та (**), зазначаємо, що момент приєднаної пари дорівнює моменту даної сили $\vec{F}$ відносно точки O.

Із викладеного робимо ***висновок***:

ⓘ прикладену у певній точці A твердого тіла силу $\vec{F}$ без зміни її механічної дії на це тіло можна перенести паралельно її початковому напрямкові в будь-яку точку O тіла за умови додавання приєднаної пари сил (рис. 5.2,б), момент $\vec{M}$ якої дорівнює моменту заданої сили $\vec{F}$ відносно точки O:

$$\vec{M} = \vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad \textbf{(5.1)}.$$

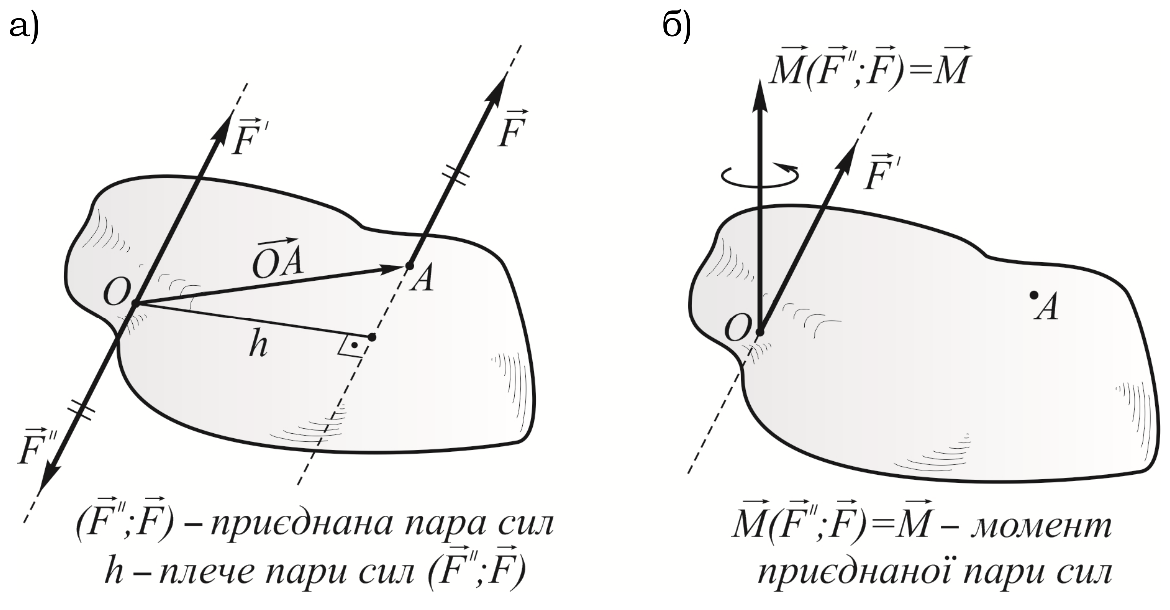


Рис. 5.2

Точку O називають ***центром зведення***, а метод ***зведення сили до певного центра*** називають ***методом Пуансо***, оскільки вперше його використав французький математик і механік, член Французької академії наук (1813) Луї Пуансо (03.I.1777 – 05.XII.1859).

Зведення сили до певного центра (або метод Пуансо) широко застосовують при знаходження умов заміни одних систем сил іншими, їм еквівалентними.

§ 5.2. ЗВЕДЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО ЦЕНТРА ЗВЕДЕННЯ. ГОЛОВНИЙ ВЕКТОР. ГОЛОВНИЙ МОМЕНТ. ТЕОРЕМА ПУАНСО

Нехай до абсолютно твердого тіла в точках A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n, які не належать одній площині, прикладена довільна система з n сил $\left\{\vec{F}_1;\vec{F}_2;...;\vec{F}_i;...;\vec{F}_n\right\}$.

Візьмемо будь-яку точку O тіла та методом Пуансо зведімо всі задані сили до точки O; у результаті дістанемо:

- n сил $\vec{F}_1' = \vec{F}_1$, $\vec{F}_2' = \vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_i' = \vec{F}_i$, ..., $\vec{F}_n' = \vec{F}_n$, що прикладені у центрі зведення;
- n приєднаних пар сил $\left(\vec{F}_1;\vec{F}_1''\right)$, $\left(\vec{F}_2;\vec{F}_2''\right)$, ..., $\left(\vec{F}_i;\vec{F}_i''\right)$, ..., $\left(\vec{F}_n;\vec{F}_n''\right)$.

Оскільки сили $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, ..., $\vec{F}_i'$, ..., $\vec{F}_n'$, будучи прикладеними у точці O тіла, утворюють *збіжну систему сил*, то, звівши останню до канонічного вигляду, дістанемо прикладену в центрі зведення одну силу, яку позначимо $\vec{R}^*$. За формулою (2.6)

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + ... + \vec{F}_i' + ... + \vec{F}_n',$$

а на підставі умови $\vec{F}_1' = \vec{F}_1$, $\vec{F}_2' = \vec{F}_2$,..., $\vec{F}_i' = \vec{F}_i$, ..., $\vec{F}_n' = \vec{F}_n$ дістанемо, що

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_i + ... + \vec{F}_n.$$

Вектор $\vec{R}^*$ називають *головним вектором системи сил*.

ⓘ ***Головний вектор*** $\vec{R}^*$ ***системи сил*** – це сила, яка дорівнює векторній (геометричній) сумі всіх сил системи:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \qquad \textbf{(5.2)}$$

Необхідно твердо розуміти, що:

- сила $\vec{R}^*$ *не є еквівалентною вихідній системі сил* $\left\{\vec{F}_1;\vec{F}_2;...;\vec{F}_i;...;\vec{F}_n\right\}$ і, отже, *не є рівнодійною* $\vec{R}$ цієї системи сил;
- далеко не кожна система сил еквівалентна одній силі (рівнодійній), але кожна й будь-яка система сил має головний вектор;
- на відміну від рівнодійної $\vec{R}$ системи сил головний вектор $\vec{R}^*$ системи сил не має певної лінії дії, оскільки за центр зведення може бути обрана будь-яка точка.

З'єднаємо центр зведення O з точками прикладання сил радіусами-векторами $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_i$, ..., $\vec{r}_n$ (див. рис. 5.1) і за формулою (5.1) визначимо моменти приєднаних пар сил:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right),$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right),$$

$$...,$$

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right),$$

$$...,$$

$$\vec{M}_n = \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \vec{M}_O\left(\vec{F}_n\right).$$

Замінимо усі приєднані пари сил однією еквівалентною парою сил; оскільки згідно з формулою (4.9) вектор моменту еквівалентної пари дорівнює геометричній сумі векторів моментів приєднаних пар, то

$$\vec{M}_{екв.} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right).$$

Векторну величину, що дорівнює сумі моментів усіх сил розглядуваної системи відносно центра зведення O, називають *головним моментом системи сил відносно центра* O.

ⓘ ***Головний момент системи сил відносно центра*** O – це вектор $\vec{M}_O$, який дорівнює векторній (геометричній) сумі моментів всіх сил системи відносно точки O:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right). \qquad \textbf{(5.3)}$$

У результаті виконаних дій-перетворень ми дістали, що вихідній системі сил $\left\{\vec{F}_1;\vec{F}_2;...;\vec{F}_i;...;\vec{F}_n\right\}$ виявилися еквівалентними *одна сила* і *одна пара сил*, довівши таким чином ***теорему Пуансо***:

ⓘ будь-яка довільна система сил, прикладена до абсолютно твердого тіла, ***зводиться до***:

1) ***однієї сили***, що дорівнює *головному вектору* $\vec{R}^*$ системи сил і прикладена у центрі зведення;
2) ***однієї приєднаної пари сил***, вектор моменту якої дорівнює *головному моменту* $\vec{M}_O$ *системи сил відносно центра зведення.*

З доведеної теореми необхідно твердо усвідомити та розуміти дві важливі речі:

- ті дві системи сил, які мають однакові головні вектори й головні моменти, є ***статично еквівалентними***;
- для визначення загальної механічної дії на абсолютно тверде тіло якої завгодно системи сил *достатньо* знати (мати) її головний вектор $\vec{R}^*$ і головний момент $\vec{M}_O$ відносно певного центра O.

Оскільки вектор моменту пари сил є *вільним вектором*, то, не змінюючи його напрямку, прикладімо вектор $\vec{M}_O$ також у точці O. Якщо умовно прийняти, що $\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right)$ – це приєднана пара сил, вектор моменту якої $\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_2\right)=\vec{M}_O$, то, звісно, ця пара сил має лежати у перпендикулярній до вектора $\vec{M}_O$ площині (яку позначимо π) так, щоб з додатного напрямку вектора $\vec{M}_O$ було видно прагнення пари сил $\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right)$ обертати площину своєї дії проти руху годинникової стрілки, що і зобразимо відповідно на рисунку 5.3.

Отже, можна стверджувати, що вихідна система сил, яка містить будь-яку кількість сил n, *завжди* є еквівалентною системі з трьох сил:

$$\left\{\vec{F}_1;\vec{F}_2;...;\vec{F}_i;...;\vec{F}_n\right\} \backsim \left\{\vec{R}^*;\vec{P}_1;\vec{P}_2\right\}.$$

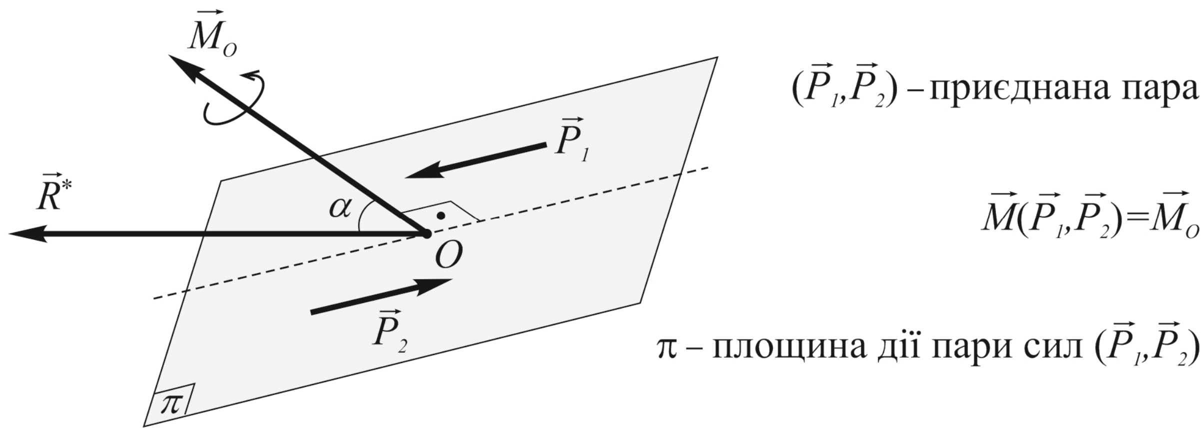


Рис. 5.3. Зведення довільної системи сил до точки O

Відповідь на питання про те, чи є отримана у результаті здійснених перетворень система сил $\left\{\vec{R}^*;\vec{P}_1;\vec{P}_2\right\}$ *канонічним виглядом вихідної системи сил* з'ясуємо далі.

§ 5.3. АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ГОЛОВНОГО ВЕКТОРА ТА ГОЛОВНОГО МОМЕНТУ СИСТЕМИ СИЛ

Щоб аналітично визначити головний вектор $\vec{R}^*$ і головний момент $\vec{M}_O$ відносно певного центра O, застосуємо метод проекцій, вибравши початок відліку декартової системи координат у точці O.

Оскільки $\vec{R}^*$ – це вектор, то, звісно, як і будь-який інший вектор

$$\vec{R}^* = \vec{i}\cdot R_x^* + \vec{j}\cdot R_y^* + \vec{k}\cdot R_z^*,$$

де R_x^*, R_y^* та R_z^* – проекції головного вектора на відповідні осі.

Врахувавши, що за формулою (2.8), наприклад, $R_x^* = \vec{R}^*\cdot\vec{i}$, а за формулою (5.2) $\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$, дістанемо, що

$$R_x^* = \vec{R}^*\cdot\vec{i} = \left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right)\cdot\vec{i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i\cdot\vec{i}\right) = \sum_{i=1}^{n}F_{ix} = \sum X.$$

Отже,

🛈 ***проекція головного вектора довільної системи сил*** на певну вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій сил заданої системи на ту ж вісь.

Аналогічно визначають і проекції R_y^* й R_z^*.

Тоді

$$\left.\begin{aligned} R_x^* &= \sum X \\ R_y^* &= \sum Y \\ R_z^* &= \sum Z \end{aligned}\right\}$$

(5.4) – ***проекції головного вектора довільної системи сил*** на декартові координатні осі.

За відомими проекціями ***модуль*** головного вектора

$$R^* = \sqrt{\left(R_x^*\right)^2 + \left(R_y^*\right)^2 + \left(R_z^*\right)^2}$$

або, урахувавши значення (5.4),

$$R^* = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2}\,; \qquad \textbf{(5.5)}$$

напрям головного вектора визначають за напрямними косинусами:

$$\left.\begin{aligned} cos\left(\vec{R}^*\hat{;}\vec{i}\right) &= \frac{R_x^*}{R^*} = \frac{\sum X}{R^*}, \\ cos\left(\vec{R}^*\hat{;}\vec{j}\right) &= \frac{R_y^*}{R^*} = \frac{\sum Y}{R^*}, \\ cos\left(\vec{R}^*\hat{;}\vec{k}\right) &= \frac{R_z^*}{R^*} = \frac{\sum Z}{R^*}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.6)}$$

Оскільки $\vec{M}_O$ – також вектор, то

$$\vec{M}_O = \vec{i} \cdot M_{Ox} + \vec{j} \cdot M_{Oy} + \vec{k} \cdot M_{Oz}\,,$$

де M_{Ox}, M_{Oy} та M_{Oz} – проекції головного моменту відносно точки O на відповідні осі.

Узявши до уваги, що за формулою (2.8), наприклад, $M_{Ox} = \vec{M}_O \cdot \vec{i}$, а за формулою (5.3) $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$, дістанемо

$$M_{Ox} = \vec{M}_O \cdot \vec{i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) \right) \cdot \vec{i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) \cdot \vec{i} \right) = \sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right),$$

де $M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right)$ – проекція на вісь x вектора $\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$ моменту сили $\vec{F}_i$ відносно точки O.

Оскільки ж за формулою (3.5) проекція

$$M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right) = M_x\left(\vec{F}_i\right),$$

де $M_x\left(\vec{F}_i\right)$ – момент сили $\vec{F}_i$ відносно осі x, яка проходить через точку O, то

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right),$$

Символьний запис $\sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right)$ (що означає *алгебраїчна сума моментів усіх сил системи відносно осі* x) для економії часу, паперу, чорнил і власної енергії будемо записувати у вигляді $\sum M_x$.

Визначивши аналогічно проекції M_{Oy} і M_{Oz}, дістаємо, що

ⓘ ***проекції головного моменту*** $\vec{M}_O$ ***довільної системи сил відносно точки*** O на декартові координатні осі, що проходять через точку O, дорівнюють алгебраїчним сумам моментів сил заданої системи відносно відповідних осей:

$$\left. \begin{aligned} M_{Ox} &= \sum M_x, \\ M_{Oy} &= \sum M_y, \\ M_{Oz} &= \sum M_z. \end{aligned} \right\} \qquad \mathbf{(5.7)}$$

Модуль цього головного моменту

$$M_O = \sqrt{\left(\sum M_x\right)^2 + \left(\sum M_y\right)^2 + \left(\sum M_z\right)^2}, \qquad \mathbf{(5.8)}$$

а його ***напрямок*** визначають напрямні косинуси:

$$\left.\begin{aligned} cos\left(\vec{M}_O\hat{\;};\vec{i}\right) &= \frac{M_{Ox}}{M_O} = \frac{\sum M_x}{M_O}, \\ cos\left(\vec{M}_O\hat{\;};\vec{j}\right) &= \frac{M_{Oy}}{M_O} = \frac{\sum M_y}{M_O}, \\ cos\left(\vec{M}_O\hat{\;};\vec{k}\right) &= \frac{M_{Oz}}{M_O} = \frac{\sum M_z}{M_O}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.9)}$$

Таким чином, формули (5.4)÷(5.9) повністю *визначають* усі параметри головного векторі та головного моменту.

§ 5.4. УМОВИ РІВНОВАГИ ПРОСТОРОВОЇ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ

Розв'яжімо другу основну задачу статики у *найзагальнішій постановці* – знайдімо умови рівноваги просторової довільної систем сил.

Оскільки сумарна механічна дія *зрівноваженої системи сил* на тіло дорівнює нулю, а будь-яка просторова довільна система сил $\{\vec{F}_i\}$, прикладена до твердого тіла, зводиться до однієї сили, що дорівнює головному вектору $\vec{R}^*$ системи сил, та до однієї пари сил, момент якої дорівнює головному моменту $\vec{M}_O$ системи сил відносно центра зведення O, то розглядувана система буде зрівноваженою тоді, коли

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}^* &= 0, \\ \vec{M}_O &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.10)}$$

Рівності (5.10) – це ***векторна умова*** рівноваги, згідно з якою

> 🛈 для рівноваги просторової довільної системи сил необхідно і достатньо щоб її ***головний вектор*** $\vec{R}^*$ ***і головний момент*** $\vec{M}_O$ ***відносно центра зведення*** O ***дорівнювали нулеві***.

Оскільки для розглядуваної системи сил за формулами (5.5) і (5.8) модулі

$$R^* = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2}\,,$$

$$M_O = \sqrt{\left(\sum M_x\right)^2 + \left(\sum M_y\right)^2 + \left(\sum M_z\right)^2}\,,$$

то умова (5.10) виконується в єдиному випадку, коли

$$\left.\begin{aligned} &\sum X = 0, \\ &\sum Y = 0, \\ &\sum Z = 0, \\ &\sum M_x = 0, \\ &\sum M_y = 0, \\ &\sum M_z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.11)}$$

Шість умов (5.11) і є ***аналітичними умовами рівноваги просторової довільної систем сил***, які формулюють так: будь-яка просторова довільна система сил є зрівноваженою тоді і лише тоді, коли алгебраїчні суми проекцій усіх сил системи на координатні осі й алгебраїчні суми моментів усіх сил системи відносно тих же осей дорівнюють нулеві.

При розв'язуванні конкретних задач на підставі умов (5.11) складають *шість рівнянь*, які будуть ***рівняннями рівноваги просторової довільної систем сил***. Певна річ, складені рівняння можуть бути розв'язаними лише у випадку, коли вони міститимуть не більше *шести невідомих величин.*

§ 5.5. АНАЛІТИЧНІ УМОВИ РІВНОВАГИ РІЗНИХ СИСТЕМ СИЛ

Розглянемо усі інші *системи сил* (див. рис. 1.6) і знайдемо їх *аналітичні умови рівноваги* як окремі випадки умов (5.11).

1. Плоска довільна система сил

Розглянемо систему сил $\left\{\vec{F}_1; \vec{F}_2; \ldots; \vec{F}_i; \ldots; \vec{F}_n\right\}$, лінії дій сил якої довільно розташовані в одній площині, наприклад, π, з якою сумістимо координатну площину Oxy системи координат $Oxyz$ (рис. 5.4). За такого розташування:

- жодна із сил системи не буде проектуватися на вісь z й отримане на підставі умови $\sum Z = 0$ рівняння виродиться у тотожність $0 \equiv 0$;

- лінії дій усіх сил системи будуть чи перетинати осі x і y, чи проходити паралельно цим осям, через що моменти всіх сил системи відносно осей x і y дорівнюють нулю; тобто умови $\sum M_x = 0$ і $\sum M_y = 0$ також приведуть до тотожностей $0 \equiv 0$;

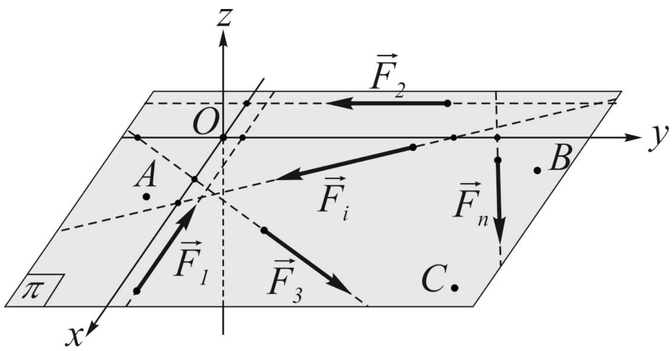


Рис. 5.4

- площиною дії будь-якої сили системи є координатна площина Oxy, яка перетинається з віссю z у точці O й на підставі формули (3.4) момент кожної сили відносно осі z буде дорівнювати моменту цієї сили відносно точки O; тоді $\sum M_z = \sum M_O$, де $\sum M_O$ – сума моментів усіх сил системи відносно точки O.

Отже, з загальних умов (5.11) лишається три ***аналітичні умови рівноваги плоскої довільної системи сил***:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X = 0, \\ &\sum Y = 0, \\ &\sum M_O = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.12)}$$

де O – *довільна* точка площини дії сил системи.

Умови (5.12) називають ***першою*** *формою запису умов рівноваги плоскої довільної системи сил*. При розв'язуванні багатьох задач буває зручніше та вигідніше користуватися *другою* чи *третьою* формами запису умов рівноваги, які, що неважко довести, за механічним змістом тотожні умовам (5.12).

Друга форма:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X = 0, \\ &\sum M_A = 0, \\ &\sum M_B = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.13)}$$

де A і B – довільні точки площини Oxy, але відрізок AB – *не перпендикулярний осі* Ox.

