

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ПОЛТАВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА»

КАФЕДРА БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ



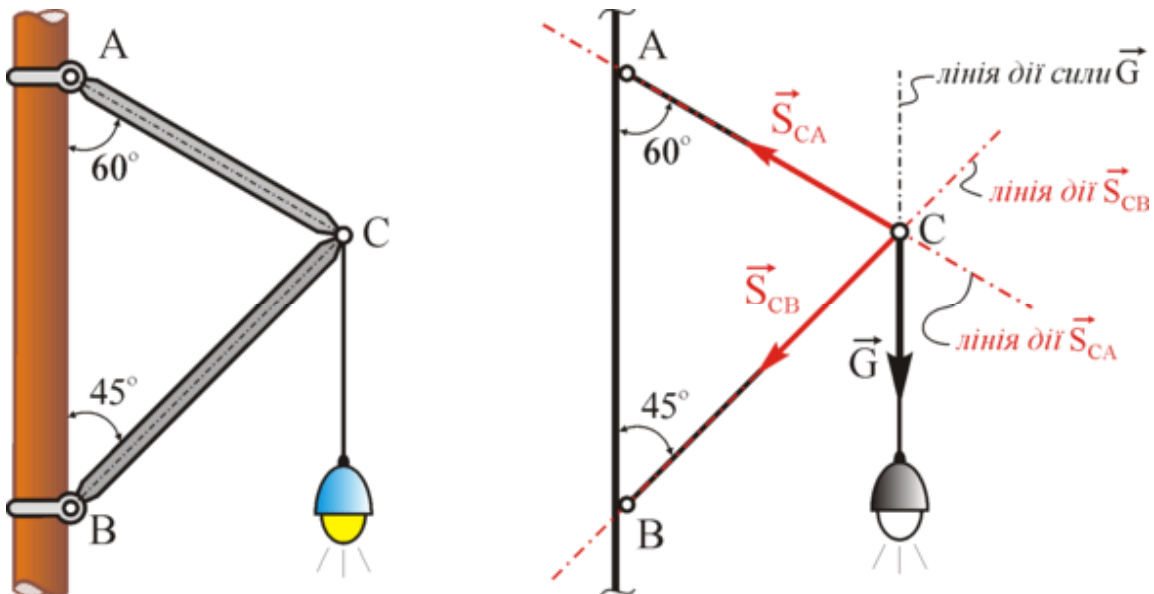
СЕРГІЙ ЖИГИЛІЙ

РІВНОВАГА ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ. МЕТОДИКА ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з дисципліни «Теоретична механіка»

для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання



Полтава 2023

УДК 531/534 (о7)

ББК 22.21я7

Ж 68

Рецензенти:

Ю.Л. Винников, завідувач кафедри буріння та геології, доктор техн. наук, професор, Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка».

Д.А. Єрмоленко, професор кафедри автомобільних доріг, геодезії та землеустрою, доктор техн. наук, доцент, Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка».

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»
Протокол № 2 від 28 грудня 2023 р.*

Жигилій С.М.

Рівновага збіжної системи сил. Методика та приклади розв'язування задач: навчальний посібник з дисципліни «Теоретична механіка» для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти / 2-ге вид. / С.М. Жигилій. – Полтава: Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», 2023. – 120 с.: іл. 60, бібліогр. 8.

Навчальний посібник містить 27 різноманітних задач до початкового розділу статички – «Рівновага збіжної системи сил». Наведені у посібнику приклади розв'язування задач 1, 5÷9, 22, 23 та 26 глибоко і ґрунтовно розкривають методикку, алгоритм і логіку розв'язування будь-яких аналогічних задач. Задачі 2÷4, 10÷21, 24÷25 та 27 призначено для самостійної роботи.

Для студентів (усіх форм навчання) та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

41.14.01.01

© Жигилій С.М., 2023 рік

© Національний університет
«Полтавська політехніка імені
Юрія Кондратюка», 2023 рік

ЗМІСТ

ЗМІСТ

Передмова	4
Проекція сили на вісь (плоска система сил)	7
Задача 1	7
Задача 2	15
Задача 3	17
Задача 4	18
Рівновага плоскої збіжної системи сил. Теорема про три сили	18
Задача 5	19
Задача 6	27
Задача 7	35
Задача 8	44
Задача 9	51
Задача 10	56
Задача 11	56
Задача 12	57
Задача 13	57
Задача 14	58
Задача 15	58
Задача 16	59
Задача 17	59
Задача 18	60
Задача 19	61
Задача 20	63
Задача 21	65
Розрахунок плоских простих ферм способом вирізання вузлів	65
Задача 22	65
Проекція сили на вісь (просторова система сил)	81
Задача 23	81
Задача 24	96
Задача 25	100
Рівновага просторової збіжної системи сил. Розрахунок просторових ферм способом вирізання вузлів	101
Задача 26	101
Задача 27	113
Додаток А	114
Додаток Б	115
Літературні джерела	119

ПЕРЕДМОВА

Невід'ємною складовою загального навчального процесу є *самостійна робота* студентів, актуальність і важливість якої останніми роками постійно зростає, наприклад, через запровадження у систему вищої освіти України дистанційної форми навчання. З іншого боку, рівень шкільної підготовки та уявлення про самостійну роботу сучасних студентів є різними й коливаються у надзвичайно широкому діапазоні. Тому виникає потреба в навчальних підручниках, посібниках і методичних рекомендаціях, за допомогою яких студенти різних форм навчання (очної, заочної, дистанційної) могли б самостійно та якісно навчатися.

Зазвичай викладання й вивчення теоретичної механіки починається з ґрунтовного та послідовного розгляду її основних понять і визначень. У такий спосіб закладається надійний фундамент, який забезпечує успішне засвоєння всіх наступних тем курсу теоретичної механіки. Невід'ємною обов'язковою частиною зазначеного процесу є вміння студентів розв'язувати відповідні навчальні задачі, оскільки багато понять, визначень, теорем і питань теоретичної (лекційної) частини курсу стають більш зрозумілими лише тоді, коли вони починають свідомо та логічно застосовуватися при розв'язуванні достатньої кількості конкретних практичних задач. З іншого боку, зазначене розв'язування неможливе без належного знання відповідного лекційного матеріалу. Оскільки на першому етапі вивчення теоретичної механіки студенти ще не мають достатнього обсягу теоретичних знань, необхідних для розв'язання задач певного інженерного рівня, то на цьому етапі розглядаються досить прості задачі, що дає можливість усім студентам зосередити розумову енергію на засвоєнні та розумінні нескладних, але нових для них термінів, понять і визначень теоретичної

механіки, на запам'ятовуванні загального алгоритму дій і звиканні до нього (як правило, після розв'язування цих задач кожний свідомий студент без скільки-небудь відчутного напруження мозку відчуває, наприклад, різницю між поняттями *рівноваги*, *рівнодійної* та *реакції*; *сили* та *системи сил* і т. ін.). При цьому студенти пересвідчуються, що навіть невеликі за обсягом знання теоретичної механіки вже дають змогу розв'язувати деякі інженерні задачі; також важливе те, що для тих, хто має *певні прогалини* в знаннях шкільних курсів арифметики, алгебри та елементарної геометрії, з'являється можливість ліквідувати ці прогалини (все викладене тут стосується студентів стаціонару, але справедливе і для студентів інших форм навчання – заочної, індивідуальної, дистанційної).

Навчальний посібник містить 27 різноманітних задач до однієї з найпростіших початкових тем статички (першого розділу теоретичної механіки) – «Рівновага збіжної системи сил».

Задачі 1÷4 та 23÷25 є суто *навчальними задачами*, розв'язуючи які студенти ретельно розглядають, засвоюють і закріплюють поняття **проекції сили на вісь**, оскільки воно є базовим поняттям не тільки статички, але й усієї теоретичної механіки та будь-якої інженерної науки. Всі інші задачі є певними *інженерними задачами* різного рівня складності, розв'язання яких неможливе без уміння знаходити проекції сил на осі.


Розв'язування задач 1, 5, 6, 22, 23 і 26, які використовуються автором *при проведенні відповідних практичних занять*, наведено з такими детальними поясненнями, коментарями та порадами, щоб у читачів посібника виникало відчуття присутності на зазначених заняттях; указане стосується і задач 7÷9 (задачі 5÷9 з точки зору теоретичної механіки є абсолютно ідентичними й відрізняються одна від одної лише видами в'язей та незначними характе-

рними нюансами, що виникають при розв'язуванні подібних до них задач). Задачі 2÷4, 10÷21, 24÷25 та 27 призначено для самостійної роботи; більшість з них застосовуються автором для домашніх завдань студентам.

Задачі 5÷9 є прикладами виконання різних індивідуальних варіантів завдання на тему «Рівновага матеріального тіла під дією плоскої збіжної системи з трьох сил. Теорема про три сили», задача 22 – завдання на тему «Розрахунок плоских ферм способом вирізання вузлів», задача 26 – завдання на тему «Рівновага просторової збіжної системи сил. Розрахунок просторових ферм способом вирізання вузлів».

Задачі 5÷12, 14÷17, 21÷22 та 26÷27 є типовими задачами на вказані у попередньому абзаці теми.

Умови задач 13 та 18÷20 на перший погляд суттєво відрізняються від умов відповідних типових задач, але алгоритм і логіка розв'язування їх однакові (зазначені задачі в посібнику супроводжено необхідними зауваженнями, поясненнями та порадами).

Номери рисунків до задач у посібнику збігаються з номерами самих задач у супроводженні з літерою *z* (наприклад, рис. 22z,5 є 5-им рисунком задачі 22). Зауваження, пояснення та поради позначені або символом  (якщо вони в основному стосуються тільки розглядуваної задачі), або їм надано відповідний **номер** (якщо вони мають загальне значення та стосуються всіх задач).

Вихідні схеми та числові значення всіх «домашніх» задач посібника (за винятком задач 12, 13, 17 та 21) підібрано таким чином, що шукані відповіді є лише *цілими числами* (це зроблено навмисно для того, щоб при розв'язуванні цих задач факт отримання будь-якої відповіді у вигляді нецілого числа сприймався за сигнал про помилку).

ПРОЕКЦІЯ СИЛИ НА ВІСЬ

(ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ)

ЗАДАЧА № 1

До пластини певної довільної форми, яка знаходиться в площині Oxy і закріплена опорами A та I до нерухомої поверхні, в точках B , C , D , E , J та K прикладені сили $\vec{F}_1 \div \vec{F}_6$ (рис. 1z.1).

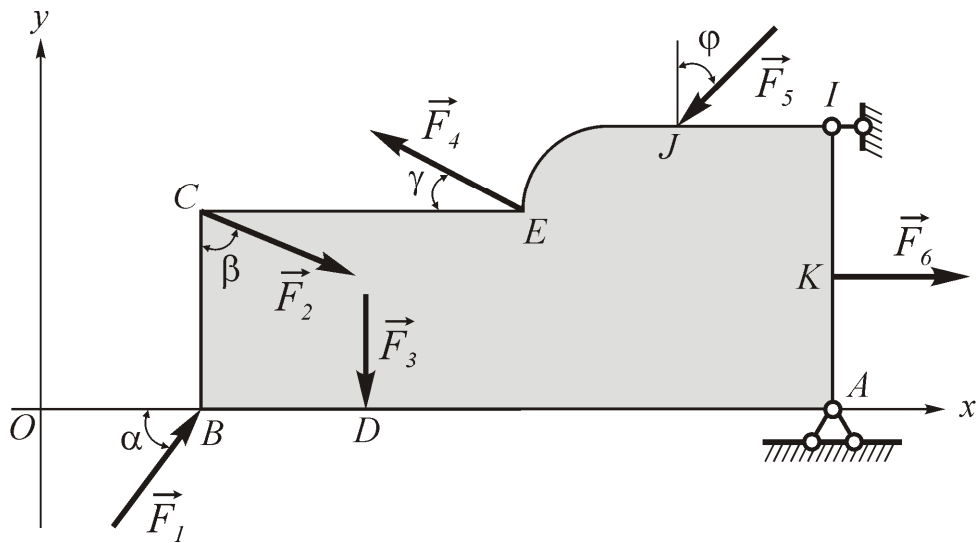


Рисунок 1z.1

Не враховуючи реакції опор, знайти суму проєкцій сил $\vec{F}_1 \div \vec{F}_6$ на декартові координатні осі x та y , якщо $F_1 = 25 \text{ kH}$; $\cos \alpha = 0,6$;

$$F_2 = 52 \text{ kH}; \quad \cos \beta = \frac{5}{13}; \quad F_3 = 8 \text{ kH}; \quad F_4 = 17 \text{ kH}; \quad \sin \gamma = \frac{8}{17};$$

$$F_5 = 5 \cdot \sqrt{2} (\text{kH}); \quad \varphi = 45^\circ; \quad F_6 = 12 \text{ kH}.$$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Перш ніж поспішати починати будь-які записи та обчислення-розрахунки, варто уважно роздивитися задану схему та кожну силу в окремості¹, згадавши, чому дорівнює (або як знаходити) проєкція сили на вісь: *проєкція сили на вісь – це скалярна величи-*

¹ Такий підхід бажано використовувати при розв'язуванні абсолютно всіх задач теоретичної механіки (й інших наук також).

на, що дорівнює взятому зі знаком плюс чи мінус добутку модуля сили на косинус гострого кута між лінією дії сили та віссю; знак плюс приймається в тому випадку, коли на рисунку напрямок сили збігається з напрямком осі; в іншому випадку береться знак мінус – див. формулу (2.9) § 2.3 [1].

Отже, знайдемо проекції кожної сили на осі x та y .

1. Сила \vec{F}_1 прикладена до пластини у точці B і лінія дії її проходить похило, утворюючи гострий кут α з віссю x . Продовжимо лінію дії сили \vec{F}_1 до перетину її з віссю y та позначимо отриману точку перетину B_1 , а гострий кут між лінією дії сили \vec{F}_1 і віссю y – β_1 (див. рис. 1z.2). Оскільки розглядувана сила напрямлена праворуч та вгору (тобто напрям її збігається з напрямками осей x і y), то значить проекції сили \vec{F}_1 на обидві осі є додатними.

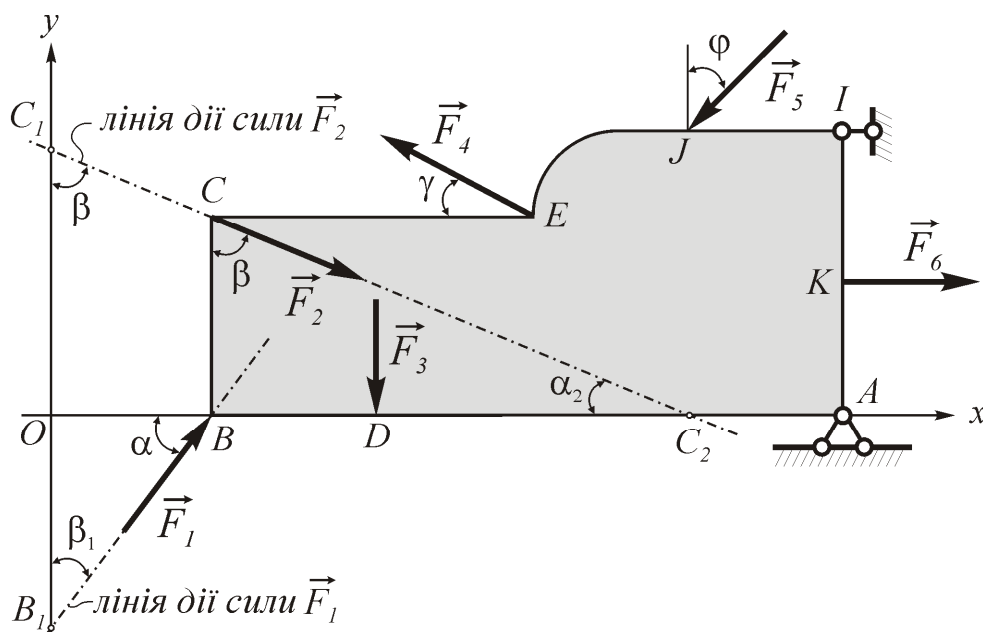


Рисунок 1z.2

Тоді, відповідно до наведеного раніше, проекція F_{1x} сили \vec{F}_1 на вісь x

$$F_{1x} = +F_1 \cdot \cos \alpha = 25 \cdot 0,6 = 15(\text{kH}),$$

а проєкція F_{1y} сили \vec{F}_1 на вісь y

$$F_{1y} = +F_1 \cdot \cos \beta_1.$$

Оскільки відповідно до елементарної евклідової геометрії сума трьох кутів будь-якого трикутника дорівнює 180° , то з прямокутного трикутника B_1OB на рисунку 1z.2 очевидно, що $\beta_1 = 90^\circ - \alpha$; тоді $\cos \beta_1 = \cos(90^\circ - \alpha)$, оскільки ж з елементарної тригонометрії відомо, що $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; то

$$F_{1y} = +F_1 \cdot \cos \beta_1 = F_1 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = F_1 \cdot \sin \alpha.$$

Таким чином, для обчислення значення F_{1y} постала необхідність знайти значення $\sin \alpha$, якого не задано в умові задачі. Тому що, як відомо з елементарної тригонометрії, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

Тоді

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 25 \cdot 0,8 = 20(\text{kH}).$$

2. Сила \vec{F}_2 прикладена до пластини у точці C , лінія дії її проходить похило, утворюючи гострий кут β зі стороною CB пластини (див. рис. 1z.1), а сама сила напрямлена праворуч і вниз, збігаючись за напрямком з додатнім напрямком осі x та не збігаючись з додатнім напрямком осі y ; через це: проєкція F_{2x} сили \vec{F}_2 на вісь x є додатною, а проєкція F_{2y} – від'ємною. Зобразимо на рисунку 1z.2 лінію дії сили \vec{F}_2 та позначимо точку перетину її з віссю x як C_2 , а з віссю y – C_1 ; видно, що, оскільки вертикальна сторона CB пластини є паралельною до осі y , то лінія дії сили \vec{F}_2

утворює гострий кут β з віссю y . Гострий кут між лінією дії сили \vec{F}_2 та віссю x позначимо α_2 , а значення його визначимо з прямокутного трикутника OC_2C_1 : $\alpha_2 = 90^\circ - \beta$.

Тоді

$$F_{2x} = +F_2 \cdot \cos \alpha_2 = F_2 \cdot \cos(90^\circ - \beta) = F_2 \cdot \sin \beta,$$

а

$$F_{2y} = -F_2 \cdot \cos \beta = -52 \cdot \frac{5}{13} = -\frac{52 \cdot 5}{13} = -20(\text{kH}).$$

Знайдемо значення $\sin \beta$. Оскільки $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, то

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2}.$$

У подальших обчисленнях використовуємо елементарну арифметику: для піднесення простого дроби до квадрата необхідно піднести до квадрата і чисельник, і знаменник дроби – в розгляду-

ваному випадку $\left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{5^2}{13^2} = \frac{25}{169}$. Після цього отримаємо

$\sqrt{1 - \frac{25}{169}}$ або $\sqrt{\frac{1}{1} - \frac{25}{169}}$, приведемо вираз до найменшого спільного

знаменника (який у цьому разі дорівнює 169) та проведемо відні-

мання: $\sqrt{\frac{169}{169} - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{169 - 25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}}$. Тепер добудемо корінь

квадратний з дроби $\frac{144}{169}$; для цього окремо добудемо корені квад-

ратні з чисельника та знаменника $\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}$. Тобто

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

Таким чином,

$$F_{2x} = +F_2 \cdot \sin \beta = 52 \cdot \frac{12}{13} = \frac{52 \cdot 12}{13} = 48 \text{ (кН)}.$$

3. Лінія дії сили \vec{F}_3 , яка прикладена до пластини у точці D , проходить вертикально. Тоді (відповідно до викладеного в § 2.3 та рисунка 2.9 [1]) сила \vec{F}_3 на горизонтальну вісь x не проектується, а на вертикальну вісь y – у натуральну (дійсну) величину, але, тому що ця сила направлена вниз (тобто напрям її не збігається з напрямком осі y), її проекція на вісь y є від'ємною:

$$F_{3x} = 0; \quad F_{3y} = -F_3 = -8 \text{ (кН)}.$$

4. Сила \vec{F}_4 прикладена до пластини у точці E , лінія дії її проходить похило, а сила напрямлена ліворуч і вгору. Тобто напрям сили \vec{F}_4 не збігається з напрямком осі x – проекція F_{4x} від'ємна; оскільки напрям цієї сили збігається з напрямком осі y – проекція F_{4y} додатна. Для знаходження значень F_{4x} та F_{4y} розглянемо та усвідомимо інші у порівнянні з викладеними в пунктах 1÷2 міркування.

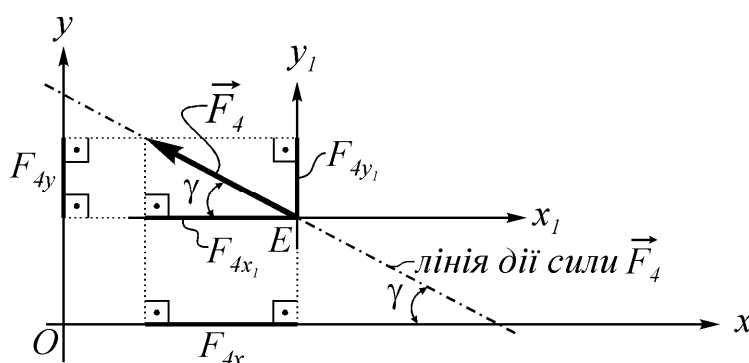


Рисунок 1z.3

Проведімо через точку прикладання сили \vec{F}_4 (тобто через точку E) паралельно до заданих координатних осей x і y допоміжні осі x_1 і y_1 – див. рисунок 1z.3, з якого відразу видно, що лінія дії сили \vec{F}_4 утворює з осями x_1 та y_1 гострі ку-

ти γ і $(90^\circ - \gamma)$ відповідно, а проєкції F_{4x_1} та F_{4y_1} цієї сили на допоміжні осі x_1 і y_1 дорівнюють відповідним проєкціям на осі x і y : $F_{4x_1} = F_{4x}$ та $F_{4y_1} = F_{4y}$ (про це саме говорить відповідна теорема векторної алгебри: проєкції довільного вектора на будь-які паралельні та однаково напрямлені осі рівні одна одній); через це

$$F_{4x} = -F_4 \cdot \cos \gamma,$$

а

$$F_{4y} = F_4 \cdot \cos(90^\circ - \gamma) = F_4 \cdot \sin \gamma.$$

Використовуючи задане в умові задачі значення $\sin \gamma$, знаходимо відповідне значення $\cos \gamma$:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{8^2}{17^2}} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \\ &= \sqrt{\frac{289 - 64}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}. \end{aligned}$$

Тоді

$$F_{4x} = -17 \cdot \frac{15}{17} = -\frac{17 \cdot 15}{17} = -15(\text{kH});$$

$$F_{4y} = 17 \cdot \frac{8}{17} = \frac{17 \cdot 8}{17} = 8(\text{kH}).$$

5. У точці J до пластини прикладена напрямлена ліворуч і вниз сила \vec{F}_5 ; оскільки напрям її не збігається з напрямками обох осей, значить, проєкції сили \vec{F}_5 на обидві осі є від'ємними. Прове́дімо через точку J паралельно до заданих координатних осей x і y допоміжні осі x_2 і y_2 (рис. 1z.4) та, міркуючи аналогічно до викладеного в попередньому пункті задачі, визначаємо, що

$$F_{5x} = F_{5x_2} = -F_5 \cdot \cos(90^\circ - \varphi) = -F_5 \cdot \sin \varphi,$$

$$F_{5y} = F_{5y_2} = -F_5 \cdot \cos \varphi.$$

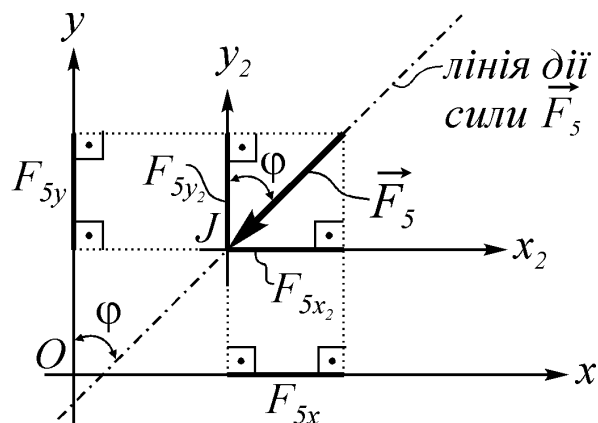


Рисунок 1z.4

Оскільки за умовою задачі $\varphi = 45^\circ$, то

$$\cos \varphi = \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

а шукані проекції

$$F_{5x} = -5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = -\frac{5 \cdot 2}{2} = -5(\text{kH}),$$

$$F_{5y} = -5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = -\frac{5 \cdot 2}{2} = -5(\text{kH}).$$

6. Горизонтальна сила \vec{F}_6 , яка прикладена до пластини у точці K та направлена праворуч, проектується на горизонтальну вісь x у натуральну величину зі знаком плюс, а на вертикальну вісь y – не проектується (або – проектується в нуль):

$$F_{6x} = +F_6 = 12(\text{kH}); \quad F_{6y} = 0.$$

Таким чином, проекції кожної з шести заданих сил на обидві координатні осі визначено.

Тепер знаходимо суму проекцій усіх заданих сил на вісь x . Для цього сумуємо з урахуванням знаків уже знайдені значення F_{1x} , F_{2x} , F_{3x} , F_{4x} , F_{5x} та F_{6x} . Умовимося цей факт (факт знахо-

дження суми проекцій усіх заданих у розглядуваній задачі сил на вісь x) символічно записувати у вигляді $\sum X$; тобто

$$\sum X = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x} + F_{6x} = \sum_{i=1}^6 F_{ix}.$$

Аналогічно знаходимо і суму проекцій усіх сил на вісь y :

$$\sum Y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y} + F_{6y} = \sum_{i=1}^6 F_{iy}.$$

При набутті певного досвіду (в деякого зі студентів цей досвід з'явиться вже після свідомого осмислення розглядуваної задачі) всі достатньо прості міркування, рисунки 1z.2÷1z.4 та математичні дії, які викладені від слів „Отже, знаходимо проекції кожної сили...“ на с. 8 до останньої наведеної формули можна (і бажано) уявляти та виконувати у думці, а на папері зазначені думки викладати приблизно в такому вигляді:

$$\begin{aligned}\sum X &= F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \sin \beta - F_4 \cdot \cos \gamma - F_5 \cdot \sin \varphi + F_6 = \\ &= 25 \cdot 0,6 + 52 \cdot \frac{12}{13} - 17 \cdot \frac{15}{17} - 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 = \\ &= 15 + 48 - 15 - 5 + 12 = 55(\text{kH}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum Y &= F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot \cos \beta - F_3 + F_4 \cdot \sin \gamma - F_5 \cdot \cos \varphi = \\ &= 25 \cdot 0,8 - 52 \cdot \frac{5}{13} - 8 + 17 \cdot \frac{8}{17} - 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= 20 - 20 - 8 + 8 - 5 = -5(\text{kH}).\end{aligned}$$

Відповідь: $\sum X = 55 \text{ kH}$, $\sum Y = -5 \text{ kH}$ (це треба розуміти, читати та промовляти таким чином: сума проекцій усіх сил на вісь x дорівнює п'ятдесяти п'яти кілоньютонам, а на вісь y – мінус п'яти кілоньютонам; отримані відповіді можуть бути *будь-якими* числами та *ніякого певного змістового значення не мають*).

Зауваження до задачі 1 (і до багатьох інших наступних). При розв'язанні розглянутої задачі 1 може постати досить слушне запитання стосовно способу задавання в умові задачі кутів α , β та γ . Взагалі-то зазвичай кути, під якими певні сили діють на те чи інше матеріальне тіло:

- а) задаються в умові задачі в градусах – як, наприклад, $\varphi = 45^\circ$ у розглянутій задачі;
- б) визначаються з відповідного геометричного аналізу розрахункової схеми – див., наприклад, задачу 6 на с. 27÷34.

У задачі 1, як і в багатьох наступних, числові значення сил та відповідних їм тригонометричних функцій потрібних кутів свідомо підібрані таким чином, щоб у результаті виконуваних обчислень усі шукані величини були б цілими числами. В реальних умовах така ситуація виникає надзвичайно рідко, але, враховуючи навчальний характер зазначених задач, факт наявності відповідей у вигляді цілих чисел можна розглядати як певну підказку: якщо в результаті обчислень якесь знайдене значення є нецілим числом – шукай помилку. Очевидно, що математичні дії, пов'язані зі знаходженням необхідних відповідних тригонометричних функцій заданих у такий спосіб кутів, та результати цих дій у всіх випадках будуть однаковими. У додатку А на с. 114 наведено таблицю 4, яка містить пари числових значень тригонометричних функцій деяких кутів.

ЗАДАЧА № 2

Для заданої на рисунку 2z сукупності сил $\vec{F}_1 \div \vec{F}_7$ знайти суму проєкцій їх на координатні осі x та y , якщо: $F_1 = 50\text{kH}$;

$$\cos \alpha_1 = \frac{8}{10}; \quad F_2 = 4 \cdot \sqrt{5}(\text{kH}); \quad \cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad F_3 = 24\text{kH}; \quad F_4 = 52\text{kH};$$

$$\sin \alpha_4 = \frac{12}{13}; F_5 = 40 \text{кН}; F_6 = 51 \text{кН}; \sin \alpha_6 = \frac{15}{17}; F_7 = 5 \text{кН}; \cos \alpha_7 = \frac{3}{5}$$

(опорні реакції не враховувати).

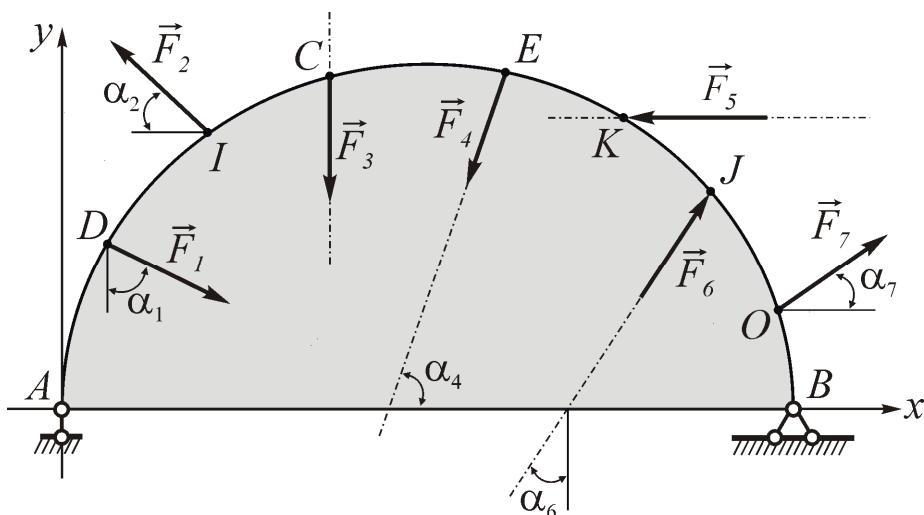


Рисунок 2з

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

✎: пропонується розв'язати задачу самостійно та перевірити власний розв'язок із наведеним.

Розглянувши рисунок та проаналізувавши діючі сили, знайдемо необхідні функції заданих кутів²:

$$\sin \alpha_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{10}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{64}{100}} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10};$$

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5-1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\cos \alpha_4 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_4} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13};$$

$$\cos \alpha_6 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_6} = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \sqrt{\frac{289-225}{289}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17};$$

² Див. також таблицю 4 на с. 114.

$$\sin \alpha_7 = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_7} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Спроектувавши сили на осі та просумувавши, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum X &= F_1 \cdot \sin \alpha_1 - F_2 \cdot \cos \alpha_2 - F_4 \cdot \cos \alpha_4 - F_5 + F_6 \cdot \sin \alpha_6 + F_7 \cdot \cos \alpha_7 = \\ &= 50 \cdot \frac{6}{10} - 4\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 52 \cdot \frac{5}{13} - 40 + 51 \cdot \frac{15}{17} + 5 \cdot \frac{3}{5} = \\ &= 30 - 4 - 20 - 40 + 45 + 3 = 14(\text{kH}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y &= -F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 - F_3 - F_4 \cdot \sin \alpha_4 + F_6 \cdot \cos \alpha_6 + F_7 \cdot \sin \alpha_7 = \\ &= -50 \cdot \frac{8}{10} + 4\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 24 - 52 \cdot \frac{12}{13} + 51 \cdot \frac{8}{17} + 5 \cdot \frac{4}{5} = \\ &= -40 + 8 - 24 - 48 + 24 + 4 = -76(\text{kH}). \end{aligned}$$

Відповідь: $\sum X = 14\text{kH}$, $\sum Y = -76\text{kH}$.