Третя форма:

$$\left.\begin{aligned}\sum M_A &= 0,\\ \sum M_B &= 0,\\ \sum M_C &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.14)}$$

де A, B і C – довільні точки площини Oxy, що *не належать одній прямій*.

2. Просторова паралельна система сил

Розглянемо систему сил, лінії дій сил якої паралельні одна одній і не належать одній площині. Оберімо таку систему координат $Oxyz$, щоб вісь Oz проходила паралельно лініям дій сил системи (рис. 5.5).

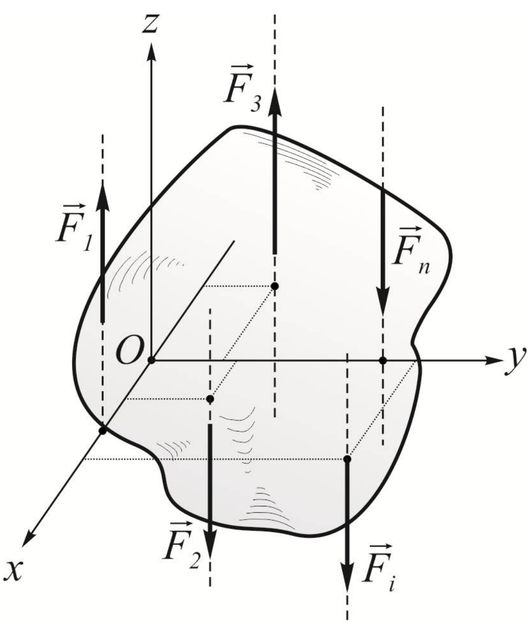


Рис. 5.5

Очевидно, що в такому разі:

- жодна із сил системи не проектується на осі x і y;
- лінії дій усіх сил системи паралельні осі Oz, що визначає рівність нулю моменту кожної сили відносно осі z.

Тоді в рівностях (5.11) умови $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ і $\sum M_z = 0$ приведуть до тотожностей $0 \equiv 0$ й лишаться три ***аналітичні умови рівноваги просторової паралельної системи сил***:

$$\left.\begin{aligned}\sum Z &= 0,\\ \sum M_x &= 0,\\ \sum M_y &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.15)}$$

3. Плоска паралельна система сил

Якщо паралельна система сил є плоскою, то, сумістивши з площиною дії сил системи координатну площину Oyz і напра-

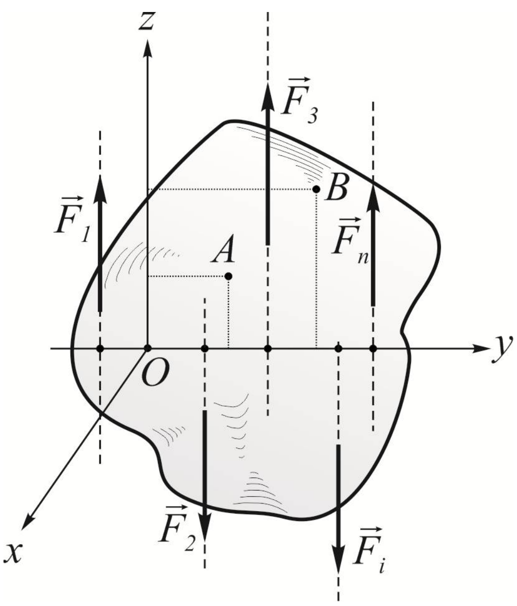


Рис. 5.6

вивши вісь Oz паралельно лініям дій цих сил (рис. 5.6), отримаємо, як окремий випадок умов (5.15), ***аналітичні умови рівноваги плоскої паралельної системи сил***:

$$\left.\begin{aligned}\sum Z = 0,\\ \sum M_O = 0,\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.16)}$$

де O – *довільна* точка площини дії сил системи.

Існує й друга форма запису умов рівноваги плоскої паралельної системи сил:

$$\left.\begin{aligned}\sum M_A = 0,\\ \sum M_B = 0,\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.17)}$$

де A і B – довільні точки площини дії сил системи, але відрізок AB – *не паралельний* лініям дій цих сил.

4. Просторова збіжна система сил

Розглянемо систему сил, лінії дій сил якої не належать одній площині та перетинаються в одній точці. Позначимо цю точку як O й оберемо її за початок системи координат. Тоді лінія дії будь-якої з сил буде перетинати кожну з осей (у точці O). Оскільки ж момент сили відносно осі дорівнює нулеві у випадку, коли лінія дії сили перетинає вісь, то в (5.11) умови $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$ і $\sum M_z = 0$ вироджуються у тотожності $0 \equiv 0$ і лишаються три ***аналітичні умови рівноваги просторової збіжної системи сил***

$$\left.\begin{aligned}\sum X = 0,\\ \sum Y = 0,\\ \sum Z = 0,\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.14)}$$

які безумовно співпадають із отриманими раніше на підставі інших легітимних логічних міркувань.

Зауважимо, що у цьому разі для розглядуваної системи сил її головний момент $\vec{M}_O$ *дорівнює нулю*, оскільки згідно з формулою (5.7) його проекції $M_{Ox} = \sum M_x = 0$, $M_{Oy} = \sum M_y = 0$ і $M_{Oz} = \sum M_z = 0$. Це означає, що система сил зводиться тільки до головного вектора $\vec{R}^*$ (або система сил є еквівалентною тільки головному вектору $\vec{R}^*$). Тоді останній набуває безсумнівної ознаки рівнодійної й автоматично змінює свою назву та позначення на рівнодійну $\vec{R}$. Отже, ми прийшли до отриманого раніше висновку (див. § 2.2) про те, що *канонічним виглядом будь-якої збіжної системи сил є рівнодійна.*

5. Плоска збіжна система сил

Якщо збіжна система сил є плоскою, то, сумістивши з площиною дії сил системи координатну площину Oxy, отримаємо, як окремий випадок умов (2.14), ***аналітичні умови рівноваги плоскої збіжної системи сил*** у ***першій*** формі запису:

$$\left.\begin{aligned} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.15)}$$

Існують й інші форми запису умов рівноваги розглядуваної системи сил, які за механічним змістом тотожні умовам (2.15).

Друга форма:

$$\left.\begin{aligned} \sum X = 0, \\ \sum M_A = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.18)}$$

й ***третя*** форма:

$$\left.\begin{aligned} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.19)}$$

де A і B – довільні точки площини дії сил системи (тобто, площини Oxy), які *не співпадають з точкою перетину ліній дій сил* розглядуваної *системи.*

ТЕМА 6 ► ЗВЕДЕННЯ РІЗНИХ СИСТЕМ СИЛ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

- Зміна положення центра зведення. Інваріанти системи сил (інваріанти зведення)
- Геометричний і механічний змісти другого інваріанту
- Зведення просторової довільної системи сил до силового гвинта (динами)
- Окремі випадки зведення просторової довільної системи сил до канонічного вигляду
- Класифікація канонічних виглядів різних систем сил за допомогою інваріантів зведення
- Теорема Варіньона у загальному вигляді

§ 6.1. ЗМІНА ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРА ЗВЕДЕННЯ. ІНВАРІАНТИ СИСТЕМИ СИЛ (ІНВАРІАНТИ ЗВЕДЕННЯ)

Нехай до абсолютно твердого тіла в точках A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n, які не належать одній площині, прикладена довільна система з n сил $\{\vec{F}_1;\vec{F}_2;...;\vec{F}_i;...;\vec{F}_n\}$. Оберемо довільно два різних центра зведення O й O_1 і методом Пуансо зведемо задану систему сил до цих точок. На підставі міркувань, наведених в § 5.2, у кожному центрі зведення отримаємо свої головний вектор і головний момент системи сил.

За формулою (5.2) головні вектори відносно обох центрів зведення

$$\vec{R}_O^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad \text{і} \quad \vec{R}_{O_1}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

й, отже,

$$\vec{R}_O^* = \vec{R}_{O_1}^* = \vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = const. \tag{$*$}$$

Таким чином, при зміні положення центра зведення *головний вектор свого значення не змінює*, тобто є ***інваріантною*** по відношенню до центра зведення ***величиною***.

ⓘ ***Першим (векторним) статичним інваріантом системи сил*** (або ***інваріантом зведення***) є головний вектор системи сил:

$$\vec{J}_1 = \vec{R}^*. \qquad \textbf{(6.1)}$$

За формулою (5.3) головні моменти відносно обох центрів зведення

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) \qquad \text{і} \qquad \vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{O_1}\left(\vec{F}_i\right).$$

Оскільки згідно з формулою (3.2)

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad \text{і} \qquad \vec{M}_{O_1}\left(\vec{F}_i\right) = \vec{r}_{1i} \times \vec{F}_i,$$

то

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right), \qquad \text{а} \qquad \vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_{1i} \times \vec{F}_i\right),$$

де $\vec{r}_i$ та $\vec{r}_{1i}$ – радіуси-вектори, що визначають положення точки A_i прикладання сили $\vec{F}_i$ відносно центрів зведення O та O_1 відповідно.

Сполучимо точки O_1 і O вектором $\overrightarrow{O_1O}$ (рис. 6.1) і запишімо безсумну векторну залежність

$$\vec{r}_{1i} = \overrightarrow{O_1O} + \vec{r}_i.$$

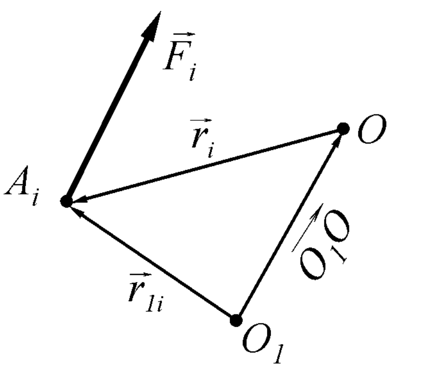


Рис. 6.1

Оскільки для векторної суми справедливий закон комутативності, то переписавши останню рівність у вигляді

$$\vec{r}_{1i} = \vec{r}_i + \overrightarrow{O_1O}$$

і підставивши це значення $\vec{r}_{1i}$ у рівняння, що визначає $\vec{M}_{O_1}$, дістанемо

$$\vec{M}_{O_1}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\vec{r}_i+\overrightarrow{O_1O}\right)\times\vec{F}_i\right],$$

звідки, виконавши очевидні математичні перетворення, матимемо:

$$\vec{M}_{O_1}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_i\right)+\left(\overrightarrow{O_1O}\times\vec{F}_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{O_1O}\times\vec{F}_i\right).$$

Далі врахуємо, що в отриманій рівності перший доданок $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_i\right)$ визначає $\vec{M}_O$, а другий доданок містить спільний сталий множник $\overrightarrow{O_1O}$, який винесімо за знак суми; тоді

$$\vec{M}_{O_1}=\vec{M}_O+\overrightarrow{O_1O}\times\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,.$$

Оскільки згідно з формулою (*) множник $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ визначає головний вектор $\vec{R}^*$, то отримуємо векторну рівність

$$\vec{M}_{O_1}=\vec{M}_O+\overrightarrow{O_1O}\times\vec{R}^*, \tag{**}$$

яка свідчить, що

$$\vec{M}_O\neq\vec{M}_{O_1},$$

тобто, *головний момент залежить від положення центра зведення.*

Для подальших міркувань врахуємо, що формула (3.2) $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\times\vec{F}$ визначає момент сили $\vec{F}$, яка прикладена у певній точці (нехай це буде точка A), відносно точки O, а радіус-вектор $\vec{r}$ визначає положення точки A відносно точки O й, отже, $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$. На цій підставі неважко зрозуміти, що в векторній рівності (**) векторний добуток $\overrightarrow{O_1O}\times\vec{R}^*$ визначає момент головного вектора $\vec{R}^*$, що прикладений у точці O, відносно точки O_1, тобто

$$\overrightarrow{O_1O} \times \vec{R}^* = \vec{M}_{O_1}\left(\vec{R}^*\right),$$

з урахуванням чого векторна рівність (**) набуває вигляду:

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{M}_{O_1}\left(\vec{R}^*\right). \qquad \textbf{(6.2)}$$

ⓘ Головний момент $\vec{M}_{O_1}$ системи сил відносно нового центра O_1 дорівнює векторній (геометричній) ***сумі*** головного моменту $\vec{M}_O$ цієї системи сил відносно старого центра O та вектора $\vec{M}_{O_1}\left(\vec{R}^*\right)$ моменту головного вектора $\vec{R}^*$, прикладеного у точці O, відносно точки O_1.

Якщо ж у векторній рівності (**) змінити напрямок вектора $\overrightarrow{O_1O}$ на протилежний і врахувати, що $\overrightarrow{O_1O} = -\overrightarrow{OO_1}$, то дістанемо, що

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O - \overrightarrow{OO_1} \times \vec{R}^* = \vec{M}_O - \vec{M}_O\left(\vec{R}^*\right), \qquad \textbf{(6.3)}$$

тобто:

ⓘ головний момент $\vec{M}_{O_1}$ системи сил відносно нового центра O_1 дорівнює векторній (геометричній) ***різниці*** головного моменту $\vec{M}_O$ цієї системи сил відносно старого центра O та вектора $\vec{M}_O\left(\vec{R}^*\right)$ моменту головного вектора $\vec{R}^*$, прикладеного у точці O_1, відносно точки O.

Помноживши скалярно обидві частини векторної рівності (**) на головний вектор $\vec{R}^*$, дістанемо

$$\vec{R}^* \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{R}^* \cdot \left(\vec{M}_O + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{R}^*\right) = \vec{R}^* \cdot \vec{M}_O + \vec{R}^* \cdot \left(\overrightarrow{O_1O} \times \vec{R}^*\right). \qquad (***)$$

Оскільки за правилом *векторного* добутку вектор $\left(\overrightarrow{O_1O} \times \vec{R}^*\right)$ проходить перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\overrightarrow{O_1O}$ та $\vec{R}^*$; то $\vec{R}^* \perp \left(\overrightarrow{O_1O} \times \vec{R}^*\right)$; тоді за правилом *скалярного* добутку

$$\vec{R}^* \cdot \left(\overrightarrow{O_1O} \times \vec{R}^*\right) = 0,$$

з урахуванням чого векторна рівність (***) набуває вигляду

$$\vec{R}^* \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{R}^* \cdot \vec{M}_O,$$

звідки зрозуміло, що при зміні положення центра зведення *скалярний добуток головного вектора $\vec{R}^*$ на головний момент $\vec{M}_O$ системи сил свого значення не змінює* й, отже, також є ***інваріантною*** по відношенню до центра зведення ***величиною***.

ⓘ ***Другим (скалярним) статичним інваріантом системи сил*** (або ***інваріантом зведення***) є скалярний добуток головного вектора на головний момент системи сил:

$$J_2 = \vec{R}^* \cdot \vec{M}_O. \qquad \textbf{(6.4)}$$

ⓘ Для кожної системи сил завжди ***є два основних інваріанти зведення***.

§ 6.2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ І МЕХАНІЧНИЙ ЗМІСТИ ДРУГОГО ІНВАРІАНТУ

Якщо в формулі (6.4) записати скалярний добуток $\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O$ як суму добутків відповідних проекцій на координатні осі векторів $\vec{R}^*$ та $\vec{M}_O$, то

$$J_2 = \vec{R}^* \cdot \vec{M}_O = R_x^* \cdot M_{Ox} + R_y^* \cdot M_{Oy} + R_z^* \cdot M_{Oz},$$

а врахувавши формули (5.4) та (5.7), дістанемо:

$$J_2 = \sum X \cdot \sum M_x + \sum Y \cdot \sum M_y + \sum Z \cdot \sum M_z. \qquad \textbf{(6.5)}$$

Розписавши ж у формулі (6.4) скалярний добуток $\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O$ через модулі цих векторів, матимемо:

$$J_2 = \vec{R}^* \cdot \vec{M}_O = R^* \cdot M_O \cdot \cos\alpha, \qquad \textbf{(6.6)}$$

де α – кут між векторами $\vec{R}^*$ і $\vec{M}_O$ (див. рис. 5.3 і 6.2).

Якщо зобразити *проекцію* вектора $\vec{M}_O$ головного моменту системи сил на напрямок головного вектора $\vec{R}^*$, позначив-

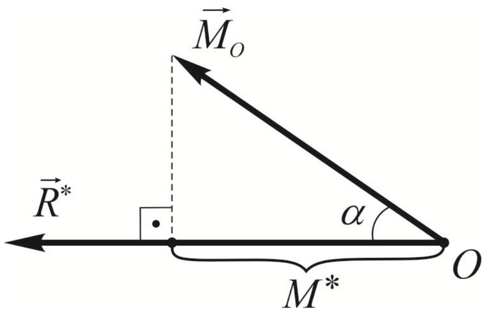


Рис. 6.2

ши її M^* (див. рис. 6.2), то певна річ, що

$$M^* = M_O \cdot cos\alpha\,,$$

з урахуванням чого формулу (6.6) можна подати у вигляді

$$\mathcal{J}_2 = R^* \cdot M^*. \qquad \textbf{(6.7)}$$

Оскільки в отриманій рівності (6.7)

$$\mathcal{J}_2 = const \quad \text{і} \quad R^* = \mathcal{J}_1 = const\,,$$

то безумовно, що і

$$M^* = M_O \cdot cos\alpha = const. \qquad \textbf{(6.8)}$$

Отримані залежності (6.6) ÷ (6.8) дозволяють усвідомити й сформулювати *геометричний* і *механічний* змісти другого інваріанту.

> ⓘ ***Геометричний зміст другого інваріанту*** полягає в тому, що проекція M^* головного моменту системи сил на напрямок головного вектора ніяк не залежить від вибору центра зведення і, отже, також є *інваріантною величиною*[1].

Таким чином, при зміні центра зведення головний момент системи сил своє значення змінює (залежно від положення центра зведення модуль головного моменту або зростає, або зменшується), але проекція M^* його на незмінний напрямок головного вектора лишається незмінною, що можливо лише за умови адекватної зміни кута між напрямками головного вектора та головного моменту: при зростанні модуля головного

[1] Цій *інваріантній величині* найчастіше не надають ніякого власного імені, оскільки вона є похідною величиною від другого інваріанту $\mathcal{J}_2$. У деяких же джерелах і підручниках за другий інваріант зведення приймають M^*, вважаючи, що $\mathcal{J}_2 = M^*$, а скалярний добуток $\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O$ розглядають як похідну величину від $\mathcal{J}_2 = M^*$.

моменту відповідно зростає і зазначений кут, що призводить до зменшення його косинуса, та навпаки (рис. 6.3). Звісно,

> ⓘ ні за якої умови модуль головного моменту системи сил відносно будь-якого центру зведення не може бути меншим за значення M^*.

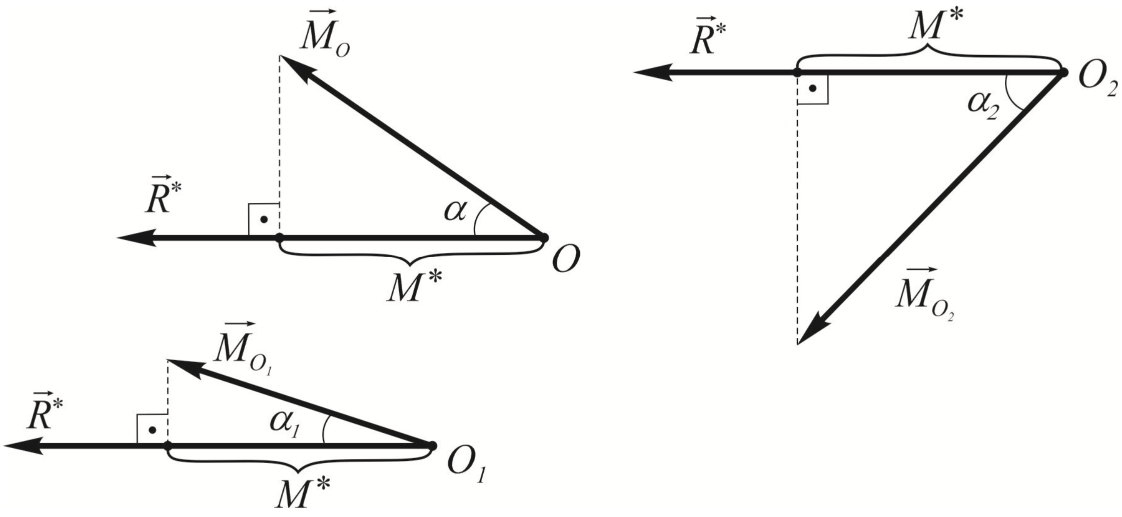


Рис. 6.3

> ⓘ ***Механічний зміст другого інваріанту*** полягає в тому, що існує такий центр зведення (позначимо його як C), відносно якого головний момент системи сил $\vec{M}_C$ стає колінеарним головному вектору та набуває свого мінімально можливого значення (рис. 6.4), модуль якого
>
> $$M_C = M^*. \qquad \textbf{(6.9)}$$

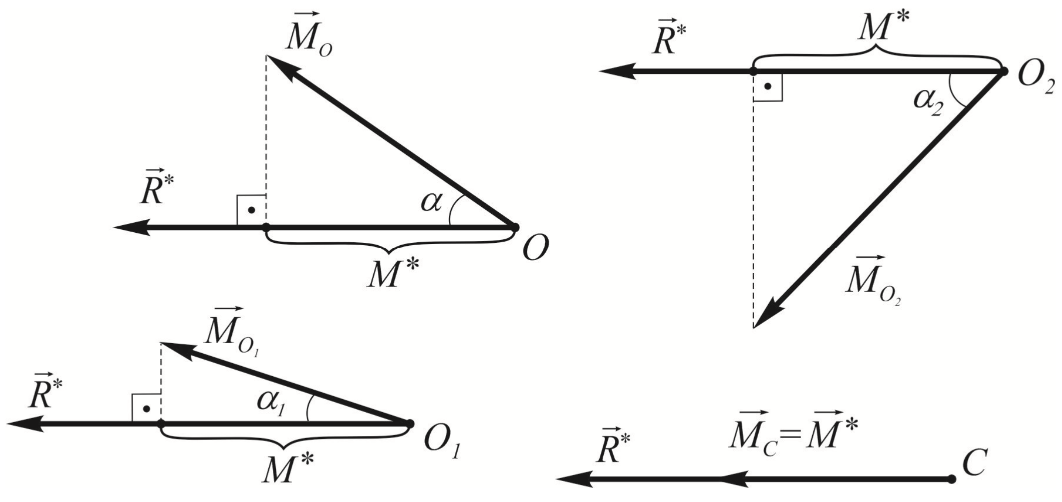


Рис. 6.4

Розглянувши формули (6.5) та (6.7), отримаємо очевидну рівність

$$J_2 = \sum X \cdot \sum M_x + \sum Y \cdot \sum M_y + \sum Z \cdot \sum M_z = R^* \cdot M^*,$$

з якої дістанемо формулу, що визначає значення M^*:

$$M^* = \frac{J_2}{R^*} \qquad \textbf{(6.10)}$$

або

$$M^* = \frac{\sum X \cdot \sum M_x + \sum Y \cdot \sum M_y + \sum Z \cdot \sum M_z}{R^*}. \qquad \textbf{(6.10)}$$

§ 6.3. ЗВЕДЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО СИЛОВОГО ГВИНТА (ДИНАМИ)

Повернемося до з'ясування важливої відповіді на запитання про канонічний вигляд довільної системи сил, яке було поставлено у кінці § 5.2.