ЗАДАЧА № 3

Для заданої на рисунку 3z сукупності сил $\vec{F}_1 \div \vec{F}_8$ знайти суму проєкцій їх на координатні осі x та y , якщо:

$$F_1 = 26\text{kH}; \quad \cos \alpha_1 = \frac{5}{13};$$

$$F_2 = 40 \cdot \sqrt{2}(\text{kH}); \quad \alpha_2 = 45^\circ;$$

$$F_3 = 68\text{kH}; \quad \sin \alpha_3 = \frac{15}{17};$$

$$F_4 = 32\text{kH}; \quad F_5 = 40\text{kH};$$

$$\sin \alpha_5 = 0,6; \quad F_6 = 24\text{kH};$$

$$F_7 = 35\text{kH}; \quad \cos \alpha_7 = \frac{3}{5};$$

$$F_8 = 16\text{kH} \text{ (опорні реакції}$$

не враховувати).

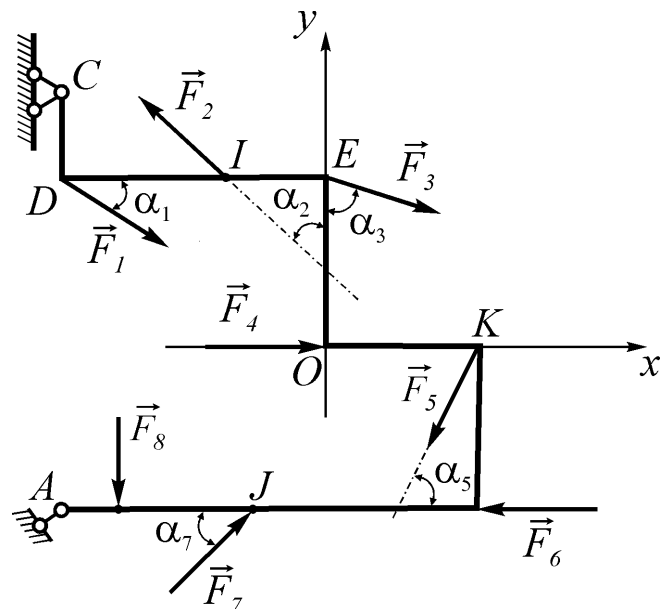


Рисунок 3z

Відповідь: $\sum X = 27\text{kH}$, $\sum Y = -28\text{kH}$.

ЗАДАЧА № 4

Для заданої у завданні С4 сукупності активних сил, прикладених до матеріального тіла, знайти суму проєкцій їх на координатні осі x та y (опорні реакції не враховувати).

РІВНОВАГА ПЛОСКОЇ ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ.

ТЕОРЕМА ПРО ТРИ СИЛИ

Задачі про рівновагу різноманітних матеріальних тіл під дією тієї чи іншої системи сил трапляються та розв'язуються не тільки в теоретичній механіці, а й в інших інженерно-технічних науках і дисциплінах. Як правило, шуканими величинами в таких задачах є *реакції в'язей*, що визначають рівновагу розглядуваного тіла. Кількість цих реакцій (а отже, і кількість невідомих параметрів конкретної розв'язуваної задачі) залежить від кількості та виду накладених в'язей. Якщо кількість *невідомих* шуканих реакцій в'язей *не перевищує* можливу кількість *рівнянь рівноваги*, то задачу можна розв'язати методами статички; такі задачі називаються *статично визначуваними*, а конструкції й споруди, що розглядаються в цих задачах, – *статично визначуваними конструкціями* (або *системами*).

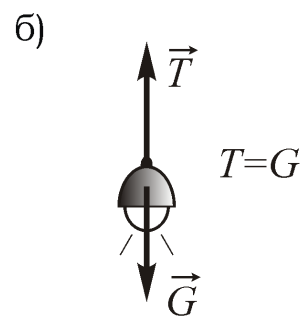
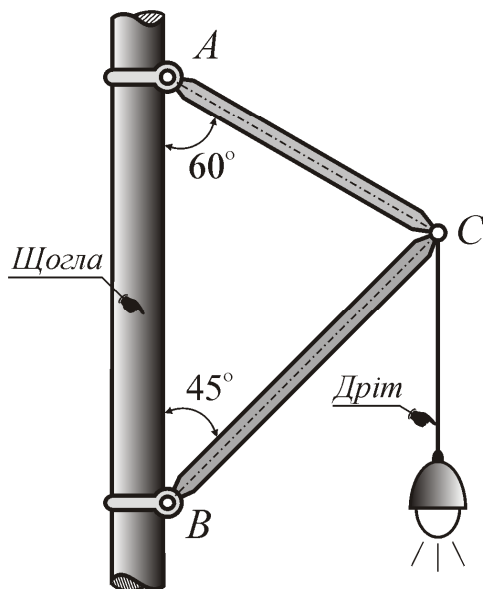
Якщо кількість невідомих реакцій в'язей більша від кількості *рівнянь рівноваги*, то такі задачі називаються *статично невизначуваними*, а відповідні конструкції та споруди – *статично невизначуваними конструкціями* (*системами*). Задачі такого роду розглядаються у курсах опору матеріалів, теорії пружності, будівельної механіки, теорії механізмів і машин й ін.

Усі *статично визначувані задачі про рівновагу матеріальних тіл* під дією *будь-яких систем сил* розв'язують у певній послідовності, що і визначає універсальний **алгоритм розв'язування** таких задач, котрий наводиться у додатку Б на с. 115÷118.

ЗАДАЧА № 5

Палубний ліхтар вагою $G = 90 \text{ Н}$, що підвішений у точці C на дроті, втримується у необхідному положенні кронштейном ABC , який у точках A та B закріплений до вертикальної щогли; стержень AC кронштейна утворює зі щоглою кут 60° , а стержень BC – кут 45° (рис. 5z.1,а)¹. Уважаючи з'єднання у точках A , B і C шарнірними² й нехтуючи вагою дроту і кронштейна, визначити зусилля у стержнях AC та BC .

а) РИСУНОК ДО ЗАДАЧІ



в) РОЗРАХУНКОВА СХЕМА

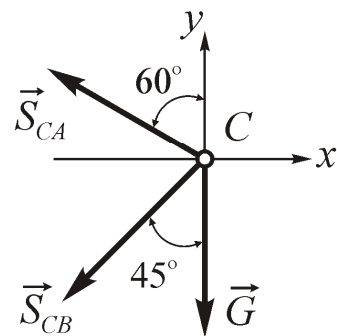


Рисунок 5z.1

¹ У задачах теоретичної механіки немає ніякого значення, з яких конструктивних матеріалів виготовлені дріт, стержні AC і BC кронштейна та вертикальна щогла.

² З'єднання у точках A , B і C у дійсності може бути яким завгодно (наприклад, за допомогою заклепок, зварювальним або іншим); припущення про шарнірне з'єднання у цих точках, по-перше, дозволяє розглядати стержні AC і BC кронштейна як *ідеальні стержні зі шарнірами на кінцях*, а по-друге, визначені зусилля у цих стержнях виявляються трохи *завищеними* у порівнянні з реальними зусиллями у разі нешарнірного з'єднання, що забезпечує певний *запас міцності*.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Після з'ясування умови задачі діємо відповідно до наведеного на сторінках 115÷118 **алгоритму**.

1. З'ясуємо, рівновагу якого саме матеріального тіла необхідно розглядати в розв'язуваній задачі.

Розглядаючи рівновагу безпосередньо ліхтаря, бачимо, що його рух обмежено дротом, який у цьому випадку є для ліхтаря *гнучкою в'яззю* (див. [1], § 2.7, в'язь за № 3 та рис. 2.17). Якщо, застосувавши **аксіому 5** (див. [1], § 1.3), відкинути зазначену в'язь та замінити її дію реакцією \vec{T} , то виявиться, що до ліхтаря прикладені дві сили: активна сила \vec{G} та реакція в'язі (пасивна сила) \vec{T} . Тоді, на підставі **аксіому 1** (див. [1], § 1.3), ці сили є рівними за модулем (величиною), протилежними за напрямками та мають спільну лінію дії (див. рис. 5z.1,б). Виходить, що, розв'язавши задачу в такій постановці, за декілька секунд знайдено зусилля в дроті ($T = G = 90 \text{ Н}$)³, але нічого не з'ясовано про зусилля у стержнях AC та BC , як того вимагає умова задачі.

Тоді будемо *розглядати рівновагу шарніра C* ⁴ – зрозуміло, що якщо цей *вузол* кронштейна буде перебувати в стані спокою та приєднаний до нього дріт витримає 90 Н , то, безумовно, і ліхтар буде у рівновазі.

2. Показуємо на *розрахунковій схемі* на рисунку 5z.1, в активні сили, що прикладені до розглядуваного шарніра C : у розглядуваній задачі це буде одна-єдина сила тяжіння \vec{G} , яка передається на

³ Зрозуміло, що таку задачу здатна розв'язати кожна свідомо людина, яка не те що не вивчала теоретичної механіки, а навіть не підозрює про її існування: будь-кому зрозуміло, що якщо дріт не витримає ваги ліхтаря, то останній упаде (тобто не буде перебувати у рівновазі).

⁴ Місце з'єднання (не обов'язково шарнірне) декількох будь-яких стержнів у теоретичній механіці (й в інших інженерних науках) називається **вузлом**.

шарнір C через дріт ⁵.

3. Оскільки рух шарніра C обмежено стержнями AC та BC кронштейна, то вони є *стержневими в'язями* (див. [1], § 2.7, в'язь за № 5).

4. Застосовуємо **аксіому 5** (див. [1], § 1.3): відкидаємо від розглядуваного вузла C стержні, а їх дії замінюємо реакціями \vec{R}_{CA} та \vec{R}_{CB} , які безумовно прикладені до вузла C та напрямлені вздовж осей стержнів AC та BC відповідно. Оскільки наперед невідомо розтягнуті стержні чи стиснуті, то постає питання: куди саме направити реакції \vec{R}_{CA} та \vec{R}_{CB} – до вузла C чи від нього?

✎: умовно приймаємо, що обидва стержня є *розтягнутими* і тому реакції їх зображуємо напрямленими вздовж осей відповідних стержнів від вузла C (див. [1], § 2.7, рис. 2.22 і 2.24,а та **зауваження № 3** до **алгоритму** на с. 115).

Оскільки ж реакції стержнів безпосередньо визначають **зусилля** в них (див. [1], § 2.7, рисунки 2.23 і 2.24 та відповідні міркування до них), то на *розрахунковій схемі* відразу позначаємо ці реакції як \vec{S}_{CA} й \vec{S}_{CB} (рис. 5z.1,в).

✎: рисунок (або малюнок) до задачі подано на рисунку 5z.1,а, а розрахункову схему – на рисунку 5z.1,в. На **рисунку** зображено декілька матеріальних тіл: щогла, кронштейн ABC (або стержні AC та BC), елементи кріплення кронштейна до щогли, дріт, ліхтар, шарніри A , B і C . На **розрахунковій схемі** зображено одне-єдине мате-

⁵ Якщо бути *абсолютно прискіпливим*, то до шарніра C прикладена не сила тяжіння \vec{G} (яка прикладена безпосередньо до самого ліхтаря), а реакція \vec{T} *розтягнутої* гнучкої в'язі; у цьому випадку реакція \vec{T} для шарніра C і є тією силою, що прагне викликати його рух. Але, оскільки вже з'ясовано, що в розглядуваній ситуації $T = G$, то можна і доречно говорити, що на шарнір C діє сила \vec{G} , яка передається через дріт.

ріальне тіло – вузол C , до якого прикладена відповідна система діючих сил (див. також **зауваження № 2** до **алгоритму** на с. 115).

5. До розглядуваного шарніра C виявилися прикладеними сили \vec{G} , \vec{S}_{CA} та \vec{S}_{CB} ; тоді вони утворюють систему сил $\{\vec{G}; \vec{S}_{CA}; \vec{S}_{CB}\}$, яка з геометричної точки зору є *плоскою збіжною*.

6. Вибираємо на розрахунковій схемі на рисунку 5z.1, в систему координат⁶, записуємо аналітичні **умови рівноваги** плоскої збіжної системи сил (які згідно з виразом (2.15) [1] мають вигляд $\sum X = 0$ і $\sum Y = 0$) та складаємо⁷ відповідні **рівняння рівноваги**⁸:

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad -S_{CA} \cdot \sin 60^\circ - S_{CB} \cdot \sin 45^\circ = 0; \quad (5.1)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad S_{CA} \cdot \cos 60^\circ - S_{CB} \cdot \cos 45^\circ - G = 0. \quad (5.2)$$

7. Розв'яжемо складену систему рівнянь відносно невідомих S_{CB} і S_{CA} ⁹, застосувавши один з можливих способів. Виразимо з рівняння (5.1) значення $(-S_{CB} \cdot \sin 45^\circ)$, а з (5.2) – $(-S_{CB} \cdot \cos 45^\circ)$:

$$-S_{CB} \cdot \sin 45^\circ = S_{CA} \cdot \sin 60^\circ \quad \text{та} \quad -S_{CB} \cdot \cos 45^\circ = G - S_{CA} \cdot \cos 60^\circ.$$

Оскільки $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ та $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то ліві частини останніх

двох рівнянь однакові; тоді, прирівнявши праві частини й виконавши очевидні математичні перетворення, матимемо:

$$S_{CA} \cdot \sin 60^\circ = G - S_{CA} \cdot \cos 60^\circ,$$

$$S_{CA} \cdot \sin 60^\circ + S_{CA} \cdot \cos 60^\circ = G,$$

$$S_{CA} \cdot (\sin 60^\circ + \cos 60^\circ) = G,$$

⁶ Див. **зауваження № 4** до **алгоритму** на с. 116.

⁷ Див. **зауваження № 5** до **алгоритму** на с. 116.

⁸ Див. **зауваження № 6** до **алгоритму** на с. 116.

⁹ Див. **зауваження № 7** до **алгоритму** на с. 117.

$$S_{CA} = \frac{G}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{G}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{G}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2 \cdot G}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2 \cdot 90}{\sqrt{3} + 1} \approx 65,88 \text{ (Н)}.$$

Маючи значення S_{CA} , з рівняння (5.1) визначаємо S_{CB} :

$$S_{CB} = \frac{-S_{CA} \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = -\frac{S_{CA} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{S_{CA} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx -65,88 \cdot \sqrt{1,5} \approx -80,69 \text{ (Н)}.$$

8. Знак **плюс** при значенні S_{CA} свідчить про те, що стержень AC дійсно є **розтягнутим**, а зусилля в ньому дорівнює приблизно **65,88 ньютонів**. Знак **мінус** при значенні S_{CB} свідчить про те, що стержень BC кронштейна є **стиснутим**, а зусилля в ньому приблизно дорівнює **80,69 ньютонів**. У теоретичній механіці це, безумовно, мають на увазі, але записують і говорять, що зусилля у стержні BC дорівнює **мінус 80,69 ньютонів**.

✎: це був аналіз отриманих результатів; до певного аналізу також може бути віднесеним питання: замість якого зі стержнів (AC чи BC) у розглядуваній споруді (конструкції) можна застосовувати трос або ланцюг? (Відповідь пропонується визначити та обґрунтувати самостійно).

Тепер перейдімо до перевірки отриманих результатів, виконавши, так звану **графоаналітичну перевірку**¹⁰.

Для цього *побудуємо* для отриманої в п'ятому пункті задачі¹¹ системи сил $\{\vec{G}, \vec{S}_{CA}, \vec{S}_{CB}\}$ *силовий многокутник*¹², який відповідно до *графічної умови рівноваги* збіжної системи сил має бути замкнутим (див. [1], § 2.5, рис. 2.12 та відповідні міркування). Оскільки

¹⁰ Див. **зауваження № 9** до **алгоритму** на с. 117.

¹¹ При графоаналітичному розв'язуванні задачі *перші п'ять пунктів алгоритму* лишаються незмінними.

¹² Див. **зауваження № 10** до **алгоритму** на с. 118.

до розглядуваного вузла C прикладена система з трьох сил, то зрозуміло, що в розв'язуваній задачі силовий багатокутник є трикутником.

Отже, зображуємо розрахункову схему (рис. 5z.2,а), зусилля \vec{S}_{AB} і \vec{S}_{BC} на якій показуємо на підставі міркувань, викладених у пункті 4 задачі, та будуємо силовий трикутник, починаючи з відомої сили \vec{G} . Від певної точки k простору, яка розташована де-небудь поряд із розрахунковою схемою, у відповідному до сили \vec{G} напрямку відкладаємо промінь \overline{kl} (рис. 5z.2,б), довжина kl якого умовно визначає модуль (величину) цієї сили (тобто $kl = G$). Через точку l проводимо пряму (a) , паралельну лінії дії якої-небудь з шуканих реакцій – наприклад, паралельно лінії дії \vec{S}_{CB} (видно, що в розглядуваній задачі пряма (a) виявиться розташованою під кутом 45° до відрізка kl); з точки l на прямій (a) повинен бути відкладений певний промінь, що визначає реакцію \vec{S}_{CB} , безпосередній напрямок якої на прямій (a) та її величина (модуль) поки що ніяк не визначені. Переходимо до третьої сили – реакції \vec{S}_{CA} . Врахуємо, що в силовому трикутнику початок третього променя мусить бути в точці, де закінчується другий промінь, а кінець третього променя мусить бути в точці k , де починається перший промінь \overline{kl} , що і визначає умову замкнутості силового трикутника. Для виконання цієї умови через точку k проводимо паралельну до лінії дії реакції \vec{S}_{CA} пряму (b) до її перетину із прямою (a) (зрозуміло, що в розглядуваній задачі пряма (b) проходить, утворюючи кут 60° з відрізком kl); позначимо точку перетину прямих (a) та (b) через j (рис. 5z.2,б).

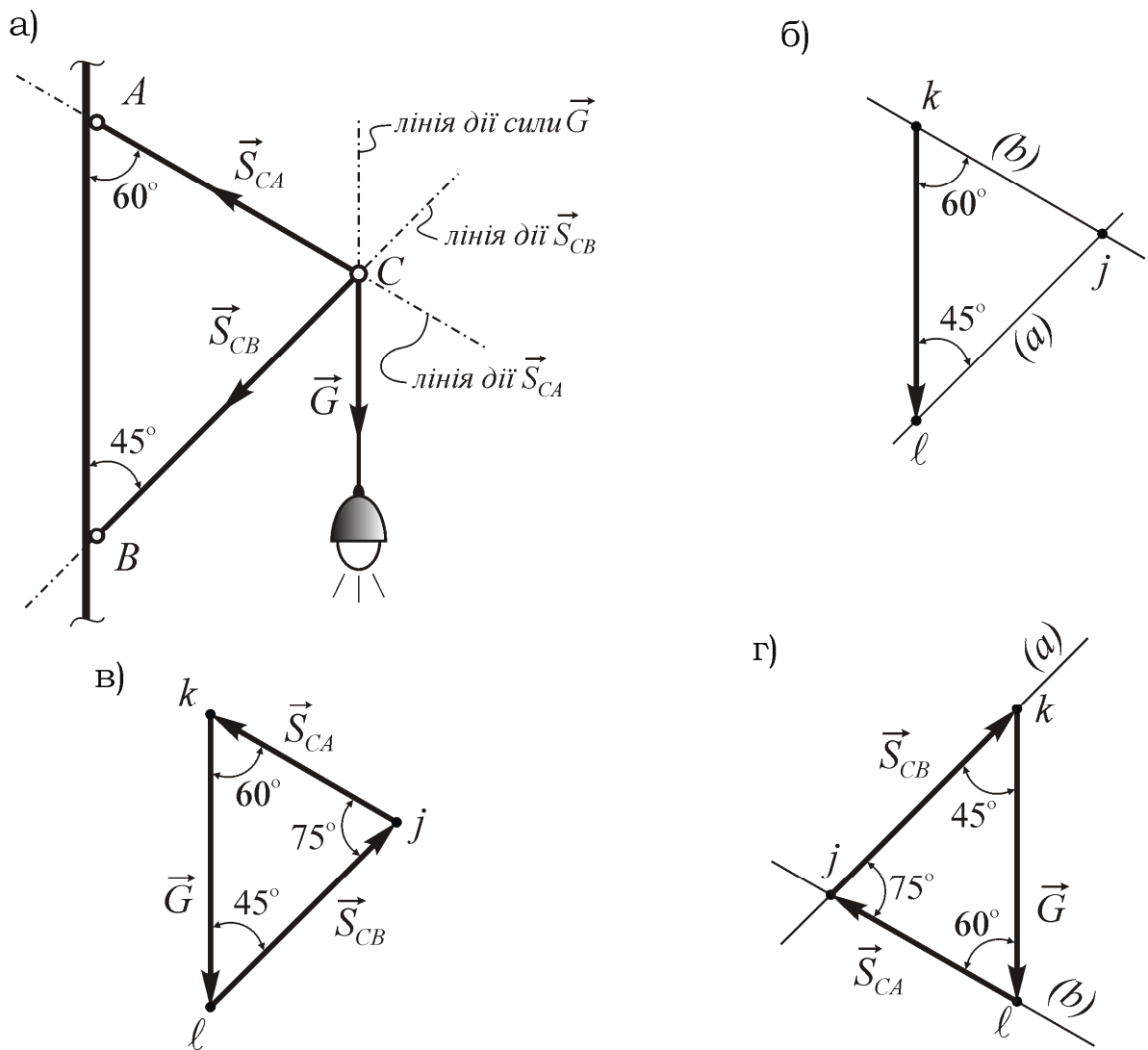


Рисунок 5z.2

Таким чином, у силовому трикутнику точка j є кінцем другого променя $\vec{l}j$ (що визначає реакцію \vec{S}_{CB}) і початком третього променя $\vec{j}k$ (що визначає реакцію \vec{S}_{CA}); зображуємо зазначені промені на рисунку 5z.2,в, з котрого видно, що по обходу контуру $kljk$ силового трикутника всі його промені мають однаковий напрямок, який визначається (задається) напрямком відомої сили \vec{G} .

❗: звертаємо увагу та зауважуємо, що при побудові силового многокутника не здійснюється ніякого паралельного перенесення діючих сил \vec{G} , \vec{S}_{CA} і \vec{S}_{CB} та не відбувається ніякої зміни точок їх прикладан-

ня – у розв’язуваній задачі всі зазначені сили безумовно прикладені до розглядуваного вузла C в одній точці¹³.

Оскільки збудований на рисунку 5z.2,в силовий трикутник одразу **визначає дійсні напрямки** шуканих сил, то з нього очевидно, що: 1) реакція \vec{S}_{CB} напрямлена до вузла C – стержень BC працює *на стиск*; 2) реакція \vec{S}_{CA} напрямлена від вузла C – стержень AC працює *на розтяг* (див. [1], § 2.7, в’язь за № 5, рис. 2.24 та відповідні міркування).

Зауваження № 5.1 (про порядок побудови силового многокутника): оскільки порядок додавання сил у силовому многокутнику довільний, то можна було б побудувати його в іншому вигляді, а саме – провести через кінець ℓ променя $\vec{k\ell}$ пряму (b), паралельну лінії дії реакції \vec{S}_{CA} , а через точку k , пряму (a), паралельну лінії дії \vec{S}_{CB} , до перетину з прямою (b) у точці j . Обходячи одержаний трикутник по контуру, починаючи з першої (відомої) сили \vec{G} , установлюємо напрямки реакцій \vec{S}_{CA} і \vec{S}_{CB} (рис. 5z.2,г). З рисунків 5z.2,в і 5z.2,г неважко бачити, що величини реакцій та їх напрями ніяк не залежать від послідовності (порядку) побудови трикутника сил.

Щоб знайти модулі (величини) S_{CB} і S_{CA} для графічно збудованого силового трикутника, виконаємо аналітичні розрахунки¹⁴. Оскільки в силовому трикутнику klj два кути його визначені однозначно, то, врахувавши, що сума трьох кутів силового трикутника (як і будь-якого іншого трикутника) дорівнює 180° , знайдімо останній його кут – $\angle ljk = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$ та застосуємо *теорему синусів*, відповідно до якої

¹³ Див. **зауваження № 11** до **алгоритму** на с. 118.

¹⁴ Див. виноску 3 до **алгоритму** на с. 117.

$$\frac{kl}{\sin 75^\circ} = \frac{jk}{\sin 45^\circ} = \frac{j\ell}{\sin 60^\circ}$$

або (врахувавши, що довжини сторін силового трикутника визначають модулі відповідних їм сил – $kl = G$, $jk = S_{CA}$ і $j\ell = S_{CB}$)

$$\frac{G}{\sin 75^\circ} = \frac{S_{CA}}{\sin 45^\circ} = \frac{S_{CB}}{\sin 60^\circ},$$

звідки

$$S_{CA} = \frac{G \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = 90 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 65,88 \text{ (H)}$$

та

$$S_{CB} = \frac{G \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 90 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 80,69 \text{ (H)}.$$

Оскільки перевірка виконується (або – оскільки знайдені обома способами шукані значення реакцій \vec{S}_{CB} і \vec{S}_{CA} збігаються), то робимо висновок: зусилля у стержнях визначені правильно.

Відповідь: $S_{CA} \approx 65,88 \text{ H}$, $S_{CB} \approx -80,69 \text{ H}$.

ЗАДАЧА № 6

Матеріальне тіло у вигляді невагомої пластини певної форми знаходиться у вертикальній площині та перебуває у рівновазі. До пластини у точці C прикладена зосереджена сила \vec{P} , лінія дії якої знаходиться в одній площині з розглядуваною пластину, а $P = 100 \text{ H}$ (рис. 6z.1).

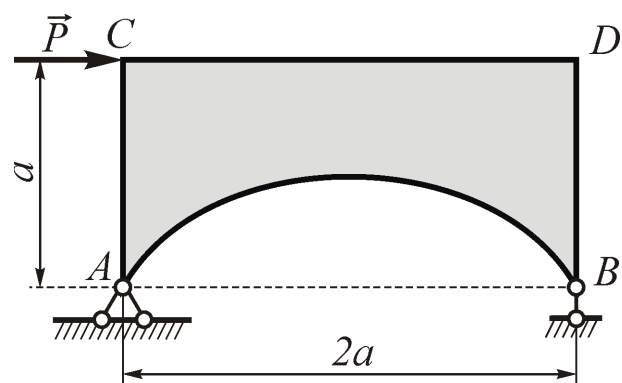


Рисунок 6z.1

Визначити реакції накладених на пластину в'язей.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

З'ясувавши умову задачі, діємо відповідно до наведеного на сторінках 115÷118 **алгоритму**.

1. Розглянемо рівновагу заданої пластини – невідомо абсолютно твердого матеріального тіла.

2. Активною силою є прикладена у точці C сила \vec{P} , лінія дії та величина якої відомі; зображуємо її на *розрахунковій схемі*.

3. Рух пластини унеможливають шарнірно-нерухома опора A та шарнірно-рухома опора B (див. [1], § 2.7, в'язі за № 6 і 7 та рис. 2.26 і 2.29), що і є тими в'язями, реакції яких необхідно визначити.

4. Застосовуємо принцип звільнення від в'язей (див. [1], § 1.3):

- відкидаємо шарнірно-рухома опору B і замінюємо її дію реакцією \vec{R}_B , котру згідно з § 2.7, рисунка 2.30 та відповідних міркувань [1] прикладаємо до пластини в опорному шарнірі (тобто – в точці B) та напрямляємо її, наприклад, угору під прямим кутом до площини, на яку спирається сама опора – див. рисунок бз.2,а;
- відкидаємо шарнірно-нерухома опору A та замінюємо її дію реакцією \vec{R}_A , що прикладена до пластини у точці A , але лінія дії котрої наперед *невідомо* (див. [1], § 2.7, рис. 2.27,а та відповідні міркування).

Для з'ясування положення цієї лінії дії врахуємо, що після звільнення від в'язей до пластини виявляється прикладеною система з трьох сил $\{\vec{P}, \vec{R}_A, \vec{R}_B\}$, лінії дій яких лежать в одній площині та не паралельні одна одній (це очевидно з розташування відомих ліній дій сил \vec{P} та \vec{R}_B); тоді згідно з теоремою про три сили (див. [1], § 2.6) сили \vec{P} , \vec{R}_A і \vec{R}_B повинні утворювати збіжну систему сил (тобто лінії дій цих сил мають перетинатися в одній точці). Відпо-

відно до цього проводимо відомі лінії дій сил \vec{P} та \vec{R}_B до їх перетину в точці D та сполучаємо її з точкою A ; відрізок AD і визначає положення лінії дії й самої реакції \vec{R}_A ; зображуємо їх на розрахунковій схемі, позначивши, наприклад, гострий кут між лінією дії реакції \vec{R}_A та вертикальною стороною AC пластини через ψ (рис. 6z.2,а).

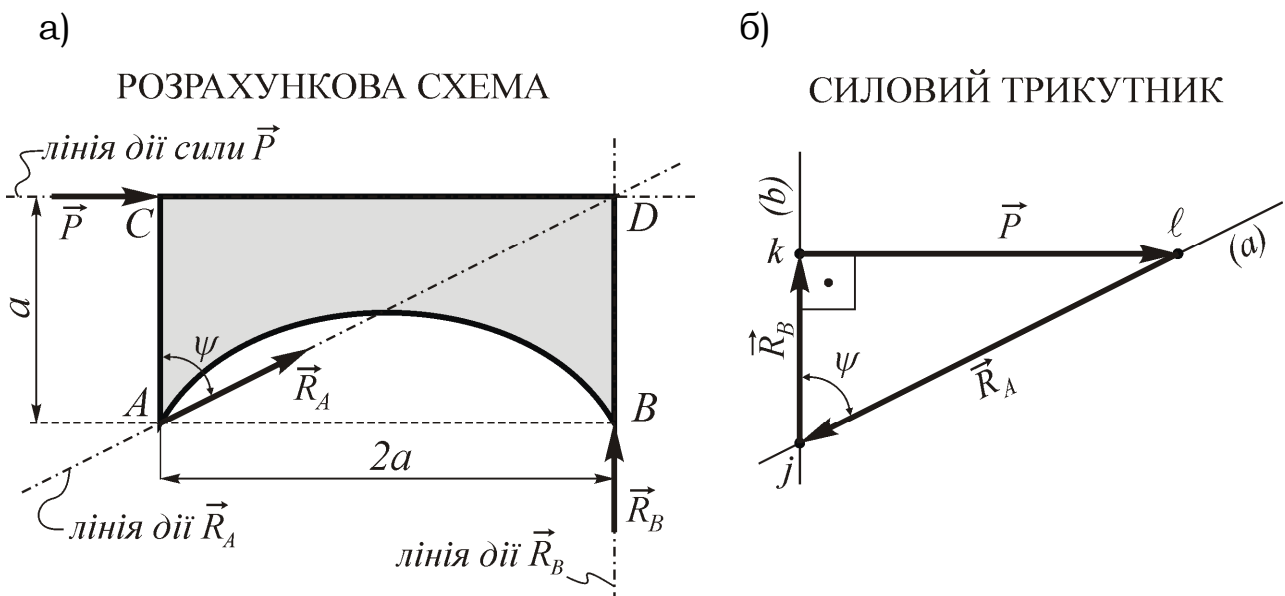


Рисунок 6z.2

Зауваження № 6.1: звісно, що реакцію \vec{R}_A можна було б зобразити, визначаючи точку її прикладання не початком стрілки, а кінцем, як це наведено на рисунках 6z.3,а та 6z.3,б; це саме стосується і реакції \vec{R}_B .

Зауваження № 6.2: при аналітичному розв'язуванні задачі певний *напрямок* реакції будь-якої розглядуваної шарнірно-рухомої або шарнірно-нерухомої опори *на її лінії дії* можна вибирати (приймати) довільно (в тому чи протилежному до нього напрямку – див. рис. 6z.2,а та 6z.3,а÷6z.3,б); при графоаналітичному (або графічному) способі розв'язуванні збудований силовий багатокутник безваріантно визначить дійсний напрямок кожної шуканої реакції.

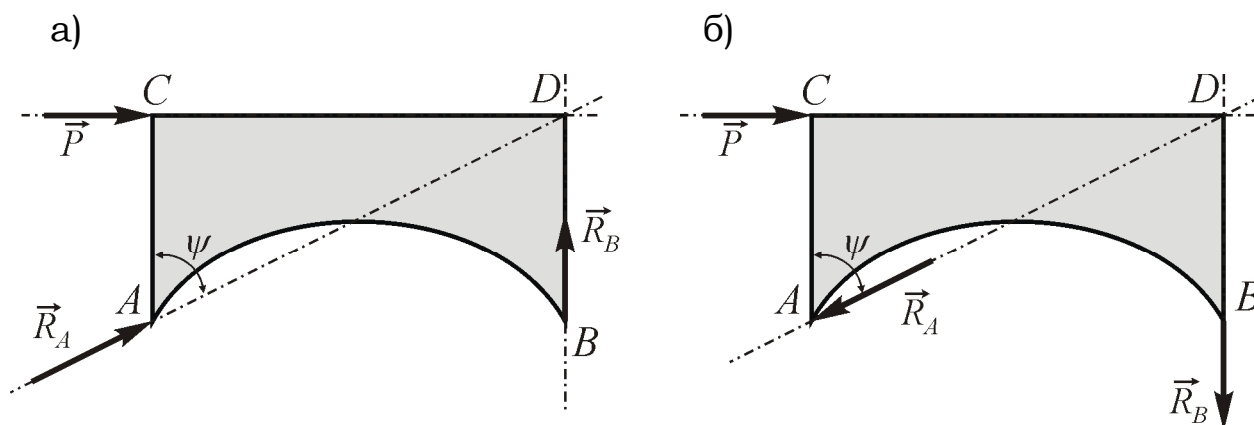


Рисунок 6z.3

5. До розглядуваної пластини прикладена плоска збіжна система сил (зрозуміло, що цей пункт алгоритму виявився формальним, оскільки в попередньому пункті з'ясована та застосована необхідна умова рівноваги пластини, яка полягає в тому, що система сил $\{\vec{P}, \vec{R}_A, \vec{R}_B\}$ має бути збіжною).

Зауваження № 6.3: досить розповсюдженою помилкою у студентів-початківців є безпідставне бажання зображувати реакції \vec{R}_A і \vec{R}_B прикладеними в одній точці D , як це наведено на рисунку 6z.4; треба твердо розуміти, що кожна сила прикладена в своїй точці прикладання, а в одній точці D лише перетинаються лінії дій цих сил.

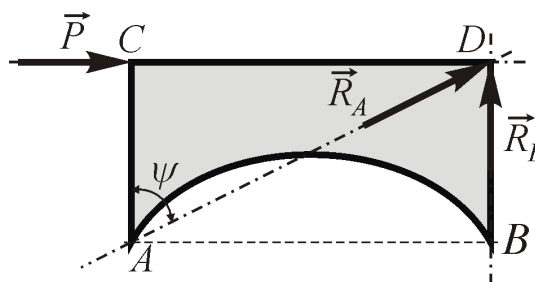


Рисунок 6z.4

6. Вибираємо на рисунку 6z.2,а традиційну систему координат¹, відповідно до [1] формули (2.15) *записуємо* аналітичні *умови рівноваги* плоскої збіжної системи сил та *складаємо*² відповідні *рівняння рівноваги*³:

¹ Див. **зауваження № 4** до **алгоритму** на с. 116.

² Див. **зауваження № 5** до **алгоритму** на с. 116.

³ Див. **зауваження № 6** до **алгоритму** на с. 116.

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad P + R_A \cdot \sin \psi = 0; \quad (6.1)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad R_A \cdot \cos \psi + R_B = 0. \quad (6.2)$$

7. Розв'язуємо складені рівняння відносно невідомих R_A і R_B ⁴, визначивши спочатку з трикутника ACD (див. рис. 6з.2,а) потрібні значення: за теоремою Піфагора

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{a^2 + 4 \cdot a^2} = \sqrt{5 \cdot a^2} = a\sqrt{5} \text{ (м)},$$

тоді

$$\cos \psi = \cos(\angle CAD) = \frac{AC}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\sin \psi = \sin(\angle CAD) = \frac{CD}{AD} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Зауваження № 6.4: інколи у студентів викликає суттєве занепокоєння факт відсутності числового значення розміру a в умові задачі. Розглядувана задача свідчить, що для розв'язування складених рівнянь (6.1) та (6.2) потрібні значення тригонометричних функцій $\sin \psi$ і $\cos \psi$, які виявилися абсолютно незалежними від значення a .

Розв'язування починаємо з рівняння (6.1), яке містить тільки одну невідому величину R_A ; отже,

$$R_A = \frac{-P}{\sin \psi} = -\frac{100}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -100 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = -50 \cdot \sqrt{5} \approx -111,80 \text{ (Н)}.$$

Маючи значення R_A , з рівняння (6.2) визначаємо R_B :

$$R_B = -R_A \cdot \cos \psi = -(-50 \cdot \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{50 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 50 \text{ (Н)}.$$

Зауваження № 6.5: звернімо увагу на те, що, розв'язуючи розглядувану задачу, нагальна потреба застосовувати для обчислень каль-

⁴ Див. **зауваження № 7** до **алгоритму** на с. 117.

кулятор виникла лише один раз – при знаходженні значення R_A . Така ситуація склалася завдяки тому, що необхідні значення $\sin\psi$, $\cos\psi$ та R_A у проведених проміжних розрахунках уживалися у вигляді ірраціональних числових виразів (а саме: $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\sin\psi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ та $R_A = -50 \cdot \sqrt{5}$), що давало можливість, використовуючи

знання елементарної арифметики, виконувати необхідні дозволені спрощення отримуваних виразів.

8. Знак **мінус** при значенні R_A свідчить про те, що в дійсності реакція \vec{R}_A **напрявлена у протилежному** до прийнятого на розрахунковій схемі на рисунку бз.2,а **напрямку** (тобто напрямлена так, як це зображено рис. бз.3,б), а величина її дорівнює приблизно **111,80 ньютонів**. У теоретичній механіці це, безумовно, мають на увазі, але записують і говорять, що реакція R_A дорівнює **мінус 111,80 ньютонів**, ураховуючи цей факт у всіх подальших обчисленнях розглядуваної задачі. Знак **плюс** при значенні R_B свідчить про те, що реакція \vec{R}_B дійсно **напрявлена в указаному** на розрахунковій схемі **напрямку**, а величина її дорівнює **50 ньютонів**.

Виконаємо графоаналітичну перевірку⁵, побудувавши для отриманої в п'ятому пункті задачі системи сил $\{\vec{P}, \vec{R}_A, \vec{R}_B\}$ ⁶ силувий трикутник⁷, який відповідно до *графічної умови рівноваги збіжної системи сил* має бути замкнутим (див. [1], § 2.5, рис. 2.12 та від-

⁵ Див. **зауваження № 9** до **алгоритму** на с. 117.

⁶ При графоаналітичному розв'язуванні задачі *перші п'ять пунктів алгоритму* лишаються незмінними.

⁷ Див. **зауваження № 10** до **алгоритму** на с. 118.

повідні міркування). Від певної точки k простору, що розташована де-небудь поряд із розрахунковою схемою, у відповідному до відомої сили \vec{P} напрямку відкладаємо промінь $\vec{k\ell}$ (рис. 6z.2,б), довжина $k\ell$ котрого *умовно* визначає модуль (величину) цієї сили (тобто $k\ell = P$). Через точку ℓ проводимо пряму (a) , паралельну лінії дії якої-небудь з шуканих реакцій – наприклад, паралельно лінії дії \vec{R}_A ; з точки ℓ на прямій (a) мусить бути відкладений певний промінь, що визначає реакцію \vec{R}_A , безпосередній напрямок якої на прямій (a) та її величина (модуль) поки що ніяк не визначені. Переходимо до третьої сили – реакції \vec{R}_B . Урахуємо, що в силовому трикутнику початок третього променя мусить бути в точці, де закінчується другий промінь, а кінець третього променя мусить бути в точці k , де починається перший промінь $\vec{k\ell}$, що і визначає *умову замкнутості силового трикутника*. Для виконання цієї умови через точку k проводимо пряму (b) , паралельну лінії дії реакції \vec{R}_B . Точку перетину прямих (a) та (b) позначимо j . Таким чином, у силовому трикутнику точка j є кінцем другого променя $\vec{\ell j}$ (що визначає реакцію \vec{R}_A) і початком третього променя \vec{jk} (що визначає реакцію \vec{R}_B) та по обходу контуру $k\ell jk$ усі промені мають однаковий напрямок, який визначився напрямком відомої сили \vec{P} (рис. 6z.2,б)⁸. З дій, проведених у процесі побудови силового трикутника, зрозуміло, що пряма (b) проходить вертикально, утворюючи прямий кут з відрізком $k\ell$, а пряма (a) – під кутом ψ до прямої (b) . Оскільки силовий трикутник одразу **визначає дійсні**

⁸ Див. **зауваження № 11** до **алгоритму** на с. 118.

напрямки шуканих сил, то з нього видно, що реакція \vec{R}_B напрямлена так, як це зображено на *розрахунковій схемі*, а реакція \vec{R}_A має напрямок, протилежний до зображеного (див. рис. 6з.2).

Знайдімо за допомогою силового трикутника модулі (величини) R_A і R_B відповідних реакцій, міркуючи таким чином: сторони силового трикутника klj паралельні відповідним сторонам трикутника CDA на *розрахунковій схемі* (див. рис. 6з.2), тоді робимо висновок про *подібність* *указаних трикутників* та, врахувавши пропорційність відповідних сторін цих подібних трикутників, отримуємо залежність

$$\frac{kl}{CD} = \frac{jk}{AC} = \frac{lj}{AD}.$$

Тому що довжини сторін силового трикутника визначають модулі відповідних їм сил – $kl = P$, $lj = R_A$ і $jk = R_B$, то остання залежність набуває вигляду

$$\frac{P}{CD} = \frac{R_B}{AC} = \frac{R_A}{AD},$$

звідки

$$R_B = \frac{P}{CD} \cdot AC = \frac{100}{2a} \cdot a = 50(H)$$

та

$$R_A = \frac{P}{CD} \cdot AD = \frac{100}{2a} \cdot a\sqrt{5} = \frac{100 \cdot \sqrt{5}}{2} = 50 \cdot \sqrt{5} \approx 111,80(H).$$

Оскільки перевірка виконується (або – оскільки знайдені обома способами шукані значення реакцій \vec{R}_A і \vec{R}_B збігаються), то робимо *висновок*: опорні реакції визначено правильно.

Відповідь: $R_A \approx -111,80 H$, $R_B = 50 H$.

ЗАДАЧА № 7

Віссю A , яка розташована горизонтально, укосина AC закріплена до нерухокої поверхні та утримується приєднанням до також горизонтальної осі C ланцюгом¹; поздовжня вісь укосини й ланцюг утворюють кути 30° і 75° з вертикаллю відповідно.

Уважаючи укосину ідеальним стержнем із шарнірами на кінцях, визначити зусилля, які виникають в укосині та ланцюзі, якщо до вузла C за допомогою троса, перекинутого через нерухомий блок K , підвішений вантаж D вагою $G = 40 \text{ kH}$, а трос утворює з поздовжньою віссю² укосини прямий кут (рис. 7z.1,а). Вагою укосини, ланцюга, троса та будь-яким тертям у блоці K знехтувати.

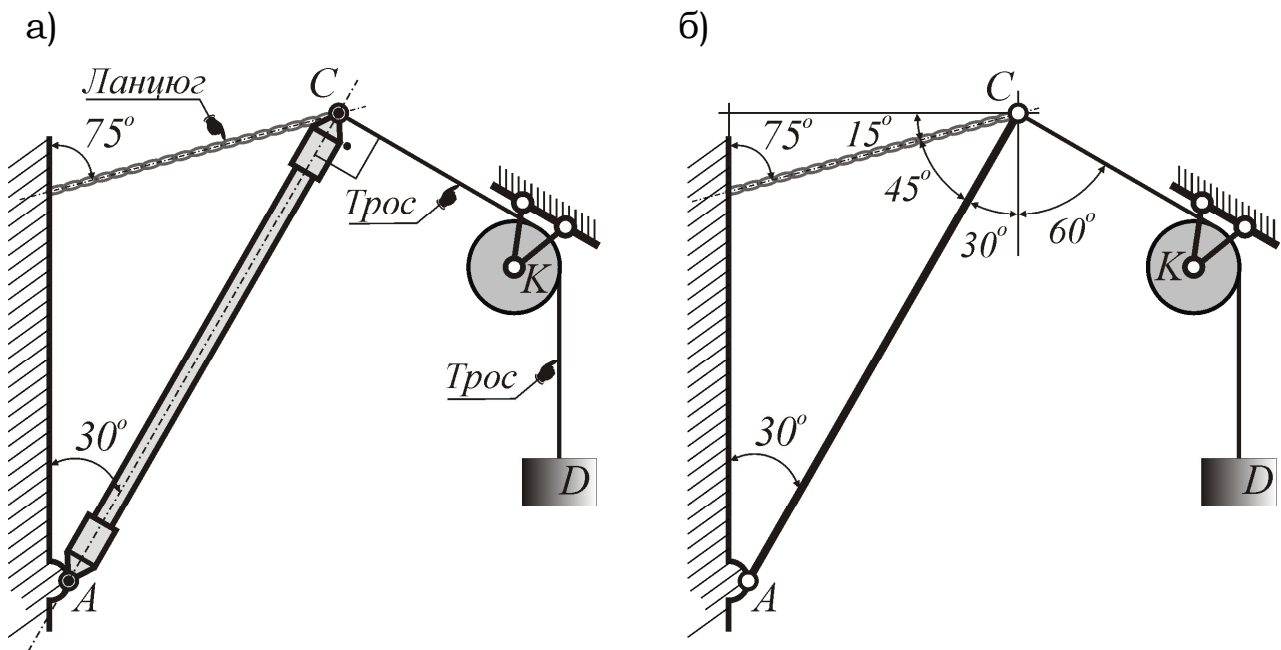


Рисунок 7z.1

¹ Див. виноску 1 до задачі 5 на с. 19.

² Необхідно чітко розуміти, що в умові задачі слово **вісь**, яке трапляється декілька разів, уживається в **двох** різних **значеннях**, а саме: **а) матеріальне тіло** певної форми і розмірів, яке є **деталлю** машин, механізмів або інших технологічних пристроїв для утримання їх конструктивних частин, котрі обертаються, та яке не передає крутного моменту (існують рухомі й нерухомі осі); **б) віртуальна геометрична пряма** лінія, яка найчастіше є віссю симетрії того чи іншого фізичного об'єкта.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Діємо відповідно до наведеного на сторінках 115÷118 **алгоритму**.

1. Розглядаємо рівновагу вузла (шарніра) C^3 .

2. Показуємо активні сили, що прикладені до шарніра C : у розв'язуваній задачі це буде одна-єдина сила \vec{G} , яка передається на прийнятий до розгляду шарнір C через трос⁴.

Зауваження № 7.1: у реальній дійсності, за умови існування **тертя** між поверхнею блока K та тросом, на шарнір C передається менша, ніж G , сила; в переважній більшості практичних інженерних задач цією різницею (яка тим більша, чим більше згадуване тертя) нехтують; визначені за такої умови значення зусиль в укосині та ланцюзі виявляються трохи *завищеними*, що забезпечує для зазначених елементів певний *запас міцності*.

3. Оскільки рух шарніра C обмежено укосиною AC , яка розглядається як ідеальний стержень із шарнірами на кінцях, та ланцюгом, то вони для шарніра C є *стержневою та гнучкою в'язями* (див. [1] § 2.7, в'язі за №№ 5 і 3).

4. Застосовуємо **аксіому 5** (див. [1] § 1.3): відкидаємо від шарніра C укосину AC , замінюючи її дію реакцією \vec{S}^5 , та ланцюг, замінюючи його дію реакцією \vec{T} – див. [1] § 2.7, рисунок 2.17 та відповідні міркування, згідно з якими реакція \vec{T} прикладена до розглядуваного шарніра в точці підвісу (тобто в розв'язуваній задачі – в точці C) та спрямована вздовж поздовжньої осі ланцюга від шарніра C .

³ Див. відповідні міркування пункту **1** задачі 5 та виноски 3 і 4 на с. 20.

⁴ Див. виноску 5 до задачі 5 на с. 21.

⁵ Див. відповідні міркування пункту **4** задачі 5 на с. 21.

Зображуємо розрахункову схему (рис. 7z.2), позначивши на ній певні необхідні кути, значення яких установлюємо на основі нескладного геометричного *аналізу* вихідного малюнка до задачі, виконаного на рисунку 7z.1,б⁶.

❏: рисунок до задачі подано на рисунку 7z.1, де є декілька матеріальних тіл: вісь A , укосина AC , ланцюг, трос, вантаж тощо. На розрахунковій схемі на рисунку 7z.2. зображено одне-єдине матеріальне тіло – вузол C , до якого прикладені відповідні діючі сили (див. також **зауваження № 2** до **алгоритму** на с. 115).

5. До розглядуваного шарніра C прикладена система сил $\{\vec{G}; \vec{S}; \vec{T}\}$, яка з геометричної точки зору є *плоскою збіжною*.

Вибираємо систему координат⁷, записуємо аналітичні умови рівноваги плоскої збіжної системи сил, які згідно з виразом (2.15) [1] мають вигляд $\sum X = 0$ і $\sum Y = 0$, та складаємо⁸ відповідні рівняння рівноваги⁹.

6. Перший варіант. Спрямуємо осі традиційно: вісь x – по горизонталі праворуч, а вісь y – по вертикалі вгору (рис. 7z.2,а).

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad -T \cdot \cos 15^\circ - S \cdot \sin 30^\circ + G \cdot \sin 60^\circ = 0; \quad (7.1)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad -T \cdot \sin 15^\circ - S \cdot \cos 30^\circ - G \cdot \cos 60^\circ = 0. \quad (7.2)$$

7. Розв'язуємо отриману систему рівнянь $(7.1) \div (7.2)$ ¹⁰.

⁶ Рисунок 7z.1,б є допоміжним; звісно, що зазначений геометричний *аналіз* можна (і необхідно) виконувати безпосередньо на вихідному малюнку до розглядуваної задачі.

⁷ Див. **зауваження № 4** до **алгоритму** на с. 116. У розв'язуваній задачі розглянемо **два варіанти** розташування координатних осей та з'ясуємо, як це вплине на самі рівняння рівноваги, що складаються в кожному варіанті, та на процес їх подальшого розв'язування.

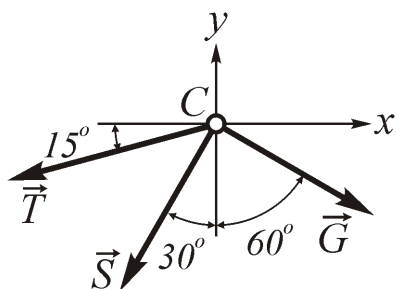
⁸ Див. **зауваження № 5** до **алгоритму** на с. 116.

⁹ Див. **зауваження № 6** до **алгоритму** на с. 116.

¹⁰ Див. **зауваження № 7** до **алгоритму** на с. 117.

а)

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА 1



б)

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА 2

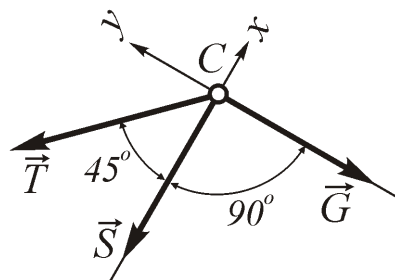


Рисунок 7z.2

Множачи рівняння (7.1) на $\sin 15^\circ$, а (7.2) на $(-\cos 15^\circ)$, дістанемо:

$$\begin{cases} -T \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ - S \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 15^\circ + G \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 15^\circ = 0; \\ T \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ + S \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 15^\circ + G \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 15^\circ = 0. \end{cases}$$

Додавши два останніх рівняння одне до одного та виконавши очевидні математичні перетворення, матимемо:

$$\begin{aligned} & S \cdot (\cos 30^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 15^\circ) + \\ & + G \cdot (\sin 60^\circ \cdot \sin 15^\circ + \cos 60^\circ \cdot \cos 15^\circ) = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Далі врахуємо, що оскільки

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

та

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

то

$$\sin 30^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot [\cos(30^\circ - 15^\circ) - \cos(30^\circ + 15^\circ)] = \frac{1}{2} \cdot (\cos 15^\circ - \cos 45^\circ),$$

$$\sin 60^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot [\cos(60^\circ - 15^\circ) - \cos(60^\circ + 15^\circ)] = \frac{1}{2} \cdot (\cos 45^\circ - \cos 75^\circ),$$

$$\cos 30^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot [\cos(30^\circ - 15^\circ) + \cos(30^\circ + 15^\circ)] = \frac{1}{2} \cdot (\cos 15^\circ + \cos 45^\circ),$$

$$\cos 60^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot [\cos(60^\circ - 15^\circ) + \cos(60^\circ + 15^\circ)] = \frac{1}{2} \cdot (\cos 45^\circ + \cos 75^\circ).$$

Підставивши ці знайдені значення у вираз (7.3), отримаємо:

$$S \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (\cos 15^\circ + \cos 45^\circ) - \frac{1}{2} \cdot (\cos 15^\circ - \cos 45^\circ) \right] + \\ + G \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (\cos 45^\circ - \cos 75^\circ) + \frac{1}{2} \cdot (\cos 45^\circ + \cos 75^\circ) \right] = 0$$

або

$$S \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (\cos 15^\circ + \cos 45^\circ - \cos 15^\circ + \cos 45^\circ) \right] + \\ + G \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (\cos 45^\circ - \cos 75^\circ + \cos 45^\circ + \cos 75^\circ) \right] = 0.$$

Виконавши відповідні обчислення, матимемо:

$$S \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \cos 45^\circ) \right] + G \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \cos 45^\circ) \right] = 0$$

або

$$S \cdot \cos 45^\circ + G \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки, скоротивши на $\cos 45^\circ$, приходимо до достатньо неочікуваної для проведеного обсягу математичних дій відповіді

$$S = -G = -40(kH).$$

Підставляючи знайдене значення $S = -G$ у рівняння (7.1), отримаємо:

$$-T \cdot \cos 15^\circ - (-G) \cdot \sin 30^\circ + G \cdot \sin 60^\circ = 0$$

або

$$-T \cdot \cos 15^\circ + G \cdot (\sin 60^\circ + \sin 30^\circ) = 0. \quad (7.4)$$

Оскільки ж

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

то

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ + \sin 30^\circ &= 2 \cdot \sin \frac{60^\circ + 30^\circ}{2} \cdot \cos \frac{60^\circ - 30^\circ}{2} = 2 \cdot \sin \frac{90^\circ}{2} \cdot \cos \frac{30^\circ}{2} = \\ &= 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ, \end{aligned}$$

з урахуванням чого рівняння (7.4) набуває вигляду

$$-T \cdot \cos 15^\circ + G \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ = 0.$$

Виносимо спільний множник $\cos 15^\circ$ за дужки

$$(-T + 2 \cdot G \cdot \sin 45^\circ) \cdot \cos 15^\circ = 0$$

та враховуємо, що добуток двох значень дорівнює нулеві лише у випадкові, коли один із множників рівний нулю; оскільки ж в останньому виразі $\cos 15^\circ \neq 0$, то

$$-T + 2 \cdot G \cdot \sin 45^\circ = 0,$$

звідки

$$T = 2 \cdot G \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 40 \cdot \sqrt{2} \approx 56,57 \text{ (кН)}.$$

6. Другий варіант. Розташуємо, наприклад, вісь x на лінії дії реакції \vec{S} , а вісь y – під прямим кутом до неї (рис. 7z.2,б)¹¹ та складімо відповідні рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad -T \cdot \cos 45^\circ - S = 0; \quad (7.5)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad T \cdot \sin 45^\circ - G = 0. \quad (7.6)$$

7. Розв'язування починаємо з рівняння (7.6), яке містить тільки одну невідому величину T ; отже,

$$T = \frac{G}{\sin 45^\circ} = \frac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{40 \cdot 2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{80 \cdot \sqrt{2}}{2} = 40 \cdot \sqrt{2} \approx 56,57 \text{ (кН)}.$$

Використовуючи значення $T = 40 \cdot \sqrt{2}$, з рівняння (7.5) знаходимо S :

¹¹ У цьому разі невідома реакція \vec{S} буде проектуватися на вісь x у дійсну (натуральну) величину, а на вісь y проектуватися не буде.

$$S = -T \cdot \cos 45^\circ = -(40 \cdot \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{40 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = -\frac{40 \cdot 2}{2} = -40(\text{kH}).$$

Безсумнівно, що у другому розглянутому варіанті рівняння рівноваги та особливо їх подальше розв'язування виявилися незрівнянно простішими.

8. Знак **мінус** при значенні S свідчить про те, що укосина AC є **стиснутою**, а знак **плюс** при значенні T – про те, що ланцюг, дійсно, є **розтягнутим**.

Зауваження № 7.2: зусилля у ланцюзі ні за яких умов не може бути зі знаком мінус, оскільки це свідчило б про протилежний до вказаного на розрахунковій схемі на рисунку 7z.2 напрямок реакції \vec{T} , що означало б роботу ланцюга (гнучкої в'язі) на стиск, чого не може бути ніколи через відповідну фізичну властивість цієї в'язі.

Зауваження № 7.3: у разі, коли за певних умов (навчальних чи виробничих) усе-таки виникає ситуація, коли у результаті проведених розрахунків реакція гнучкої в'язі виявляється від'ємною, то це означає, що в означених умовах застосування гнучкої в'язі неможливе та необхідно застосовувати або стержневу в'язь, або іншу конструктивну схему.

Виконаємо графоаналітичну перевірку¹².

Для цього побудуємо для отриманої в п'ятому пункті задачі системи сил $\{\vec{G}; \vec{S}; \vec{T}\}$ ¹³ силовий трикутник¹⁴, який відповідно до графічної умови рівноваги збіжної системи сил має бути замкнутим (див. [1], § 2.5, рис. 2.12 та відповідні міркування). Від певної точки k простору, яка розташована де-небудь поряд із розрахунковою схемою (рис. 7z.3,а), у відповідному до відомої сили \vec{G} нап-

¹² Див. **зауваження № 9** до **алгоритму** на с. 117.

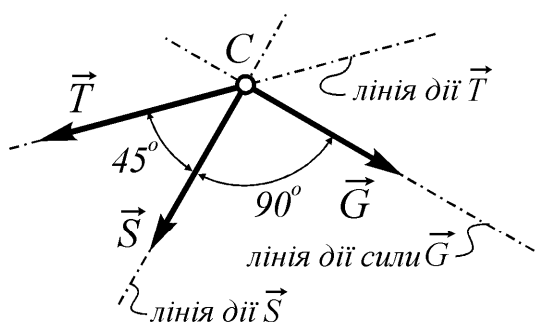
¹³ При графоаналітичному розв'язуванні задачі *перші п'ять пунктів алгоритму* лишаються незмінними.

¹⁴ Див. **зауваження № 10** до **алгоритму** на с. 118.

рямку відкладаємо промінь $\vec{k\ell}$ (рис. 7z.3,б), довжина $k\ell$ котрого умовно визначає модуль (величину) цієї сили (тобто $k\ell = G$). Через точку ℓ проводимо пряму (а), паралельну лінії дії якої-небудь з шуканих реакцій, наприклад, паралельно лінії дії \vec{T} ; з точки ℓ на прямій (а) мусить бути відкладений певний промінь, що визначає реакцію \vec{T} , безпосередній напрямок якої на прямій (а) та її величина (модуль) поки що ніяк не визначені. Переходимо до третьої

а)

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА



б)

СИЛОВИЙ ТРИКУТНИК

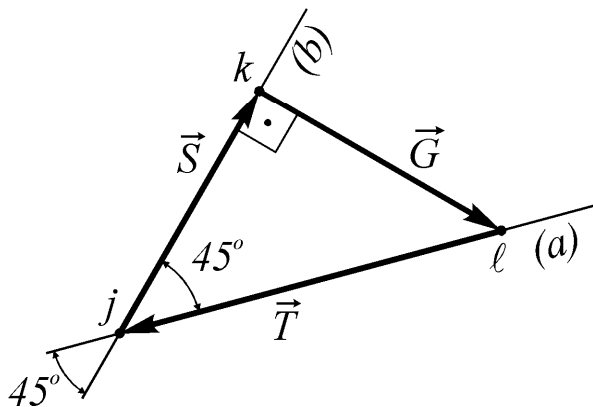


Рисунок 7z.3

сили – реакції \vec{S} . Урахуємо, що в силовому трикутнику початок третього променя повинен бути в точці, де закінчується другий промінь, а кінець третього променя – в точці k , де починається перший промінь $\vec{k\ell}$, що і визначає умову замкнутості силового трикутника. Для виконання цієї умови через точку k проводимо пряму (b), паралельну лінії дії реакції \vec{S} . Точку перетину прямих (а) та (b) позначимо j .

Таким чином, у силовому

трикутнику точка j є кінцем другого променя $\vec{\ell j}$ (що визначає реакцію \vec{T}) і початком третього променя $\vec{j k}$ (що визначає реакцію

\vec{S}) та по обходу контуру $kljk$ усі промені мають однаковий напрямок, який визначився напрямком відомої сили \vec{G} (рис. 7z.3,б)¹⁵. Оскільки силовий трикутник одразу **визначає дійсні напрямки** шуканих сил, то напрямки відповідних променів силового трикутника свідчать про те, що реакція \vec{T} напрямлена так, як це зображено на *розрахунковій схемі*, а реакція \vec{S} має напрямок, протилежний до зображеного.

Знайдімо за допомогою силового трикутника модулі (величини) T і S відповідних реакцій. З нескладного аналізу відповідних кутів графічних об'єктів на рисунку 7z.3 зрозуміло, що силовий трикутник klj є прямокутним та рівнобедреним. Тому (без будь-яких обчислень)

$$S = G = 40 \text{ кН}$$

та (відповідно до елементарної геометрії)

$$\sin(\angle kjl) = \sin 45^\circ = \frac{kl}{jl}.$$

Оскільки ж довжини сторін силового трикутника визначають модулі відповідних їм сил – $kl = G$ і $lj = T$, то

$$\sin 45^\circ = \frac{G}{T},$$

звідки, врахувавши, що $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$T = \frac{G}{\sin 45^\circ} = \frac{40}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 40 \cdot \sqrt{2} \approx 56,57 \text{ (кН)}.$$

¹⁵ Див. **зауваження № 11** до **алгоритму** на с. 118.

Оскільки перевірка виконується (або – оскільки визначені обома способами шукані значення реакцій \vec{S} і \vec{T} збігаються), то робимо висновок: опорні реакції визначені правильно.

Відповідь: $S = 40 \text{ kH}$, $T \approx 56,57 \text{ kH}$.

ЗАДАЧА № 8

Тонкий брус $СК$ своїм нижнім кінцем закріплений до нерухомого кронштейна горизонтальним болтом $С$. Брус у точці $В$ підтримується у вертикальному положенні горизонтальною ділянкою троса, який перекинута через шків і закріплений кінцем D до нерухомої поверхні. На кінець K бруса під кутом 30° до горизонту діє сила $F = 320 \text{ H}$ (рис. 8z.1).