Розглянемо просторову довільну систему сил $\{\vec{F}\}$ з n сил. Вибравши в просторі довільну точку O, зведемо задану систему сил до цієї точки. Нехай при зведенні отримаємо не рівні нулю головний вектор $\vec{R}^* \neq 0$ та головний момент $\vec{M}_O \neq 0$ із кутом $\alpha \neq 90°$ між ними (рис. 6.5,а); позначимо лінію дії головного вектора як (a). Певна річ, в такому разі

$$\vec{J}_1 = \vec{R}^* \neq 0 \quad \text{та} \quad J_2 = R^* \cdot M_O \cdot \cos\alpha \neq 0.$$

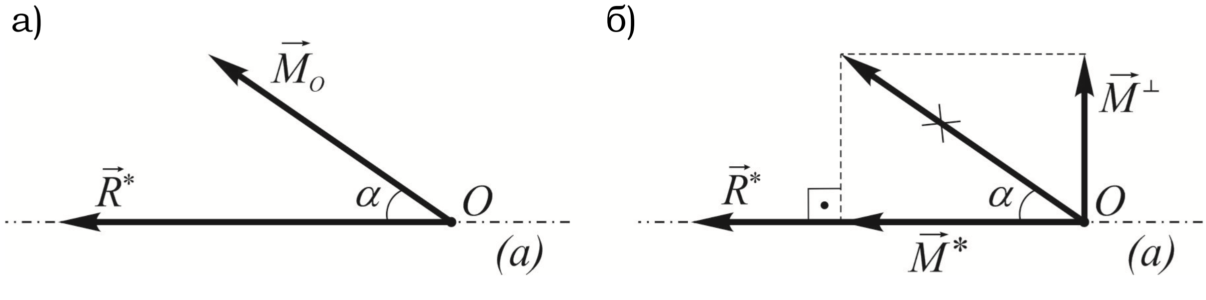


Рис. 6.5

Розкладемо вектор $\vec{M}_O$ на дві ортогональні складові[2] (рис. 6.5,б):

☝ направлену по прямій (a) складову $\vec{M}^*$, модуль якої

$$M^* = M_O \cdot \cos\alpha ;$$

✌ перпендикулярну до прямої (a) складову $\vec{M}^\perp$, модуль якої

$$M^\perp = M_O \cdot \sin\alpha .$$

Проведемо через пряму (a) площину π, перпендикулярну до вектора $\vec{M}^\perp$; очевидно, що в такому разі площина π є площиною дії *певної пари сил*, вектор моменту якої дорівнює вектору $\vec{M}^\perp$. Оберімо сили цієї *певної пари сил*, назвавши їх $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, рівними за модулем головному вектору R^* ($P_1 = P_2 = R^*$) й розташуємо їх в площині π так, щоб вектор моменту цієї пари $\vec{M}\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right)$ був би рівний складовій $\vec{M}^\perp$:

$$\vec{M}\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right) = \vec{M}^\perp . \qquad (*)$$

Прикладемо одну із сил пари (нехай це буде сила $\vec{P}_2$) у точці O, направив її у протилежному до головного вектора $\vec{R}^*$ напрямку (звісно, за такої умови $\vec{P}_2 = -\vec{R}^*$). Тоді іншу силу $\vec{P}_1$ пари (яка за визначенням поняття пари сил має мати протилежний до $\vec{P}_2$ напрямок; тобто $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$) необхідно прикласти в якійсь точці C, яка одночасно належить і площині π, і прямій (b), яка паралельна прямій (a). При цьому необхідно точку C, а значить і пряму (b), розташувати таким чином, щоб, дивлячись назустріч вектору $\vec{M}^\perp$, бачити прагнення пари сил $\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right)$ обертати площину своєї дії π проти руху годинникової стрілки (рис. 6.6).

З'ясуємо тепер необхідну для виконання умови (*) найкоротшу відстань між прямими (a) та (b). Оскільки згідно з фо-

[2] Необхідно твердо розуміти, що дія «розкладемо вектор $\vec{M}_O$ на дві ортогональні складові» передбачає й означає те, що приєднану пару сил замінюють еквівалентними їй двома парами (або розкладають приєднану пару на дві пари сил).

рмулою (4.8) модуль вектора моменту пари сил дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на плече пари, то

$$M\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right)=P_1\cdot h=R^*\cdot h,$$

де h – найкоротша відстань між лініями дій сил пари.

Тоді для виконання умови (∗) необхідно, щоб плече h пари сил $\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right)$ було б рівним

$$h=\frac{M^{\perp}}{R^*},$$

оскільки в такому разі дійсно

$$M\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right)=R^*\cdot h=R^*\cdot\frac{M^{\perp}}{R^*}=M^{\perp},$$

що і необхідно.

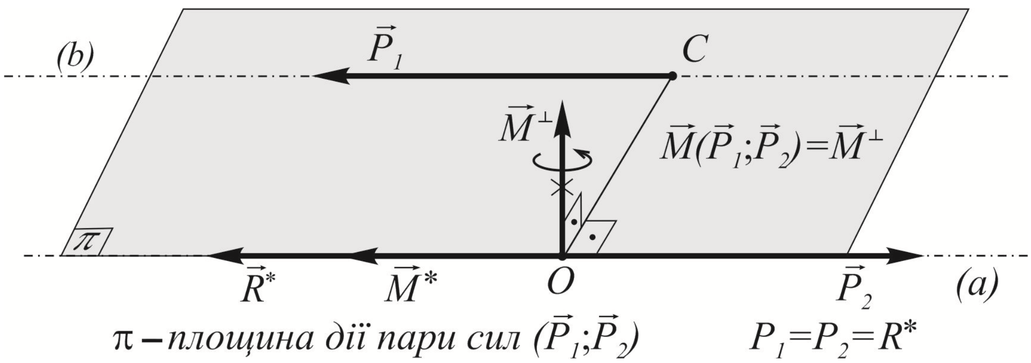


Рис. 6.6

Оскільки прямі (a) та (b) є лініями дій сил $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ пари $\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right)$, то встановлене плече h цієї пари й визначає необхідну найкоротшу віддаль між прямими (a) та (b).

Не викликає сумніву, що згідно з аксіомою №1 прикладені у точці O сили $\vec{R}^*$ і $\vec{P}_2$ утворюють зрівноважену систему сил $\left\{\vec{P}_2;\vec{R}^*\right\}\backsim 0$, яку на підставі аксіоми №2 відкинемо. Вектор пари сил $\vec{M}^*$, як вільний вектор, перенесемо з точки O в точку C (рис. 6.7).

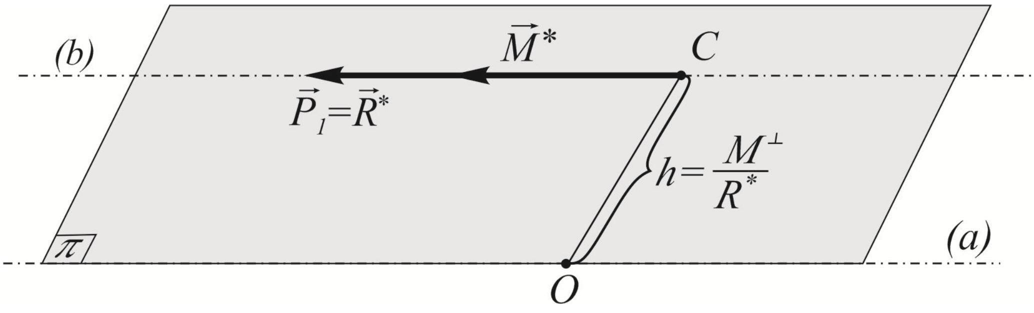


Рис. 6.7

Таким чином, вихідна довільна система сил $\{\vec{F}\}$ звелася у точці C до *одного вектора сили* $\vec{P}_1 = \vec{R}^*$ і до *одного вектора моменту пари сил* $\vec{M}^*$, які лежать на одній прямій (тобто є *колінеарними*). Безсумнівно, подальше спрощення неможливе, що дозволяє сформулювати ***висновок***:

ⓘ якщо при зведенні довільної системи сил до якоїсь точки O отримали, що $\vec{\mathcal{I}}_1 \neq 0$ та $\mathcal{I}_2 \neq 0$, то система сил ***зводиться до однієї сили***, яка дорівнює ***головному вектору системи сил*** $\vec{R}^*$ та ***лінія дії якої не проходить через центр зведення*** O, і ***однієї пари сил***, вектор моменту якої дорівнює ***мінімальному головному моменту системи сил*** $\vec{M}^*$ й який ***колінеарний головному вектору*** $\vec{R}^*$; сили зазначеної пари (назвімо ці сили $\vec{F}$ та $-\vec{F}$) лежать у площині, перпендикулярній до лінії дії $\vec{R}^*$.

ⓘ Таку сукупність сили та пари сил називають ***силовим гвинтом*** або ***динамою***.

ⓘ Пряму (b), на якій лежать вектори $\vec{R}^*$ і $\vec{M}^*$, називають ***центральною гвинтовою віссю системи сил*** або ***центральною віссю динами***.

Отриману в точці C колінеарну сукупність сили $\vec{R}^*$ та пари сил з вектором її моменту $\vec{M}^*$ можна розглядати як результат зведення вихідної системи сил до центра C, який знаходиться на центральній гвинтовій осі системи сил. Отже, в цьому випадку головний момент системи сил відносно центра зведення C набуває мінімально можливого для розглядуваної системи сил значення

$$\vec{M}_C = \vec{M}^*.$$

Оскільки вектор сили є ковзним вектором, а вектор моменту пари сил – вільний вектор, то обидва вектори можна переносити вздовж лінії їх дії. Це означає, що положення точки C на прямій (b) не суттєве; суттєвим є положення самої прямої (b).

При зведенні системи сил до точки O можна отримати різні значення кута α:

☝ α – *гострий кут*; тоді за формулою (6.8) отримаємо, що проекція M^* головного моменту $\vec{M}_O$ на напрям головного вектора $\vec{R}^*$ є *додатною величиною* та, отже, напрямки головного вектору $\vec{R}^*$ і найменшого головного моменту системи сил $\vec{M}_C = \vec{M}^*$ збігаються; таку сукупність векторів $\vec{R}^*$ та $\vec{M}^*$ називають ***правою динамою*** чи ***правим силовим гвинтом*** (рис. 6.8,а).

Праву динаму прикладають, наприклад, до викрутки при закручуванні шурупів чи саморізів.

✌ α – *тупий кут*; тоді проекція M^* головного моменту $\vec{M}_O$ на напрям головного вектора виявляється *від'ємною величиною*; напрямки головного вектору $\vec{R}^*$ і найменшого головного моменту системи сил $\vec{M}_C = \vec{M}^*$ є протилежними; у цьому випадку ***динама*** є ***лівою*** або ***силовий гвинт*** є ***лівим*** (рис. 6.8,б).

Випадок, коли α – *прямий кут* розглянемо й проаналізуємо в наступному параграфі.

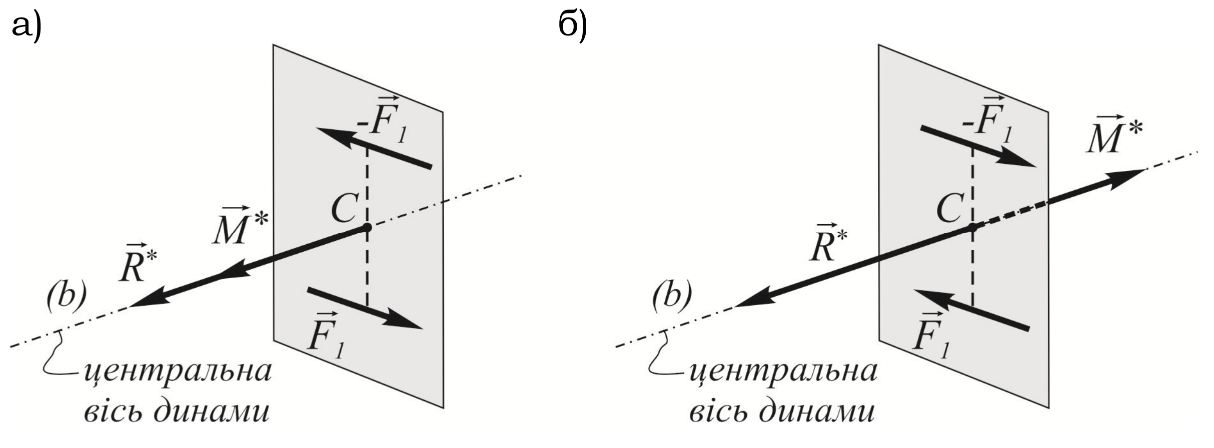


Рис. 6.8

Підсумуємо викладене: для розв'язування першої основної задачі статики для довільної системи сил спочатку зазначену систему необхідно звести до довільної точки O, отримавши головний вектор $\vec{R}^*$ і головний момент $\vec{M}_O$ цієї системи сил відносно центра O; потім встановити інваріанти зведення $\vec{J}_1$ й J_2. У разі, коли $\vec{J}_1 \neq 0$ і $J_2 \neq 0$ постає задача про знаходження:

1) модуля M_C головного моменту $\vec{M}_C$ системи сил відносно довільної точки C, яка знаходиться на центральній гвинтовій осі системи сил;
2) положення центральної гвинтової осі системи сил.

Модуль M_C визначають за формулами (6.9) і (6.10).

Для знаходження положення центральної гвинтової осі системи сил проведемо через центр зведення (через точку O) декартові координатні осі; точка O у обраній системі відліку матиме координати $(0;0;0)$. Координати точки C, яка знаходиться на центральній гвинтовій осі системи, позначимо як x, y та z (рис. 6.9).

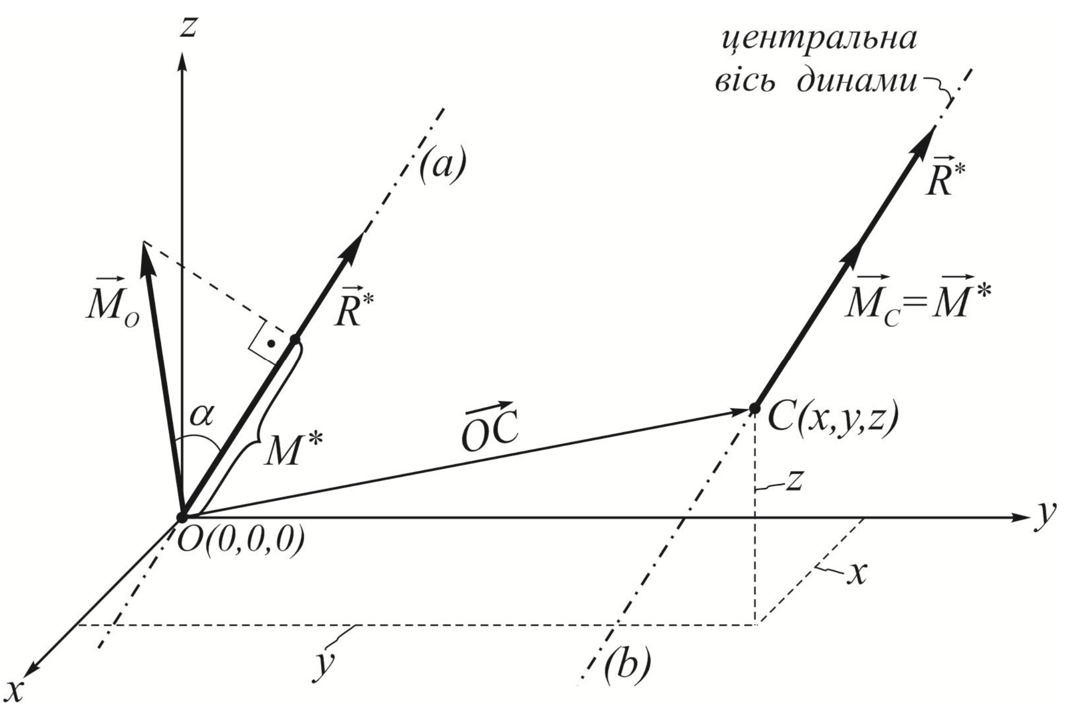


Рис. 6.9

За формулою (6.3) запишімо головний момент $\vec{M}_C$ розглядуваної системи сил відносно центра C:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O - \overrightarrow{OC} \times \vec{R}^* = \vec{M}_O - \vec{M}_O\left(\vec{R}^*\right), \qquad (**)$$

де $\overrightarrow{OC}$ – радіус-вектор, проведений з точки O у точку C (див. рис. 6.9); $\overrightarrow{OC} \times \vec{R}^* = \vec{M}_O\left(\vec{R}^*\right)$ – момент сили $\vec{R}^*$, яка прикладена у точці C, відносно точки O.

Спроектувавши векторну рівність (**) на координатні осі, дістанемо три скалярних рівності:

$$\left.\begin{aligned} M_{Cx} &= M_{Ox} - M_{Ox}\left(\vec{R}^*\right), \\ M_{Cy} &= M_{Oy} - M_{Oy}\left(\vec{R}^*\right), \\ M_{Cz} &= M_{Oz} - M_{Oz}\left(\vec{R}^*\right). \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

Далі врахуємо наступне:

- оскільки $\vec{M}_C = \vec{M}^*$, то відповідні проекції

$$M_{Cx} = M_x^*, \quad M_{Cy} = M_y^* \quad \text{та} \quad M_{Cz} = M_z^*;$$

- згідно з формулою (3.5) проекція вектора моменту сили відносно точки O на вісь, що проходить через цю точку, дорівнює моменту розглядуваної сили відносно зазначеної осі; тоді

$$\begin{aligned} M_{Ox}\left(\vec{R}^*\right) &= M_x\left(\vec{R}^*\right), \\ M_{Oy}\left(\vec{R}^*\right) &= M_y\left(\vec{R}^*\right), \\ M_{Oz}\left(\vec{R}^*\right) &= M_z\left(\vec{R}^*\right); \end{aligned}$$

- згідно з формулою (3.8) момент сили відносно осі визначають формули Ейлера; тоді:

$$\begin{aligned} M_x\left(\vec{R}^*\right) &= y \cdot R_z^* - z \cdot R_y^*, \\ M_y\left(\vec{R}^*\right) &= z \cdot R_x^* - x \cdot R_z^*, \\ M_z\left(\vec{R}^*\right) &= x \cdot R_y^* - y \cdot R_x^*. \end{aligned}$$

Підставляючи ці значення в векторну рівність (***), дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} M_x^* &= M_{Ox} - \left(y \cdot R_z^* - z \cdot R_y^*\right), \\ M_y^* &= M_{Oy} - \left(z \cdot R_x^* - x \cdot R_z^*\right), \\ M_z^* &= M_{Oz} - \left(x \cdot R_y^* - y \cdot R_x^*\right). \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(6.11)}$$

ⓘ Рівняння (6.11) визначають (встановлюють) ***проекції найменшого головного вектору*** розглядуваної ***системи сил на координатні осі***.

Оскільки вектори $\vec{R}^*$ і $\vec{M}^*$ напрямлені по одній прямій, то, використавши умову колінеарності двох векторів у вигляді

$$\frac{M_x^*}{R_x^*} = \frac{M_y^*}{R_y^*} = \frac{M_z^*}{R_z^*} = p$$

та формулу (6.11), отримаємо ***рівняння центральної гвинтової осі***:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_{Ox} - \left(y \cdot R_z^* - z \cdot R_y^*\right)}{R_x^*} &= p, \\ \frac{M_{Oy} - \left(z \cdot R_x^* - x \cdot R_z^*\right)}{R_y^*} &= p, \\ \frac{M_{Oz} - \left(x \cdot R_y^* - y \cdot R_x^*\right)}{R_z^*} &= p. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(6.12)}$$

В останніх двох формулах p – певний сталий математичний *коефіцієнт пропорціональності колінеарних векторів* $\vec{R}^*$ та $\vec{M}^*$, який в теорії зведення має назву ***параметр силового гвинта*** (чи ***параметр динами***). Як відомо з векторної алгебри, для колінеарних векторів співвідношення їх модулів аналогічне співвідношенню їх відповідних проекцій, з урахуванням чого параметр динами

$$p = \frac{M^*}{R^*}. \qquad \textbf{(6.13)}$$

Оскільки у правої динами $M^* > 0$, то і ***параметр правої динами є додатною величиною***; для лівої динами $M^* < 0$, тому ***параметр лівої динами менше нуля***.