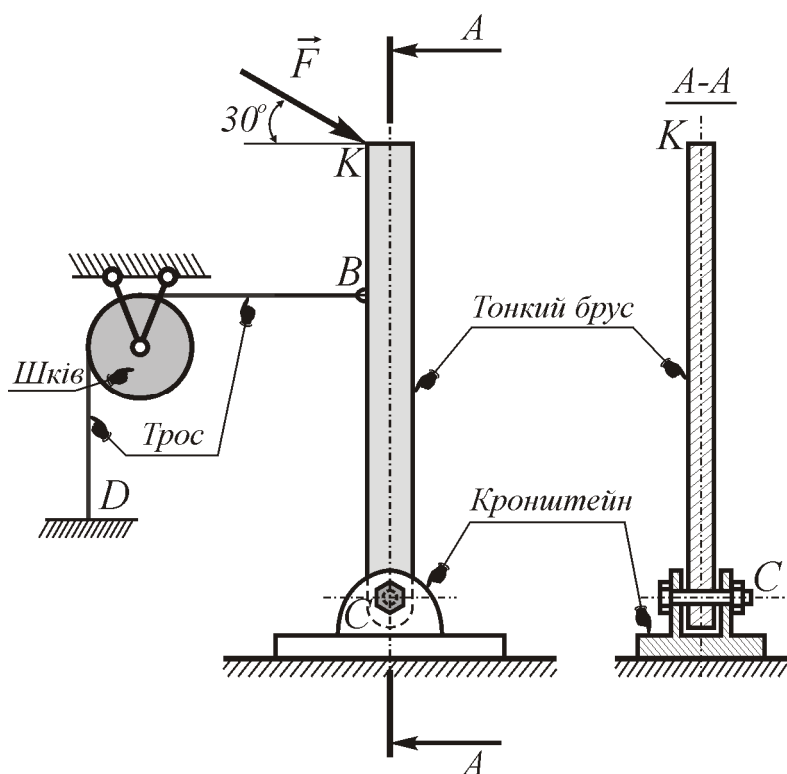


Рисунок 8z.1. Робоче креслення

Нехтуючи вагою бруса та троса, визначити зусилля у тросі та тиск бруса на кронштейн, якщо $CB = 2BK$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

✎: пропонується розв'язати задачу самостійно та перевірити власний розв'язок із наведеним нижче.

1. Розглянемо рівновагу бруса $СК$.

2. До розглядуваного бруса у точці K його прикладена одна активна сила – \vec{F} , лінія дії та величина якої відомі.

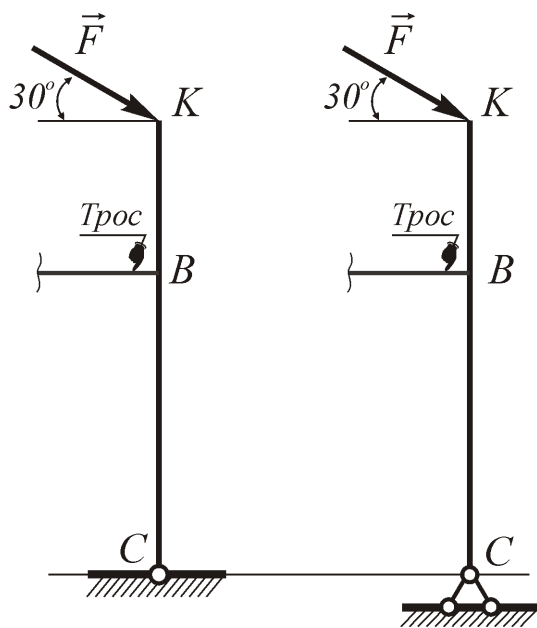


Рисунок 8z.2.

Схематичне зображення

в'язь за № 4, рис. 2.18÷2.20), або як один з можливих конструктивних варіантів шарнірно-нерухомої опори (див. [1] § 2.7, в'язь за № 6 та рис. 2.25÷2.26); через це схематичне зображення розглядуваної в'язі може мати будь-який з двох наведених на рисунку 8z.2 виглядів.

4. Застосовуємо принцип звільнення від в'язей:

- відкидаємо від бруса гнучку в'язь, а замість неї прикладаємо у точці B реакцію \vec{T} , направляючи її вздовж поздовжньої осі горизонтальної ділянки троса, яка безпосередньо обмежує рух розглядуваного бруса (рис. 8z.3,а);
- звільняємо брус CK від циліндричного шарніра C та замінюємо його дію реакцію \vec{R}_C , що прикладена у точці C , але лінія дії якої наперед невідома (див. [1], § 2.7, рис. 2.27,а та відповідні міркування).

3. В'язями для розглядуваного бруса є:

- а. гнучка в'язь у вигляді троса, який приєднаний до бруса у точці B (див. [1] § 2.7, в'язь за № 3, рис. 2.17);
- б. горизонтальний болт C , за допомогою якого брус прикріплений до нерухомого кронштейна.

Зауваження № 8.1: з точки зору теоретичної механіки останню зазначену в'язь можна розглядати або як нерухомий циліндричний шарнір (див. [1] § 2.7,

Далі міркуємо так: брус знаходиться у рівновазі під дією сил \vec{F} (для якої відомі й точка прикладання, й лінія дії, й модуль), \vec{T} (для якої відомі точка прикладання та лінія дії) і \vec{R}_C (для якої відома тільки точка прикладання); оскільки ці сили утворюють зрівноважену плоску непаралельну (це видно з розташування відомих ліній дій сил \vec{F} та \vec{T}) систему з трьох сил, то згідно з теоремою про рівновагу матеріального тіла під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині (див. [1] § 2.6), лінії дій сил \vec{F} , \vec{T} і \vec{R}_C мають перетинатися в одній точці; знаходимо точку перетину відомих ліній дій сил \vec{F} і \vec{T} , яку позначимо, наприклад, A ; таким чином, лінія дії реакції \vec{R}_C проходить через точку C та точку A ; зображуємо на розрахунковій схемі лінію дії реакції \vec{R}_C і саму реакцію; позначаємо також кут γ – див. рисунок 8z.3,а.

5. Система сил $\{\vec{F}; \vec{T}; \vec{R}_C\}$ є плоскою збіжною¹.

6. Записуємо умови та складаємо відповідні рівняння рівноваги отриманої плоскої збіжної системи сил:

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad F \cdot \cos 30^\circ - T + R_C \cdot \cos \gamma = 0; \quad (8.1)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad -F \cdot \sin 30^\circ + R_C \cdot \sin \gamma = 0. \quad (8.2)$$

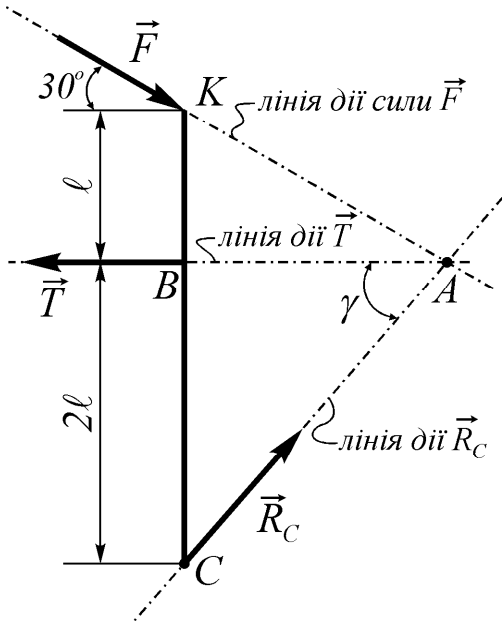
7. Для розв'язування складених рівнянь необхідно мати значення $\cos \gamma$ та $\sin \gamma$. Знайдемо їх; для цього для визначеності позначимо на розрахунковій схемі на рисунку 8z.3,а $KB = \ell$, тоді відповідно до умови задачі $CB = 2BK = 2\ell$. З трикутника CBA :

¹ П'ятий пункт **алгоритму** розв'язування розглядуваної задачі перетворився у просту формальність, оскільки в попередньому пункті з'ясована та застосована необхідна умова рівноваги бруса, яка полягає в тому, що прикладена до нього система сил обов'язково має бути збіжною.

$$\cos \gamma = \frac{AB}{AC} \quad \text{та} \quad \sin \gamma = \frac{CB}{AC}.$$

а)

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА



б)

СИЛОВИЙ ТРИКУТНИК

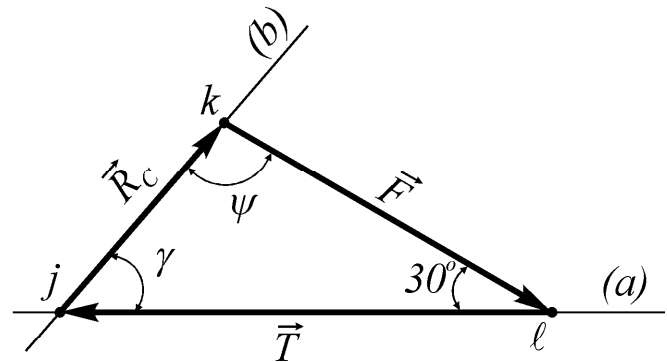


Рисунок 8z.3

Для знаходження віддалі AB розглянемо трикутник ABK . Очевидно, що $\angle BAK = 30^\circ$; через це $AK = 2BK = 2l$ (тут застосована одна з найпростіших теорем елементарної геометрії: катет, що лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи; тобто в розглядуваному випадку – $BK = \frac{AK}{2}$); тоді та за теоремою Піфагора з трикутника ABK

$$AB = \sqrt{AK^2 - BK^2} = \sqrt{(2l)^2 - l^2} = \sqrt{4l^2 - l^2} = \sqrt{3l^2} = l \cdot \sqrt{3} \text{ (м)},$$

а з трикутника CBA

$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{(l \cdot \sqrt{3})^2 + (2l)^2} = \sqrt{3l^2 + 4l^2} = \sqrt{7l^2} = l \cdot \sqrt{7} \text{ (м)}.$$

Таким чином,

$$\cos \gamma = \frac{AB}{AC} = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{\ell \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \quad \text{та} \quad \sin \gamma = \frac{CB}{AC} = \frac{2\ell}{\ell \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}^2.$$

З рівняння (8.2), яке містить тільки одну невідому величину, знаходимо

$$R_C = \frac{F \cdot \sin 30^\circ}{\sin \gamma} = \frac{320 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{7}}} = 80 \cdot \sqrt{7} \approx 211,66 \text{ (H)}.$$

Тоді з рівняння (8.1)

$$\begin{aligned} T &= F \cdot \cos 30^\circ + R_C \cdot \cos \gamma = 320 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 80\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 160 \cdot \sqrt{3} + 80 \cdot \sqrt{3} = \\ &= 240 \cdot \sqrt{3} \approx 415,69 \text{ (H)}^3. \end{aligned}$$

8. Знаки **плюс** в обох відповідях свідчать про те, що обидві знайдені реакції **напрявлені в указаних** на розрахунковій схемі **напрямок**.

Виконаємо графоаналітичну перевірку, побудувавши для отриманої в п'ятому пункті задачі системи сил $\{\vec{F}; \vec{T}; \vec{R}_C\}$ силувий трикутник, який мусить бути замкнутим. Від певної точки k простору, яка розташована де-небудь поряд із розрахунковою схемою, у відповідному до відомої сили \vec{F} напрямку відкладаємо промінь \vec{kl} (рис. 8z.3,б), довжина kl якого *умовно* визначає модуль (величину) цієї сили (тобто $kl = F$). Через точку l проводимо пряму (a) , паралельну лінії дії реакції \vec{T} ; з точки l на прямій (a) мусить бути відкладений певний промінь, що визначає реакцію \vec{T} , безпосередній напрямок якої на прямій (a) та її величина (модуль) поки що ніяк не визначені. Переходимо до третьої сили – реакції \vec{R}_C , яка в

² Див. **зауваження № 6.4** до задачі 6 на с. 31.

³ Див. також **зауваження № 6.5** до задачі 6 на с. 31-32.

силовому трикутнику визначається третім променем, початок якого повинен бути в точці, де закінчується другий промінь, а кінець – у точці k , де починається перший промінь $\overline{k\ell}$, що і визначає умову замкнутості силового трикутника. Для виконання цієї умови через точку k проводимо пряму (b) , паралельну лінії дії реакції \vec{R}_C . Точку перетину прямих (a) та (b) позначимо j . Тоді в силовому трикутнику точка j є кінцем другого променя $\overline{\ell j}$ (який визначає реакцію \vec{T}) і початком третього променя \overline{jk} (який визначає реакцію \vec{R}_C) та по обходу контуру $kljk$ усі промені мають однаковий напрямок, який визначився напрямком відомої сили \vec{F} . Напрямки відповідних променів силового трикутника свідчать про те, що обидві реакції (\vec{T} і \vec{R}_C) напрямлені так, як це зображено на *розрахунковій схемі*.

За збудованим силовим трикутником знайдемо модулі (величини) T і R_C шуканих реакцій. З аналізу розрахункової схеми та силового трикутника на рисунку 8z.3 очевидно, що $\angle klj = 30^\circ$ та $\angle kj\ell = \gamma$. Далі врахуємо те, що сума трьох кутів силового трикутника (як і будь-якого іншого трикутника) дорівнює 180° ; тому $\angle jkl = \psi = 180^\circ - (30^\circ + \gamma)$. Оскільки в силовому трикутнику всі його кути певним чином визначені, то можна застосувати *теорему синусів*, відповідно до якої

$$\frac{kl}{\sin \gamma} = \frac{jk}{\sin 30^\circ} = \frac{j\ell}{\sin \psi},$$

або (врахувавши, що довжини сторін силового трикутника визначають модулі відповідних їм сил – $kl = F$, $jk = R_C$ і $j\ell = T$)

$$\frac{F}{\sin \gamma} = \frac{R_C}{\sin 30^\circ} = \frac{T}{\sin \psi},$$

звідки

$$R_C = \frac{F \cdot \sin 30^\circ}{\sin \gamma} \quad \text{та} \quad T = \frac{F \cdot \sin \psi}{\sin \gamma}.$$

Знайдімо значення $\sin \psi$: оскільки $\psi = 180^\circ - (30^\circ + \gamma)$, то

$$\sin \psi = \sin[180^\circ - (30^\circ + \gamma)].$$

Як відомо з елементарної тригонометрії,

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

та

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha,$$

з урахуванням чого

$$\sin[180^\circ - (30^\circ + \gamma)] = \sin(30^\circ + \gamma),$$

а

$$\sin(30^\circ + \gamma) = \sin 30^\circ \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cos 30^\circ.$$

Підставляючи знайдені раніше значення $\sin \gamma$ та $\cos \gamma$, дістанемо:

$$\sin \psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{7}} + \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{7}}.$$

Тоді остаточно

$$R_C = \frac{F \cdot \sin 30^\circ}{\sin \gamma} = \frac{320 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{7}}} = 80 \cdot \sqrt{7} \approx 211,66 \text{ (H)},$$

$$T = \frac{F \cdot \sin \psi}{\sin \gamma} = \frac{320 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{7}}}{\frac{2}{\sqrt{7}}} = \frac{320 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}} = 240 \cdot \sqrt{3} \approx 415,69 \text{ (H)}.$$

Оскільки перевірка виконується (або – оскільки визначені обома способами значення реакцій \vec{T} і \vec{R}_C збігаються), то можна зробити *висновок*, що опорні реакції визначені правильно.

Знайдена реакція \vec{T} однозначно визначає шукане **зусилля у тросі**. **Тиск бруса на кронштейн** визначимо за **аксіомою 4** (див. [1] § 1.3): зазначений тиск, який *умовно позначимо* $\vec{R}_C^{np\delta}$, рівний за величиною та протилежний за напрямком знайденій реакції \vec{R}_C ; тоді

$$\vec{R}_C^{np\delta} = -\vec{R}_C \quad \text{та} \quad R_C^{np\delta} = R_C \approx 211,66 \text{ Н}.$$

Відповідь: $T \approx 415,69 \text{ Н}$, $R_C^{np\delta} \approx 211,66 \text{ Н}$.

ЗАДАЧА № 9

Між двома стовпами у точках A і B , які знаходяться по горизонталі на одному рівні, підвішений дріт, довжина якого L .

Знайти **натяг**¹ дроту, якщо рівно посередині його сів птах вагою $G = 20 \text{ Н}$; уважати, що ділянки дроту, які розташовані ліворуч та праворуч від птаха, прямолінійні та утворюють однакові кути $\alpha = 5^\circ$ з горизонтом (рис. 9z.1).

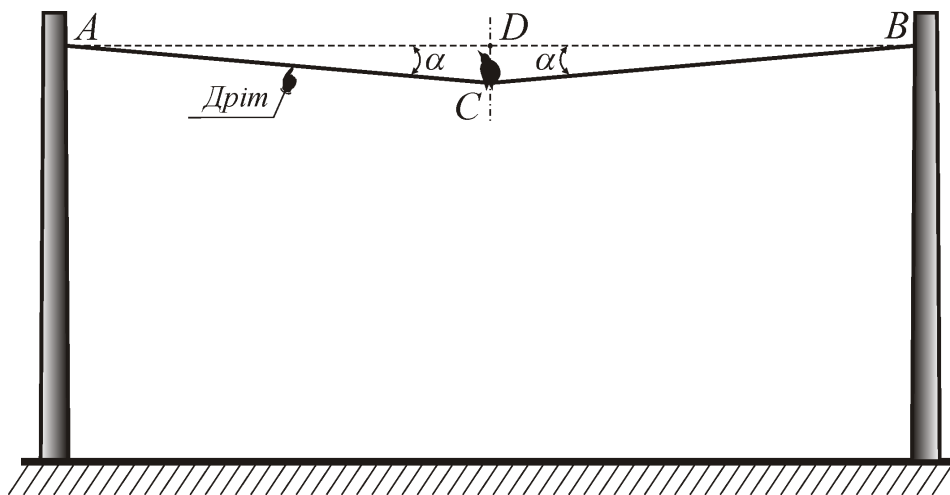


Рисунок 9z.1

¹ У цьому разі під терміном **натяг** необхідно розуміти величину **зусилля у дроті**.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

✎: пропонується розв'язати задачу самостійно та перевірити власний розв'язок із наведеним.

1. Розглянемо рівновагу тієї ділянки дроту, на яку сів птах, уважаючи довжину зазначеної ділянки настільки незначною, що розмірами її можна знехтувати; тобто, по суті, будемо розглядати рівновагу точки C , яка знаходиться рівно посередині дроту, розділяючи його на прямолінійні ділянки AC і BC ².

2. Показуємо на розрахунковій схемі на рисунку 9z.2,а активну силу тяжіння \vec{G} , що діє на прийняту до розгляду точку C .

3. Оскільки рух точки C унеможливають ділянки AC і BC дроту, то вони для точки C є гнучкими в'язями (див. [1] § 2.7, в'язь за № 3).

4. Застосовуємо **аксіому 5** (див. [1] § 1.3): відкидаємо від точки C ділянки AC і BC дроту, замінюючи їх дії реакціями \vec{T}_{CA} та \vec{T}_{CB} (див. [1] § 2.7, рис. 2.17), які й зображуємо на розрахунковій схемі.

5. До вибраної точки C прикладена система сил $\{\vec{G}; \vec{T}_{CA}; \vec{T}_{CB}\}$, яка з геометричної точки зору є *плоскою збіжною*.

6. Записуємо умови та складаємо відповідні рівняння рівноваги отриманої плоскої збіжної системи сил:

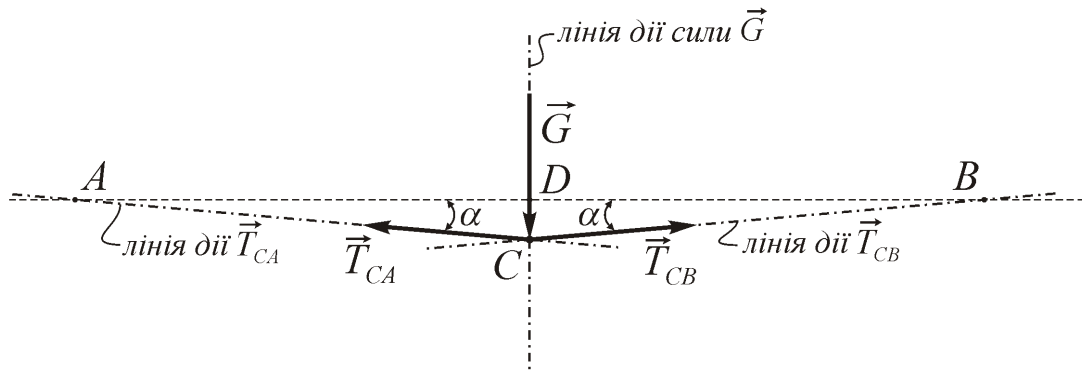
$$\sum X = 0 \quad \left| \quad -T_{CA} \cdot \cos \alpha + T_{CB} \cdot \cos \alpha = 0; \quad (9.1)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad -G + T_{CA} \cdot \sin \alpha + T_{CB} \cdot \sin \alpha = 0. \quad (9.2)$$

² Постає абсолютно слушне запитання, чому треба розглядати рівновагу саме означеної ділянки дроту, а не, наприклад, половини AC (або BC) дроту або всього дроту ACB ? Уміння правильно вибирати до розгляду те чи інше матеріальне тіло в конкретній задачі (або її частини) – це одна з необхідних умов, яка забезпечує раціональний шлях розв'язання задач статички (зазначене вміння визначається досвідом, який набувають у процесі розв'язування достатньої кількості задач; див. також, наприклад, відповідні міркування пункту **1** задачі 5 на с. 20).

а)

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА



б)

СИЛОВИЙ ТРИКУТНИК

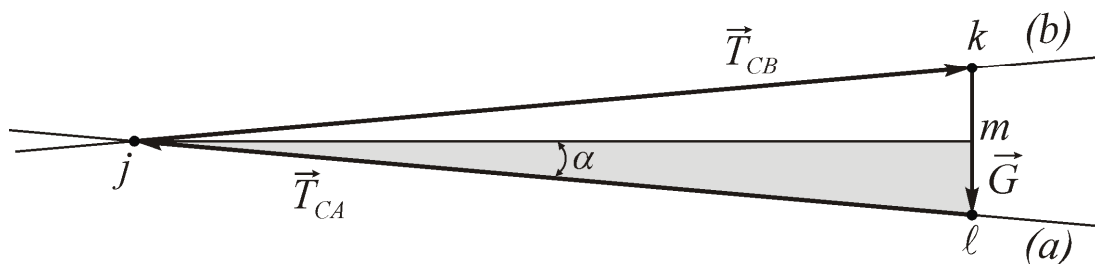


Рисунок 9z.2

7. Розв'язуємо складену систему рівнянь. З рівняння (9.1), скоротивши на $\cos \alpha$, маємо

$$T_{CA} = T_{CB};$$

тобто реакції обох ділянок тросу однакові.

Підставляємо отриману рівність у рівняння (9.2):

$$-G + T_{CB} \cdot \sin \alpha + T_{CB} \cdot \sin \alpha = 0 \quad \text{або} \quad 2T_{CB} \cdot \sin \alpha = G,$$

звідки

$$T_{CB} = \frac{G}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{20}{2 \cdot \sin 5^\circ} = \frac{10}{\sin 5^\circ} \approx \frac{10}{0,0872} \approx 114,74(\text{H}).$$

Тоді остаточно

$$T_{CA} = T_{CB} \approx 114,74 \text{ Н}^3.$$

³ Див. зауваження № 7.2 до задачі 7 на с. 41.

8. Виконаємо графоаналітичну перевірку – побудуємо для отриманої в п'ятому пункті задачі системи сил $\{\vec{G}; \vec{T}_{CA}; \vec{T}_{CB}\}$ силувий трикутник, який має бути замкнутим. Від певної точки k простору, яка розташована де-небудь поряд із розрахунковою схемою, у відповідному до відомої сили \vec{G} напрямку відкладаємо промінь $\vec{k\ell}$ (рис. 9z.2,б), довжина $k\ell$ якого *умовно* визначає модуль (величину) цієї сили (тобто $k\ell = G$). Через точку ℓ проводимо пряму (a) , паралельну лінії дії реакції \vec{T}_{CA} ; з точки ℓ на прямій (a) мусить бути відкладений певний промінь, що визначає реакцію \vec{T}_{CA} , безпосередній напрямок якої на прямій (a) та її величина (модуль) поки що ніяк не визначені. Переходимо до третьої сили – реакції \vec{T}_{CB} , що в силівому трикутнику визначається третім променем, початок котрого повинен бути в точці, де закінчується другий промінь, а кінець – у точці k (де починається перший промінь $\vec{k\ell}$), що і визначає *умову замкнутості силівого трикутника*. Для виконання цієї умови через точку k проводимо пряму (b) , паралельну лінії дії реакції \vec{T}_{CB} . Точку перетину прямих (a) та (b) позначимо j , яка в силівому трикутнику і є кінцем другого променя $\vec{\ell j}$ й початком третього променя \vec{jk} , що визначають реакції \vec{T}_{CA} і \vec{T}_{CB} відповідно; по обходу контуру $k\ell jk$ усі три промені мають однаковий напрямок, який визначився напрямком відомої сили \vec{G} .

Знайдімо модулі реакцій \vec{T}_{CA} і \vec{T}_{CB} . З елементарного геометричного аналізу збудованого силівого трикутника $k\ell j$ зрозуміло, що він є рівнобедреним – $\ell j = jk$, тобто

$$T_{CA} = T_{CB}.$$

Також бачимо, що силовий трикутник klj не є подібним до будь-якого з трикутників на розрахунковій схемі, але простими додатковими побудовами можна відшукати подібні трикутники. Наприклад, якщо у трикутнику klj опустити висоту jm , то можна скористатися подібністю трикутників mjl та DCA , де D – середина відрізка AB . Можна й обійтися безпосереднім аналізом трикутника mjl , що і застосуємо. Отже, з рисунка 9z.2,б:

$$\sin(\angle mj\ell) = \frac{m\ell}{j\ell},$$

звідки

$$j\ell = \frac{m\ell}{\sin(\angle mj\ell)}.$$

Оскільки ж $\angle mj\ell = \alpha$, $m\ell = \frac{kl}{2}$ та довжини сторін силового трикутника визначають модулі відповідних їм сил – $kl = G$ і $j\ell = T_{CA}$, то остаточно

$$T_{CA} = \frac{kl/2}{\sin \alpha} = \frac{G}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{20}{2 \cdot \sin 5^\circ} = \frac{10}{\sin 5^\circ} \approx \frac{10}{0,0872} \approx 114,74(\text{H}).$$

Оскільки перевірка виконується (або – оскільки визначені обома способами значення реакцій \vec{T}_{CA} і \vec{T}_{CB} збігаються), то робимо висновок: шуканий натяг дроту, який однозначно визначається знайденими реакціями, обчислений правильно.

Відповідь: $T_{CA} = T_{CB} \approx 114,74 \text{ H}$.

✚: розглянута задача окреслює надзвичайно важливу практичну проблему, з якою доводиться рахуватися при проектуванні та експлуатації, наприклад, ліній електромереж. Як видно з отриманої до задачі відповіді, птахи або інші випадкові навантаження (зледеніння тощо) можуть спричиняти величезні напруження у дротах, здатні

викликати подовження або навіть розриви їх. Неважко переконатися, що довжина L дроту суттєво впливає на величину натягу: при зменшенні L і наближенні її до довжини відрізка AB (при цьому відповідно зменшуються значення кута α та $\sin \alpha$) зусилля у дроті стрімко зростає; свідомо збільшуючи довжину L дроту, можна зменшувати експлуатаційні зусилля.

ЗАДАЧА № 10

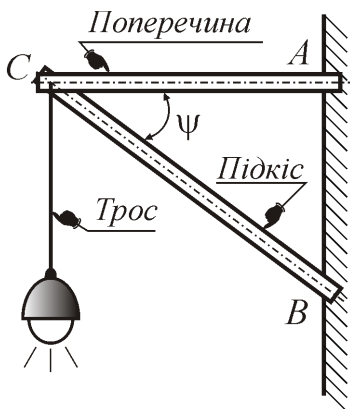


Рисунок 10z

Вуличний ліхтар вагою 246 Н підвішений за допомогою троса у точці C до поперечини AC довжиною $1,5 \text{ м}$, яка приєднана до вертикальної нерухокої поверхні та підтримується в горизонтальному положенні підкосом BC (рис. 10z). Уважаючи з'єднання у точках A , B і C

шарнірними, а трос, поперечину й підкіс невагомими, визначити зусилля, що виникають у поперечині AC та підкосі BC , якщо підкіс утворює зі поперечиною кут ψ і $\cos \psi = 0,8$.

Відповідь: $S_{CA} = 328 \text{ Н}$, $S_{CB} = -410 \text{ Н}$.

ЗАДАЧА № 11

Нехтуючи товщиною однорідного диска, що спирається точкою A на вертикальну стінку, а точкою B – на виступ, і будь-яким тертям, визначити сили тиску диска на стінку та виступ, якщо

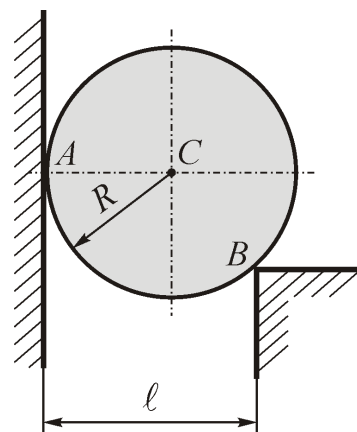


Рисунок 11z

його вага $G = 25\sqrt{5}$ (Н), $R = 60$ см та $\ell = 100$ см (рис. 11z).

Відповідь: $N_A^{np\delta} = 50$ Н, $N_B^{np\delta} = 75$ Н.

ЗАДАЧА № 12

У горизонтальному жолобі з ідеально гладкими стінками, що нахилені під кутами α і β до горизонту, лежить однорідна труба вагою G . Знайти тиск труби на стінки жолоба, вважаючи, що торкання поперечного перерізу труби до стінок відбувається у точках A й B (рис. 12z).

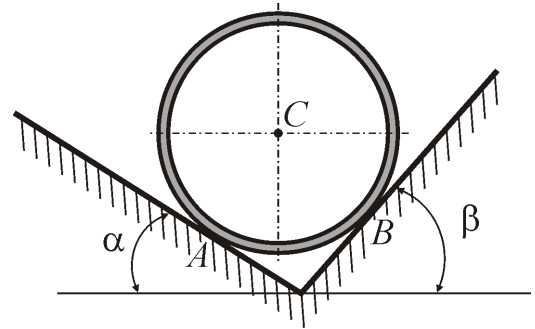


Рисунок 12z

Установити чисельні значення, якщо $G = 2,4$ кН, $\alpha = 30^\circ$, а жолоб – прямокутний; знайдені тиски є прикладом зосередженої чи розподіленої дії?

Відповідь: $N_A^{np\delta} = G \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $N_B^{np\delta} = G \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$;

$N_A^{np\delta} = 1,2 \cdot \sqrt{3} \approx 2,08$ кН, $N_B^{np\delta} = 1,2$ кН, обидва тиски

є силами, кожна з яких розподілена вздовж відповідної твірної зовнішньої поверхні труби – розподіленими по довжині силами (див. [1] § 1.2, рис. 1.2 та відповідні міркування).

ЗАДАЧА № 13

Дві однакові однорідні гладкі кулі лежать у горизонтальному пазові з вертикальними стінками, віддаль між якими L (рис. 13z).

Визначити, з якими силами кулі тиснуть на стінки та на підлогу в точках A , B і D та сили взаємодії між самими кулями у їх точці дотику E , якщо вага кулі 42 Н.

✎: при розв'язуванні задачі необхідно спочатку розглянути рівнова-

гу верхньої кулі, сприймаючи нижню кулю як в'язь, а потім розглядати рівновагу нижньої кулі, враховуючи тиск на неї верхньої кулі, значення якого визначається **аксіомою 4** (див. [1] § 1.3).

Відповідь: $N_E = 70 \text{ Н}$, $N_D^{np\partial} = 56 \text{ Н}$, $N_A^{np\partial} = 56 \text{ Н}$, $N_B^{np\partial} = 84 \text{ Н}$.

ЗАДАЧА № 14

На правильний циліндричний коток вагою 4100 Н та радіусом R , який лежить на гладкій горизонтальній площині, у точці C діє горизонтальна сила \vec{P} . Коток від зміщення втримується ланцюгом довжиною $BC = 3R$, що закріплений у точці B (рис. 14z).

Знайти зусилля T у ланцюзі BC та реакцію N_A у точці A , якщо $P = 5,6 \text{ кН}$.

Відповідь: $T = \frac{3P}{2\sqrt{2}} \approx 5,94 \text{ кН}$, $N_A = G + \frac{P}{2\sqrt{2}} \approx 6,08 \text{ кН}$.

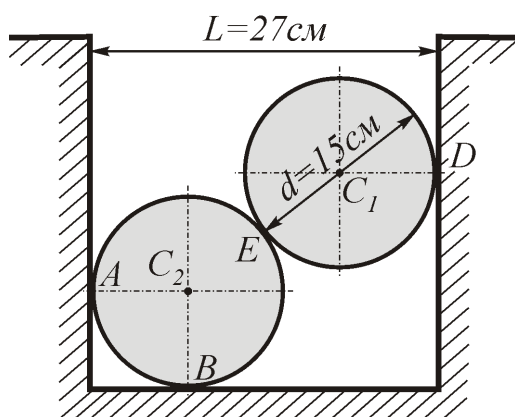


Рисунок 13z

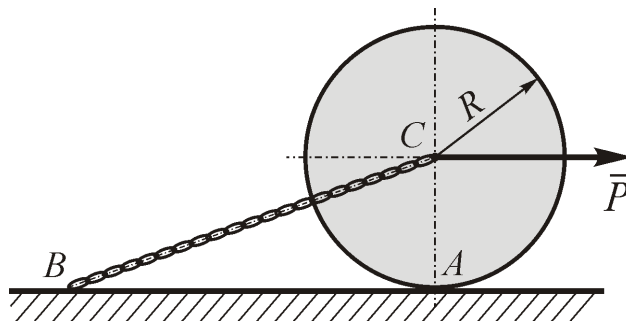


Рисунок 14z

ЗАДАЧА № 15

Горизонтальна балка AB закріплена шарнірно-рухомою опорою A та шарнірно-нерухомою опорою B . У точці C до балки під кутом α до її осі прикладена сила \vec{P} (рис. 15z).

Знайти реакції опор, якщо $P = 4 \text{ кН}$, а $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Відповідь: $R_A = 2,2 \text{ кН}$, $R_B = 2,6 \text{ кН}$.

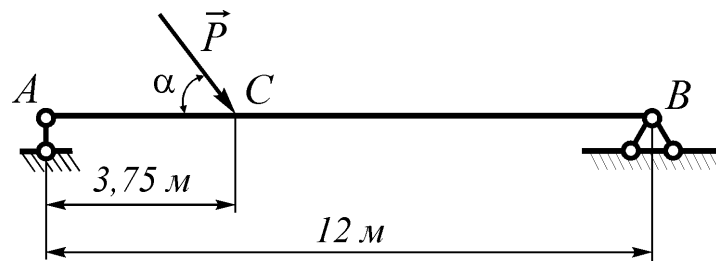


Рисунок 15z

ЗАДАЧА № 16

Вантаж E вагою 32 Н підвішено нерозтяжною ниткою до кронштейна $ABCD$ у точці C (рис. 16z).

Нехтуючи власною вагою кронштейна та будь-якими його деформаціями, знайти реакції в'язей, якщо кронштейн у точці A закріплений до нерухомої поверхні циліндричним шарніром, а у точці D вільно спирається на ідеально гладкий вертикальний виступ (розміри взяти з рисунка).

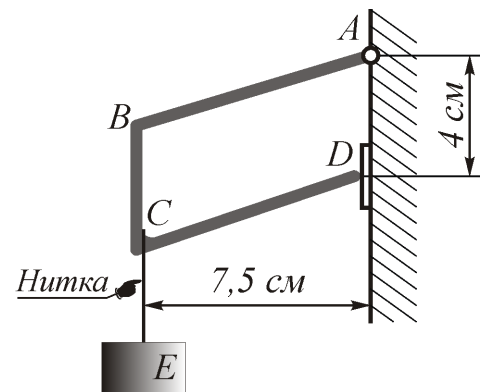


Рисунок 16z

Відповідь: $R_A = 68\text{ Н}$, $N_D = 60\text{ Н}$.

ЗАДАЧА № 17

Сонячний колектор AB , зображений на рисунку 17z у розрізі, може вільно обертатися навколо горизонтального циліндричного шарніра B та вільно спирається на виступ у точці A .

Нехтуючи будь-яким тертям, знайти реакції опор,

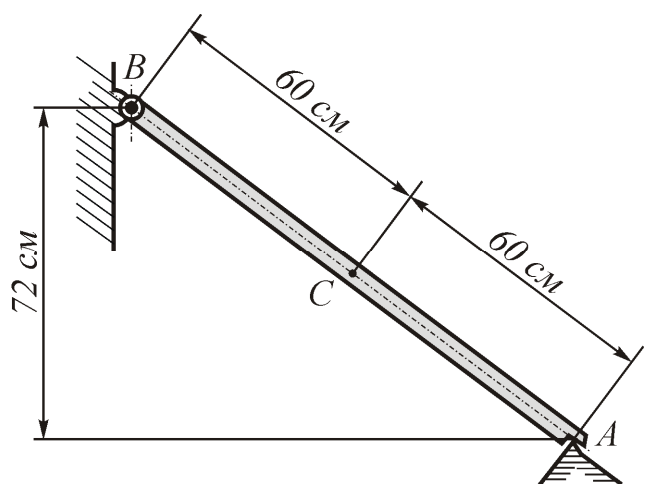


Рисунок 17z

якщо вага колектора 500 Н (розміри взяти з рисунка, де C – центр ваги колектора).

Відповідь: $N_A = 200\text{ Н}$, $R_B = 100\sqrt{13} \approx 360,56\text{ Н}$.

ЗАДАЧА № 18

Однорідний циліндричний коток вагою $G = 7,2\text{ кН}$ та радіусом $R = 90\text{ см}$ знаходиться на горизонтальній площині.

Яку горизонтальну силу \vec{F} необхідно прикласти до центру котка для перетаскування його через горизонтальний бордюр висотою $h = 18\text{ см}$ (рис. 18z.1)? Знайти необхідну за напрямком і величиною мінімальну силу \vec{F}_{min} (прикладену в точці C), яка забезпечить означене перетаскування.

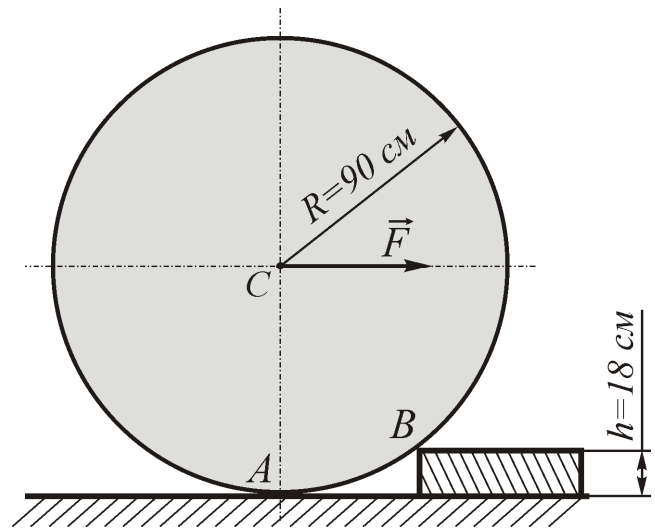


Рисунок 18z.1

❏: розв'язуючи задачу, необхідно розуміти: 1) до моменту відриву котка від горизонтальної площини (тобто до початку руху котка) на нього діють чотири сили – активні \vec{G} та \vec{F} і реакції в'язей \vec{N}_A та \vec{N}_B (рис. 18z.2,а); 2) при збільшенні модуля F тиск котка на площину зменшується, а на ребро B бордюру – збільшується (адекватно змінюються й реакції N_A та N_B); 3) у положенні *граничної рівноваги котка*, яке і треба розглядати, коток припиняє тиснути на горизонтальну площину і в цьому положенні на коток будуть діяти тільки три сили – \vec{G} , \vec{F} і \vec{N}_B (рис. 18z.2,б та 18z.2,в); 4) при визначенні \vec{F}_{min} лінії дій і напрямки сил \vec{G} та \vec{N}_B лишаються незмінними, а шукане міні-

мальне значення \vec{F}_{min} визначається найменшою з можливих довжиною відповідної сторони силового трикутника (рис. 18z.2,г).

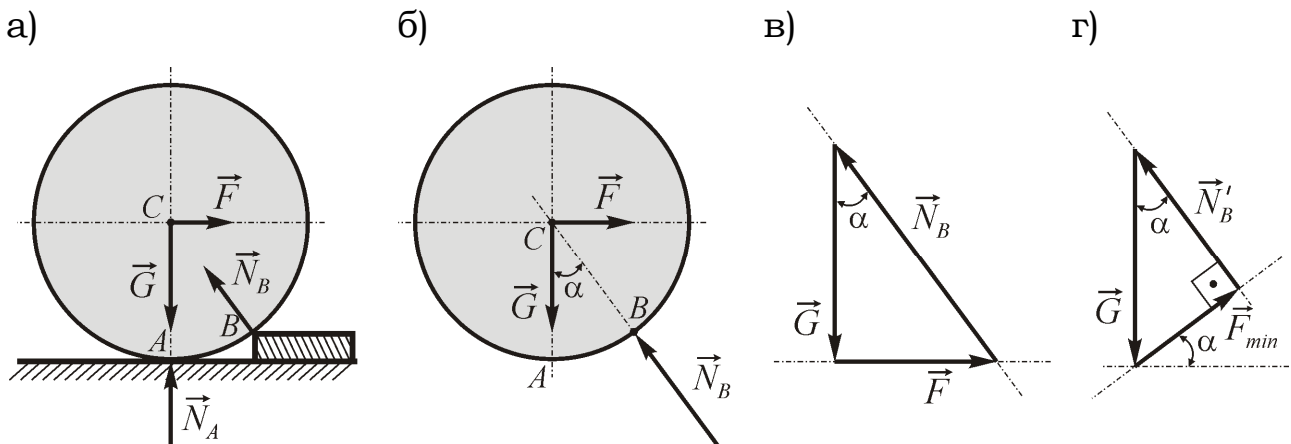


Рисунок 18z.2

Відповідь: $F = 5,4 \text{ kH}$, $F_{min} = 4,32 \text{ kH}$, $\cos \alpha = 0,8$.

ЗАДАЧА № 19

Невагомий брус AB довжиною 176 см знаходиться у рівновазі та підтримується у горизонтальному положенні у точці A ідеальними стержнями 1 і 2 , а у точці B – ланцюгом BC .

Знайти зусилля, що виникають у кожному зі стержнів та ланцюзі BC , якщо на брус у точці D діє зосереджена вертикальна сила \vec{F} , модуль якої $F = 385 \text{ Н}$ (рис. 19z,а).

❏: після звільнення бруса від в'язей до нього виявиться прикладеною система з чотирьох сил $\{\vec{F}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{T}\}$, яка містить три невідомі реакції та не є збіжною (оскільки, наприклад, лінії дій сил \vec{F} і \vec{S}_2 паралельні одна одній)¹ (рис. 19z,б). Для розв'язування задачі необхідно

¹ Означена система сил є **плоскою довільною** (див. [1], § 1.2, рис. 1.5 і відповідні визначення) **Умови рівноваги** матеріального тіла під дією **плоскої довільної системи сил** та відповідні задачі вивчаються й розглядаються у подальшому курсі теоретичної механіки (наприклад, див. задачу 36, де шукані величини задачі 19 визначено згідно зі згаданими тут умовами рівноваги).

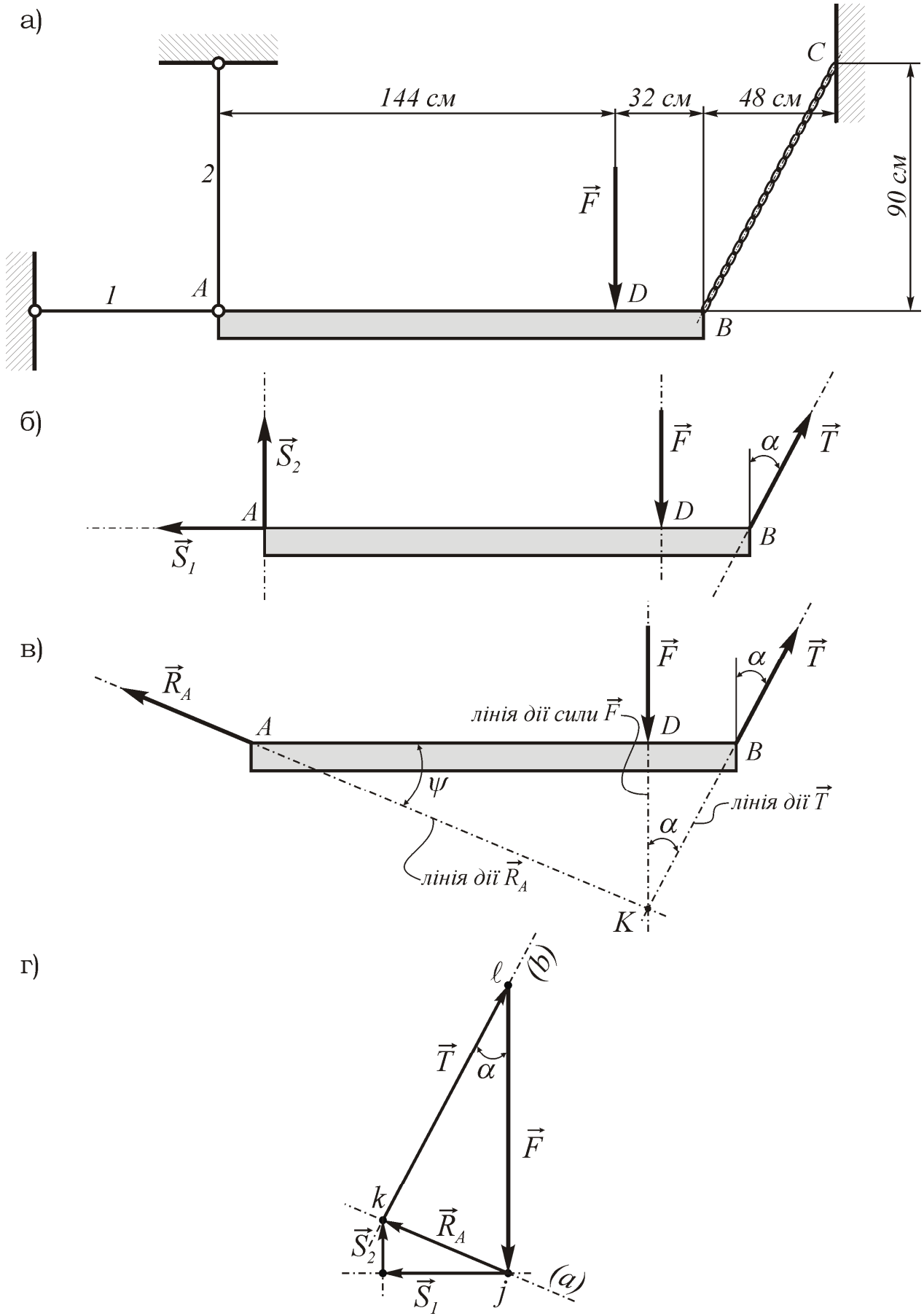


Рисунок 19z

врахувати, що дві невідомі сили \vec{S}_1 і \vec{S}_2 прикладені до бруса в одній точці A і тому відповідно до **аксіому 3** (див. [1], § 1.3) ці сили можна замінити їх рівнодієюю (наприклад, \vec{R}_A), яка також прикладена у точці A . Після цього стає очевидним, що брус перебуває у рівновазі під дією трьох непаралельних сил \vec{F} , \vec{R}_A та \vec{T} , лінії дій яких повинні перетинатися в одній точці (рис. 19z,в і 19z,г), що дає можливість однозначно встановити положення лінії дії реакції \vec{R}_A та її модуль. Після цього сила \vec{R}_A розкладається на дві ортогональні складові, лінії дій яких збігаються з осями стержнів 1 і 2, та знаходяться значення S_1 та S_2 (рис. 19z,г).

Відповідь: $T = 357 \text{ Н}$, $R_A = 182 \text{ Н}$, $S_1 = 168 \text{ Н}$, $S_2 = 70 \text{ Н}$.

ЗАДАЧА № 20

Знайти реакції опор A і B невагомої тришарнірної рами, що складається з двох частин, з'єднаних між собою внутрішнім шарніром C , котрі викликані дією активної сили \vec{P} , якщо $P = 136 \text{ Н}$, а $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$ – див. рисунок 20z,а, де наведено всі необхідні розміри.

✎: тришарнірна рама належить до розряду **складених конструкцій**¹. Після звільнення рами від в'язей виявиться, що на неї діють три зрівноважені зовнішні сили: задана активна сила \vec{P} (для якої відомі всі три її параметри) та шукані реакції \vec{R}_A і \vec{R}_B , для яких відомі тільки точки прикладання. Оскільки лінії дії обох реакцій ніяк не визначені, то застосувати теорему про три сили можливості немає. Тоді враховується, що оскільки у рівновазі перебуває вся рама, то і кожна її частина також знаходиться у рівновазі, та розглядається

¹ Методика та способи визначення опорних реакцій складених конструкцій вивчаються та розглядаються у подальшому курсі теоретичної механіки (наприклад, див. задачу 47, де відповідним способом знайдено опорні реакції задачі 20).

рівновага тільки лівої частини AC рами, на яку діють дві сили – реакція \vec{R}_A шарнірно-нерухомої опори A (у точці A) й реакція \vec{R}_C нерухомого з'єднувального шарніра C (у точці C); згідно з **аксіомою 1** (див. [1], § 1.3) сили \vec{R}_A і \vec{R}_C утворюють зрівноважену систему сил лише за умови, що вони однакові за величиною, протилежні за напрямком та мають спільну лінію дії, яка в розглядуваній задачі про-

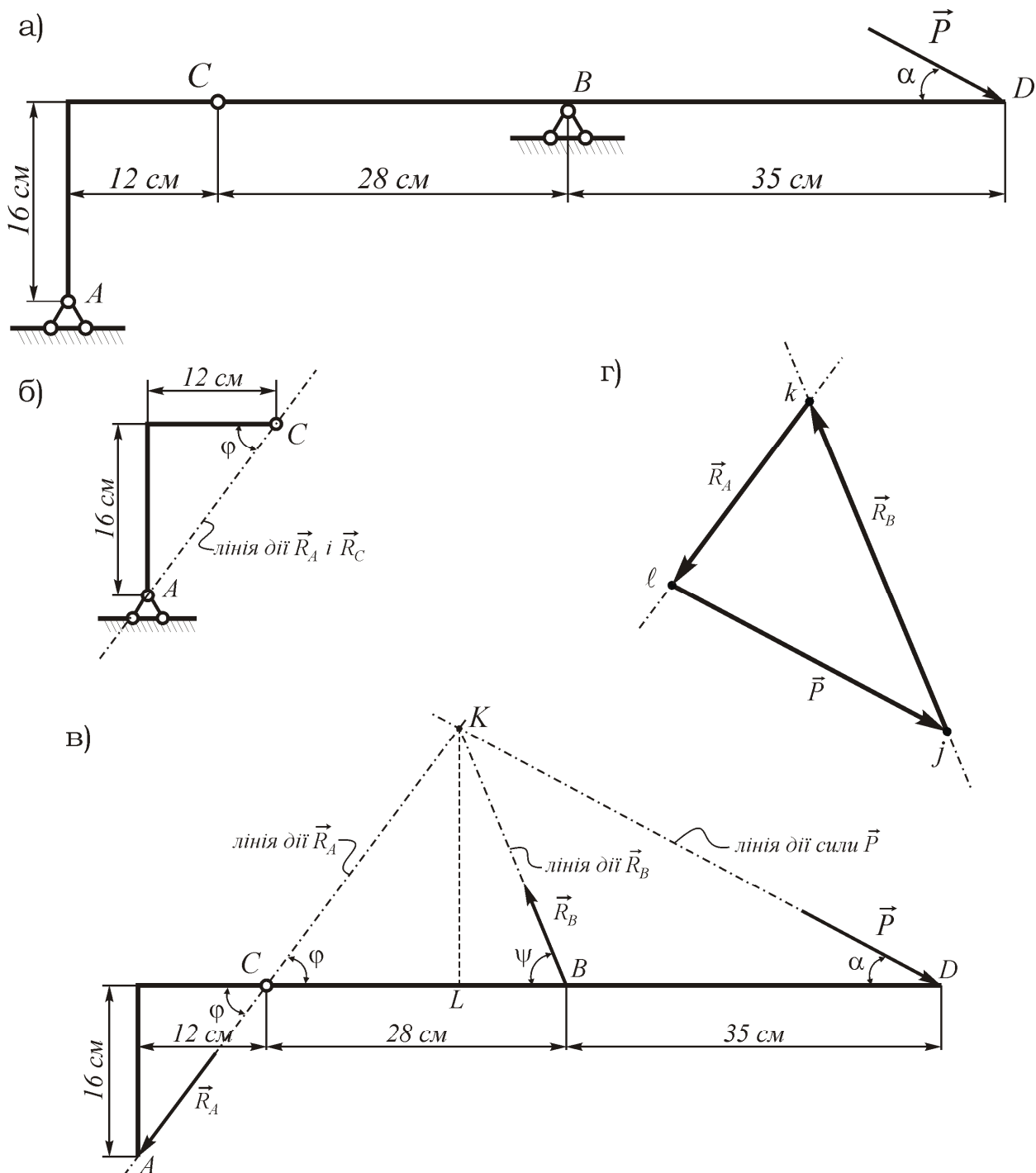


Рисунок 20z

ходить через точки їх прикладання (рис. 20z,б). Величини реакцій R_A та R_C , розглядаючи рівновагу безпосередньо лівої частини рами, встановити неможливо, оскільки на цю частину *не діють активні сили* (але головне і достатнє для подальшого розв'язування задачі те, що розгляд рівноваги лівої частини рами дав змогу однозначно встановити *лінію дії реакції \vec{R}_A*). Після цього розглядається рівновага всієї рами в цілому: для системи сил $\{\vec{P}, \vec{R}_A, \vec{R}_B\}$ застосовується теорема про три сили й устанавлюються значення \vec{R}_A та \vec{R}_B (рис. 20z,в і 20z,г).

Відповідь: $R_A = 100 \text{ Н}$, $R_B = 156 \text{ Н}$.

ЗАДАЧА № 21

Для заданої у завданні С2 плоскої простої ферми знайти реакції в'язей, що обмежують рух ферми.

РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ ПРОСТИХ ФЕРМ СПОСОБОМ ВИРІЗАННЯ ВУЗЛІВ

ЗАДАЧА № 22

До вузла U плоскої простої ферми прикладена активна сила \vec{P} , лінія дії якої збігається з віссю 11 -ого стержня (рис. 22z.1).

Нехтуючи вагою стержнів ферми, визначити реакції опор ферми та розрахувати ферму способом вирізання вузлів, якщо $P = 60 \text{ кН}$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

З'ясувавши умову задачі, будемо діяти відповідно до логіки, вимог та алгоритму, які розглянуті та наведені у § 2.9 [1].

1. Розглянемо задану на рисунку 22z.1 *конструкцію*, що утворена сукупністю стержнів $1 \div 12$, з'єднаних між собою шарнірами, і приєднана до нерухомих поверхонь шарнірно-нерухомими опорами A й E .

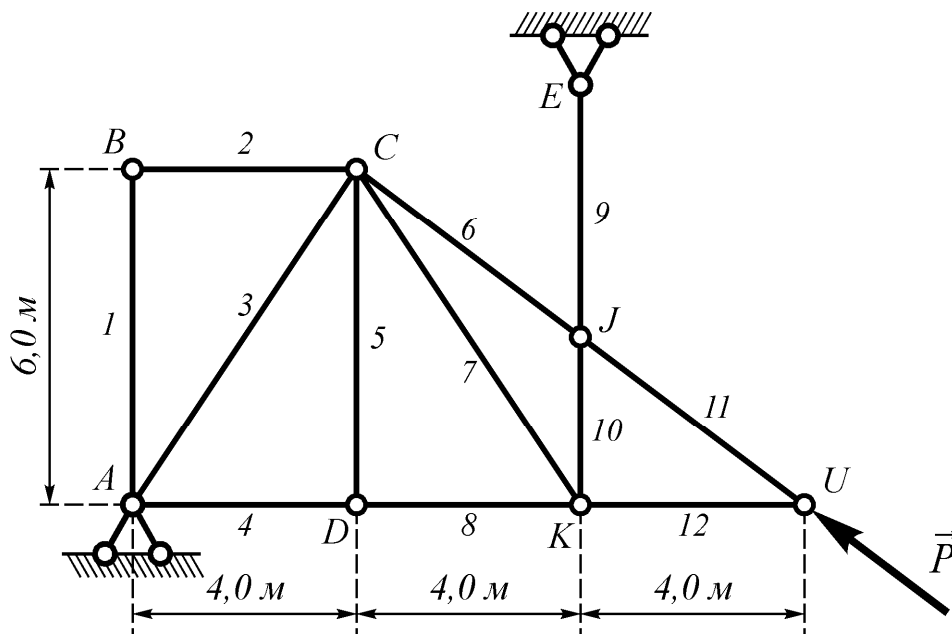


Рисунок 22z.1

З'ясуємо, які зі стержнів утворюють *плоску просту ферму* (або – перевіримо зазначену конструкцію на геометричну незмінність та статичну визначуваність): відповідно до викладеного у § 2.8 [1] перевіримо виконання умови (2.16) $C = 2 \cdot B - 3$, де C – кількість стержнів конструкції, а B – кількість її вузлів. Тому що для розглядуваної конструкції $C = 12$, $B = 8$, $2 \cdot B - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$, то $C < 2 \cdot B - 3$ і, отже, кількість стержнів недостатня для утворення

у думці

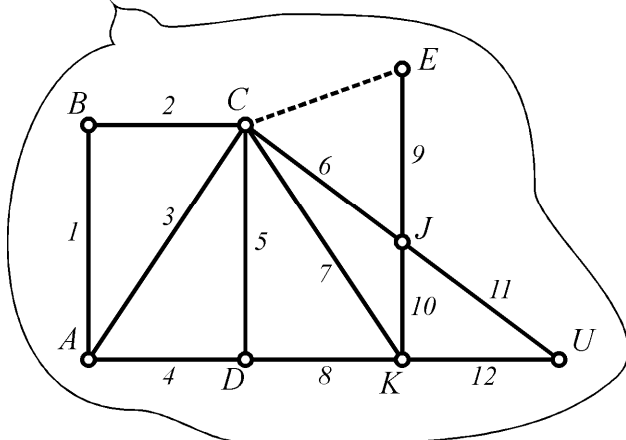


Рисунок 22z.2

геометрично незмінної конструкції. Якщо у думці відокремити конструкцію від опор A та E (рис. 22z.2), то стає очевидним, що для забезпечення нерухомості вузла E , котрий приєднаний до вузла J стержнем 9 , «не вистачає одного стержня» (наприклад, стержня CE) (див. також [1],

§ 2.8, вимогу **5** до розрахункової схеми ферми на с. 82, рис. 2.35 і відповідні міркування). Оскільки ж змінювати конструкцію, визначену умовою задачі, неприпустимо, то очевидно, що *стержень 9 не є елементом плоскої простої ферми*. Тоді для сукупності інших стержнів і вузлів $C = 11$, $B = 7$, $2 \cdot B - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$ і, отже,

$$C = 2 \cdot B - 3.$$

Таким чином, приходимо до *висновку*: плоскою простою фермою є сукупність одинадцяти стержнів ($1 \div 8$, $10 \div 12$), з'єднаних між собою відповідними шарнірами; стержень 9 є *зовнішньою в'яззю*, яка обмежує рух визначеної ферми у точці (або вузлі) J .

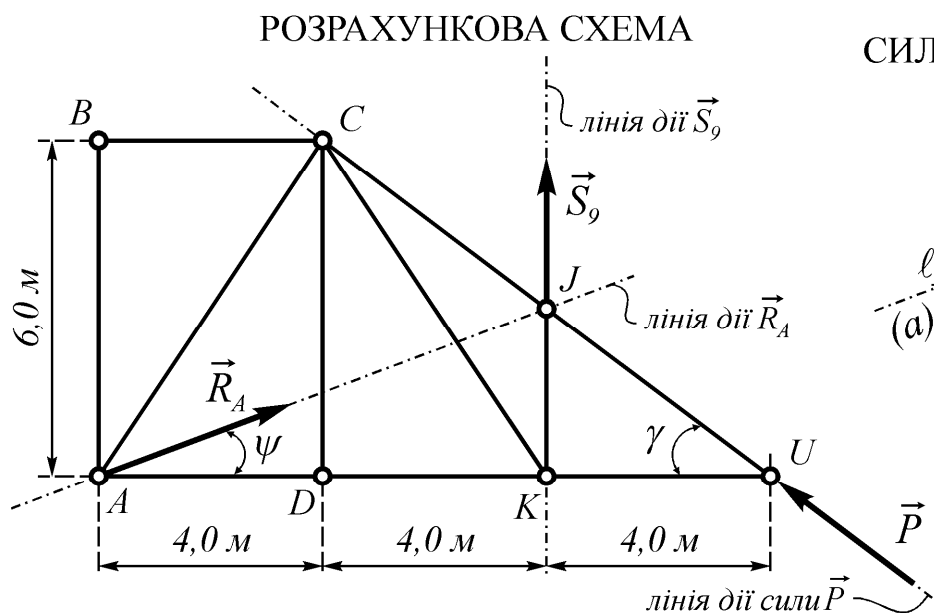
2. Визначимо зовнішні опорні реакції. Для цього розглянемо рівновагу визначеної вище плоскої простої ферми, як невідомого абсолютно твердого матеріального тіла¹. Активною силою є прикладена у точці U сила \vec{P} , величина та лінія дії якої відомі (позначимо гострий кут між лінією дії сили \vec{P} та, наприклад, горизонталлю через γ). Рух ферми унеможливають шарнірно-нерухома опора A (у точці A) та, як з'ясовано раніше, стержень 9 (у точці J). Застосовуємо для ферми принцип звільнення від в'язей (див. [1], § 1.3): відкидаємо стержень 9 та замінюємо його дію реакцією \vec{S}_9 , яку прикладаємо до ферми у вузлі J , направляючи її вздовж осі стержня 9 від вузла J ²; відкидаємо шарнірно-нерухома опору A й замінюємо її дію реакцією \vec{R}_A , що прикладена до ферми у точці A , але *лінія дії якої наперед невідома* (див. [1], § 2.7, рис. 2.27,а та

¹ По суті розв'язується *самостійна задача* про рівновагу матеріального тіла (аналогічно до задач 5÷21). Тому будемо розв'язувати зазначену задачу відповідно до наведеного на сторінках 115÷118 **алгоритму**, не виділяючи окремих його пунктів (у разі виникнення труднощів та (або) запитань необхідно звернутися до ретельно розглянутих із наведеними розв'язками задач 5÷9 на с. 19÷55).

² Див. відповідні міркування пункту **4** задачі 5 на с. 21.

відповідні міркування). Для з'ясування положення цієї лінії дії врахуємо, що після звільнення від в'язей до ферми виявляється прикладеною система з трьох сил $\{\vec{P}, \vec{R}_A, \vec{S}_9\}$, лінії дій яких лежать в одній площині й не паралельні одна одній (це видно з розташування відомих ліній дій сил \vec{P} та \vec{S}_9); тоді згідно з теоремою про три сили (див. [1], § 2.6) сили \vec{P} , \vec{R}_A і \vec{S}_9 повинні утворювати збіжну систему сил (тобто лінії дій цих сил мають перетинатися в одній точці). Відповідно до цього проведемо відомі лінії дій сил \vec{P} і \vec{S}_9 до їх перетину у точці J та сполучаємо її з точкою A ; відрізок AJ і визначає положення лінії дії й самої реакції \vec{R}_A ; зображуємо їх на розрахунковій схемі, позначивши гострий кут між лінією дії реакції \vec{R}_A та, наприклад, горизонталлю як ψ (рис. 22z.3,а).

а)



б)

СИЛОВИЙ ТРИКУТНИК

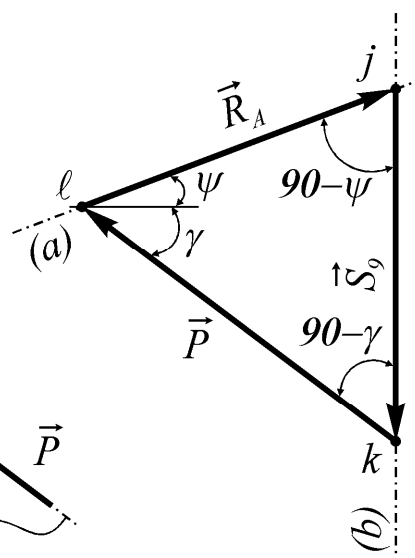


Рисунок 22z.3

Зауваження № 22.1: досить поширеною помилкою у студентів-початківців є безпідставне бажання зображувати реакцію \vec{S}_9 прикла-

деною у точці E , як це наведено на рисунку 22z.4; треба твердо розуміти, що у такому разі сили \vec{P} , \vec{R}_A та \vec{S}_9 не утворюють системи сил, оскільки сили \vec{P} і \vec{R}_A прикладені до розглядуваної ферми, а сила \vec{S}_9 – до шарніра E .