У рівняннях (6.12) сталими величинами для конкретної розглядуваної системи сил є: модуль R^* головного вектора і його проекції R_x^*, R_y^* та R_z^* на координатні осі, а також модуль M^* найменшого головного моменту та його проекції M_x^*, M_y^* та M_z^* на ті ж осі. Змінними величинами є поточні координати x, y та z точок центральної гвинтової осі. З трьох рівнянь алгебраїчно незалежними будуть лише два.

За рівнянням (6.12) пряму (b) будують за точками її перетину з координатними площинами (рис. 6.10).

Координати ж точок перетину центральної гвинтової осі з координатними площинами отримують шляхом прирівнювання нулеві відповідних координат. Так, якщо позначити точку перетину прямої (b) із фронтальною площиною yOz як C_1, то її координата $x_1 = 0$; для точки C_2 перетину прямої (b) з профільною площиною xOz – $y_2 = 0$, а для точки C_3 перетину прямої (b) із горизонтальною площиною xOy – $z_3 = 0$.

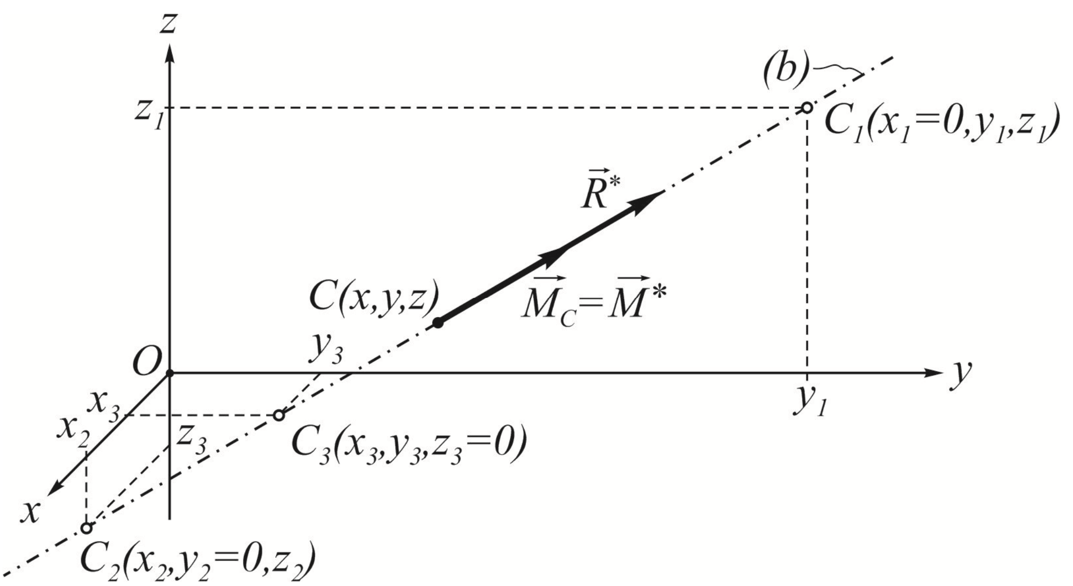


Рис. 6.10

Можна довести незалежність положення центральної осі динами від попереднього довільного вибору центра зведення.

Таким чином, задача про зведення системи сил до канонічного вигляду для найзагальнішого випадку просторової довільної розв'язана повністю.

§ 6.4. ОКРЕМІ ВИПАДКИ ЗВЕДЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Розглянемо можливі окремі випадки, що можуть виникати при зведенні довільної системи сил, як випадки «виродженої» динами.

1. Нехай при зведенні розглядуваної системи сил до довільно обраної точки O отримали не рівні нулю головний вектор $\vec{R}^* \neq 0$ та головний момент $\vec{M}_O \neq 0$, але кут α між ними виявився прямим: $\alpha = 90^\circ$ (рис. 6.11). Знову позначимо лінію дії головного вектора як (a).

У такому разі

$$\vec{J}_1 = \vec{R}^* \neq 0,$$

а

$$J_2 = R^* \cdot M_O \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

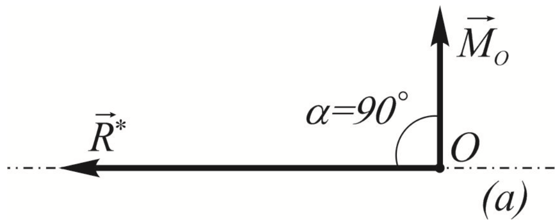


Рис. 6.11

Проведемо через пряму (a) перпендикулярну до вектора $\vec{M}_O$ площину π та розташуємо в цій площині пару сил $(\vec{P}_1; \vec{P}_2)$, елементи якої приймемо й розташуємо наступним чином (рис. 6.12):

а) модулі сил P_1 і P_2 пари приймемо рівними модулю R^*;

б) одну із сил пари (нехай це буде сила $\vec{P}_2$) прикладемо у точці O, направив її у протилежному до головного вектора $\vec{R}^*$ напрямку;

в) силу $\vec{P}_1$, яка збігається за напрямком з $\vec{R}^*$, прикладемо в певній точці C, що знаходиться на площині π та на прямій (c), яка паралельна прямій (a), так щоб, дивлячись назустріч вектору $\vec{M}_O$, бачити прагнення пари сил $(\vec{P}_1; \vec{P}_2)$ обертати площину π проти руху годинникової стрілки;

г) плече h пари приймемо рівним $h = \dfrac{M_O}{R^*}$, оскільки саме за такого вибору вектор $\vec{M}\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right)$ моменту пари $\left(\vec{P}_1;\vec{P}_2\right)$ буде рівним $\vec{M}_O$.

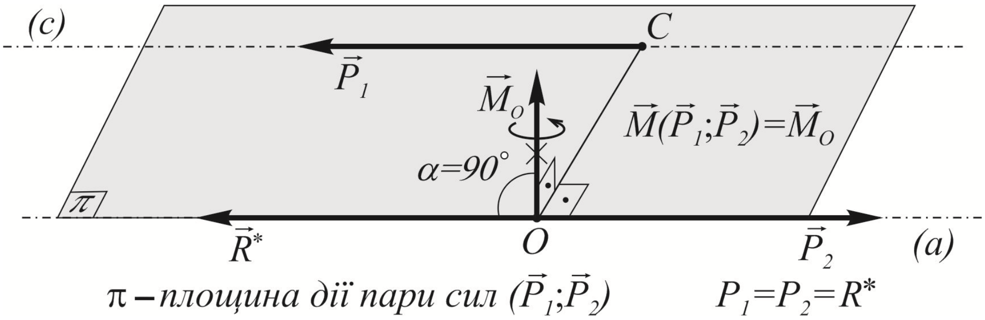


Рис. 6.12

Відкинувши у точці O зрівноважену систему сил $\left\{\vec{P}_2;\vec{R}^*\right\} \backsim 0$, отримаємо (див. рис. 6.13), що вихідна просторова довільна система сил $\left\{\vec{F}\right\}$ звелася у точці C до *однієї сили* $\vec{P}_1 = \vec{R}^*$, яка, таким чином, є *рівнодійною* цієї системи сил.

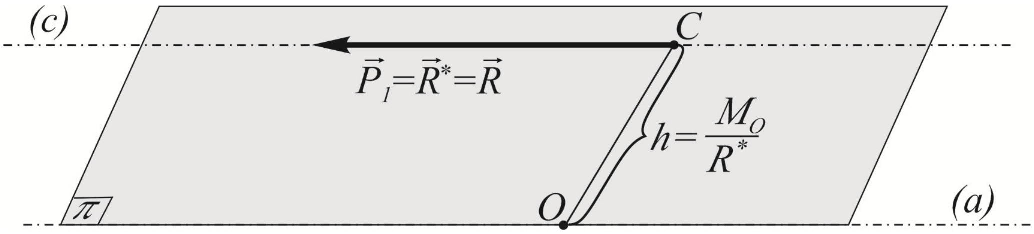


Рис. 6.13

Поведені міркування приводять до очевидного ***висновку***:

ⓘ якщо при зведенні певної системи сил до довільної точки O отримали, що $\vec{\mathcal{I}}_1 \neq 0$, $M_O \neq 0$, але $\mathcal{I}_2 = 0$, оскільки $\alpha = 90^\circ$, то система сил ***зводиться до рівнодійної*** $\vec{R}$, яка дорівнює ***головному вектору системи сил*** $\vec{R}^*$ та ***лінія дії*** якої ***не проходить через центр зведення*** O.

Для знаходження положення *лінії дії рівнодійної* скористаємося результатами попереднього параграфа, розглядаючи цей випадок, як окремий випадок динами, у якої $M^* = 0$, а отже і параметр $p = 0$. Ураховуючи цей факт з рівнянь (6.12) дістанемо

$$\left.\begin{aligned} &M_{Ox}-\left(y\cdot R_z^*-z\cdot R_y^*\right)=0,\\ &M_{Oy}-\left(z\cdot R_x^*-x\cdot R_z^*\right)=0,\\ &M_{Oz}-\left(x\cdot R_y^*-y\cdot R_x^*\right)=0 \end{aligned}\right\}$$

або

$$\left.\begin{aligned} &M_{Ox}=y\cdot R_z^*-z\cdot R_y^*,\\ &M_{Oy}=z\cdot R_x^*-x\cdot R_z^*,\\ &M_{Oz}=x\cdot R_y^*-y\cdot R_x^*. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(6.14)}$$

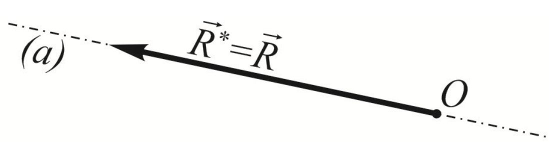
Формула (6.14) є ***рівняннями лінії дії рівнодійної*** $\vec{R}^*$ ***системи сил***, за якими пряму (c) будують за точками її перетину з координатними площинами аналогічно до побудови центральної осі динами в § 6.3.

2. Нехай при зведенні розглядуваної системи сил до довільної точки O отримали не рівний нулю головний вектор $\vec{R}^* \neq 0$ та рівний нулю головний момент $\vec{M}_O = 0$.

У цьому випадку $\vec{J}_1 = \vec{R}^* \neq 0$, а $J_2 = R^* \cdot M_O \cdot cos\alpha = 0$, оскільки $M_O = 0$.

Через те, що при зведенні до точки O вихідна система сил $\{\vec{F}\}$ виявилася еквівалентною тільки одному головному вектору $\vec{R}^*$, то, безсумнівно, у цьому разі він є *рівнодійною* (рис. 6.14). Таким чином, приходимо до ***висновку***:

ⓘ якщо при зведенні певної системи сил до довільної точки O отримали, що $\vec{J}_1 \neq 0$, але $J_2 = 0$, оскільки $M_O = 0$, то система сил ***зводиться до рівнодійної*** $\vec{R}$, яка дорівнює ***головному вектору системи сил*** $\vec{R}^*$ та ***лінія дії*** якої ***проходить через центр зведення*** O.



*(а) – лінія дії **рівнодійної** системи сил*

Рис. 6.14

3. Нехай при зведенні розглядуваної системи сил до довільної точки O отримали рівний нулю головний вектор $\vec{R}^* = 0$ та не рівний нулю головний момент $\vec{M}_O \neq 0$ (рис. 6.15,а).

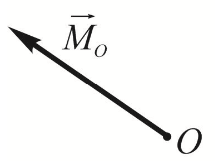
У цьому разі $\vec{J}_1 = \vec{R}^* = 0$, $J_2 = 0$, оскільки $R^* = 0$, але $\vec{M}_O \neq 0$.

Проведемо через точку O перпендикулярну до вектора $\vec{M}_O$ площину π та розташуємо в цій площині таку пару сил $(\vec{P}_1; \vec{P}_2)$, щоб вектор $\vec{M}(\vec{P}_1; \vec{P}_2)$ моменту цієї пари був би рівним $\vec{M}_O$ (рис. 6.15,б).

Висновок:

ⓘ якщо при зведенні певної системи сил до довільної точки O отримали, що $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, але $\vec{M}_O \neq 0$, то система сил ***зводиться до пари сил***, вектор моменту якої дорівнює ***головному моменту заданої системи сил відносно центра зведення*** O.

а)



б)

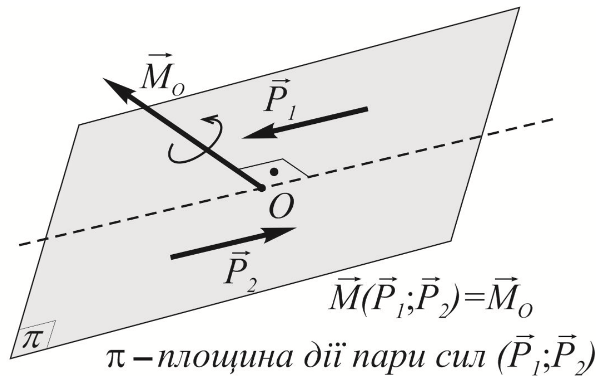


Рис. 6.15

Якщо змінити центр зведення на O_1, то через те, що головний вектор є першим інваріантом, він дорівнює нулю незалежно від центра зведення; якщо ж за формулою (6.3) визначити головний момент відносно нового центра зведення, то дістанемо, що

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O - \overrightarrow{OO_1} \times \vec{R}^* = \vec{M}_O - \overrightarrow{OO_1} \times 0 = \vec{M}_O .$$

Оскільки $\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O$, то в такому разі ***інваріантною величиною є головний момент системи сил***; тобто, у такому разі *головні моменти системи сил відносно усіх точок простору геометрично рівні*.

Важливо розуміти, що

> ⓘ *вільне* матеріальне тіло під дією системи сил, для якої $\vec{J}_1 = 0$, $J_2 = 0$, але $\vec{M}_O \neq 0$, здійснює ***обертальний рух***.

4. Нехай при зведенні певної системи сил до довільної точки O отримали рівні нулю головний вектор $\vec{R}^* = 0$ і головний момент $\vec{M}_O = 0$. Неважко бачити, що у такому разі виконується векторна умова (5.10) рівноваги системи сил й, отже:

> ⓘ якщо при зведенні певної системи сил до довільної точки O отримали, що $J_1 = 0$, $J_2 = 0$ й $\vec{M}_O = 0$, то ця система сил є ***зрівноваженою***.

§ 6.5. КЛАСИФІКАЦІЯ КАНОНІЧНИХ ВИГЛЯДІВ РІЗНИХ СИСТЕМ СИЛ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНВАРІАНТІВ ЗВЕДЕННЯ

Використовуючи *статичні інваріанти зведення* зручно й легко однозначно *класифікувати* канонічні вигляди різних систем сил. Наведемо цю класифікацію у вигляді таблиці всіх можливих випадків зведення просторової довільної системи сил (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Інваріанти системи сил		Головний момент системи сил	Додаткові значення	Канонічний вигляд
$\vec{J}_1 = \vec{R}^*$	$J_2 = \vec{R}^* \cdot \vec{M}_O$	$\vec{M}_O$		
1	2	3	4	5
$\vec{J}_1 \neq 0$	$J_2 \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	$p > 0$	Права динама
$\vec{J}_1 \neq 0$	$J_2 \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	$p < 0$	Ліва динама
$\vec{J}_1 \neq 0$	$J_2 = 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$	Рівнодійна, що не проходить через центр зведення
$\vec{J}_1 \neq 0$	$J_2 = 0$	$\vec{M}_O = 0$	–	Рівнодійна, що проходить через центр зведення
$\vec{J}_1 = 0$	$J_2 = 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	–	Пара сил
$\vec{J}_1 = 0$	$J_2 = 0$	$\vec{M}_O = 0$	–	Зрівноважена система сил

§ 6.6. ТЕОРЕМА ВАРІНЬОНА У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ

Узагальнимо теорему Варіньона, наведену в § 3.4 для збіжної системи сил, на *будь-яку* систему сил.

Теорема Варіньона (у загальному вигляді):

якщо розглядувана *система сил зводиться до рівнодійної*, то її ***момент відносно*** довільної ***точки дорівнює геометричній сумі моментів*** складових ***сил відносно*** тієї самої ***точки***, а ***момент*** цієї ***рівнодійної відносно*** довільної ***осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів*** складових ***сил відносно*** цієї ***осі***.

Для доведення розглянемо матеріальне тіло, на яке діє просторова система сил $\{\vec{F}_i\}$ з n сил. Нехай ця система сил зводиться до рівнодійної $\vec{R}$, лінія дії якої проходить через певну точку C. У такому разі для даної системи сил:

1) рівнодійна дорівнює головному вектору, тобто $\vec{R} = \vec{R}^*$;

2) головний момент відносно точки C дорівнює нулеві, тобто $\vec{M}_C = 0$ (див. рис. 6.13 і відповідні пояснення).

Візьмемо *довільну* точку O за новий центр зведення. Згідно з формулою (5.3) головний момент системи сил $\{\vec{F}_i\}$ відносно цієї точки

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i),$$

де $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i)$ – геометрична (чи векторна) сума моментів всіх сил системи відносно *довільної* точки O.

Але за формулою (6.2)

$$\vec{M}_O = \vec{M}_C + \vec{M}_O(\vec{R}^*).$$

Оскільки $\vec{M}_C = 0$, а $\vec{R}^* = \vec{R}$, то з наведених векторних рівностей слідує, що

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O(\vec{R})$$

або

$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right). \qquad \textbf{(6.15)}$$

Проведімо тепер через точку O довільну вісь z. Спроектувавши обидві частини векторної рівності (6.15) на цю вісь, дістанемо

$$M_{Oz}\left(\vec{R}\right)=\sum_{i=1}^{n}M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right).$$

Оскільки ж згідно з формулою (3.5) проекції

$$M_{Oz}\left(\vec{R}\right)=M_z\left(\vec{R}\right) \quad \text{і} \quad M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right)=M_z\left(\vec{F}_i\right),$$

то, урахувавши ці значення, остаточно дістанемо

$$M_z\left(\vec{R}\right)=\sum_{i=1}^{n}M_z\left(\vec{F}_i\right). \qquad \textbf{(6.16)}$$

Формули (6.15) і (6.16) – це математичні вирази, які й є доведенням теореми Варіньона у загальному вигляді.

ТЕМА 7 ▶ ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ СТАТИКИ. СТАТИЧНІ РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ І СПОРУД

- Поняття про прості конструкції та споруди. Визначення опорних реакцій плоских простих конструкцій
- Визначення зусиль у стержнях плоских ферм способом Ріттера
- Поняття про систему матеріальних тіл і про плоскі складені конструкції
- Способи визначення опорних реакцій плоских складених конструкцій

§ 7.1. ПОНЯТТЯ ПРО ПРОСТІ КОНСТРУКЦІЇ ТА СПОРУДИ. ВИЗНАЧЕННЯ ОПОРНИХ РЕАКЦІЙ ПЛОСКИХ ПРОСТИХ КОНСТРУКЦІЙ

Задачі, пов'язані зі статичними розрахунками різноманітних технологічних конструкцій, споруд, механізмів та їх вузлів під дією зовнішнього навантаження (див. рис. 7.1), трапляються та розв'язуються не тільки в теоретичній механіці, а й в інших інженерно-технічних науках і дисциплінах.

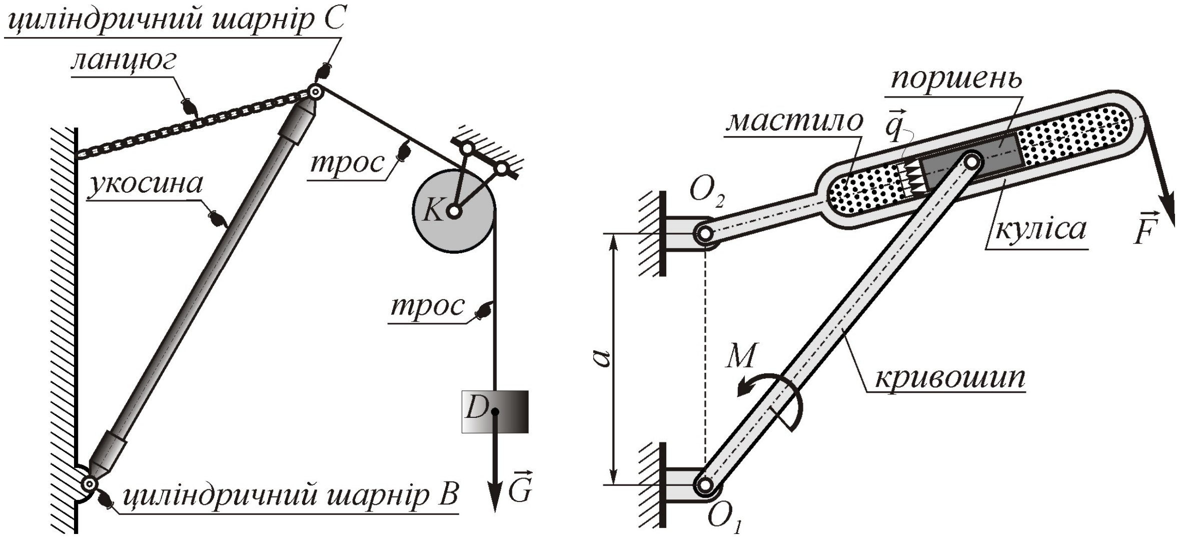


Рис. 7.1. Приклади технологічних конструкції та механізму

Як правило, в таких задачах постає потреба:

- знайти ***реакції в'язей*** (або ***опорні реакції***, або ***реакції опор***), що визначають ***рівновагу*** розглядуваного об'єкта; очевидно, що кількість цих реакцій залежить від кількості та *виду* накладених *в'язей* (див. § 2.7);

- знайти ***тиск*** (або ***силу тиску***) розглядуваного об'єкта на в'язі (опори)[1];
- визначити ***внутрішні зусилля***, що виникають у тих чи інших конструктивних елементах розглядуваного об'єкта;
- встановити ***загальні умови рівноваги*** розглядуваного об'єкта, якщо вона (рівновага) однозначно не забезпечена накладеними в'язями.