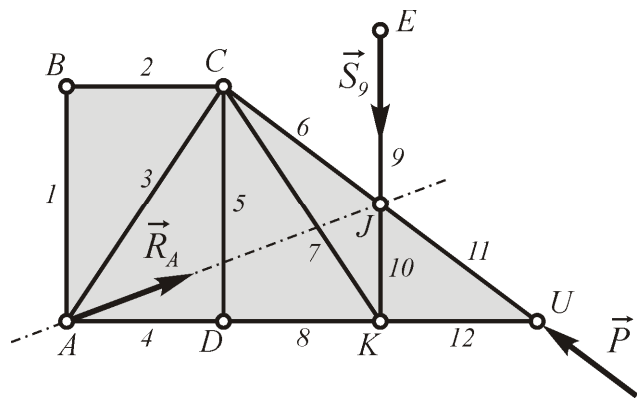


Рисунок 22z.4

Вибираємо на рисунку 22z.3,а традиційну систему координат³, відповідно до формули (2.15) [1] записуємо аналітичні умови рівноваги плоскої збіжної системи сил $\{\vec{P}, \vec{R}_A, \vec{S}_9\}$ та складаємо відповідні рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad R_A \cdot \cos \psi - P \cdot \cos \gamma = 0; \quad (22.1)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad R_A \cdot \sin \psi + S_9 + P \cdot \sin \gamma = 0. \quad (22.2)$$

Розв'язуємо складені рівняння відносно невідомих R_A і S_9 , визначивши спочатку з трикутників CDU , JKU і AJK (див. рис. 22z.3,а) необхідні значення.

Оскільки трикутники CDU і JKU подібні, то відповідно до їх властивостей $\frac{CD}{DU} = \frac{JK}{KU}$, звідки $JK = \frac{CD \cdot KU}{DU} = \frac{6 \cdot 4}{8} = 3(\text{м})$.

З трикутника AJK за теоремою Піфагора

$$AJ = \sqrt{AK^2 + JK^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73}(\text{м});$$

тоді

$$\cos \psi = \cos(\angle JAK) = \frac{AK}{AJ} = \frac{8}{\sqrt{73}};$$

$$\sin \psi = \sin(\angle JAK) = \frac{JK}{AJ} = \frac{3}{\sqrt{73}}.$$

³ Див. зауваження № 4 до алгоритму на с. 116.

З трикутника CDU за теоремою Піфагора

$$CU = \sqrt{CD^2 + DU^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10(\text{м});$$

тоді

$$\sin \gamma = \sin(\angle CUD) = \frac{CD}{CU} = \frac{6}{10} = 0,6,$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

З рівняння (22.1):

$$R_A = \frac{P \cdot \cos \gamma}{\cos \psi} = \frac{60 \cdot 0,8}{\frac{8}{\sqrt{73}}} = 48 \cdot \frac{\sqrt{73}}{8} = 6 \cdot \sqrt{73} \approx 51,26 \text{ (кН)}.$$

З рівняння (22.2):

$$S_9 = -R_A \cdot \sin \psi - P \cdot \sin \gamma = -6\sqrt{73} \cdot \frac{3}{\sqrt{73}} - 60 \cdot 0,6 = -18 - 36 = -54 \text{ (кН)}.$$

Знак *мінус* при значенні S_9 свідчить про те, що в дійсності стержень 9 є *стиснутим* (отриманий знак враховується в усіх подальших обчисленнях розглядуваної задачі). Знак *плюс* при значенні R_A свідчить про те, що реакція \vec{R}_A дійсно *напрявлена в указаному на розрахунковій схемі напрямку*.

Виконаємо **перевірку** знайдених значень зовнішніх опорних реакцій, побудувавши для системи сил $\{\vec{P}, \vec{R}_A, \vec{S}_9\}$ силовий трикутник, який відповідно до *графічної умови рівноваги* збіжної системи сил мусить бути замкнутим (див. [1], § 2.5, рис. 2.12 та відповідні міркування). Від певної точки k простору у відповідному до відомої сили \vec{P} напрямку відкладаємо промінь \overline{kl} (рис. 22z.3,б), довжина kl якого *умовно* визначає модуль (величину) цієї сили (тобто $kl = P$). Через точку l проводимо пряму (a) , паралельну, наприклад, лінії дії реакції \vec{R}_A , а через точку k – пряму (b) , паралельну

лінії дії реакції \vec{S}_9 ; точку перетину прямих (a) та (b) позначимо j . Таким чином, у силовому трикутнику точка j є кінцем другого променя \vec{lj} (що визначає реакцію \vec{R}_A) і початком третього променя \vec{jk} (що визначає реакцію \vec{S}_9) та по обходу контуру $kljk$ усі промені мають однаковий напрямок, який визначається напрямком відомої сили \vec{P} ⁴. Силовий трикутник одразу встановлює дійсні напрямки шуканих сил; тоді з рисунка 22z.3 бачимо, що реакція \vec{R}_A напрямлена так, як це зображено на розрахунковій схемі, а реакція \vec{S}_9 напрямлена протилежно до зображеного на розрахунковій схемі, тобто – до вузла J , що і визначає роботу 9-ого стержня не на розтяг, а на *стиск*.

З аналізу розрахункової схеми та силового трикутника на рисунку 22z.3, видно, що в силовому трикутнику $\angle klj = \psi + \gamma$, $\angle lkj = 90^\circ - \gamma$ та $\angle kjl = 90^\circ - \psi$ (для перевірки пересвідчимося, що сума вказаних кутів, як і для будь-якого іншого трикутника, дорівнює $(\psi + \gamma) + (90^\circ - \gamma) + (90^\circ - \psi) = \psi + \gamma + 90^\circ - \gamma + 90^\circ - \psi = 180^\circ$, що й мусить бути). Оскільки у силовому трикутнику всі його кути певним чином визначені, то знайдімо модулі (величини) R_A та S_9 , скориставшись *теоремою синусів*, відповідно до якої

$$\frac{kl}{\sin(90^\circ - \psi)} = \frac{jk}{\sin(\psi + \gamma)} = \frac{j\ell}{\sin(90^\circ - \gamma)},$$

або (врахувавши, що довжини сторін силового трикутника визначають модулі відповідних їм сил – $kl = P$, $jk = S_9$ і $j\ell = R_A$)

$$\frac{P}{\sin(90^\circ - \psi)} = \frac{S_9}{\sin(\psi + \gamma)} = \frac{R_A}{\sin(90^\circ - \gamma)},$$

⁴ Див. **зауваження № 11** до **алгоритму** на с. 118.

звідки

$$S_9 = \frac{P \cdot \sin(\psi + \gamma)}{\sin(90^\circ - \psi)}$$

та

$$R_A = \frac{P \cdot \sin(90^\circ - \gamma)}{\sin(90^\circ - \psi)}.$$

Як відомо з елементарної тригонометрії,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad \text{та} \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

Підставляючи знайдені раніше значення, дістанемо:

$$\sin(\psi + \gamma) = \sin \psi \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cos \psi = \frac{3}{\sqrt{73}} \cdot 0,8 + 0,6 \cdot \frac{8}{\sqrt{73}} = \frac{7,2}{\sqrt{73}},$$

$$\sin(90^\circ - \psi) = \cos \psi = \frac{8}{\sqrt{73}},$$

$$\sin(90^\circ - \gamma) = \cos \gamma = 0,8.$$

Тоді остаточно

$$S_9 = \frac{P \cdot \sin(\psi + \gamma)}{\sin(90^\circ - \psi)} = \frac{60 \cdot \frac{7,2}{\sqrt{73}}}{\frac{8}{\sqrt{73}}} = \frac{60 \cdot 7,2}{8} = 54 \text{ (кН)},$$

$$R_A = \frac{P \cdot \sin(90^\circ - \gamma)}{\sin(90^\circ - \psi)} = \frac{60 \cdot 0,8}{\frac{8}{\sqrt{73}}} = 6 \cdot \sqrt{73} \approx 51,26 \text{ (кН)}.$$

Оскільки перевірка виконується (або – оскільки визначені обома способами значення реакцій \vec{R}_A і \vec{S}_9 збігаються), то робимо висновок, що зовнішні опорні реакції ферми визначені правильно.

3. Розрахуємо ферму способом вирізання вузлів. Визначення дійсних зусиль у стержнях ферми починаємо з припущення, що всі її стержні є розтягнутими.

⚠: якщо при розв'язуванні виявиться, що реакція певного стержня визначається від'ємним числовим значенням, то зазначений стерж-

жень у дійсності є *стиснутим*, а отриманий знак *мінус* враховується в усіх подальших обчисленнях і міркуваннях.

Оскільки вся ферма перебуває у рівновазі, то у рівновазі знаходиться і будь-який її вузол. Тому будемо розглядати рівновагу кожного вузла ферми, як невірного матеріального тіла⁵. При цьому в'язями, які безпосередньо обмежують рух кожного вузла ферми, є стержні, що перетинаються (сходяться) в цьому вузлі (так звані *внутрішні в'язі*). Застосовуючи **аксіому 5**, усі вузли ферми *попередовно* звільняємо від внутрішніх в'язей (**вирізаємо**) та розглядаємо рівновагу кожного вузла ферми окремо під дією *зовнішніх сил*, що прикладені до *вирізаного* вузла, та *реакцій стержнів*, які перетинаються в цьому вузлі.

☛: у розв'язуваній задачі до зовнішніх сил належать задана активна сила \vec{P} , яка прикладена до вузла U , та зовнішні опорні реакції \vec{R}_A і \vec{S}_J , які прикладені до вузлів A і J відповідно.

☛: тому що стержні ферми приймаються розтягнутими, то на розрахункових схемах вирізанних вузлів реакції всіх стержнів зображуються напрямленими вздовж своїх осей *від* розглядуваного *вузла*.

☛: оскільки реакції стержнів однозначно визначають внутрішні зусилля в них, то реакції стержнів на розрахункових схемах вузлів позначаються символами \vec{S}_i , де i – номер відповідного стержня.

☛: будь-який i -тий стержень ферми обмежує рух двох вузлів, які розташовані на його кінцях (наприклад, стержень 7 – рух вузлів C та K), через що при розрахунках реакція \vec{S}_i i -того стержня фігурує

⁵ По суті для кожного вузла розв'язується самостійна задача про його рівновагу (аналогічно до задач 5÷21); очевидно, що цих задач буде стільки, скільки вузлів має ферма. Кожну зі зазначених задач необхідно розв'язувати відповідно до наведеного на сторінках 115÷118 **алгоритму**; при цьому не будемо виділяти окремих пунктів **алгоритму** (у разі виникнення труднощів та (або) запитань необхідно звернутися до ретельно розглянутих із наведеними розв'язками задач 5÷9 на с. 19÷55).

двічі. Звісно, що обидві зазначені реакції будь-якого стержня на вузлі, які розташовані на його кінцях, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямом. Досить часто у різноманітних джерелах, наприклад, реакцію 7-ого стержня на вузол C позначають \vec{S}'_7 , а на вузол K – \vec{S}''_7 , указуючи, що $\vec{S}'_7 = -\vec{S}''_7$ та $S'_7 = S''_7$. Оскільки обидві реакції визначають зусилля в *одному стержні*, то **умовимося** ці обидві реакції позначати однаково – \vec{S}_7 , безумовно враховуючи відповідний необхідний напрямок.

Тому що всі вузли розглядуваної ферми приймаються як *точкові шарніри*, то до будь-якого вузла обов'язково виявляється прикладеною *плоска збіжна система сил*. Оскільки ж рівновага тіла під дією плоскої збіжної системи сил визначається двома рівняннями – див. [1], § 2.5, умову (2.15), то вибираємо таку **послідовність** вирізання (обходу) вузлів, щоб для кожного вирізаного вузла *кількість стержнів, реакції яких ще невідомі, не була б більшою за два*.

☛: при цьому не існує ніякої іншої вимоги стосовно переходу від одного вузла до іншого; наприклад, для розглядуваної ферми розрахунків її можна розпочинати з вузла B , де сходяться стержні 1 і 2 з невідомими зусиллями. Після знаходження \vec{S}_1 та \vec{S}_2 можна переходити до вузла A , з якого визначити \vec{S}_3 та \vec{S}_4 , а можна відразу після вузла B переходити до вузла U , де сходяться стержні 11 і 12. Можлива й будь-яка інша легітимна послідовність.

Для кожного розглядуваного вирізаного вузла вибираємо систему координат⁶, записуємо умови та складаємо відповідні рівняння рівноваги.

Зусилля у деяких стержнях ферми можуть дорівнювати нулю; для виявлення таких стержнів будемо застосовувати **леми про**

⁶ Див. **зауваження № 4** до **алгоритму** на с. 116.

нульові стержні (див. [1], § 2.10), не зображуючи ніяких розрахункових схем і не виконуючи ніяких розрахунків. Оскільки *механічна дія кожного нульового стержня на вузли відсутня*, то будемо умовно вважати, що відсутні й самі нульові стержні, відкидаючи (у думці) такі стержні від ферми, що ніяк не позначиться на характері та значенні зусиль у всіх інших стержнях.

Отже, послідовно розглядаємо рівновагу вузлів, відповідні розрахункові схеми яких наведено на рисунку 22z.5.

3.1. Вузол B.

За **лемою 1**: $S_1 = 0$ та $S_2 = 0$.

3.2. Вузол A (рис. 22z.5,а).

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad R_A \cdot \cos \psi + S_3 \cdot \sin \alpha + S_4 = 0; \quad (22.3)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad R_A \cdot \sin \psi + S_3 \cdot \cos \alpha = 0. \quad (22.4)$$

З трикутника ABC за теоремою Піфагора

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \text{ (м)};$$

тоді

$$\sin \alpha = \sin(\angle BAC) = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{\sqrt{52}}$$

та

$$\cos \alpha = \cos(\angle BAC) = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{\sqrt{52}}.$$

З рівняння (22.4)

$$S_3 = -\frac{R_A \cdot \sin \psi}{\cos \alpha} = -\frac{6\sqrt{73} \cdot \frac{3}{\sqrt{73}}}{\frac{6}{\sqrt{52}}} = -18 \cdot \frac{\sqrt{52}}{6} = -3 \cdot \sqrt{52} \approx -21,63 \text{ (кН)}.$$

З рівняння (22.3)

$$\begin{aligned}
 S_4 &= -R_A \cdot \cos \psi - S_3 \cdot \sin \alpha = \\
 &= -6\sqrt{73} \cdot \frac{8}{\sqrt{73}} - (-3\sqrt{52}) \cdot \frac{4}{\sqrt{52}} = -48 + 12 = -36 \text{ (кН)}.
 \end{aligned}$$

3.3. Вузол D.

За лемою 2: $S_8 = S_4 = -36 \text{ кН}$, а $S_5 = 0$.

3.4. Вузол U.

За лемою 3: $S_{12} = 0$, а $S_{11} = -P = -60 \text{ кН}$ (знак мінус прийнято через те, що прикладена до вузла U сила \vec{P} стержень II стискає, див. також [1], § 2.10, рис. 2.38,г і відповідні міркування).

3.5. Вузол K (рис. 22z.5,б).

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad -S_8 - S_7 \cdot \sin \alpha = 0; \quad (22.5)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad S_{10} + S_7 \cdot \cos \alpha = 0. \quad (22.6)$$

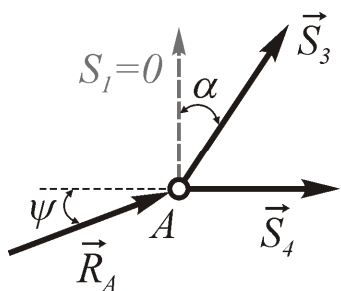
З рівняння (22.5)

$$S_7 = -\frac{S_8}{\sin \alpha} = -\frac{-36}{\frac{4}{\sqrt{52}}} = 36 \cdot \frac{\sqrt{52}}{4} = 9 \cdot \sqrt{52} \approx 64,90 \text{ (кН)}.$$

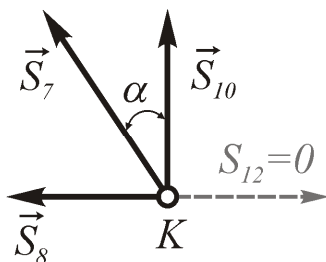
З рівняння (22.6)

$$S_{10} = -S_7 \cdot \cos \alpha = -9\sqrt{52} \cdot \frac{6}{\sqrt{52}} = -54 \text{ (кН)}.$$

а)



б)



в)

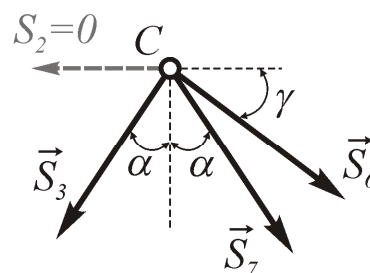


Рисунок 22z.5. Розрахункові схеми вузлів A, K і C

3.6. Вузол C (рис. 22z.5,в).

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad -S_3 \cdot \sin \alpha + S_7 \cdot \sin \alpha + S_6 \cdot \cos \gamma = 0; \quad (22.7)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad -S_3 \cdot \cos \alpha - S_7 \cdot \cos \alpha - S_6 \cdot \sin \gamma = 0. \quad (22.8)$$

☛: складені для вузла C рівняння (22.7) і (22.8) містять тільки одну невідому величину – S_6 , для знаходження котрої достатньо будь-якого одного зі складених рівнянь. Знайдемо S_6 з обох рівнянь та порівняймо отримані значення (звісно, що вони мають бути однаковими), розглядаючи це як певну „попередню“ перевірку.

Отже, з рівняння (22.7)

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{S_3 \cdot \sin \alpha - S_7 \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma} = \frac{(S_3 - S_7) \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma} = \frac{((-3 \cdot \sqrt{52}) - 9 \cdot \sqrt{52}) \cdot \frac{4}{\sqrt{52}}}{0,8} = \\ &= \frac{-12 \cdot \sqrt{52} \cdot \frac{4}{\sqrt{52}}}{0,8} = -\frac{48}{0,8} = -60(kH), \end{aligned}$$

а з рівняння (22.8)

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{-S_3 \cdot \cos \alpha - S_7 \cdot \cos \alpha}{\sin \gamma} = \frac{-(S_3 + S_7) \cdot \cos \alpha}{\sin \gamma} = \\ &= \frac{-((-3 \cdot \sqrt{52}) + 9 \cdot \sqrt{52}) \cdot \frac{6}{\sqrt{52}}}{0,6} = \frac{-6 \cdot \sqrt{52} \cdot \frac{6}{\sqrt{52}}}{0,6} = -\frac{36}{0,6} = -60(kH). \end{aligned}$$

Отже, „попередня“ перевірка виконується, оскільки знайдені з обох рівнянь значення S_6 збігаються.

Таким чином, зусилля в усіх стержнях ферми визначені (або розрахунок ферми закінчено). Отримані результати свідчать, що в дійсності стержні 1, 2, 5 та 12 є нульовими, стержень 7 розтягнутий, а всі інші стержні (а саме – 3, 4, 6, 8, 10 та 11) стиснуті.

4. Звернімо увагу на те, що в процесі розв'язування ніяк не використовувався вузол J ферми, для якого також можна скласти

два рівняння рівноваги. Тоді застосуємо зазначені рівняння для загальної (або остаточної) **аналітичної перевірки** розрахунку ферми. Отже, вирізаємо вузол J (рис. 22z.6), складаємо відповідні перевірочні рівняння, підставляємо всі необхідні значення та *пересвідчуємося у виконанні умови рівноваги*:

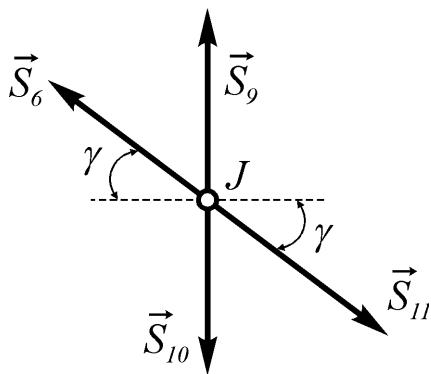


Рисунок 22z.6

ваги:

$$\begin{aligned} \sum X &= -S_6 \cdot \cos \gamma + S_{11} \cdot \cos \gamma = \\ &= (S_{11} - S_6) \cdot \cos \gamma = [(-60) - (-60)] \cdot \cos \gamma = \\ &= (-60 + 60) \cdot \cos \gamma = 0 \cdot \cos \gamma \equiv 0, \\ \sum Y &= S_6 \cdot \sin \gamma + S_9 - S_{11} \cdot \sin \gamma - S_{10} = \\ &= (S_6 - S_{11}) \cdot \sin \gamma + S_9 - S_{10} = \\ &= [(-60) - (-60)] \cdot \sin \gamma + (-54) - (-54) \equiv 0. \end{aligned}$$

Оскільки перевірка виконується, то робимо *висновок*: розрахунок ферми виконаний правильно.

✎: як видно з розв'язаної задачі, аналітичний розрахунок плоскої простої ферми способом вирізання вузлів забезпечує можливість для кожного вузла скласти 2 (два) рівняння рівноваги; тоді для розглядуваної ферми, яка містить сім вузлів ($B = 7$), усього можна скласти $2 \cdot B = 2 \cdot 7 = 14$ рівнянь рівноваги. Оскільки ферма складається з *одинадцяти* стержнів ($C = 11$), то для знаходження зусиль у цих стержнях достатньо також *одинадцяти* рівнянь; таким чином, з усіх чотирнадцяти рівнянь, які є можливість скласти, *три* виявляються „зайвими“. Ці „зайві“ рівняння застосовують для:

- **загальної перевірки** розрахунку ферми (як це зроблено у розглянутій задачі);
- **знаходження зовнішніх опорних реакцій ферми** (у тому разі, коли ці реакції не визначені попередньо); звертаємо увагу, що трьох зазначених рівнянь достатньо для знаходження трьох невідомих параметрів S_9 , R_A та ψ , які однозначно визначають зо-

внішні опорні реакції⁷.

❗: певним недоліком (або певною незручністю) аналітичного розрахунку плоскої простої ферми способом вирізання вузлів вважається те, що можливість виконати загальну перевірку правильності розрахунків настає тільки при вирізанні *останнього* вузла ферми; при цьому, якщо перевірка не виконується, то констатується лише цей факт, але *ніяк не визначається*, в якому саме місці обчислень (або при вирізанні якого саме вузла) припущена *помилка* або *помилки* (очевидно, що чим з більшої кількості стержнів і вузлів складається ферма, тим більшим є зазначений недолік).

❗: для вчасного визначення можливої помилки аналітичних розрахунків для кожного вузла ферми, розглядаючи його як окреме матеріальне тіло, можна:

- виконувати графоаналітичну перевірку (так, як це робилося, наприклад, у задачах 5÷9);
- виконувати графічну перевірку, пересвідчуючись побудовою силових багатокутників у їх замкненості.

На рисунку 22z.7,а в указаному на ньому силовому масштабі збудовано трикутник сил \vec{R}_A , \vec{S}_3 , \vec{S}_4 , які прикладені до вузла A ; при побудові цього трикутника враховано, що напрямки реакцій \vec{S}_3 і \vec{S}_4 у ньому протилежні до їх напрямків на рисунку 22z.5,а, через те, що, як встановлено в підпункті **3.2** задачі, стержні 3 та 4 в дійсності є стиснутими. Оскільки збудований силовий трикутник виявляється замкнутим, то реакції \vec{S}_3 і \vec{S}_4 визначені правильно. Відповідні замкнені багатокутники сил, які прикладені до вузлів K , C та J , наведені на рисунках 22z.7,б÷22z.7,г.

⁷ Розрахунок ферми без попереднього визначення її зовнішніх опорних реакцій *суттєво ускладнює математичну частину* процесу розрахунку (бажаючим переконатися в цьому пропонується самостійно розв'язати розглянуту задачу в зазначеній постановці).

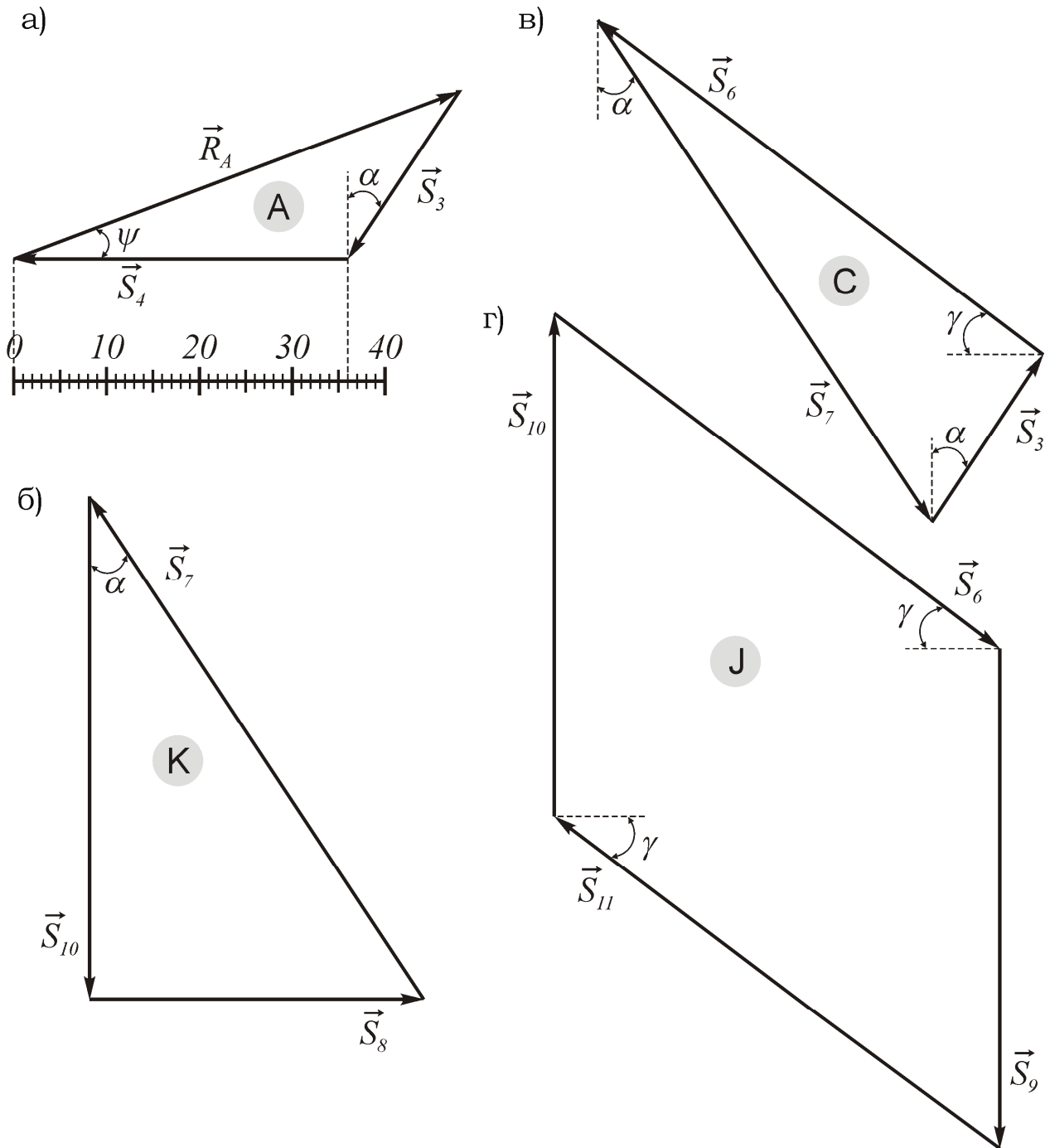


Рисунок 22z.7

Відповідь: зовнішні опорні реакції $R_A \approx 51,26 \text{ kH}$, $S_9 = -54 \text{ kH}$;

визначені зусилля в стержнях ферми наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12
Знак зусилля			-	-		-	+	-	-	-	
Зусилля (kH)	0	0	21,63	36	0	60	64,90	36	54	60	0

ПРОЕКЦІЯ СИЛИ НА ВІСЬ

(ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ)

ЗАДАЧА № 23

Для заданої на рисунку 23z.1 сукупності сил $\vec{F}_1 \div \vec{F}_9$, які прикладені у відповідних точках до певного матеріального тіла (саме тіло на рисунку не зображене), знайти суму проєкцій їх на декартові координатні осі x , y та z , якщо:

$$F_1 = 36 \text{ kH}; \quad F_2 = 7 \cdot \sqrt{89} \text{ (kH)}; \quad F_3 = 4 \cdot \sqrt{61} \text{ (kH)};$$

$$F_4 = 5 \text{ kH}; \quad F_5 = 3 \cdot \sqrt{89} \text{ (kH)}; \quad F_6 = 26 \text{ kH};$$

$$F_7 = 80 \text{ kH}; \quad F_8 = 5 \cdot \sqrt{61} \text{ (kH)}; \quad F_9 = 6 \cdot \sqrt{125} \text{ (kH)}.$$

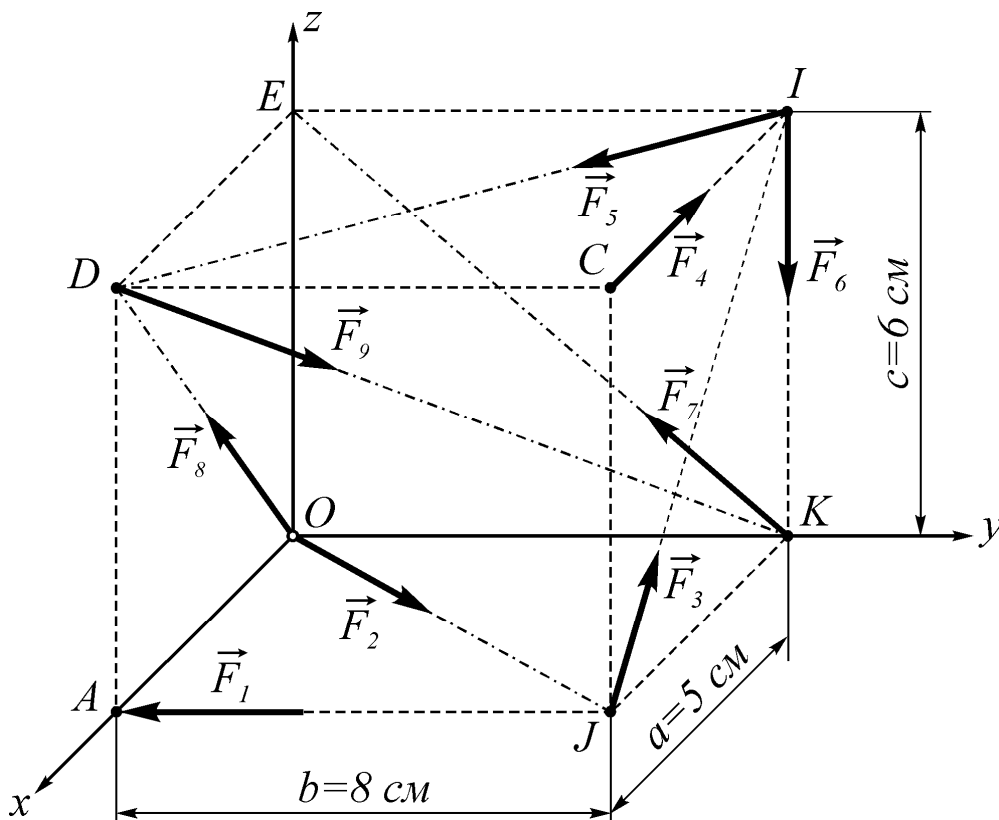


Рисунок 23z.1

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ¹

✧ У курсі нарисної геометрії вводилися поняття про горизонтальну, фронтальну та профільні площини. Якщо на рисунку 23z.1 розглянути паралелепіпед $OKJAEICD$, то:

- горизонтальною є площина, що утворена координатною площиною xOy , в якій розташована грань $OKJA$ паралелепіпеда (цю грань доречно назвати нижньою горизонтальною гранню розглядуваного паралелепіпеда); також горизонтальною є площина, що збігається з гранню $EICD$ паралелепіпеда (тобто $EICD$ – верхня горизонтальна грань паралелепіпеда $OKJAEICD$); очевидно, що вертикальна вісь z проходить перпендикулярно до будь-якої лінії, розташованій у горизонтальних площинах (рис. 23z.2,а);
- фронтальною є площина, що утворена координатною площиною zOy , в якій розташована грань $OEIK$ паралелепіпеда (цю грань доречно назвати задньою фронтальною гранню розглядуваного паралелепіпеда); також фронтальною є площина, що збігається з гранню $ADCJ$ паралелепіпеда (тобто $ADCJ$ – передня фронтальна грань паралелепіпеда $OKJAEICD$); очевидно, що горизонтальна вісь x проходить перпендикулярно до будь-якої лінії, розташованій у фронтальних площинах (рис. 23z.2,б);
- профільною є площина, що утворена координатною площиною zOx , в якій розташована грань $OADE$ паралелепіпеда (цю грань доречно назвати лівою профільною гранню паралелепіпеда $OKJAEICD$); також профільною є площина, що збігається з гранню $KJCI$ паралелепіпеда

¹ З точки зору теоретичної механіки розв'язування задачі 23 нічим не відрізняється від розв'язування задач 1÷4 (див. с. 7÷18) і від будь-якої іншої задачі, де необхідно знаходити суму проекції сил на певну вісь, оскільки **в усіх випадках проекція сили на вісь знаходиться однаково**. Єдиною особливістю (а для декого – досить суттєвою складністю) є те, що необхідно уявляти та розуміти, як саме проходять усі задані сили по відношенню до координатних осей (для чого треба вміти чітко орієнтуватися **у тривимірному просторі**, який зображено на *плоскому рисунку*).

(тобто $KJCI$ – права профільна грань розглядуваного паралелепіпеда); очевидно, що горизонтальна вісь y проходить перпендикулярно до будь-якої лінії, розташованій в профільних площинах (рис. 23z.2,в).

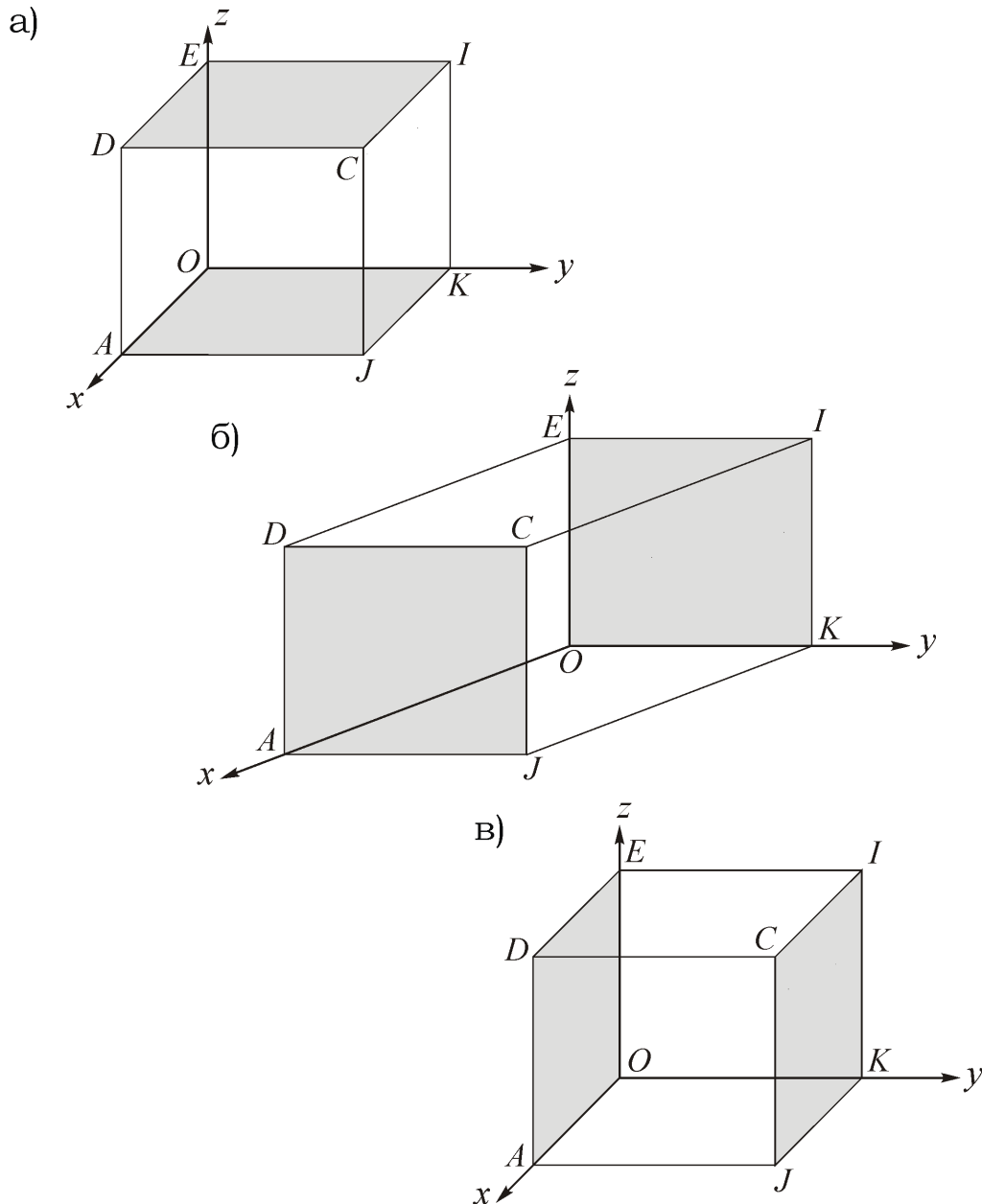


Рисунок 23z.2

Отже, знаходимо проекції кожної сили на осі x , y та z .

1. Сила \vec{F}_1 прикладена до тіла у точці A та лінія дії її проходить по ребру AJ нижньої горизонтальної грані паралелепіпеда $OKJAEICD$, тобто лінія дії сили \vec{F}_1 паралельна до осі y . Це озна-

чає, що сила \vec{F}_1 проектується у натуральну величину на вісь y та не проектується на осі x і z ; оскільки ж напрямок сили \vec{F}_1 протилежний до напрямку осі y , то її проекція на цю вісь від'ємна. Тоді

$$F_{1x} = 0; \quad F_{1y} = -F_1; \quad F_{1z} = 0.$$

Зауваження № 23.1: можна зробити висновок, що сила \vec{F}_1 з точки зору проектування її на координатні осі виявилася *хорошою*² силою. Такими ж *хорошими* є сили \vec{F}_4 та \vec{F}_6 , лінії дій яких також проходять по ребрах паралелепіпеда. Тому відразу з'ясуємо та запишемо проекції на координатні осі цих сил.

2. Сила \vec{F}_4 прикладена до тіла у точці C , а лінія дії її, що проходить по ребру CI паралелепіпеда $OKJAEICD$, є паралельною до осі x ; тоді сила \vec{F}_4 проектується на вісь x у натуральну величину та не проектується на осі y і z . Тому що напрямки сили \vec{F}_4 та осі x протилежні, то проекція сили \vec{F}_4 на цю вісь від'ємна:

$$F_{4x} = -F_4; \quad F_{4y} = 0; \quad F_{4z} = 0.$$

3. Сила \vec{F}_6 прикладена до тіла у точці I , лінія дії її проходить по ребру IK паралелепіпеда, тобто лінія дії сили \vec{F}_6 паралельна до осі z . Це означає, що розглядувана сила проектується у натуральну величину на вісь z та не проектується на осі x і y . Тому що сила \vec{F}_6 напрямлена вниз, а вісь z – угору, то проекція сили \vec{F}_6 на вісь z від'ємна. Отже,

$$F_{6x} = 0; \quad F_{6y} = 0; \quad F_{6z} = -F_6.$$

² Звичайно, що визначення сили як *хороша* не є науковим поняттям (або терміном); будемо розглядати це визначення як *навчальне*.

✎: проектування *хороших* сил \vec{F}_1 , \vec{F}_4 та \vec{F}_6 у розглядуваній задачі абсолютно нічим не відрізняється від проектування аналогічних сил \vec{F}_3 та \vec{F}_6 у задачі 1 (див. с. 11 та 13).

4. Сила \vec{F}_2 прикладена до тіла у точці O , лінія дії її проходить по діагоналі OJ нижньої грані паралелепіпеда $OKJAEICD$, тобто лінія дії сили \vec{F}_2 розташована в горизонтальній площині. Це означає, що сила \vec{F}_2 не проектується на вертикальну вісь z , а лише на горизонтальні осі x та y . Оскільки напрямок сили \vec{F}_2 збігається з напрямками осей x та y , то на ці осі вона проектується зі знаком плюс. Для знаходження проєкцій позначимо кут AOJ як φ (див. рис. 23z.3).

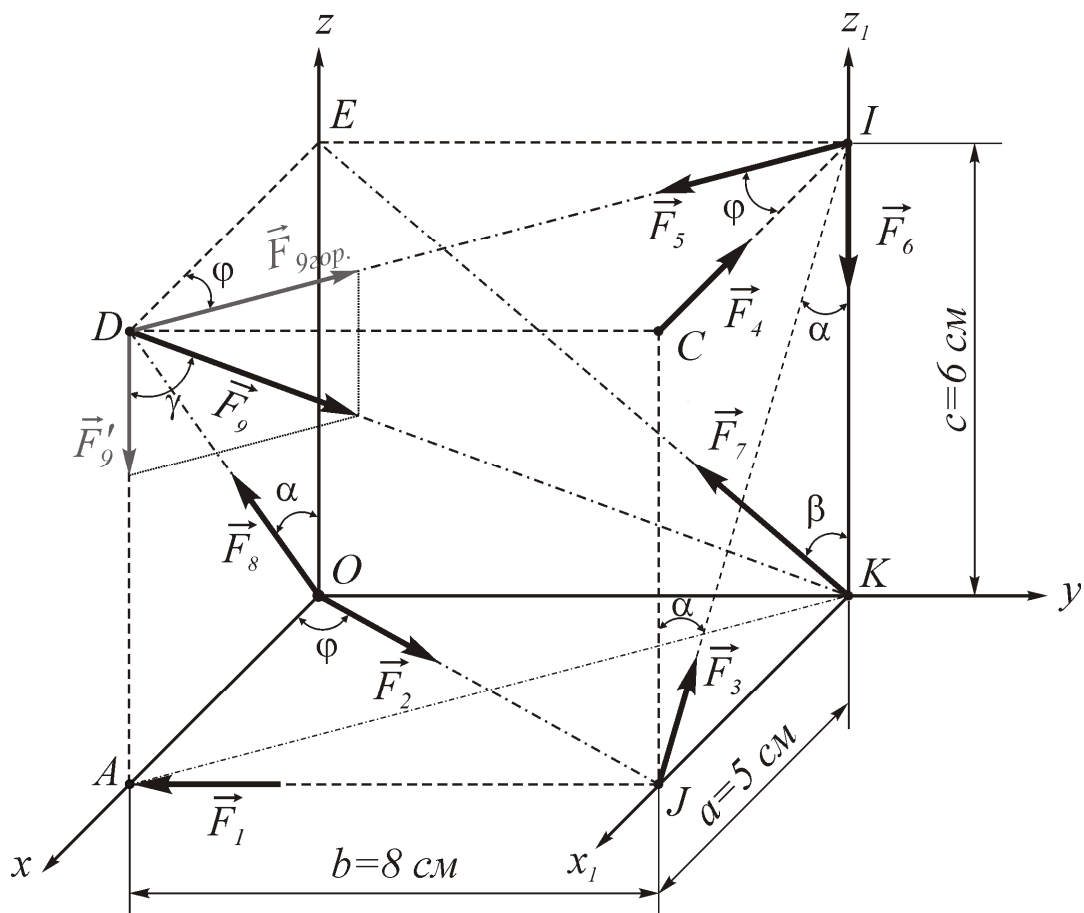


Рисунок 23z.3

Очевидно, що кут φ визначає гострий кут між лінією дії сили \vec{F}_2 та координатною віссю x (див. також рис. 23z.4, де зображено нижню горизонтальну грань паралелепіпеда $OKJAEICD$). Тоді

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \varphi; \quad F_{2y} = F_2 \cdot \sin \varphi; \quad F_{2z} = 0.$$

5. Сила \vec{F}_3 прикладена до тіла у точці J , лінія дії її проходить по діагоналі JL бічної грані $JCIK$ паралелепіпеда $OKJAEICD$, тобто лінія дії цієї сили розташована в профільній площині, завдяки чому сила \vec{F}_3 не проектується на горизонтальну вісь y , а лише на осі x та z , які разом і утворюють профільну площину³. Оскільки сила \vec{F}_3 напрямлена від спостерігача рисунка 23z.1 та вгору, то:

- напрямок сили \vec{F}_3 не збігається з напрямком осі x – її проекція на вісь x від’ємна;
- напрямок сили \vec{F}_3 збігається з напрямком осі z – її проекція на вісь z додатна.

Для визначення цих проекцій позначимо на схемі кут $\angle CJL$ як α (див. рис. 23z.3). Очевидно, що кут α визначає гострий кут між лінією дії сили \vec{F}_3 та віссю z (див. також рис. 23z.5, де зображена права бічна грань $JCIK$ паралелепіпеда $OKJAEICD$). Тоді

$$F_{3z} = F_3 \cdot \cos \alpha; \quad F_{3x} = -F_3 \cdot \sin \alpha; \quad F_{3y} = 0.$$

³ Узагалі-то, осі x і z утворюють профільну площину, що збігається з гранню $OADE$ паралелепіпеда, а не з гранню $JCIK$, де розташована лінія дії сили \vec{F}_3 . Але, якщо провести допоміжні осі x_1 та z_1 (див. рис. 23z.3), які паралельні осям x і z відповідно, та знайти проекції сили \vec{F}_3 на осі x_1 та z_1 , то ці проекції й будуть дорівнювати шуканим проекціям сили \vec{F}_3 на осі x і z (про це саме говорить відповідна теорема векторної алгебри: проекції довільного вектора на будь-які паралельні та однаково напрямлені осі рівні одна одній).

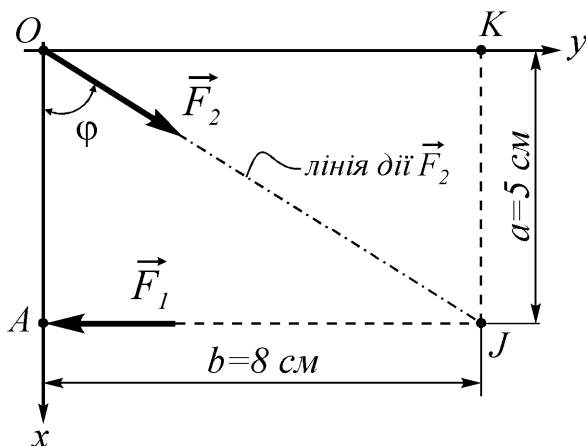


Рисунок 23z.4

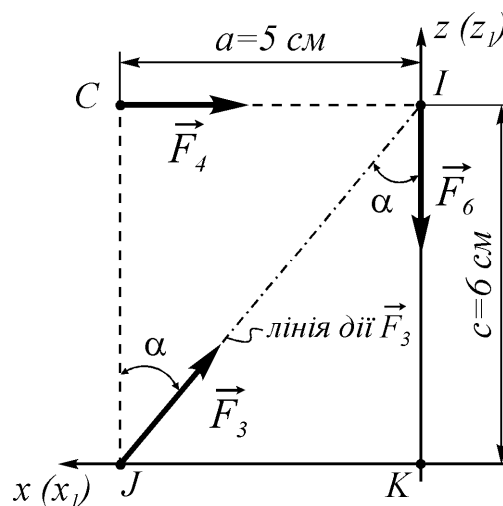


Рисунок 23z.5

6. Сила \vec{F}_5 прикладена до тіла у точці I , а лінія дії її проходить по діагоналі ID грані $EDCI$ паралелепіпеда $OKJAEICD$, тобто лінія дії сили \vec{F}_5 лежить у горизонтальній площині, через що сила \vec{F}_5 не проектується на вертикальну вісь z . Тому що напрямок сили \vec{F}_5 збігається з напрямком осі x і не збігається з напрямком осі y , то на вісь x сила \vec{F}_5 проектується зі знаком плюс, а на вісь y – з мінусом. Для визначення проєкцій F_{5x} та F_{5y} роздивимося уважно верхню грань $EDCI$ (див. рис. 23z.6, де зображено цю грань): очевидно, що кути DIC й IDE однакові та в трикутниках DIC і IDE до кожного з цих кутів прилеглим є катет довжиною 5 см , а протилежним – катет довжиною 8 см . Оскільки в три-

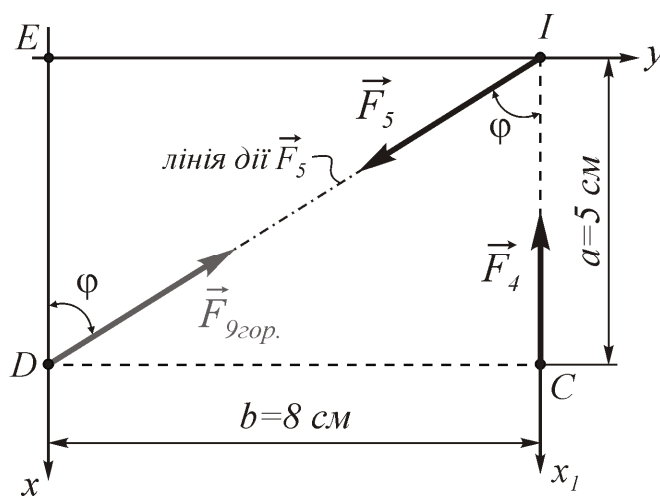


Рисунок 23z.6

кутнику OAJ (див. рис. 23z.4) прилеглим до кута φ є катет $OA = 5\text{ см}$, а протилежним – катет $AJ = 8\text{ см}$, то $\angle DIC = \angle IDE = \varphi$. Позначивши ці кути на рисунку 23z.6, бачимо, що гострий кут між лінією дії сили \vec{F}_5 та віссю x (або x_1) дорівнює φ . Тоді

$$F_{5x} = F_5 \cdot \cos \varphi; \quad F_{5y} = -F_5 \cdot \sin \varphi; \quad F_{5z} = 0.$$

7. Сила \vec{F}_7 прикладена до тіла у точці K , а лінія дії її проходить по діагоналі KE задньої фронтальної грані $OEIK$ паралелепіпеда $OKJAEICD$, через що сила \vec{F}_7 проектується лише на осі y та z , які разом і утворюють зазначену фронтальну площину. Оскільки сила \vec{F}_7 напрямлена ліворуч й угору (див. рис. 23z.1), то:

- напрямок сили \vec{F}_7 не збігається з напрямком осі y – проекція сили \vec{F}_7 на цю вісь від’ємна;
- напрямок сили \vec{F}_7 збігається з напрямком осі z – проекція сили \vec{F}_7 на цю вісь додатна.

Для визначення цих проекцій позначимо на схемі кут IKE як β (див. рис. 23z.3). Очевидно, що кут β визначає гострий кут між лінією дії сили \vec{F}_7 та віссю z (див. рис. 23z.7). Тоді

$$F_{7z} = F_7 \cdot \cos \beta; \quad F_{7y} = -F_7 \cdot \sin \beta; \quad F_{7x} = 0.$$

8. Сила \vec{F}_8 прикладена до тіла у точці O та лінія дії її проходить по діагоналі OD профільної грані $OADE$ паралелепіпеда $OKJAEICD$, завдяки чому сила \vec{F}_8 не проектується на горизонтальну вісь y . Тому що напрямок сили \vec{F}_8 збігається з напрямками осей x і z , то на обидві ці осі сила \vec{F}_8 проектується зі знаком плюс. Для визначення проекцій F_{8x} та F_{8z} з’ясуємо положення лі-

нії дії сили \vec{F}_8 відносно координатних осей: у трикутнику ODE (див. рис. 23z.8, де зображено грань $OADE$) до кута EOD прилеглим є катет $OE = 6 \text{ см}$, а протилежним – катет $DE = 5 \text{ см}$; оскільки в трикутнику JCI (див. рис. 23z.5) до кута α прилеглим є катет $JC = 6 \text{ см}$, а протилежним – катет $CI = 5 \text{ см}$, то $\angle EOD = \alpha$ (як його і позначаємо на рис. 23z.3). Тоді виходить, що кут α визначає гострий кут між лінією дії сили \vec{F}_8 та віссю z (див. рис. 23z.8), а

$$F_{8z} = F_8 \cdot \cos \alpha; \quad F_{8x} = F_8 \cdot \sin \alpha; \quad F_{8y} = 0.$$

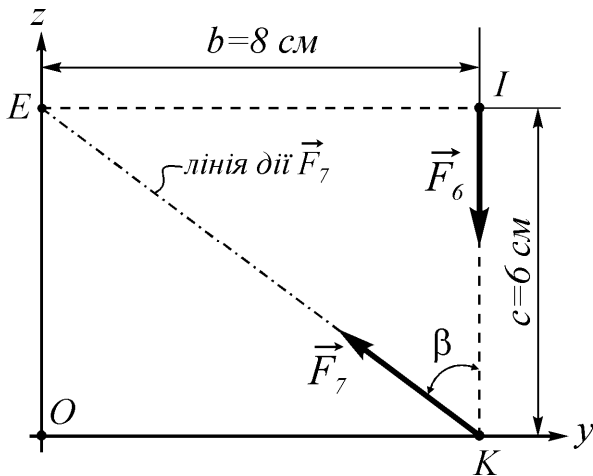


Рисунок 23z.7

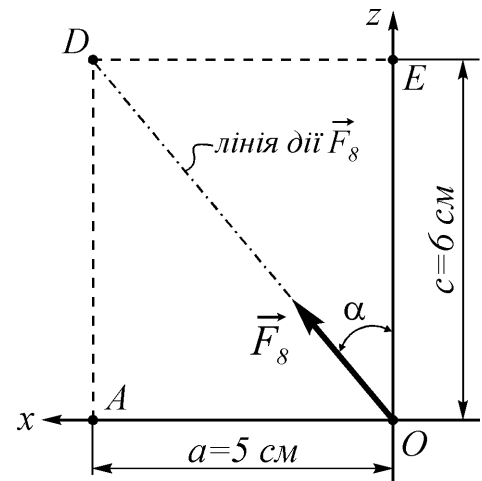


Рисунок 23z.8

✎: знаходження проєкцій на координатні осі сил \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_5 , \vec{F}_7 і \vec{F}_8 (кожна з яких *лежить у якійсь своїй площині*) у розглядуваній задачі практично нічим не відрізняється від проєктування аналогічно розташованих сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_4 та \vec{F}_5 (які всі *лежать в одній площині*) у задачі 1 (див. с. 8÷13). Якщо розглянете й викладене в підпунктах **4÷8** проєктування сил \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_5 , \vec{F}_7 та \vec{F}_8 викликало запитання і труднощі, то варто ще раз повернутися до задачі 1.

9. Сила \vec{F}_9 прикладена до тіла у точці D , а лінія дії її проходить по головній діагоналі DK паралелепіпеда $OKJAEICD$.

☛: аналізуючи рисунок 23z.1 (або 23z.3), неважко усвідомити, що кут DKJ визначає гострий кут між лінією дії сили \vec{F}_9 та віссю x (точніше – x_1), а з прямокутного трикутника DKJ є можливість встановити, що $\cos \angle DKJ = \frac{KJ}{DK}$; аналогічно з трикутників DKO і KDI можна знайти значення косинусів гострих кутів між лінією дії сили \vec{F}_9 та віссю y ($\cos \angle DKO = \frac{OK}{DK}$) і віссю z ($\cos \angle DKI = \frac{KI}{DK}$) – див. рисунок 23z.9, а÷в, де виділено зазначені трикутники й кути. Тоді за формулою (2.9) § 2.3 [1] можна знайти значення проєкцій F_{9x} , F_{9y} та F_{9z} .

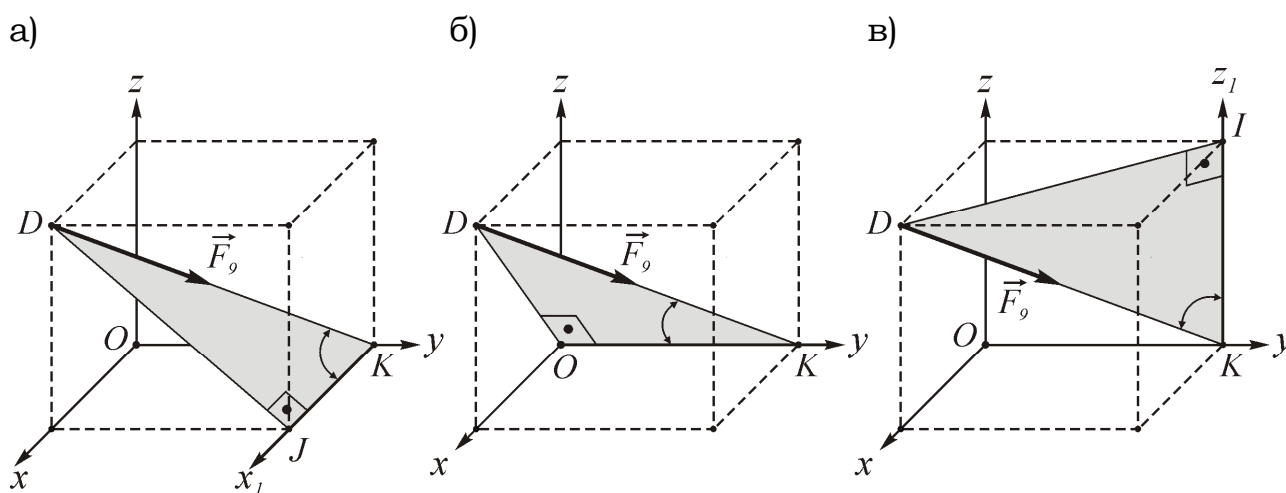


Рисунок 23z.9

Розглянемо *інший спосіб* знаходження проєкцій на координатні осі сили \vec{F}_9 . Спочатку (відповідно до викладеного у § 2.1 та рис. 2.4,в [1]) розкладемо силу \vec{F}_9 на дві ортогональні складові:

- 1) \vec{F}'_9 , яку направимо по ребру DA паралелепіпеда $OKJAEICD$;
- 2) $\vec{F}_{9гор.}$, яка обов'язково виявиться розташованою у верхній

горизонтальній грані $EDCI$ паралелепіпеда та лінія дії якої обов'язково буде проходити по діагоналі DI цієї грані.

Складова $\vec{F}_{9_{гор.}}$ називається *проекцією сили \vec{F}_9 на площину* (в цьому разі – на верхню горизонтальну площину).

① **Проекцією** будь-якої **сили \vec{P} на певну площину π** називається та є сила, наприклад, \vec{P}_π , початок і кінець якої збігаються з проекцією початку й проекцією кінця сили \vec{P} на площину π (на відміну від проекції сили на вісь, яка є скалярною величиною, *проекція сили на площину – величина векторна*).

Для визначення модулів (величин) складових \vec{F}'_9 та $\vec{F}_{9_{гор.}}$ позначимо на схемі кут ADK як γ (див. рис. 23z.3 і рис. 23z.10, де зображена площина $DIKA$ паралелепіпеда $OKJAEICD$). Оскільки кут γ визначає

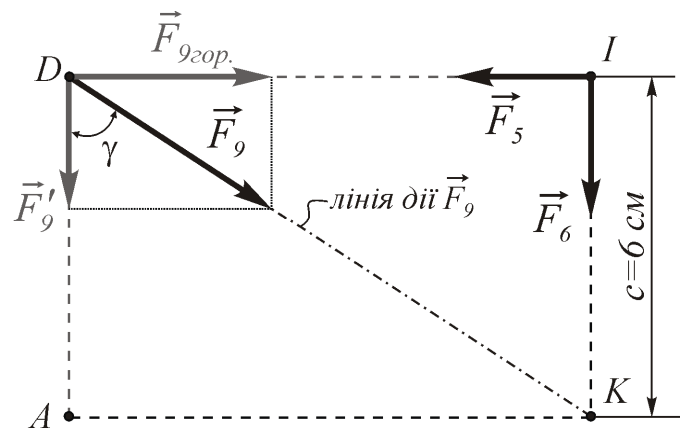


Рисунок 23z.10

гострий кут між лінією дії сили \vec{F}_9 та ребром DA , по якому проходить лінія дії складової \vec{F}'_9 , то

$$F'_9 = F_9 \cdot \cos \gamma, \quad \text{а} \quad F_{9_{гор.}} = F_9 \cdot \sin \gamma.$$

Оскільки $\{\vec{F}'_9, \vec{F}_{9_{гор.}}\} \in \vec{F}_9$ та сила $\vec{F}_{9_{гор.}}$ лежить у горизонтальній площині (що визначає рівність нулю її проекції на вертикальну вісь $z - F_{9_{гор.z}} = 0$), то зрозуміло, що проекція на вісь z сили \vec{F}_9 визначається проекцією на цю вісь сили \vec{F}'_9 , яка напрямлена по *вертикалі* вниз і через це проектується на вісь z у натуральну величину зі знаком мінус; отже,

$$F_{9z} = F'_{9z} = -F'_9.$$

Тому що вертикальна складова \vec{F}'_9 не проектується на горизонтальні осі x та y , то проекції сили \vec{F}_9 на ці осі визначаються відповідними проекціями сили $\vec{F}_{9гор.}$; через те, що її напрямком не збігається з напрямком осі x і збігається з напрямком осі y , а лінія дії сили $\vec{F}_{9гор.}$ утворює гострий кут φ з віссю x (див. рис. 23z.б, де на верхній горизонтальній грані $EDCI$ зображена складова $\vec{F}_{9гор.}$), то

$$F_{9x} = F_{9гор.x} = -F_{9гор.} \cdot \cos \varphi \quad \text{та} \quad F_{9y} = F_{9гор.y} = F_{9гор.} \cdot \sin \varphi.$$

Підставивши всі відповідні значення, матимемо:

$$F_{9x} = -F_9 \cdot \sin \gamma \cdot \cos \varphi; \quad F_{9y} = F_9 \cdot \sin \gamma \cdot \sin \varphi; \quad F_{9z} = -F_9 \cdot \cos \gamma.$$

① Спосіб, за яким знайдено проекції сили \vec{F}_9 на осі x та y , називається **подвійним проектуванням**, оскільки спочатку сила \vec{F}_9 була спроектована на горизонтальну площину, а потім отримана проекція $\vec{F}_{9гор.}$ – на осі x та y .

Отже, розглянувши кожну з дев'яти заданих сил, усі шукані проекції (кожна окремо) визначено.

При набутті певного досвіду (в деякого зі студентів цей досвід з'явиться вже після свідомого осмислення розглядуваної задачі) всі достатньо прості міркування, рисунки 23z.2, 23z.4÷23z.10 та математичні дії, які викладені від слів „У курсі нарисної геометрії...“ на с. 81 до останньої формули можна (і бажано) уявляти й виконувати у думці, а на папері зазначені думки викладати приблизно в такому вигляді:

$$\sum X = F_2 \cdot \cos \varphi - F_3 \cdot \sin \alpha - F_4 + F_5 \cdot \cos \varphi + F_8 \cdot \sin \alpha - F_9 \cdot \sin \gamma \cdot \cos \varphi,$$

$$\sum Y = -F_1 + F_2 \cdot \sin \varphi - F_5 \cdot \sin \varphi - F_7 \cdot \sin \beta + F_9 \cdot \sin \gamma \cdot \sin \varphi,$$

$$\sum Z = F_3 \cdot \cos \alpha - F_6 + F_7 \cdot \cos \beta + F_8 \cdot \cos \alpha - F_9 \cdot \cos \gamma.$$

Для остаточного обчислення знайдемо значення синусів та косинусів необхідних позначених кутів.