Якщо кількість невідомих шуканих параметрів розглядуваної задачі не перевищує можливу кількість рівнянь рівноваги, то задачу можна розв'язати методами статики; такі задачі називаються (є) ***статично визначуваними***, а конструкції й споруди, що розглядають в цих задачах, – ***статично визначуваними конструкціями*** (або ***системами***).

Якщо кількість невідомих шуканих параметрів більша від кількості рівнянь рівноваги, то такі задачі називаються (є) ***статично невизначуваними***, а відповідні конструкції та споруди – ***статично невизначуваними конструкціями*** (***системами***). Задачі такого роду розглядають у курсах опору матеріалів, теорії пружності, будівельної механіки й ін.

Усі статично визначувані задачі **про рівновагу матеріальних тіл** під дією будь-яких систем сил розв'язують у певній послідовності, яка визначає універсальний ***АЛГОРИТМ розв'язування*** цих задач, який складається з 8 пунктів:

1. Визначають матеріальне тіло, рівновагу якого необхідно *розглянути* в конкретній задачі чи в її окремій частині.
2. Прикладають (показують) усі задані активні сили, що діють на обране до розгляду матеріальне тіло.
3. З'ясовують, у яких точках які в'язі обмежують рух обраного тіла.
4. На підставі аксіоми №5 відкидають від розглядуваного тіла накладені на нього в'язі, замінюють їх дію реакціями відкинутих в'язей і зображують ***розрахункову схему***.

Зауваження №1 (до пункту **4** алгоритму): різниця між поняттями рисунок (або малюнок) і розрахункова схема полягає в такому: на рисунку зображують усі матеріальні тіла, які згадуються в умові (тексті) задачі, а на розрахунковій схемі зображують одне-єдине розглядуване матеріальне тіло, до котрого прикладена відповідна

[1] Згідно з аксіомою 4 сила тиску на кожну в'язь (опору) за величиною дорівнює модулю відповідної реакції, а за напрямком дії – протилежна до напрямку цієї реакції; отже, *задача про знаходження тиску на опори* зводиться до *задачі про визначення опорних реакцій.*

система діючих сил (у багатьох навчальних задачах *рисунок* і *розрахункову схему* можна *поєднувати*).

5. Уважаючи розглядуване тіло умовно вільним, визначають, яка система сил[2] прикладена до цього тіла.
6. Обирають систему координат, *записують умови* та *складають* відповідні *рівняння* рівноваги отриманої системи сил.

Зауваження №2 (до пункту **6** алгоритму): звертаємо увагу на слова *записують* і *складають*: умови рівноваги ***записують***, оскільки їх зовнішній вигляд є незмінним для кожної з існуючих систем сил; рівняння ж рівноваги ***складають*** для конкретної розв'язуваної задачі й вигляд їх залежить і від діючих сил, і від напрямків осей прийнятої системи координат (див. також відповідне зауваження в §2.5 на с. 51).

Зауваження №3 (до пункту **6** алгоритму): умови рівноваги потрібно записувати, притискаючи їх до лівої границі аркуша, потім ставити вертикальну риску, а після неї – в тому ж рядочку, що й умова, записувати відповідне складене рівняння рівноваги.

7. Розв'язують складені рівняння відносно шуканих невідомих величин[3].

Зауваження №4 (до пункту **7** алгоритму): розв'язувати складену систему алгебраїчних рівнянь з відповідною кількістю невідомих можна будь-яким з відомих легітимних способів: методом підстановки, методом додавання або віднімання, за теоремою Вієта, за правилом (методом) Крамера тощо; якщо зазначені способи розв'язування ще невідомі, то варто звернутися або до відповідних розділів елементарної алгебри, або до будь-кого, хто зможе це пояснити.

Зауваження №5 (до пункту **7** алгоритму): розв'язуючи будь-яке рівняння, обов'язково необхідно: а) записати алгебраїчний вираз, що визначає шукану величину; б) підставити у зазначений вираз необхідні числові значення; в) виконати обчислення-розрахунки й отримати відповідь. При розв'язуванні багатьох задач спростити певні математичні дії можна, підставляючи ті чи інші необхідні значення у загальному вигляді (алгебраїчному або у вигляді ірраціональних числових виразів); кінцеві ж результати у відповіді задачі завжди необхідно подавати у вигляді дійсних чисел.

8. Виконують перевірку та (якщо це необхідно) аналіз отриманих результатів.

---

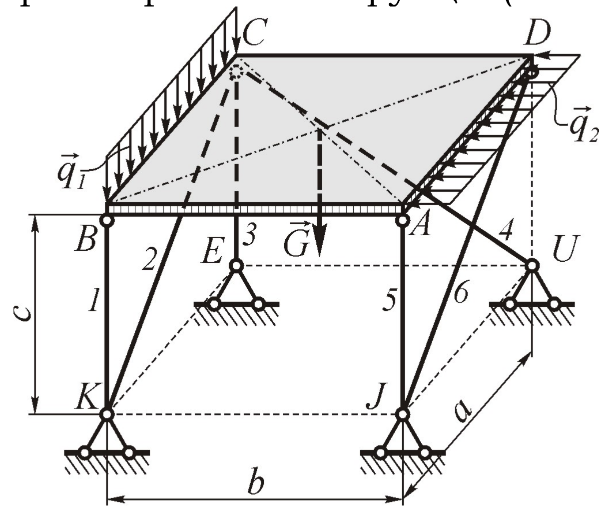
[2] Звісно, що систему сил треба аналізувати з *геометричної точки зору*, оскільки з *динамічної точки зору* система сил будь-якої задачі статики є *зрівноваженою*.

[3] Розв'язування задачі шляхом складання необхідних алгебраїчних рівнянь рівноваги й наступним знаходженням з них шуканих величин називають ***аналітичним способом розв'язування***.

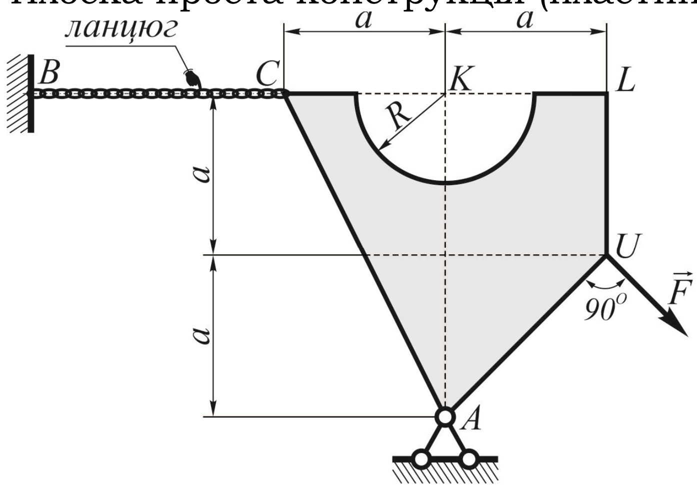
ⓘ ***Проста*** технологічна ***конструкція*** чи ***споруда*** (наприклад, будівельна) – це абсолютно тверде тіло певного технологічного призначення, на яке діють відповідні навантаження (рис. 7.2).

ⓘ ***Плоска проста конструкція*** – це проста конструкція, усі елементи якої, діюче на неї навантаження та накладені в'язі розташовані в одній площині (див. рис. 7.2,б та 7.2,в).

а) Просторова проста конструкція (плита $ABCD$)



б) Плоска проста конструкція (пластина)



в) Плоска проста балка (або брус) AB

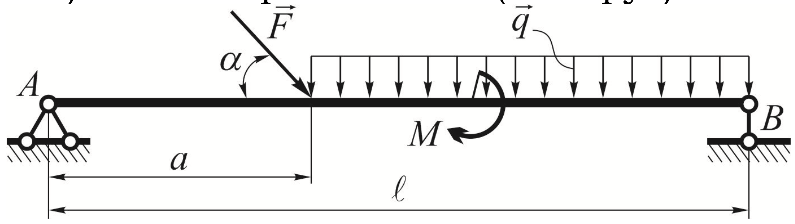


Рис. 7.2. Приклади простих технологічних конструкцій

✍ Плита $ABCD$, що зображена на рисунку 7.2,а, також є плоским твердим тілом, яке перебуває у горизонтальній площині, але розподілене навантаження інтенсивністю $\vec{q}_1$, сила $\vec{G}$ і стержні $1 \div 6$, які є в’язями для плити, розташовані в інших площинах і тому рівновагу плити $ABCD$ не можна розглядати як рівновагу плоскої конструкції.

У кожній задачі про рівновагу *плоскої* простої конструкції система сил, що діє на обране до розгляду тіло, у загальному випадкові обов’язково є *плоскою довільною* (звісно, що у деяких задачах система сил може бути або збіжною, або паралельною, але ці випадки є окремими випадками розташування сил в площині). Тому при розв’язуванні таких задач необхідно застосовувати аналітичні *умови рівноваги* плоскої довільної системи сил в одній з можливих форм запису (5.12)÷(5.14). Важливо розуміти, що незалежно від вибору форми запису умов рівноваги відповідних *рівнянь рівноваги* буде *тільки* ***три***. Звісно, що задача про рівновагу плоскої простої конструкції у загальному випадкові є статично визначуваною лише, якщо невідомих шуканих параметрів цієї задачі не більше ***трьох***. Усвідомлюючи викладене та застосовуючи його до задач про визначення опорних реакцій плоских простих конструкцій, робимо ***висновок***, що

ⓘ кількість N ***реакцій*** опор, які визначають *необхідну* й *достатню* умову рівноваги та статичної визначуваності невільної плоскої простої конструкції, має бути рівною ***трьом***:

$$N = 3. \tag{7.1}$$

✍ Умова (7.1) визначає кількість *опорних реакцій*, а не кількість самих *опор*.

✍ Важливо розуміти, що тільки абсолютно жорстке затиснення *без будь-яких додаткових вимог* забезпечує виконання умови (7.1). Якщо рух плоскої простої конструкції обмежують інші опори (в’язі), то виконання умови (7.1) є лише необхідною умовою; в такому разі додатковою вимогою є те, що накладені на розглядувану конструкцію в’язі мають унеможливлювати будь-які переміщення точок цієї конструкції.

На рисунках 7.3,а, 7.4,а і 7.5,а наведено варіанти плоских конструкцій, що відповідають умові (7.1), а на рисунках 7.3,б, 7.4,б і 7.5,б – їх розрахункові схеми.

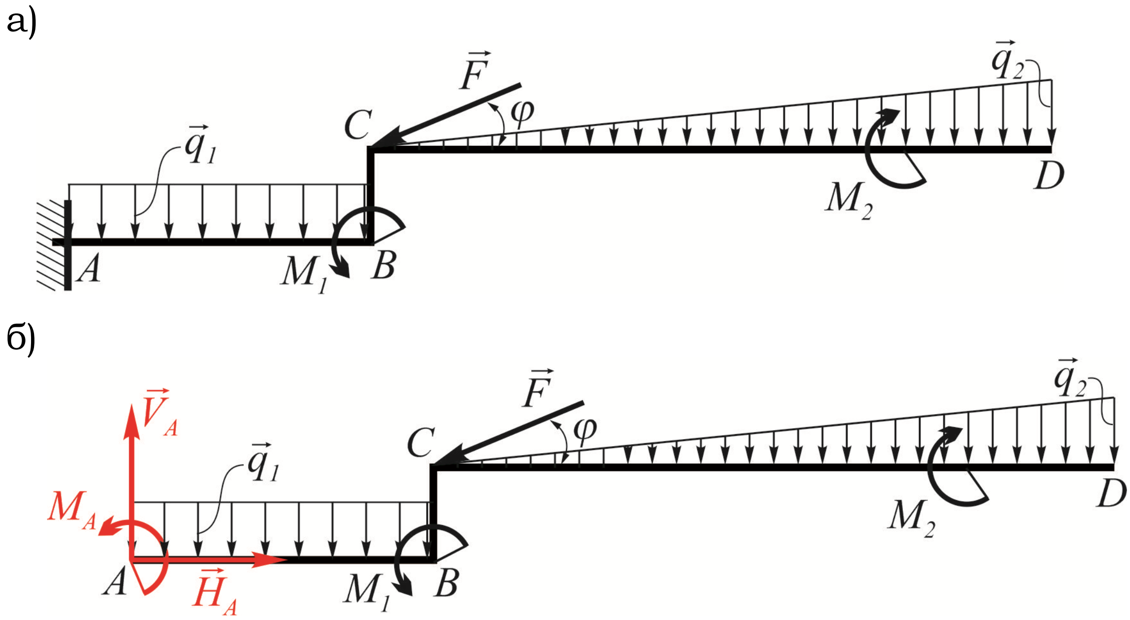


Рис. 7.3. Приклад простої статично визначуваної конструкції з однією опорою (в'яззю)

На рисунку 7.3 рівновагу простої рами забезпечує абсолютно жорстке затиснення A, повна реакція якого складається з трьох складових (чинників) – вертикальної і горизонтальної реактивних сил $\vec{V}_A$ і $\vec{H}_A$, що прикладені у точці A й унеможливлюють рух цієї точки, та реактивної пари сил з моментом M_A, яка перешкоджає обертанню рами навколо точки A.

На рисунку 7.4 зображено тіло, яке закріплене шарнірно-нерухомою опорою A, що унеможливлює рух самої точки A, та шарнірно-рухомою опорою B, яка перешкоджає повороту тіла навколо точки A (лінія дії опорної реакції $\vec{R}_B$ ні в якому разі не має проходити через точку A, оскільки при такому розміщенні шарнірно-рухомої опори B вона не буде перешкоджати *можливому переміщенню*[4] точки B. Точка прикладання та лінія дії реакції $\vec{R}_B$ опори B визначені конструктивними властивостями самої опори; для реакції $\vec{R}_A$ відома тільки точка її прикладання, тому у загальному випадкові реакцію $\vec{R}_A$ розкладають за правилом паралелограма на дві ортогональні складові – вертикальну $\vec{V}_A$ і горизонтальну $\vec{H}_A$.

[4] Поняття про ***можливі переміщення*** точок розглядають і вивчають у наступних розділах теоретичної механіки – у кінематиці та динаміці.

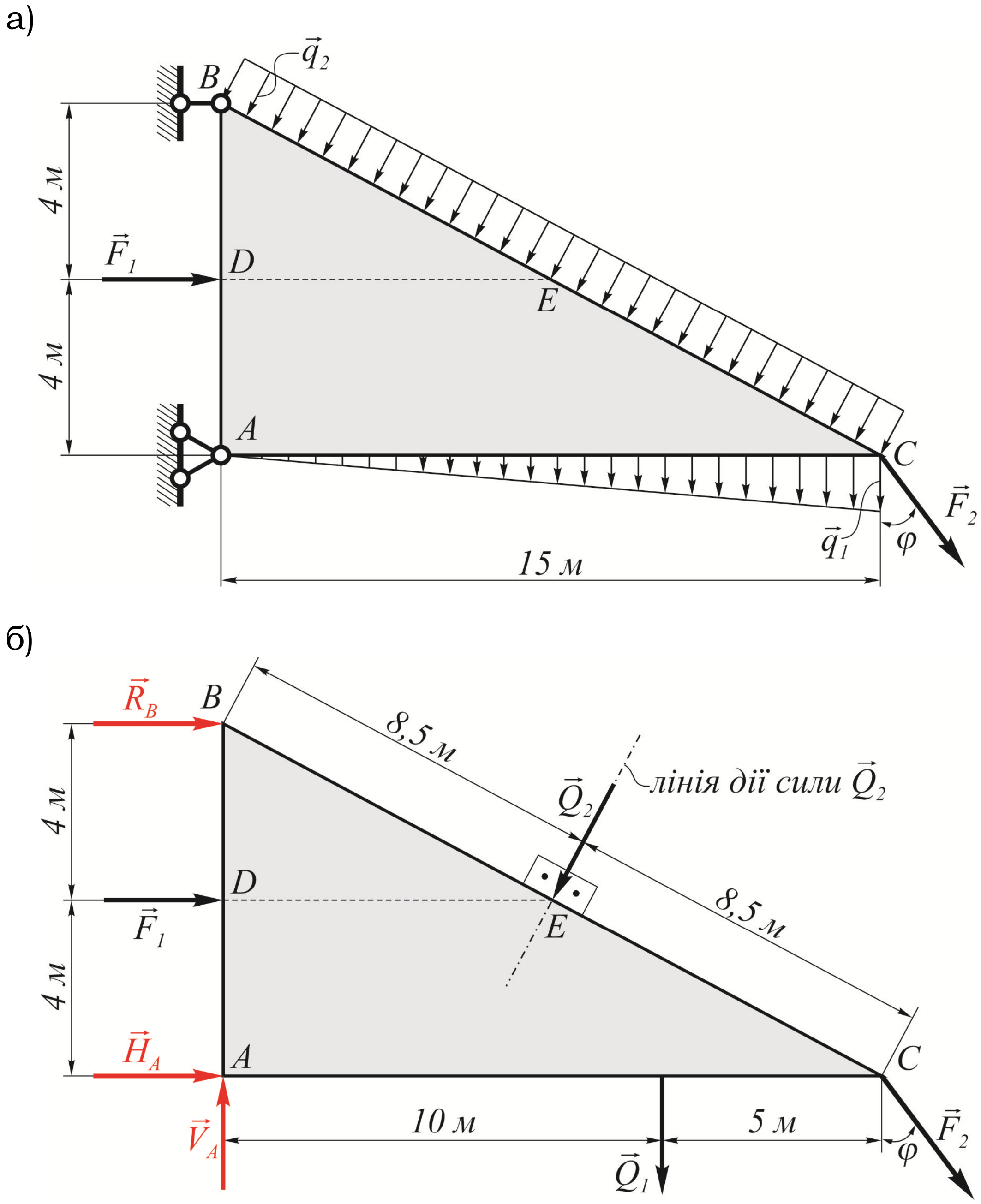


Рис. 7.4. Приклад простої статично визначуваної конструкції з двома опорами (в'язями)

На рисунку 7.5 брус KL утримується у рівновазі трьома стержнями, повздовжні осі яких *не паралельні* та *не перетинаються в одній точці* (у разі невиконання цієї умови брус KL виявляється закріпленим не достатньо та має можливість рухатися). У цьому випадку точки прикладання та лінії дій реакцій $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, і $\vec{S}_3$ стержнів відомі й необхідно визначити тільки модулі цих реакцій і напружений стан кожного зі стержнів.

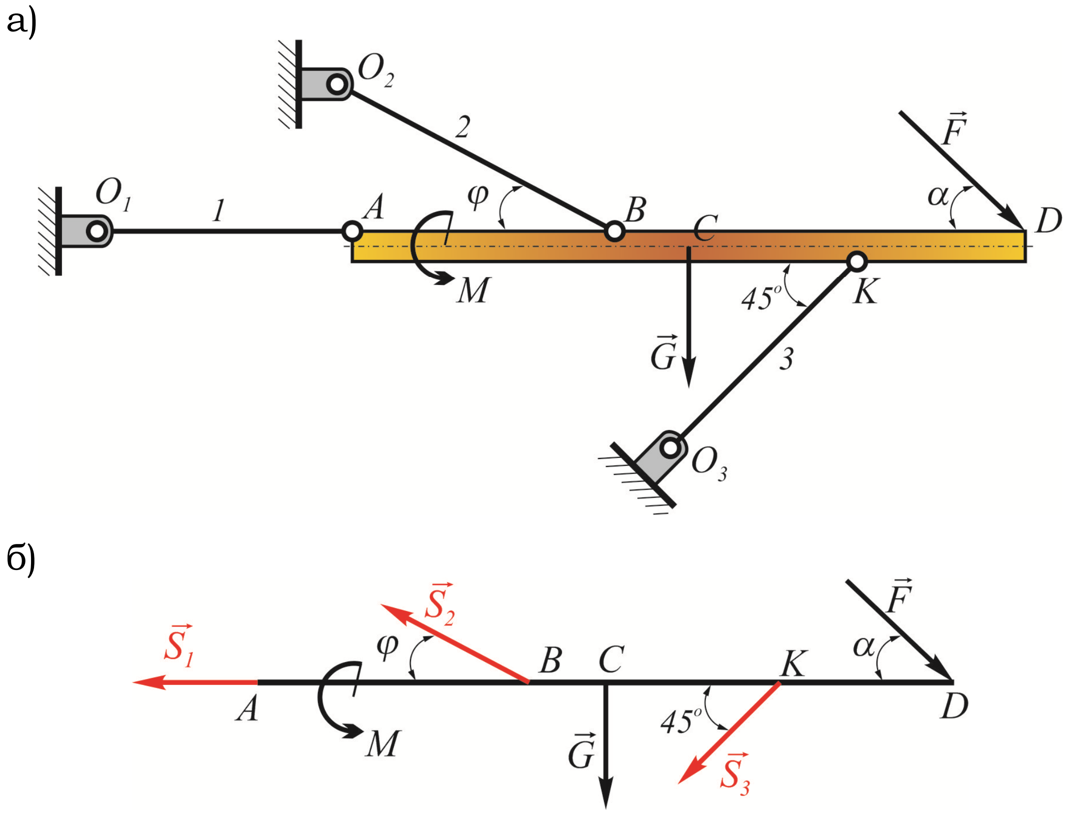


Рис. 7.5. Приклад простої статично визначуваної конструкції з трьома опорами (в'язями)

Обираючи ту чи іншу форму запису умов рівноваги (5.12)÷(5.14) системи сил, діючих на плоске просте тіло, необхідно усвідомлювати, що зазначений вибір нічим не обмежений. Цю свободу вибору варто розумно застосовувати для спрощення процесу розв'язування отримуваних рівнянь рівноваги, які для кожної простої статично визначуваної конструкції завжди є системою з трьох алгебраїчних рівнянь; певна річ, найбільш просто розв'язувати таку систему рівнянь тоді, коли кожне з рівнянь містить тільки одну невідому шукану величину. Тому доцільно:

а) за центр моментів обирати точку, в якій перетинаються лінії дій двох невідомих опорних реакцій (у такому разі в рівняння суми моментів усіх сил відносно цієї точки ввійде тільки одна невідома);

б) якщо рівновагу даного тіла забезпечує абсолютно жорстке затиснення, то центр моментів вибирати у точці затиснення (у рівняння суми моментів усіх сил відносно цієї точки ввійде тільки шуканий момент реактивної пари);

в) проводити координатну вісь перпендикулярно до ліній дій деяких шуканих опорних реакцій (тоді ці реакції обов'язково не будуть фігурувати у рівнянні суми проекцій усіх сил на цю вісь).

Зауважимо, що для плоскої системи сил можна вибрати будь-яку кількість центрів моментів (моментних точок) і скласти скільки завгодно рівнянь рівноваги, але тільки ***три*** з них будуть алгебраїчно незалежними. Тому, коли з якихось логічних міркувань складено 3 рівняння, то усі інші можливі варіанти є тими чи іншими наслідками з цих трьох рівнянь і можуть вживатися лише для перевірки правильності розв'язування задачі.

Часто-густо при обчисленні моментів певних сил буває зручно розкладати їх на дві ортогональні складові. Але до цього дійства також треба підходити творчо та свідомо. Наприклад, для зображеної на рисунку 7.4 пластини, застосовуючи умови рівноваги (5.12), за центри моментів варто обрати точки B і C; за такого вибору:

а) відповідає потреба розкладати силу $\vec{Q}_2 = BC \cdot \vec{q}_2$ на складові, оскільки її лінія дії проходить перпендикулярно до відрізку BC, що однозначно визначає плечі $BE = 8{,}5м$ і $CE = 8{,}5м$ цієї сили відносно точок B і C відповідно (див. рис. 7.4,б);

б) рівняння $\sum M_B = 0$ міститиме тільки одну невідому H_A;

в) у рівняння $\sum M_C = 0$ не увійде «нехороша» сила $\vec{F}_2$.

Усе вказане досить суттєво спрощує хід розв'язування задач про рівновагу плоских простих конструкцій.

§ 7.2. ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ У СТЕРЖНЯХ ПЛОСКИХ ФЕРМ СПОСОБОМ РІТТЕРА

У §§ 2.8 і 2.9 були наведені поняття про ферми, вимоги до них і був розглянутий *спосіб* розрахунку ферм *вирізанням вузлів*. Оскільки плоска проста ферма є одним з видів плоскої простої конструкції, то за своїм змістом зазначені параграфи мають безпосереднє відношення до розглядуваної тут теми й, звісно, мали б бути розташовані в межах цієї теми; розташування їх в темі 2 пов'язане з тим, що спосіб вирізання вузлів базується на поняттях про рівновагу *збіжної системи сил*.

Існують й інші способи розрахунку зусиль у стержнях ферми.

Розглянемо *спосіб* (або *метод*) *Ріттера*[5], який базується на поняттях про *рівновагу плоскої довільної системи сил*. Спосіб Ріттера вживають у разі, коли немає потреби розраховувати всю ферму, а необхідно оперативно знайти зусилля лише в одному чи декількох стержнях ферми; визначення цих зусиль є автономним, тобто ніяк не пов'язаним з визначенням зусиль в інших стержнях.

[5] Уперше цей спосіб у 1862 р. застосував німецький механік, інженер-мостобудівник **Август Ріттер** (11.XII.1826 ÷ 26.II.1908) Здобував освіту в Політехнічному інституті в Ганновері та в Геттінгені. Деякий час був практикуючим інженером. У 1856 р. став викладачем механіки і будівництва машин у Політехнічному інституті Ганновера, а в 1870 р. став професором Технологічної школи в Екс-ла-Шапель.

Суть, логіка, вимоги та ***алгоритм*** цього способу полягає в такому:

1. Визначають *зовнішні* опорні реакції.

При цьому ферму розглядають як абсолютно тверде матеріальне тіло, що перебуває у рівновазі під дією прикладених до неї активних і реактивних сил, котрі утворюють *певну систему сил*; звісно, від виду цієї системи сил у кожному розглядуваному випадкові залежать умови та рівняння рівноваги ферми.

Інколи зовнішньою в'яззю для розглядуваної ферми є стержнева в'язь (див. § 2.7, в'язь за № 5) або навіть декілька стержневих в'язей; у такому разі необхідно чітко визначити, які стержні входять до складу самої ферми, а які стержні є зовнішніми в'язями; для плоскої простої ферми це можна зробити, враховуючи вимогу **5** до розрахункової схеми ферми чи використовуючи умову (2.16).

Для деяких конструктивних схем ферм (при певному розташуванні їх опор) є можливість знайти зусилля у тому чи іншому стержні, не визначаючи зовнішніх опорних реакцій (див., наприклад, далі рис. 7.9).

2. У думці ферму розрізають на ***дві частини*** *перерізом*, що проходить через *три стержні*, зусилля в яких (або в одному з яких) необхідно знайти; повздовжні осі цих стержнів *не мають перетинатися в одній точці* (див. рис. 7.6 і 7.9).

Такий розріз можна провести майже у всіх статично визначуваних фермах з простою решіткою. Наприклад, на рисунку 7.6, щоб знайти зусилля у стержнях 2, 8 і 12 необхідно провести переріз $I-I$, а в стержнях 4, 6 і 11 – переріз $II-II$. Існують випадки, коли зазначеного розрізу для якогось стержня (чи стержнів) не існує; так для того, щоб знайти зусилля у стержні 5 немає можливості провести який-небудь переріз через цей стержень та ще через два стержні ферми (аналогічна ситуація виникає й зі стержнем 9).

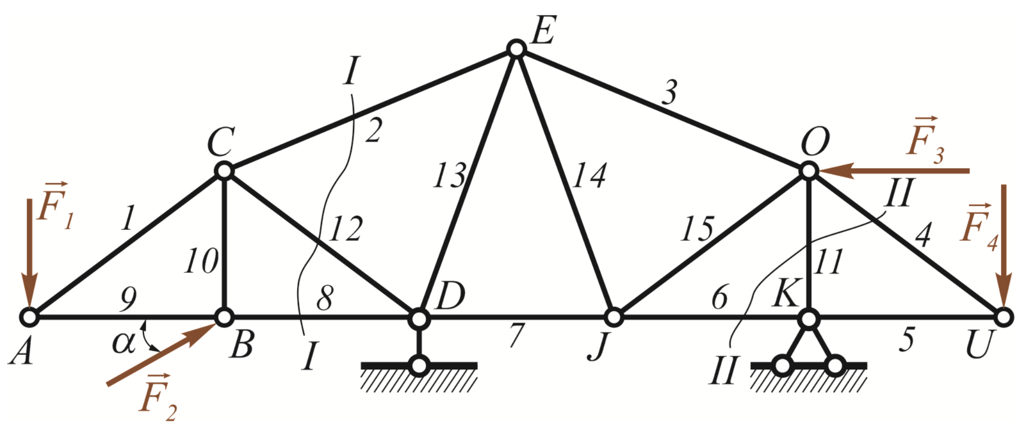


Рис. 7.6

Переріз необхідно проводити по стержнях (а ***не по вузлах***) так, щоб в кожній з частин був хоча б один стержень (наприклад, див. на рис. 7.6 переріз $II-II$ та праву від нього частину ферми, яка «складається» з одного стержня 5).

3. Оскільки вся ферма знаходиться у рівновазі, то у рівновазі перебуває й кожна з отриманих частин ферми.

4. Розглядають рівновагу однієї з частин ферми під дією: а) ***зовнішніх сил***, які прикладені до *розглядуваної* частини (до зовнішніх сил відносяться як задані активні сили, так і зовнішні опорні реакції); б) ***реакцій стержнів***, що потрапили у переріз; ці стержні для розглядуваної частини є *внутрішніми* в'язями, які обмежують її рух відносно іншої частини ферми (див. рис. 7.7, де подано дві частини ферми з рис. 7.6, що утворені розрізом $I-I$).

Можна розглядати рівновагу будь-якої частини ферми, але, природно, краще обирати ту частину, де менший обсяг обчислювальної роботи; так на рисунку 7.7 краще до розгляду обрати ліву від перерізу $I-I$ частину ферми.

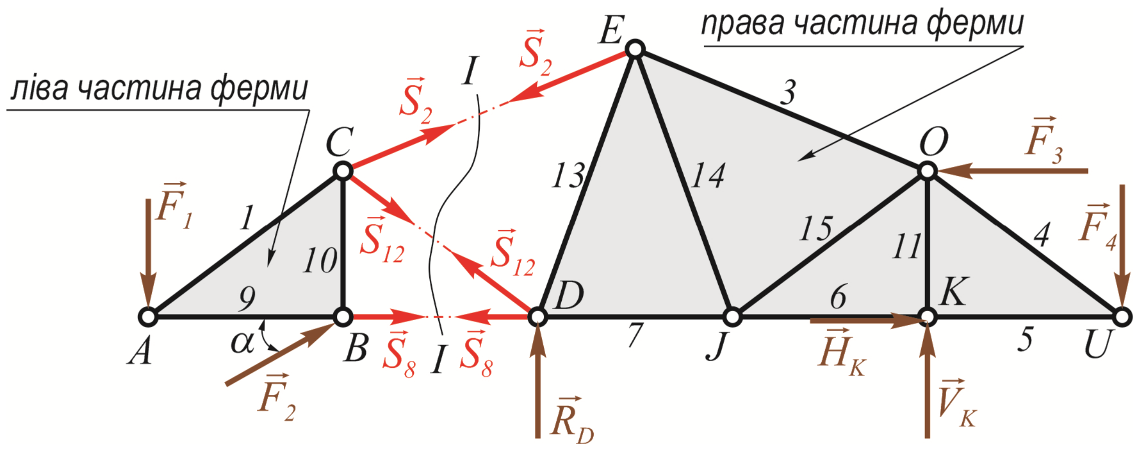


Рис. 7.7

5. Оскільки реакції стержнів визначають внутрішні зусилля в них, то реакції стержнів на розрахунковій схемі розглядуваної частини позначають символами $\vec{S}_i$, де i – номер відповідного стержня й, обчисливши значення реакції певного стержня, відразу ведуть мову про зусилля в цьому стержні (див. § 2.7, в'язь за № 5, рис. 2.24 і відповідні міркування).

Визначення *дійсних зусиль* у стержнях, що потрапили у переріз, починають з припущення, що стержні є ***розтягнутими***, через що на розрахунковій схемі розглядуваної частини ферми реакції стержнів зображують напрямленими вздовж своїх осей *від* розглядуваної *частини*; якщо внаслідок розв'язування виявиться, що реакцію певного стержня визначає *від'ємне* числове значення, то зазначений стержень у дійсності є ***стиснутим***, а отриманий знак мінус ураховують в усіх подальших обчисленнях і міркуваннях.

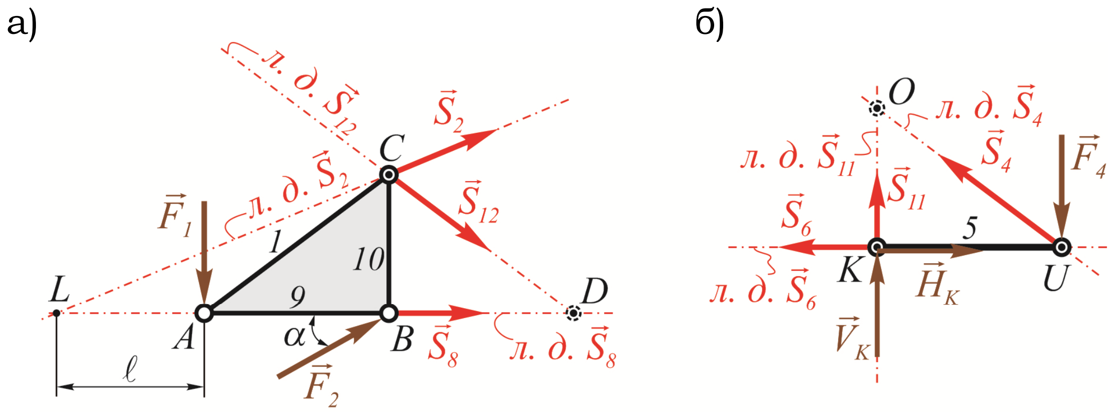
6. *Записують умови* та *складають* відповідні *рівняння рівноваги* плоскої довільної системи сил, що діє на розглядувану частину ферми.

Обираючи одну з трьох форм запису умов рівноваги плоскої довільної системи сил (див. § 5.5, формули (5.12)÷(5.14)), необхідно керуватися тим, щоб будь-яке рівняння рівноваги містило тільки ***одну*** шукану реакцію стержня.

7. Якщо повздовжні осі усіх стержнів, що потрапили у переріз, попарно перетинаються, то використовують *третю форму* (5.14) запису умов рівноваги, де за моментні точки обирають ***точки Ріттера*** – точки перетину осей стержнів, що потрапили у переріз, взятих по два.

Точка Ріттера певного стержня розглядуваного перерізу знаходиться на перетині повздовжніх осей двох інших стержнів цього ж перерізу й може збігатися з яким-небудь вузлом розглядуваної ферми (див. на рис. 7.8,а точки C і D і на рис. 7.8,б точки U, K і O), а може лежати на продовженні стержнів десь (інколи досить далеко) за межами самої ферми (див. на рис. 7.8,а точку L).

Важливо розуміти, що на рисунку 7.8 точки простору D і O ***є***, а вузлів D і O ферми ***немає***, оскільки ці вузли не належать обраним до розгляду частинам.



Точки Ріттера:
C – для стержня *8*;
D – для стержня *2*;
L – для стержня *12*

Точки Ріттера:
U – для стержня *11*;
K – для стержня *4*;
O – для стержня *6*

Рис. 7.8. Розрахункові схеми частин ферми та точки Ріттера

8. Якщо два стержні з трьох розсічених паралельні, то відповідної точки Ріттера не існує (або вона знаходиться у нескінченності). Тоді умови рівноваги записують у другій формі (див. § 5.5, формулу (5.13)), обираючи за моментні точки Ріттера і одну умову рівності нулю проекцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних стержнів.

Наприклад, якщо розглянути ферму, подану на рисунку 7.9,а, то для знаходження зусиль у стержнях 3, 6 і 12, звісно, варто розітнути ферму перерізом $I-I$ й обрати до розгляду праву від цього перерізу частину ферми, яка «складається» з одного стержня 9. Розрахункова схема цієї частини наведена на рисунку 7.9,б; точками Ріттера є точки D для стержня 6 і J для стержня 3, а для стержня 12 точка Ріттера знаходиться у нескінченості (тобто, відсутня). Рівняння рівноваги цієї частини ферми необхідно складати відповідно до умов: $\sum M_D = 0$, $\sum M_J = 0$ і $\sum Y = 0$.

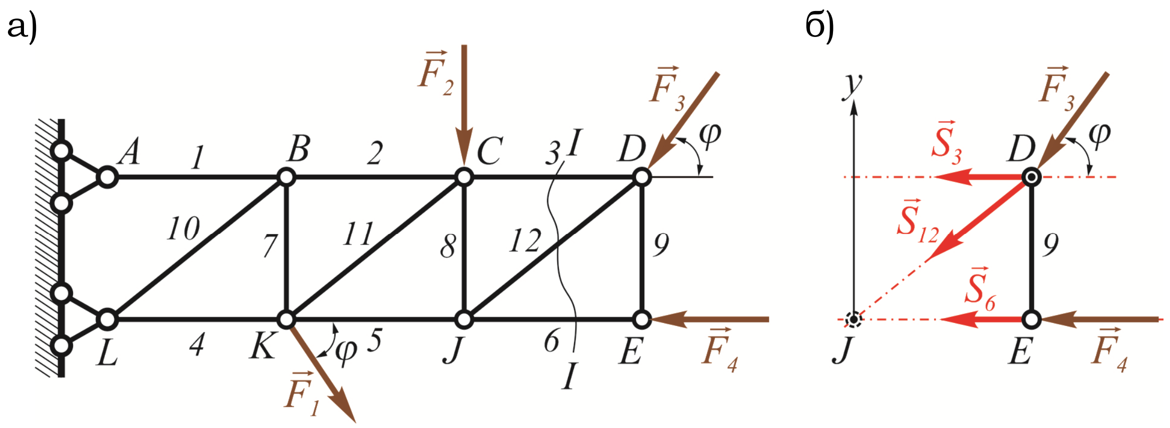
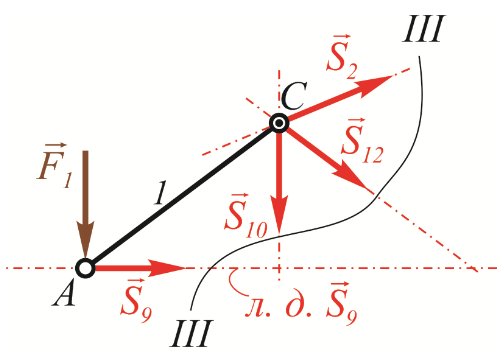


Рис. 7.9

Існують і виняткові випадки, коли можна розсікти чотири й більше стержнів і знайти зусилля в потрібному стержні, склавши лише одне рівняння моментів. Наприклад, для ферми з рисунка 7.6 для знаходження зусилля в стержні 9 є можливість провести розріз $III-III$ через чотири стержні 9, 10, 12 і 2 й обрати до розгляду ліву від цього перерізу частину ферми (рис. 7.10), яка «складається» з одного стержня 1. У такому разі точкою Ріттера для стержня 9 буде точка C, в якій пе-



C – точка Ріттера для стержня 9

Рис. 7.10

ретинаються повздовжні осі стержнів 10, 12 і 2, й тому з рівняння рівноваги, складеного відповідно до умови $\sum M_C = 0$, знаходиться зусилля S_9 абсолютно незалежно від зусиль в інших стержнях цього перерізу.

9. Розв'язують складені рівняння, визначаючи зусилля в стержнях; виконують перевірку та (якщо необхідно) аналіз отриманих результатів.

У реальній інженерно-виробничій діяльності не існує жодних обмежень на застосування того чи іншого способу розрахунку зусиль в стержнях досліджуваних (існуючих або конструюємих) ферм; тому способи вирізання вузлів і Ріттера можна синтезувати, раціонально використовуючи можливості та переваги кожного з них.

§ 7.3 ПОНЯТТЯ ПРО СИСТЕМУ МАТЕРІАЛЬНИХ ТІЛ І ПРО ПЛОСКІ СКЛАДЕНІ КОНСТРУКЦІЇ

У багатьох інженерних задачах розглядають рівновагу ***системи*** декількох ***матеріальних тіл***, які певним чином взаємодіють між собою (див. рис. 7.11).

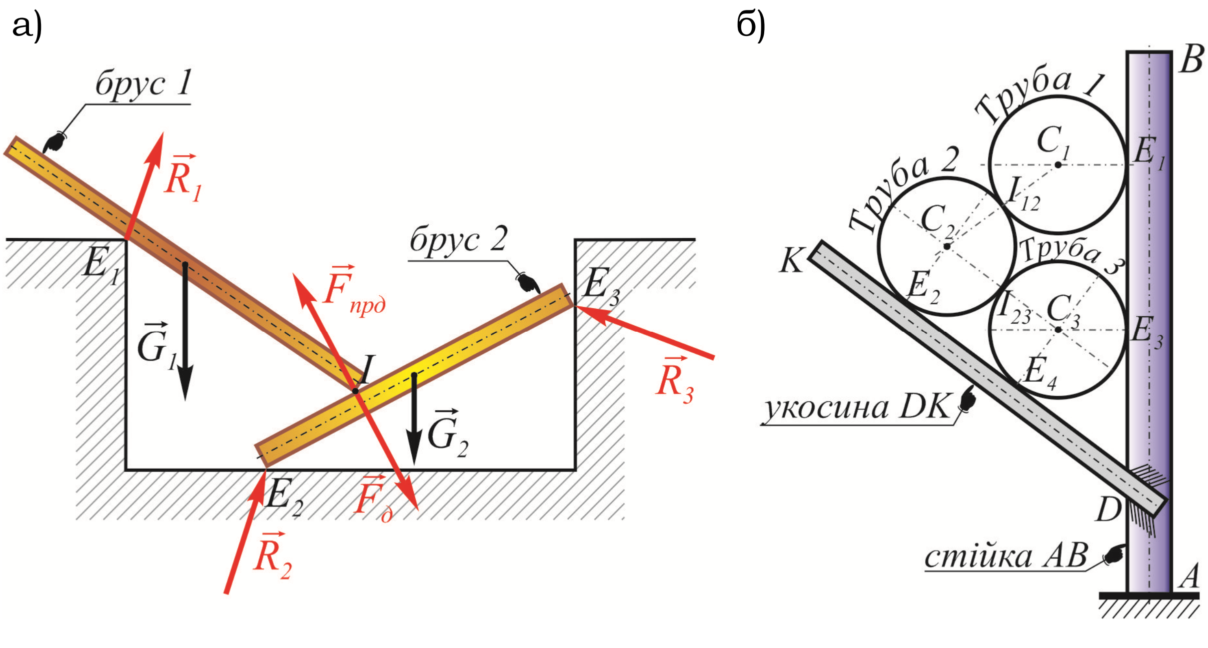


Рис. 7.11. Приклади систем матеріальних тіл

Інколи взаємодія між тілами системи зводиться до простого спирання тіл одне на одне. Так на рисунку 7.11,а система матеріальних тіл складається з двох брусів й брус 1, спираючись на брус 2 у точці I, певним чином тисне на цей брус, прагнучи змінити його кінематичний стан. На рисунку 7.11,б система матеріальних тіл складається з трьох труб; труба 1 у точці I_{12} спирається на трубу 2, яка спирається на трубу 3 у точці I_{23}.

В інших випадках тіла з'єднані між собою якими-небудь в'язями, які для розглядуваної системи тіл є ***внутрішніми в'язями***. На рисунку 7.12,а наведено *невільну систему* з трьох *матеріальних тіл* (півкуль 1 і 2 та бруса 3; при цьому півкуля 1 і брус 3 з'єднані шарніром I_1, а півкуля 2 і брус 3 – шарніром I_2), рух *якої* обмежено горизонтальною площиною JK; у такому разі для даної системи матеріальних тіл площина JK – це зовнішня в'язь, а шарніри I_1 і I_2 – внутрішні в'язі. На рисунку 7.12,б два окремих тіла, які у точці I_3 з'єднані циліндричним шарніром й точки I_1 і I_2 яких з'єднані ланцюгом, утворюють систему матеріальних тіл; у цьому разі внутрішні в'язі системи – шарнір I_3 та ланцюг (гнучка в'язь) I_1I_2, а зовнішня в'язь – горизонтальна площина WU.

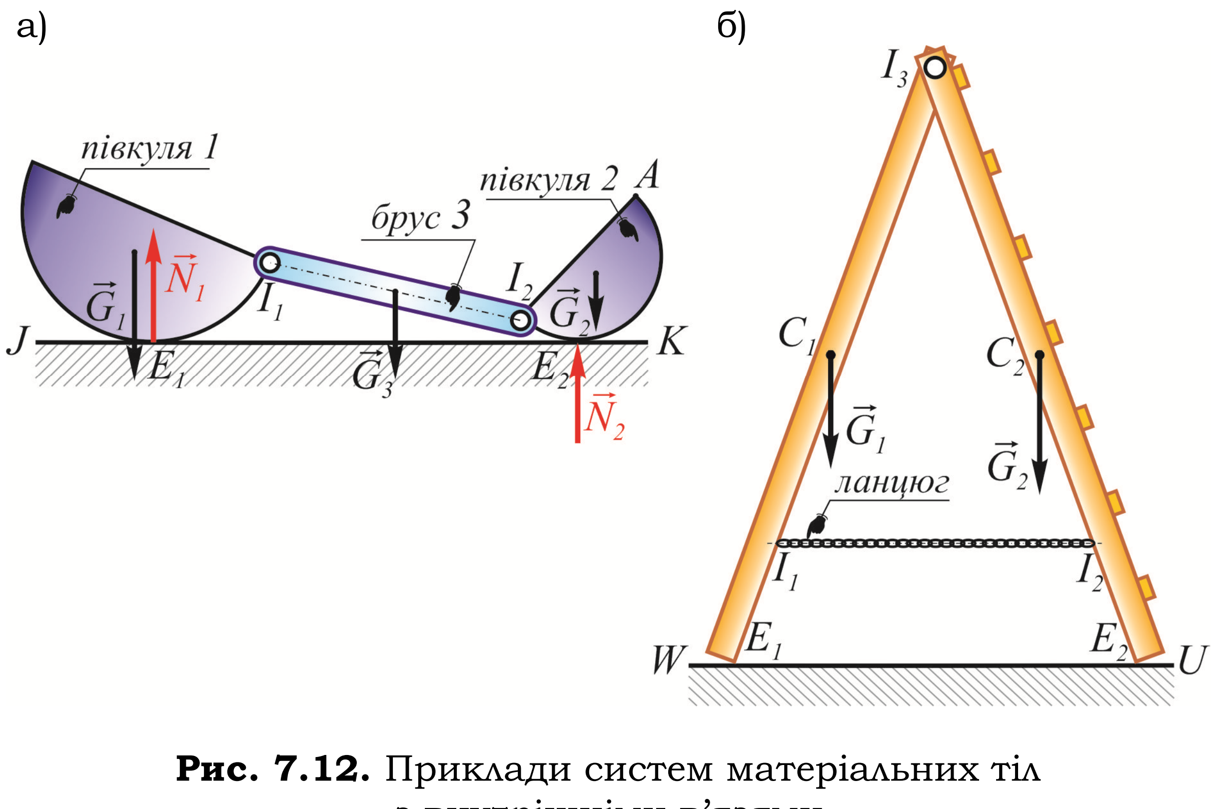


Рис. 7.12. Приклади систем матеріальних тіл з внутрішніми в'язями

Розв'язуючи такі задачі слід відрізняти *зовнішні* та *внутрішні* сили системи (див. § 1.2). *Точка прикладання* й *напрям внутрішніх сил* взаємодії між будь-якими двома тілами системи залежать від виду зв'язку між цими тілами; *обидва* ці *параметри* визначають так само, як і для реакцій усяких в'язей. Наприклад, на рисунку 7.11,а на систему з двох брусів, 1-ший з яких спирається на 2-гий, діють активні сили тяжіння $\vec{G}_1$ і $\vec{G}_2$, а також реакції $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ і $\vec{R}_3$ (останні виникають внаслідок тиску самих брусів на шорсткі опорні поверхні і прикладені до брусів у відповідних точках). Усі вказані сили є зовнішніми, бо вони зумовлені дією на обидва бруси тіл, що оточують їх. Сили $\vec{F}_д$ і $\vec{F}_{прд}$ взаємодії між брусами, що прикладені у точці I, є внутрішніми; на підставі аксіоми 4 (див. § 1.3 і рис. 1.10) ці сили рівні за величиною, протилежні за напрямком і лежать на одній прямій (підкреслимо, що сила $\vec{F}_д$ прикладена до бруса 2, а сила $\vec{F}_{прд}$ – до бруса 1). Поділ сил на зовнішні та внутрішні має важливе й особливе значення при дослідженні рухів у ***динаміці системи тіл***, а у статиці цей поділ є цілком умовним. Так, якщо розглядати рівновагу бруса 1, то брус 2 необхідно вважати в'яззю і тоді сила $\vec{F}_{прд}$ дії бруса 2 на брус 1 є вже зовнішньою силою.

Існує **два** основних **способи** розв'язування задач про рівновагу системи тіл.

1. Розглядають рівновагу кожного тіла системи окремо; при цьому враховують зовнішні (активні та реактивні) сили й усі ті внутрішні сили, що діють на розглядуване тіло. Слід мати на увазі, що внутрішні сили повторюються в рівняннях рівноваги інших тіл системи, що скорочує загальну кількість невідомих, які підлягають визначенню в задачі про рівновагу всієї системи.
2. Розглядають рівновагу всієї системи тіл, як єдиного цілого, користуючись принципом про твердіння (див. § 1.3, аксіому 6); при цьому враховують лише зовнішні для всієї системи сили. Крім того складають необхідні для розв'язання задачі додаткові рівняння рівноваги одного з тіл (або декількох тіл).

ⓘ ***Плоска система матеріальних тіл*** – це така система, усі тіла якої, діюче навантаження та накладені на неї в'язі розташовані тільки в одній площині (або у паралельних площинах).

Слід розуміти, що лише при виконанні зображених на рисунках 7.11 і 7.12 ***умов*** можливі:

а) рівновага усіх наведених на цих рисунках систем матеріальних тіл;

б) вказане взаємне розташування тіл кожної з систем.

З'ясуємо лише *деякі* з цих *умов*:

1) якщо на рисунку 7.11,б кронштейн для зберігання труб, який складається зі стійки AB й укосини DK, наприклад, відхилити від зображеного положення проти руху годинникової стрілки на кут $45°$, то кронштейн вже ніяк не зможе забезпечити рівновагу труб $1 \div 3$;
2) якщо на рисунку 7.12,а, наприклад, до півкулі 2 у її точці A прикласти яку-небудь, нехай, вертикальну силу, то рівновага системи тіл (яка складається з двох вагомих півкуль 1 і 2 та вагомого бруса 3, з'єднаних між собою шарнірами I_1 і I_2) за певних умов можлива, але взаємне розташування тіл системи, безумовно, зміниться;
3) якщо на рисунку 7.12,б до лівої (чи правої) половини драбини (яка складається з двох половинок, з'єднаних між собою циліндричним шарніром I_3 і ланцюгом I_1I_2) прикласти *достатню* за величиною, наприклад, горизонтальну силу, то рівновага всієї драбини порушиться.

У практичній інженерній діяльності широко застосовують конструкції (того чи іншого технологічного призначення), які за суттю є плоскими системами матеріальних тіл і особливістю яких є те, що їх зовнішні опори та внутрішні в'язі без будь-яких додаткових умов однозначно забезпечують рівновагу всієї конструкції та необхідне визначене взаємне розташування складових частин її.

ⓘ ***Плоска складена конструкція*** – це геометрично незмінна конструкція, що складається з декількох розташованих в одній площині плоских простих конструкцій, з'єднаних між собою шарнірами, які називають ***внутрішніми*** (чи ***з'єднувальними***).

Розглянемо деякі види плоских складених конструкцій.

1. **Складені** (чи **розрізні**) **балки**. На рисунку 7.13 зображено трипролітну консольну складену балку AK, що складається з трьох простих балок AE, EL і LK, з'єднаних між собою

внутрішніми (з'єднувальними) шарнірами E й L, рівновагу якої убезпечують шарнірно-нерухома опора A та шарнірно-рухомі опори B, C і D.

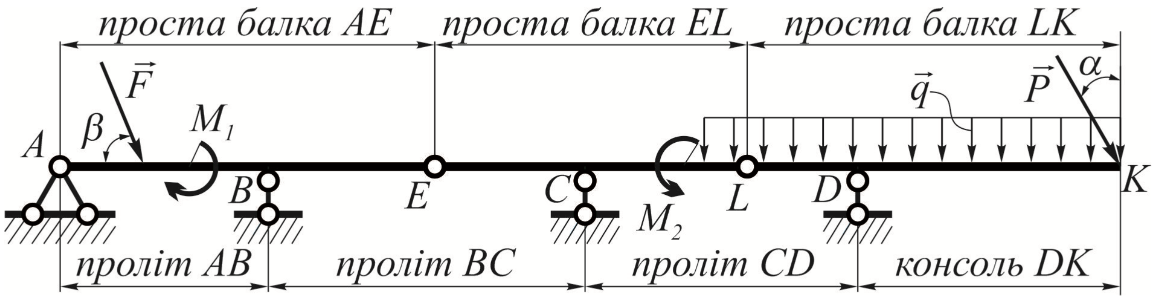


Рис. 7.13. Складена балка AK

2. Складені арки. На рисунку 7.14 зображена тришарнірна складена арка ACB, яка складається з двох простих півароків AC і CB, з'єднаних між собою внутрішнім (з'єднувальним) шарніром C, й у рівновазі яку підтримують шарнірно-нерухомі опори A та B.

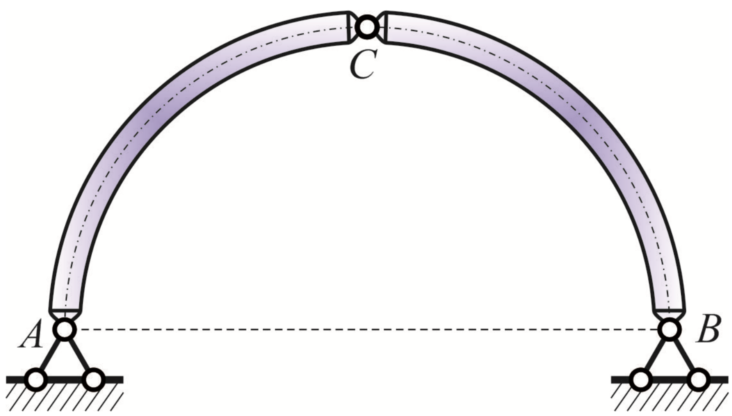


Рис. 7.14. Тришарнірна складена арка ACB

3. Складені ферми. На рисунку 7.15 наведена розрахункова схема плоскої складеної арочної ферми, що складається з двох простих ферм, з'єднаних внутрішнім (з'єднувальним) шарніром B.

Розрахунки складених ферм аналогічні розрахункам простих ферм.

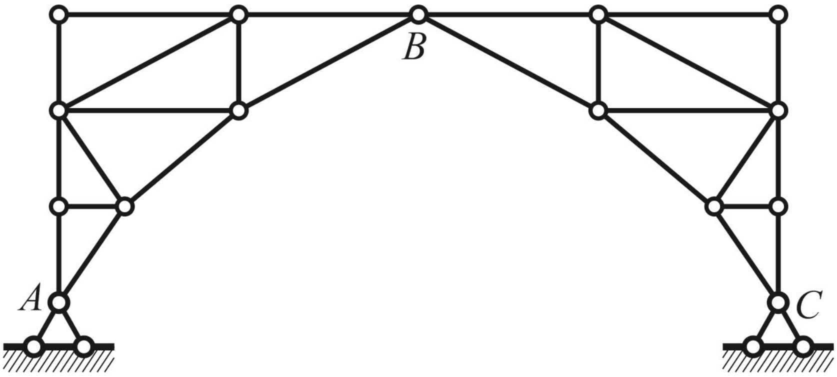


Рис. 7.15. Складена арочна ферма ABC

4. Складені рами. На рисунку 7.16 зображена складена рама AK (консольна), що складається з двох простих балок AB і DK й простої рами BCE, з'єднаних між собою внутрішніми (з'єднувальними) шарнірами B і D.

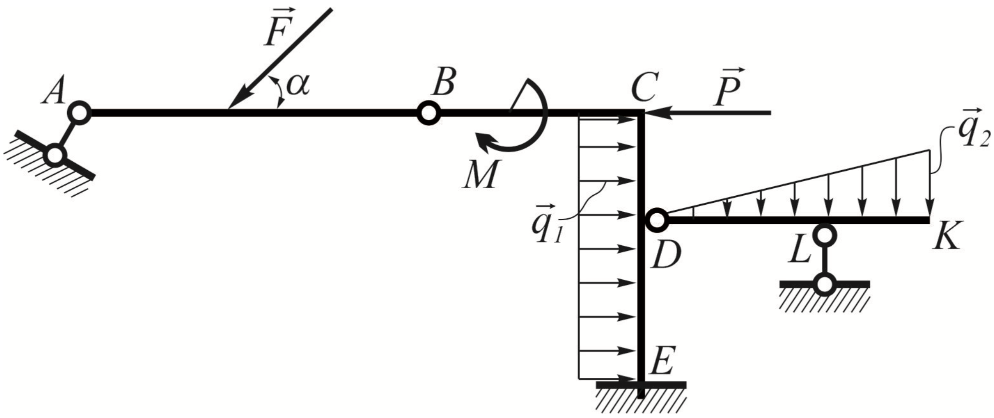


Рис. 7.16. Складена рама AK

З'ясуємо умови геометричної незмінності й статичної визначуваності плоскої складеної конструкції. Міркуємо так:

- згідно з умовою (7.1) невільна плоска проста конструкція перебуває у рівновазі та є статично визначуваною, коли її рух обмежують **три** реакції опор;
- виконання умови (7.1) для певної простої конструкції, що входить до складу розглядуваної складеної, стовідсотково визначає нерухомість внутрішнього шарніра (внутрішніх шарнірів), яким (якими) ця проста конструкція з'єднана з суміжною (суміжними) (так, наприклад, на рисунку 7.13 шарнірно-нерухома опора A та шарнірно-рухома опора B забезпечують рівновагу простої балки AE, що зумовлює нерухомість з'єднувального шарніра E; на рисунку 7.16 абсо-

лютно жорстке затиснення E визначає рівновагу простої рами BCE та з'єднувальних шарнірів B і D);

- для загальної геометричної незмінності та статичної визначуваності необхідно та достатньо, щоб рух кожної наступної суміжної простої конструкції був обмежений **або** зовнішньою опорою, яка б перешкоджала можливості повороту цієї простої конструкції навколо *внутрішнього шарніра* та мала б *одну опорну реакцію*, що можливо лише за умови, коли лінія дії цієї опорної реакції не проходить через відповідний з'єднувальний шарнір (так, наприклад, на рисунку 7.13 поворот простої балки EL навколо з'єднувального шарніра E унеможливлює шарнірно-рухома опора C, а поворот простої балки LK навколо з'єднувального шарніра L – шарнірно-рухома опора D; аналогічна ситуація і на рисунку 7.16), **або** іншим внутрішнім шарніром (див. рис. 7.17, де поворот простої балки CD навколо з'єднувального шарніра C унеможливлює з'єднувальний шарнір D);
- очевидно, що в усіх розглянутих й інших можливих випадках кількість з'єднувальних шарнірів обов'язково збігається з кількістю опорних реакцій, додаткових до перших **трьох**.

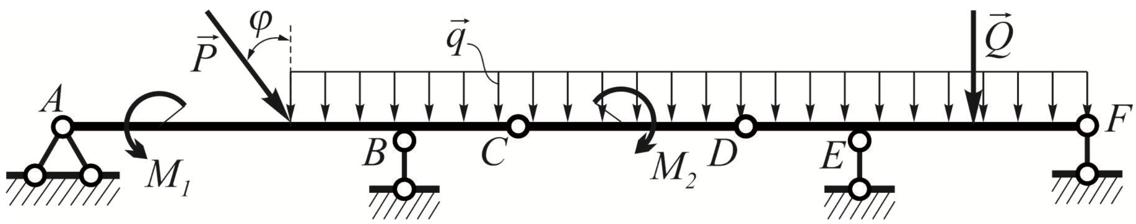


Рис. 7.17. Складена балка AF

Тоді:

🛈 необхідну та достатню умову ***геометричної незмінності*** та ***статичної визначуваності плоскої складеної конструкції*** визначає залежність

$$N = 3 + Ш, \qquad \textbf{(7.2)}$$

де: N – кількість невідомих реакцій зовнішніх опор;
$Ш$ – кількість з'єднувальних шарнірів.

Якщо для плоскої складеної конструкції

$$N > 3 + Ш,$$

то це свідчить, що зазначена ***конструкція*** містить зайві для утворення геометрично незмінної конструкції в'язі й ***є статично невизначуваною.***

Якщо

$$N < 3 + Ш,$$

то кількість в'язей недостатня, конструкція є геометричної змінною, тобто певним ***механізмом***.

§ 7.4. СПОСОБИ ВИЗНАЧЕННЯ ОПОРНИХ РЕАКЦІЙ ПЛОСКИХ СКЛАДЕНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Існує **два** основних **способи** визначення опорних реакцій плоских складених конструкцій.

Перший спосіб (метод розтинання). Складену конструкцію по з'єднувальних шарнірах **розтинають** на прості та відповідно до наведеного у § 7.1 алгоритму розв'язують задачі про рівновагу кожної простої конструкції; зрозуміло, що кількість зазначених задач визначає кількість простих конструкцій, з яких складається складена. У кожній задачі про рівновагу простої конструкції враховують зовнішні активні та реактивні сили, що прикладені до неї, та *внутрішні реакції* з'єднувальних шарнірів, які обмежують рух цієї конструкції. Певна річ, що у загальному випадкові для плоскої складеної конструкції, що складається з K простих елементів, є можливість скласти $3K$ рівнянь рівноваги, з яких знайти відповідну кількість невідомих зовнішніх опорних реакцій і реакції з'єднувальних шарнірів. Наприклад, для зображеної на рисунку 7.16 складеної рами розв'язують **три** задачі про рівновагу двох простих балок AB і DK та простої рами BCE, розрахункові схеми яких наведено на рисунку 7.18.

До обраної до розгляду тієї чи іншої простої конструкції реакція будь-якого внутрішнього шарніра прикладена в центрі самого шарніра, але її *лінія дії* невідома (див. § 2.7, рис. 2.21); через це реакцію внутрішнього шарніра розкладають на дві ортогональні складові – вертикальну та горизонтальну (див., наприклад, на рисунку 7.18 реакцію $\vec{R}_B$ з'єднувального шарніра B, яку розкладено на складові $\vec{V}_B$ і $\vec{H}_B$).

При розрахунках складених конструкцій методом розтинання реакція кожного з'єднувального шарніра фігурує двічі, оскільки кожний з них обмежує рух двох суміжних простих конструкцій;

відповідно ж до аксіоми 4 реакції певного з'єднувального шарніра на зазначені конструкції завжди рівні за величиною та протилежні за напрямом; дивись, наприклад, на рисунку 7.18 реакцію $\vec{R}_B$ (або її складові $\vec{V}_B$ і $\vec{H}_B$) з'єднувального шарніра B на просту балку AB і просту раму BCE.

Досить часто у випадках, аналогічних до зображеного на рисунку 7.18, реакцію з'єднувального шарніра B на просту балку AB позначають, наприклад, $\vec{R}'_B$, а на просту раму BCE – $\vec{R}''_B$, указуючи при цьому, що $\vec{R}'_B = -\vec{R}''_B$ та $R'_B = R''_B$.

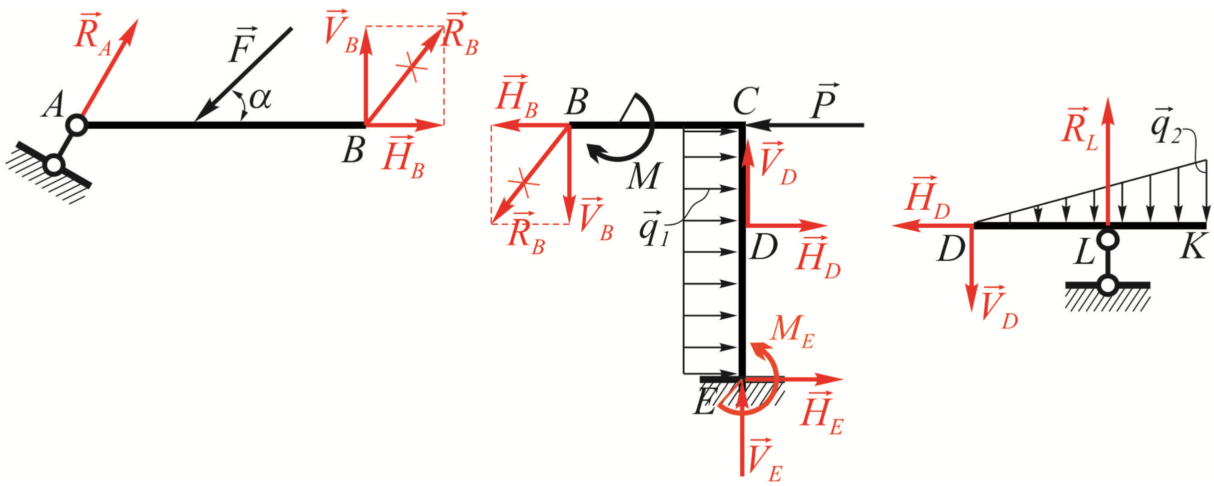


Рис. 7.18

Необхідно розуміти, що

реакція з'єднувального шарніра визначає **внутрішнє напруження** (або **тиск**), яке (який) виникає в цьому шарнірі, що необхідно враховувати при розрахунках на міцність і практичному конструюванні з'єднувальних шарнірів.

Другий спосіб (метод основних і додаткових рівнянь)[6]. Оскільки виконання умови (7.2) визначає відсутність будь-якого руху елементів плоскої складеної конструкції, то, застосувавши аксіому 6 (принцип про твердіння), усі діючі на дану конструкцію зовнішні сили та навантаження можна розглядати як *систему сил*, яка у загальному випадкові є плоскою довільною. Зважаючи на це, записують у тій чи іншій формі запису (5.12)÷(5.14) умови рівноваги та складають відповідні три **основні рівняння** рівноваги усієї складеної конструкції. Крім

[6] Найчастіше цей спосіб використовують у тому разі, коли ***немає потреби визначати тиск у з'єднувальних шарнірах***.

того складають у необхідній для розв'язання задачі кількості **додаткові рівняння** рівноваги якої-небудь простої конструкції (або декількох простих конструкцій), що входить (входять) до складу складеної. Для того, щоб реакції з'єднувальних шарнірів не містились у додаткових рівняннях, їх складають у вигляді ***суми моментів*** відносно з'єднувальних шарнірів тих ***сил***, які прикладені тільки до обраної до розгляду частини складеної конструкції.

> Знову зауважимо на вказану вище у § 7.1 *свободу вибору* при складанні як основних так і додаткових рівнянь; при складанні додаткових рівнянь до розглядання варто обирати ту частину складеної конструкції, на яку діє менша кількість невідомих опорних реакцій.

> Якщо на складену конструкцію діє те чи інше розподілене навантаження, то при складанні додаткових рівнянь необхідно враховувати дію тільки *тієї частини* розподіленого навантаження, яка прикладена до розглядуваної частини складеної конструкції.

Для перевірки правильності знайдених значень опорних реакцій для системи сил, що діє на розглядувану складену конструкцію, відповідно до *умови рівноваги*, *яка не вживалася* в процесі розв'язування задачі, складають ***перевірочне рівняння***, підставляють у нього усі необхідні значення й пересвідчуються у «*виконанні перевірки*» (тобто, рівності нулю алгебраїчної суми доданків цього рівняння).

Наприклад, для зображеної на рисунку 7.16 складеної рами необхідно до трьох основних рівнянь додати два додаткові, усі які варто скласти відповідно до умов

$\sum X = 0$	.... (1)	
$\sum M_E = 0$	....	(2)
$\sum M_A = 0$	....	(3)
$\sum M_B^{лів} = 0$	....	(4)
$\sum M_D^{пр} = 0$	....	(5),

а перевірочне рівняння скласти відповідно до умови $\sum Y = 0$.

> Неважко бачити, що у такому разі рівняння (4) і (5) містять тільки по одній шуканій реакції R_A і R_L відповідно, що дозволяє безпроблемно знайти значення цих реакцій; після цього з рівняння (2) знайти момент M_E реактивної пари жорсткого затиснення E, з рівняння (1) – значення реакції H_E, а з рівняння (3) – V_E.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТА ЕКСПРЕС-ТЕСТУВАННЯ Ст-6

(УМОВИ РІВНОВАГИ РІЗНИХ СИСТЕМ СИЛ – тема 5,
ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ СТАТИКИ – тема 7)

1. Яке тіло називають вільним? (2)
2. Яке тіло називають невільним? (2)
3. Що таке в’язь? (3)
4. Що є мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами? (3)
5. Що таке сила? (4)
6. Якими параметрами характеризується сила? (4)
7. Що таке реакція в’язі? (4)
8. Яка система сил є плоскою довільною? (3)
9. Яка система сил є зрівноваженою? (3)
10. Що таке рівнодійна сила? (4)
11. Як називають силу, що еквівалентна певній системі сил? (3)
12. Сформулюйте аксіому №3. (4)
13. Сформулюйте аксіому №5. (4)
14. Що таке проекція сили на вісь? (4)
15. Чому дорівнює проекція сили на вісь? (4)
16. Коли сила проектується на вісь у натуральну величину? (2)
17. Коли сила не проектується на вісь? (2)
18. Що таке момент сили відносно точки? (4)
19. Чому дорівнює модуль моменту сили $\vec{F}$ відносно точки E? (4)
20. Що таке плече сили $\vec{P}$ відносно точки O? (3)
21. Чи залежить момент сили $\vec{P}$ відносно точки K від положення точки K в просторі? (2)
22. Як зміниться момент сили $\vec{P}$ відносно точки O, якщо точку прикладання сили $\vec{P}$ перенести вздовж її лінії дії на 6 метрів? (3)
23. Коли для плоскої системи сил момент сили $\vec{G}$ відносно точки B вважається додатнім? (3)
24. Коли для плоскої системи сил момент сили $\vec{F}$ відносно точки A вважається від’ємним? (3)
25. Коли момент сили відносно певної точки дорівнює нулеві? (3)
26. Чому дорівнює момент сили відносно точки, якщо лінія дії цієї сили проходить через зазначену точку? (2)
27. Що таке пара сил? (4)

28. Що утворюють прикладені до одного матеріального тіла дві однакові за величиною та протилежні за напрямком сили $\vec{F}$ і $\vec{P}$, які лежать на одній прямій? (3)
29. Що утворюють прикладені до одного матеріального тіла дві однакові за величиною та протилежні за напрямком антипаралельні сили $\vec{P}$ і $\vec{F}$, які не лежать на одній прямій? (3)
30. Яким чином діє на матеріальне тіло пара сил? (3)
31. Чим характеризується дія пари сил на матеріальне тіло? (4)
32. Чому дорівнює модуль моменту пари сил $\left(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2\right)$? (4)
33. Як для плоскої системи сил по сучасному позначають на схемах (рисунках) пари сил? (3)
34. Коли для плоскої системи сил пара сил вважається додатною? (3)
35. Коли для плоскої системи сил пара сил вважається від'ємною? (3)
36. Чим можна зрівноважити дію пари сил? (3)
37. Чи залежить момент пари сил від положення певної точки в просторі? (2)
38. Яка різниця між активною парою сил і пасивною (реактивною) парою сил? (4)
39. Які Ви знаєте балочні опори? (4)
40. Яке сучасне схематичне позначення шарнірно-рухомої опори? (3)
41. Що відомо про реакцію шарнірно-рухомої опори? (5)
42. Яке сучасне схематичне позначення шарнірно-нерухомої опори? (3)
43. Що відомо про реакцію шарнірно-нерухомої опори? (5)
44. Яке схематичне позначення абсолютно жорсткого затиснення? (3)
45. Що відомо про реакцію абсолютно жорсткого затиснення? (5)
46. До чого зводиться будь-яка збіжна система сил? (3) [1]
47. До чого у загальному випадку зводиться просторова довільна система сил? (8)
48. Чому дорівнює головний вектор $\vec{R}^*$ довільної системи сил (у векторній формі визначення)? (8)
49. Чому дорівнює головний момент $\vec{M}_O$ довільної системи сил відносно певного центра зведення O (у векторній формі визначення)? (8)
50. Чому дорівнює проекція R_x^* головного вектора $\vec{R}^*$ довільної системи сил на координатну вісь x? (7)

[1] Перші 46 наведених питань, які є в білетах для експрес-тестування №6, належать до попередніх тем і використовувалися у відповідних білетах.

51. Чому дорівнює проекція M_{Oy} головного моменту $\vec{M}_O$ довільної системи сил відносно певного центра зведення O на координатну вісь y? (7)
52. Які аналітичні умови рівноваги плоскої довільної системи сил у першій формі запису? (7)
53. Які аналітичні умови рівноваги плоскої довільної системи сил у другій формі запису? (7)
54. Які аналітичні умови рівноваги плоскої довільної системи сил у третій формі запису? (7)
55. Як розподіляють сили за способом прикладання? (4)
56. Які існують види розподілених навантажень за їх розподіленням в просторі? (8)
57. Як розподіляють розподілені навантаження за їх інтенсивністю? (8)
58. Що таке епюра розподіленого навантаження? (8)
59. Що визначає епюра розподіленого навантаження? (8)
60. Зобразити епюру рівномірно розподіленого по довжині ℓ_1 навантаження. (6)
61. Зобразити епюру нерівномірно розподіленого по довжині ℓ_2 навантаження. (6)
62. Що таке інтенсивність розподіленого навантаження? (7)
63. Якою фізичною величиною характеризується дія розподіленого навантаження? (6)
64. Як зазвичай позначають інтенсивність розподіленого навантаження? (4)
65. Що визначає інтенсивність розподіленого навантаження? (8)
66. Яка одиниця вимірювання інтенсивності розподіленого навантаження? (5)
67. Чим можна замінити дію розподіленого навантаження, прикладеного до абсолютно твердого тіла? (7)
68. Чому дорівнює модуль (величина) рівнодійної розподіленого навантаження? (10)
69. Куди напрямлена рівнодійна розподіленого навантаження? (8)
70. Як проходить лінія дії рівнодійної розподіленого навантаження? (10)
71. Як зазвичай позначають рівнодійну розподіленого навантаження? (4)
72. Яку конструкцію називають плоскою складеною? (7)

73. Яка формула визначає умови геометричної незмінності та статичної визначуваності плоскої складеної конструкції? (9)
74. Що визначає формула $N = 3 + Ш$? (8)
75. Що визначає параметр N у формулі $N = 3 + Ш$? (7)
76. Що визначає параметр $Ш$ у формулі $N = 3 + Ш$? (7)
77. Що таке з’єднувальний (внутрішній) шарнір? (7)
78. Скільки існує основних способів визначення опорних реакцій плоских складених конструкцій? (5)
79. Пояснити суть визначення опорних реакцій плоских складених конструкцій за І-им способом – «способом розтинання». (10)
80. Пояснити суть визначення опорних реакцій плоских складених конструкцій за ІІ-им способом – «способом основних і додаткових рівнянь». (10)
81. Які рівняння є «основними» при визначенні опорних реакцій плоских складених конструкцій за ІІ-им способом? (8)
82. Які рівняння приймають за «додаткові» при визначенні опорних реакцій плоских складених конструкцій за ІІ-им способом? (8)
83. Скільки можна скласти додаткових рівнянь при визначенні опорних реакцій плоских складених конструкцій за ІІ-им способом? (7)
84. Скільки необхідно складати додаткових рівнянь при визначенні опорних реакцій плоских складених конструкцій за ІІ-им способом? (7)
85. При складанні додаткових рівнянь яку з частинок складеної конструкції необхідно (краще) обирати до розгляду? (7)
86. При складанні основних рівнянь які точки доречніше приймати за моментні? (7)
87. При визначенні опорних реакцій плоских складених конструкцій яке рівняння можна використовувати для перевірки правильності отриманих результатів? (7)

На рисунках А і Б:

88. Чи є задана конструкція геометрично незмінною та статично визначуваною? Відповідь обґрунтувати. (9)
89. Що є опорами заданої конструкції? (7)
90. Зобразити опорні реакції заданої конструкції (навантаження – не зображувати!). (9)
91. Зі скількох простих складається задана складена конструкція? (7)

92. Скільки з'єднувальних шарнірів має задана складена конструкція? Які? (7)

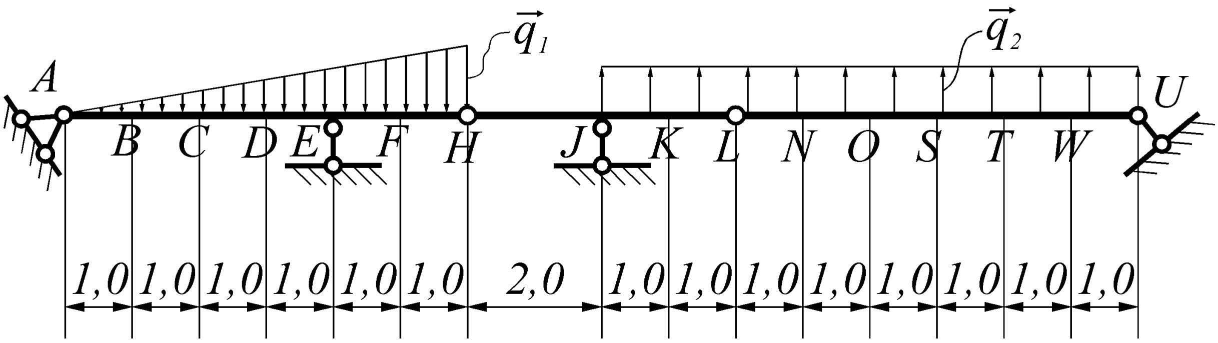


Рисунок А

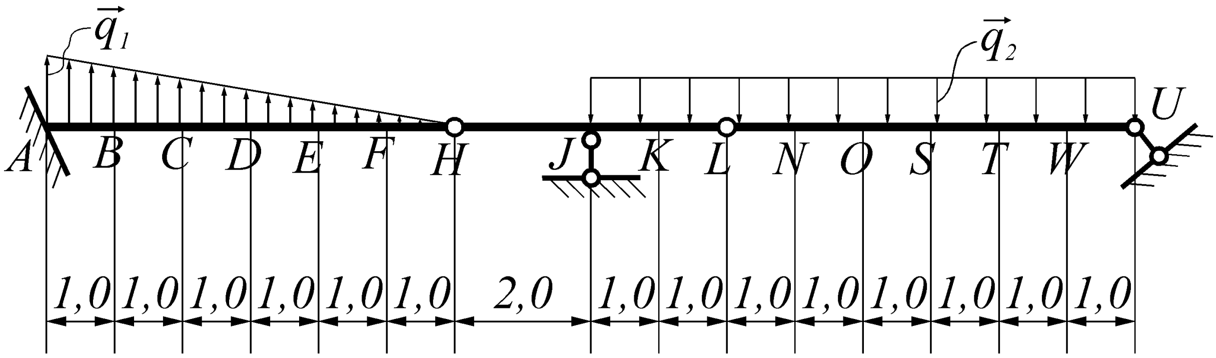


Рисунок Б

93. Що прикладене до зображеної конструкції на ділянці AH? (7)
94. Знайти модуль рівнодійної навантаження, прикладеного до зображеної конструкції на ділянці AH. (9)
95. Через яку точку проходить лінія дії рівнодійної навантаження, прикладеного до зображеної конструкції на ділянці AH? (9)
96. Куди напрямлена рівнодійна навантаження, прикладеного до зображеної конструкції на ділянці AH? (7)
97. Що прикладене до зображеної конструкції на ділянці JU? (7)
98. Знайти модуль рівнодійної навантаження, прикладеного до зображеної конструкції на ділянці JU. (9)
99. Через яку точку проходить лінія дії рівнодійної навантаження, прикладеного до зображеної конструкції на ділянці JU? (9)

100. Куди напрямлена рівнодійна навантаження, прикладеного до зображеної конструкції на ділянці JU? (7)
101. Знайти модуль рівнодійної навантаження, прикладеного до зображеної конструкції на ділянці LU. (9)
102. Через яку точку проходить лінія дії рівнодійної навантаження, прикладеного до зображеної конструкції на ділянці LU? (9)
103. Куди напрямлена рівнодійна навантаження, прикладеного до зображеної конструкції на ділянці LU? (7)
104. Записати <u>*той доданок*</u> додаткового рівняння $\sum M_H^{лів} = 0$, який <u>*визначає розподілене навантаження*</u> (***не все рівняння, а тільки один його доданок***). (9)
105. Записати <u>*той доданок*</u> додаткового рівняння $\sum M_H^{пр} = 0$, який <u>*визначає розподілене навантаження*</u> (***не все рівняння, а тільки один його доданок***). (9)
106. Записати <u>*той доданок*</u> додаткового рівняння $\sum M_L^{пр} = 0$, який <u>*визначає розподілене навантаження*</u> (***не все рівняння, а тільки один його доданок***). (9)

ДОДАТОК А

Приклад білета для проведення експрес-тестування

Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

Ступінь вищої освіти Бакалавр

Галузь знань 19 – Архітектура та будівництво

Спеціальність 192 – Будівництво та цивільна інженерія Семестр I

Навчальна дисципліна Теоретична механіка

БІЛЕТ ЕКСПРЕС-ТЕСТУВАННЯ Ст-1
ВАРІАНТ № 1

1. Дайте визначення теоретичної механіки? (8)
2. Що таке рівновага матеріального тіла? (8)
3. Як називають тіло, рух якого в просторі не обмежений ніякими іншими тілами? (4)
4. Скількома параметрами характеризується сила? (4)
5. Які одиниці вимірювання сили у Міжнародній системі одиниць СІ? (2)
6. Яким терміном зазвичай називають розподілені сили? (7)
7. Яка фізична величина є мірою механічної взаємодії між певним матеріальним тілом та в'яззю, що обмежує рух цього тіла? (7)
8. Яка система сил є плоскою збіжною? (7)
9. Чому дорівнює сумарна механічна дія на тіло зрівноваженої системи сил? (5)
10. Яка система сил є незрівноваженою? (4 або 9)
11. Що означає аналітичний (символьний) запис $\left\{\vec{P}_{33}\right\} \backsim \left\{\vec{S}_3\right\}$? (6)
12. Чи кожна система сил може бути еквівалентною одній силі? (3)
13. Сформулюйте аксіому №1. (10)
14. Сформулюйте аксіому №2. (10)
15. У чому полягає принцип звільнення від в'язей? (10)

Склав викладач теоретичної механіки Жигилій С.М.

Затверджено на засіданні кафедри будівельних конструкцій
Протокол від 26 серпня 2022 року № 1

ДОДАТОК Б

Приклад відповіді на запитання білета експрес-тестування

12 лютого 2022 р.

гр. 101-Б

Остапенко В.В.

Ст-1

Варіант № 1

1. Це наука про найбільш загальні закони механічного руху матеріальних тіл і механічні взаємодії між матеріальними тілами
2. стан спокою тіла по відношенню до інших матеріальних тіл
3. Вільне
4. 3
5. Ньютони
6. Розподілені навантаження
7. Реакція в'язі
8. Лінії дії сил якої розташовані в одній площині та перетинаються в одній точці
9. 0
10. Під дією якої матеріальне тіло не знаходиться у стані спокою (у рівновазі) та не виконує поступальний прямолінійний рівномірний рух
11. Система $\{\vec{P}\}$ з 33 сил еквівалентна системі сил $\{\vec{S}\}$ з 3 сил
12. Ні, не кожна
13. Дві сили утворюють зрівноважену систему сил тоді і лише тоді, коли вони рівні за величиною, протилежні за напрямком і мають спільну лінію дії
14. Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї відкинути будь-яку зрівноважену систему сил
15. Усяке невільне тіло умовно можна розглядати як вільне, якщо до діючих на тіло активних сил додати (приєднати) реакції умовно відкинутих в'язей

ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1. Бушок Г.Ф. Курс фізики: навч. посібник: У 2 кн. / Г.Ф. Бушок, В.В. Левандовський, Г.Ф. Півень. – К.: Либідь, 2001. – 448 с.
2. Жигилій С.М. Статика збіжної системи сил: курс лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» / С.М. Жигилій. – Полтава: ПолтНТУ, 2014. – 110 с.
3. Ruina A. Introduction to Statics and Dynamics / Andy Ruina, Rudra Pratap. – Oxford University Press (Preprint), 2011. – 1029 p.
4. Beer F. Vector mechanics for engineers: statics and dynamics, tenth edition / Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr., David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell – New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 2013. – 1360 p.
5. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник / М.А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
6. Timoshenko S. Engineering mechanics, fourth edition / S. Timoshenko, D. Young. – New York: McGraw-Hill book Company, Inc, 1960. – 508 p.
7. Muhovec Ivan. Tehnička mehanika sažetak osnova statike: posebno izdanje / Ivan Muhovec, Ivan Paska, Aleksej Aniskin. – Varaždin: Sveučilište Sjever, 2015. – 169 str.

Навчально-методичне видання

Жигилій Сергій Михайлович

СТАТИКА

Частина 1

Курс лекцій

з дисципліни «Теоретична механіка»

У авторській редакції

Комп'ютерна верстка – авторська