З трикутника AOJ (див. рис. 23z.3 або 23z.4), знайшовши за теоремою Піфагора гіпотенузу

$$OJ = \sqrt{(AO)^2 + (AJ)^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} \text{ (см)},$$

визначимо, що

$$\sin \varphi = \frac{AJ}{OJ} = \frac{8}{\sqrt{89}} \quad \text{та} \quad \cos \varphi = \frac{AO}{OJ} = \frac{5}{\sqrt{89}}.^4$$

З трикутника CJI (див. рис. 23z.3 або 23z.5):

$$JI = \sqrt{(CI)^2 + (CJ)^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} \text{ (см)},$$

$$\sin \alpha = \frac{CI}{JI} = \frac{5}{\sqrt{61}} \quad \text{та} \quad \cos \alpha = \frac{CJ}{JI} = \frac{6}{\sqrt{61}}.$$

З трикутника EKI (див. рис. 23z.3 або 23z.7):

$$EK = \sqrt{(EI)^2 + (IK)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см)},$$

$$\sin \beta = \frac{EI}{EK} = \frac{8}{10} \quad \text{та} \quad \cos \beta = \frac{IK}{EK} = \frac{6}{10}.$$

З трикутника ADK (див. рис. 23z.3 та 23z.10): головна діагональ DK паралелепіпеда $OKJAEICD$

$$DK = \sqrt{OA^2 + OK^2 + OE^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{5^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{125} \text{ (см)};$$

⁴ Рекомендується не починати відразу обчислювати на калькуляторі значення синусів і косинусів кутів, а залишити їх у вигляді ірраціональних виразів. Калькулятор варто застосовувати при остаточних обчисленнях, після того як будуть проведені всі можливі скорочення та спрощення. У багатьох задачах такий шлях дає змогу суттєво спростити розрахунки, що проводяться, й зменшити час, похибки і вірогідність помилки самих обчислень; див. також **зауваження № 6.5** до задачі 6 на с. 31÷32.

очевидно, що $AK = OJ = \sqrt{89}$ (см) (див. також рис. 23z.4), тоді

$$\sin \gamma = \frac{AK}{DK} = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{125}} \quad \text{та} \quad \cos \gamma = \frac{AD}{DK} = \frac{6}{\sqrt{125}}.$$

Підставляючи всі визначені значення, дістанемо:

$$\begin{aligned} \sum X &= F_2 \cdot \cos \varphi - F_3 \cdot \sin \alpha - F_4 + F_5 \cdot \cos \varphi + F_8 \cdot \sin \alpha - F_9 \cdot \sin \gamma \cdot \cos \varphi = \\ &= 7\sqrt{89} \cdot \frac{5}{\sqrt{89}} - 4\sqrt{61} \cdot \frac{5}{\sqrt{61}} - 5 + 3\sqrt{89} \cdot \frac{5}{\sqrt{89}} + 5\sqrt{61} \cdot \frac{5}{\sqrt{61}} - \\ &- 6\sqrt{125} \cdot \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{125}} \cdot \frac{5}{\sqrt{89}} = 7 \cdot 5 - 4 \cdot 5 - 5 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = \\ &= 35 - 20 - 5 + 15 + 25 - 30 = 75 - 55 = 20(\text{kH}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y &= -F_1 + F_2 \cdot \sin \varphi - F_5 \cdot \sin \varphi - F_7 \cdot \sin \beta + F_9 \cdot \sin \gamma \cdot \sin \varphi = \\ &= -36 + 7\sqrt{89} \cdot \frac{8}{\sqrt{89}} - 3\sqrt{89} \cdot \frac{8}{\sqrt{89}} - 80 \cdot \frac{8}{10} + 6\sqrt{125} \cdot \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{125}} \cdot \frac{8}{\sqrt{89}} = \\ &= -36 + 7 \cdot 8 - 3 \cdot 8 - 8 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = -36 + 56 - 24 - 64 + 48 = -20(\text{kH}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Z &= F_3 \cdot \cos \alpha - F_6 + F_7 \cdot \cos \beta + F_8 \cdot \cos \alpha - F_9 \cdot \cos \gamma = \\ &= 4\sqrt{61} \cdot \frac{6}{\sqrt{61}} - 26 + 80 \cdot \frac{6}{10} + 5\sqrt{61} \cdot \frac{6}{\sqrt{61}} - 6\sqrt{125} \cdot \frac{6}{\sqrt{125}} = \\ &= 4 \cdot 6 - 26 + 8 \cdot 6 + 5 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = 24 - 26 + 48 + 30 - 36 = 40(\text{kH})^5 \end{aligned}$$

Відповідь: $\sum X = 20 \text{ kH}$, $\sum Y = -20 \text{ kH}$, $\sum Z = 40 \text{ kH}$.

Зауваження № 23.2 (і до багатьох інших задач). При розв'язуванні задачі 23 для сили \vec{F}_9 була застосована **дія** розкладання сили на дві складові, яка жодного разу не застосовувалася і не пояснювалася в усіх попередніх задачах (див. задачі 1÷22). За довгі роки викладання теоретичної механіки автор помітив, що для деяких студентів розкладання сили на складові *суттєво допомагає усвідомити* поняття проєкції сили на вісь та *спрощує* процес знахо-

⁵ Модулі діючих сил в умові задачі навмисно підібрано так, щоб усі відповіді були б цілими числами.

дження відповідних проекцій. Через це зазначені студенти у кожній розв'язуваній задачі відразу визначають *хороші* сили (див. **зауваження № 23.1** на с. 84), а всі інші сили розкладають на складові, що проходять уздовж координатних осей, перетворюючи в такий спосіб вихідну систему сил у її еквівалентну, яка складається тільки з *хороших* сил; після цього знаходять усі необхідні проекції. Так, у розглянутій задачі 23 кожна з сил $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_5, \vec{F}_7$ і \vec{F}_8 розкладається на свої дві ортогональні складові \vec{F}'_2 та \vec{F}''_2, \vec{F}'_3 та \vec{F}''_3, \vec{F}'_5 та \vec{F}''_5, \vec{F}'_7 та \vec{F}''_7, \vec{F}'_8 та \vec{F}''_8 , а сила \vec{F}_9 спочатку розкладається на складові \vec{F}'_9 та $\vec{F}_{9\text{гор}}$ (так, як це зроблено в підпункті **9**), а потім сила $\vec{F}_{9\text{гор}}$ також розкладається на свої складові \vec{F}''_9 та \vec{F}'''_9 ; при цьому вихідна система сил $\{\vec{F}_1 \div \vec{F}_9\}$ перетворюється у її еквівалентну систему з *16 хороших* сил, кожна з яких напрямлена по відповідному ребру паралелепіпеда $OKJAEICD$ (див. рис. 23z.11). Використовуючи введені кути, визначають модулі всіх указаних складових і знаходять суми проекції 16-ти *хороших* сил на координатні осі (звісно, що у разі відсутності помилок у всіх указаних діях значення шуканих величин будуть незмінними у порівнянні з отриманими на с. 94).

Якщо комусь зі студентів (або інших користувачів цього посібника) такі послідовність міркувань і спосіб розв'язування полегшує розв'язання задачі, то вони є, безумовно, можливими та прийнятними (хоча при знаходженні проекцій сил на осі – не обов'язковими). Але вміння у разі потреби правильно розкласти ті чи інші сили на їх складові є обов'язковим при знаходженні *моментів* відповідних сил відносно точки або осі в тих випадках, коли необхідно застосувати теорему Варіньона (мова про це буде вестися в подальших розділах курсу теоретичної механіки).

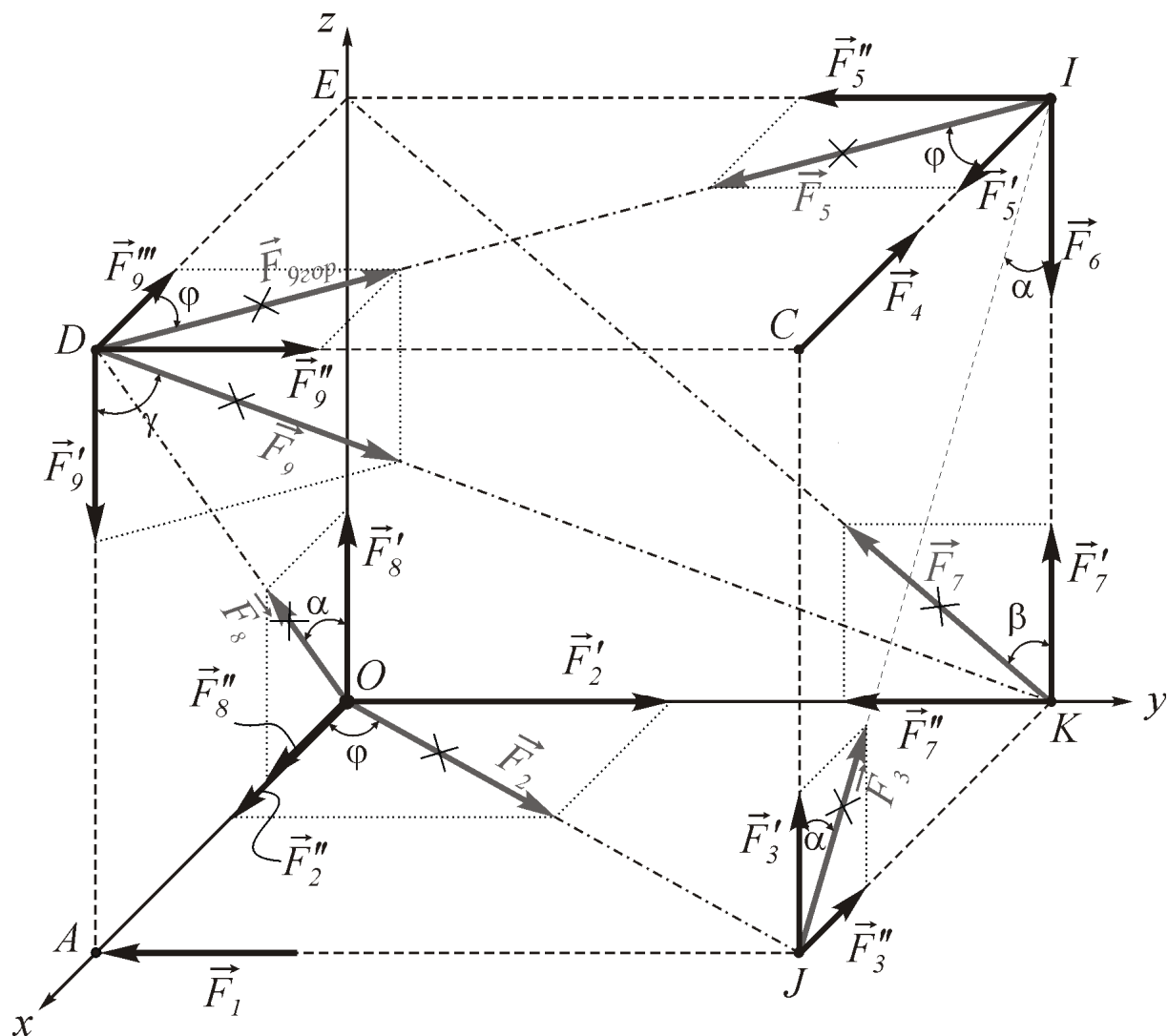


Рисунок 23z.11

ЗАДАЧА № 24

Для заданої на рисунку 24z.1 сукупності сил $\vec{P}_1 \div \vec{P}_7$, які прикладені у відповідних точках до певного матеріального тіла (саме тіло на рисунку не зображене), знайти суму проєкцій їх на декартові координатні осі x , y та z , якщо:

$$P_1 = 10 \text{ кН}; \quad P_2 = 10 \cdot \sqrt{2} \text{ (кН)}; \quad P_3 = 20 \text{ кН};$$

$$P_4 = 25 \text{ кН}; \quad P_5 = 12 \text{ кН}; \quad P_6 = 40 \text{ кН}; \quad P_7 = 2 \cdot \sqrt{164} \text{ (кН)};$$

$$a = 60 \text{ см}; \quad b = 80 \text{ см}; \quad c = 80 \text{ см}.$$

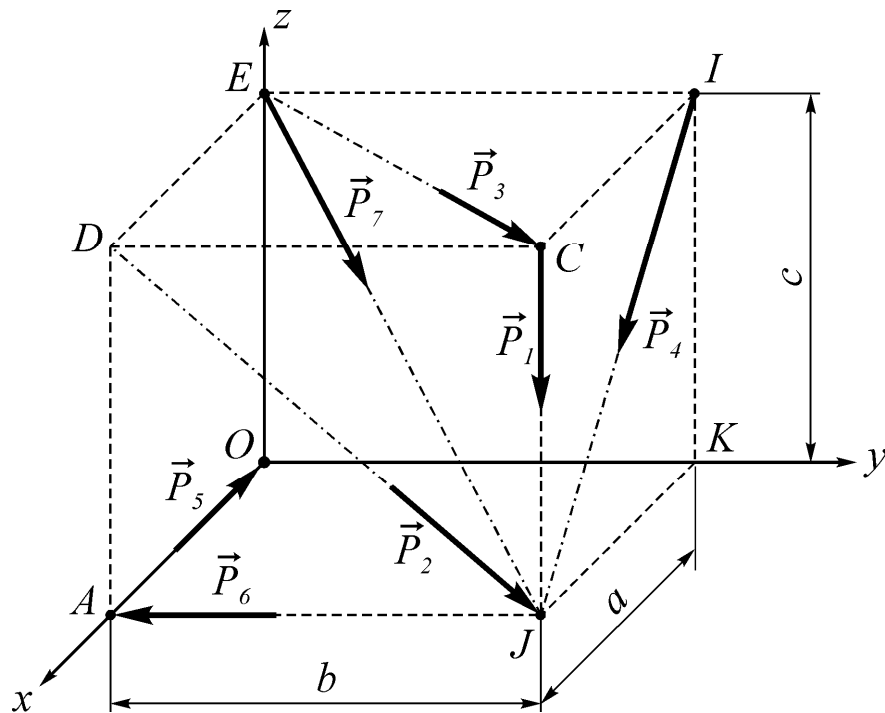


Рисунок 24z.1

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

✎: пропонується розв'язати задачу самостійно та перевірити власний розв'язок із наведеним.

Сили $\vec{P}_1 \div \vec{P}_7$ прикладені до абсолютно твердого тіла, утворюючи *просторову* довільну систему сил. Розв'яжімо задачу про знаходження проєкцій їх на координатні осі способом розкладання сил на складові¹.

Оскільки лінії дій сил \vec{P}_1 , \vec{P}_5 та \vec{P}_6 проходять по відповідних ребрах паралелепіпеда $OKJAEICD$, то ці сили є *хорошими*².

Для проєктування всіх інших сил розкладемо сили \vec{P}_2 , \vec{P}_3 та \vec{P}_4 кожен на дві ортогональні складові, а силу \vec{P}_7 – спочатку на складові \vec{P}'_7 і $\vec{P}_{7\text{гор.}}$, а потім силу $\vec{P}_{7\text{гор.}}$ – знову на дві складові, що означає розкладання сили \vec{P}_7 на три ортогональні складові, та по-

¹ Див. **зауваження № 23.2** до задачі 23 на с. 94÷95.

² Див. **зауваження № 23.1** до задачі 23 на с. 84.

значимо на схемі кути: $\angle AJD = \theta$, $\angle DCE = \angle CEI = \varphi$, $\angle OEJ = \psi$ і $\angle CIJ = \xi$ (див. рис. 24z.2)³. У результаті отримаємо еквівалентну вихідній системі сил нову систему з 12 сил, усі з яких є хорошими.

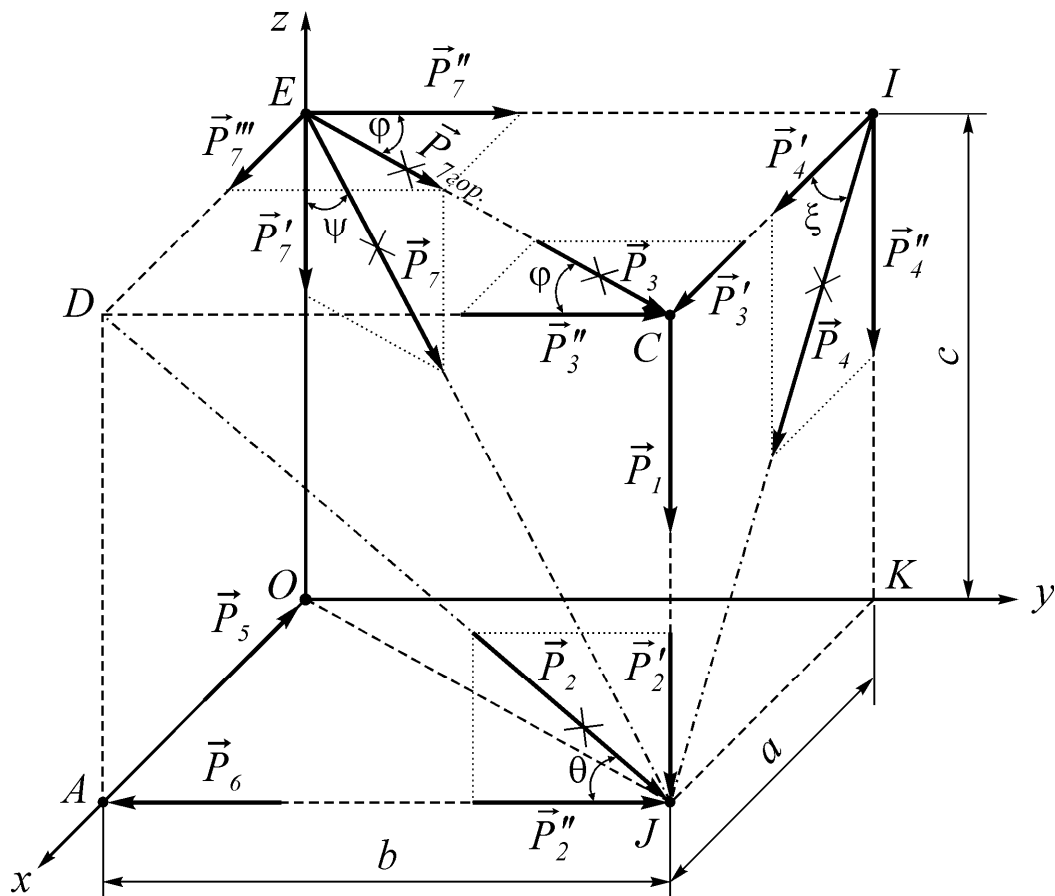


Рисунок 24z.1

Знаходимо модулі всіх зазначених складових:

$$P_2' = P_2 \cdot \sin \theta, \quad P_2'' = P_2 \cdot \cos \theta, \quad P_3' = P_3 \cdot \sin \varphi, \quad P_3'' = P_3 \cdot \cos \varphi,$$

$$P_4' = P_4 \cdot \cos \xi, \quad P_4'' = P_4 \cdot \sin \xi, \quad P_7' = P_7 \cdot \cos \psi, \quad P_{7\text{гор.}} = P_7 \cdot \sin \psi,$$

$$P_7'' = P_{7\text{гор.}} \cdot \cos \varphi = P_7 \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi, \quad P_7''' = P_{7\text{гор.}} \cdot \sin \varphi = P_7 \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi.$$

³ При розв'язуванні будь-якої аналогічної задачі немає потреби зображувати два рисунки (рис. 24z.1, що визначає умову задачі, та рисунок 24z.2, де позначено введені кути і складові, на які розкладено необхідні сили). Тут наводяться обидва рисунки тільки для того, щоб у студентів склалося чітке уявлення про те, як вихідна схема трансформується у необхідну для розв'язування задачі.

Обчислюємо значення синусів та косинусів позначених кутів:

- оскільки трикутник AJD рівнобедрений ($AJ = b = 80 \text{ см} = AD = c = 80 \text{ см}$) і кут $DAJ = 90^\circ$, то $\theta = 45^\circ$, а

$$\sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

- з трикутника DCE

$$EC = \sqrt{(DE)^2 + (DC)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100(\text{см}),$$

$$\sin \varphi = \frac{DE}{EC} = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}, \quad \cos \varphi = \frac{DC}{EC} = \frac{80}{100} = \frac{8}{10};$$

- з трикутника OJE

$$EJ = \sqrt{(OE)^2 + (OJ)^2} = \sqrt{c^2 + (EC)^2} = \sqrt{80^2 + 100^2} = \sqrt{6400 + 10000} = \sqrt{16400} = 10 \cdot \sqrt{164}(\text{см}),$$

$$\sin \psi = \frac{OJ}{EJ} = \frac{100}{10 \cdot \sqrt{164}} = \frac{10}{\sqrt{164}}, \quad \cos \psi = \frac{OE}{EJ} = \frac{80}{10 \cdot \sqrt{164}} = \frac{8}{\sqrt{164}};$$

- з трикутника CIJ

$$IJ = \sqrt{(IC)^2 + (JC)^2} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{3600 + 6400} = 100(\text{см}),$$

$$\sin \xi = \frac{JC}{IJ} = \frac{80}{100} = \frac{8}{10}, \quad \cos \xi = \frac{IC}{IJ} = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}.$$

Проектуємо сили на координатні осі, підставляємо потрібні значення та обчислюємо:

$$\begin{aligned} \sum X &= P'_3 + P'_4 - P_5 + P_7''' = P_3 \cdot \sin \varphi + P_4 \cdot \cos \xi - P_5 + P_7 \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi = \\ &= 20 \cdot \frac{6}{10} + 25 \cdot \frac{6}{10} - 12 + 2\sqrt{164} \cdot \frac{10}{\sqrt{164}} \cdot \frac{6}{10} = \\ &= 12 + 15 - 12 + 12 = 27(\text{кН}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y &= P_2'' + P_3'' - P_6 + P_7'' = P_2 \cdot \cos \theta + P_3 \cdot \cos \varphi - P_6 + P_7 \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi = \\ &= 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 20 \cdot \frac{8}{10} - 53 + 2\sqrt{164} \cdot \frac{10}{\sqrt{164}} \cdot \frac{8}{10} = \\ &= 10 + 16 - 53 + 16 = -11(\text{кН}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum Z &= -P_1 - P_2' - P_4'' - P_7' = -P_1 - P_2 \cdot \sin \theta - P_4 \cdot \sin \xi - P_7 \cdot \cos \psi = \\ &= -34 - 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 25 \cdot \frac{8}{10} - 2\sqrt{164} \cdot \frac{8}{\sqrt{164}} = \\ &= -34 - 10 - 20 - 16 = -80(\text{kH});\end{aligned}$$

Відповідь: $\sum X = 27 \text{ kH}$, $\sum Y = -11 \text{ kH}$, $\sum Z = -80 \text{ kH}$.

ЗАДАЧА № 25

Для заданої на рисунку 25z сукупності сил $\vec{P}_1 \div \vec{P}_8$, які прикладені у відповідних точках до певного матеріального тіла (саме тіло на рисунку не зображене), знайти суму проєкцій їх на декартові координатні осі x , y та z , якщо:

$$P_1 = 200 \cdot \sqrt{5} (\text{H});$$

$$P_2 = 160 \cdot \sqrt{2} (\text{H});$$

$$P_3 = 100 \text{ H};$$

$$P_4 = 150 \text{ H};$$

$$P_5 = 60 \cdot \sqrt{61} (\text{H});$$

$$P_6 = 120 \cdot \sqrt{13} (\text{H});$$

$$P_7 = 200 \text{ H};$$

$$P_8 = 120 \text{ H};$$

$$a = 9 \text{ см};$$

$$b = 12 \text{ см};$$

$$c = 18 \text{ см};$$

$$d = 9 \text{ см}.$$

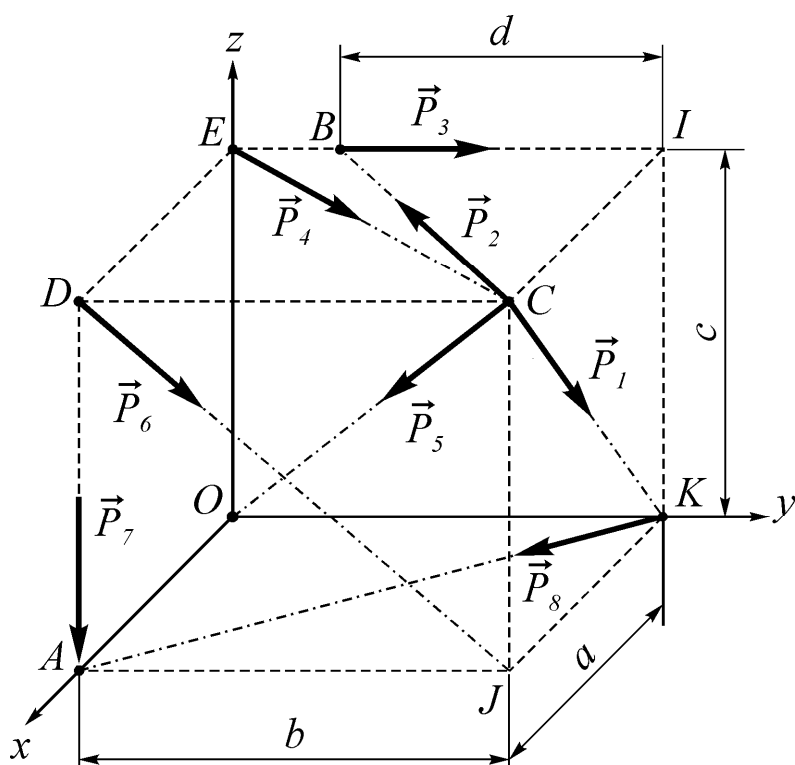


Рисунок 25z

Відповідь: $\sum X = 27 \text{ kH}$, $\sum Y = -11 \text{ kH}$, $\sum Z = -80 \text{ kH}$.

РІВНОВАГА ПРОСТОРОВОЇ ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ.

РОЗРАХУНОК ПРОСТОРОВИХ ФЕРМ

СПОСОБОМ ВИРІЗАННЯ ВУЗЛІВ

ЗАДАЧА № 26

На вузол A просторової шарнірно-стержневої конструкції діє сила \vec{P} , лінія дії якої проходить по відрізку AI , а на вузол B – горизонтальна сила \vec{Q} , лінія дії якої збігається з ребром BC паралелепіпеда $ABCDUKEI$, що визначає положення певних елементів та відповідні розміри самої конструкції (рис. 26z.1).

Знайти зусилля у стержнях $1 \div 6$ конструкції, якщо $P = 9 \text{ kH}$, $Q = 6 \text{ kH}$, $a = 4 \text{ см}$, $b = 6 \text{ см}$, $c = 5 \text{ см}$, $d = 1,5 \text{ см}$ (вагою стержнів знехтувати).

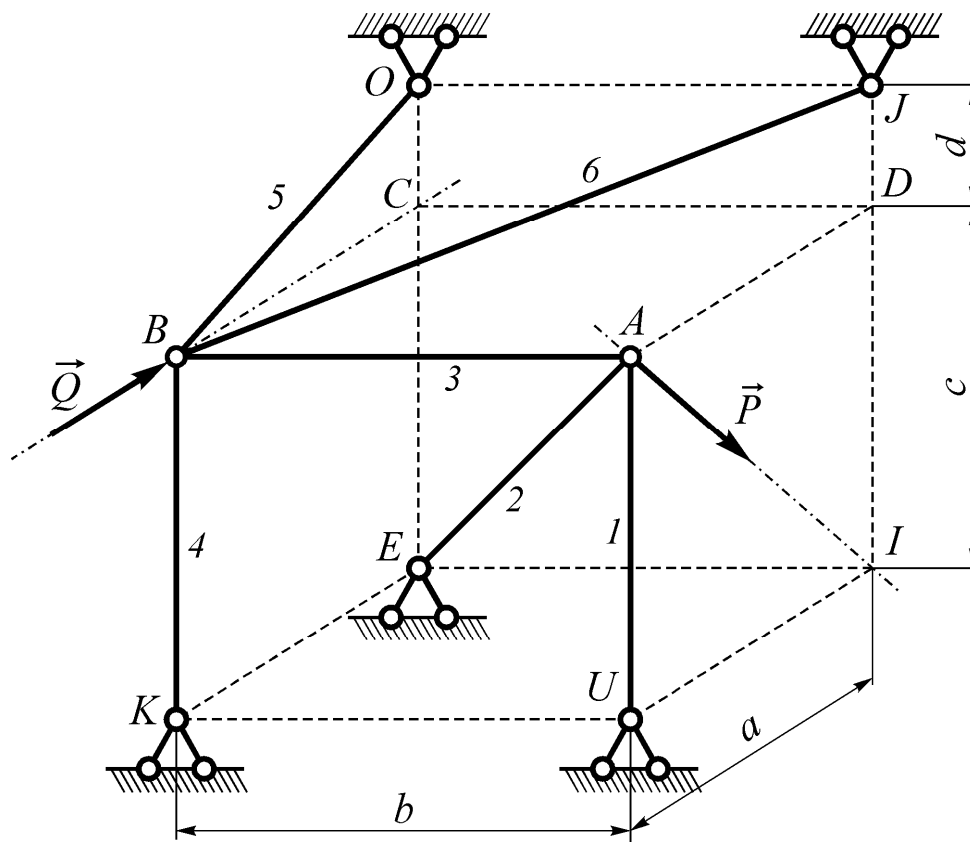


Рисунок 26z.1

❏: назвати **просторовою фермою** зображену на рисунку 26z.1 конструкцію формально неможливо, оскільки якщо у думці відокремити її від опор K, E, U, O, J , то **самостійною** геометрично-незмінною (жорсткою) конструкцією¹ є лише стержень 3 з шарнірами A та B на кінцях, який ніяк не може бути фермою (за великої фантазії цей стержень може розглядатися як **вироджена ферма**); стержні 1, 2 та 4 ÷ 6 для стержня 3 є зовнішніми в'язями, що обмежують його рух у точках A та B (див. відповідні міркування в підпункті 1 задачі 22 на с. 65÷67). Однак, якщо стержні 1 ÷ 6 та опори K, E, U, O, J розташовані так, що вони утворюють геометрично-незмінну (жорстку) конструкцію, то сукупність стержнів 1 ÷ 6 умовно можна вважати просторовою фермою, яка своїми опорними вузлами K, E, U, O, J приєднана до відповідних зовнішніх опор.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

З'ясувавши умову задачі, будемо діяти відповідно до логіки, вимог та алгоритму, які розглянуто та наведено у § 2.9 [1].

1. Звернімо увагу, що на рисунку 26z.1 схематичне зображення кожної з опор K, E, U, O та J виглядає як зображення *шарнірно-нерухомої опори*, але в розглядуваній задачі зазначені опори (як і у будь-якій іншій задачі, де розглядається конструкція, котра знаходиться під дією просторової системи сил) є *сферичними шарнірами*.

① **Сферичним шарніром** (або **сферичною опорою**) називається опора (один із можливих варіантів виконання її наведено на рис. 26z.2), яка складається з кулі (шарніра), що може як зазгодно обертатися всередині нерухомої сферичної порожнечі; центр кулі (шарніра) завжди є нерухомою точкою. У цій точці прикладена **реакція \vec{R} опори**, лінія дії котрої *у загальному*

¹ Див. визначення ферми в § 2.8 [1].

випадкові невідома. Тому для визначення її реакцію розкладають за напрямом декартових координатних осей на три взаємно перпендикулярні складові \vec{R}_x , \vec{R}_y і \vec{R}_z та з рівнянь рівноваги конкретної розглядуваної системи сил знаходять модулі R_x , R_y і R_z .

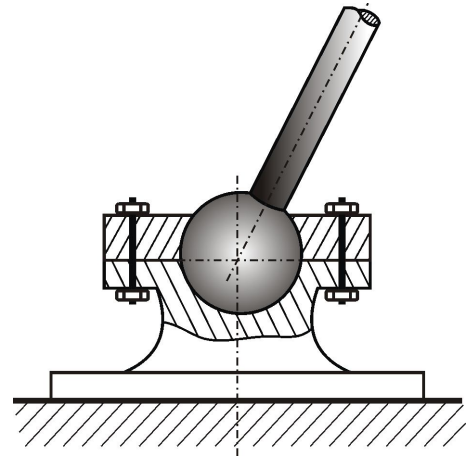


Рисунок 26z.2

Зауваження № 26.1: якщо сферичний шарнір обмежує рух ідеального стержня (як це зображено на рис. 26z.2 і як це має місце для опор K , E , U , O та J на рис. 26z.1), то лінія дії опорної реакції \vec{R} обов'язково проходить по осі стержня, який приєднаний до розглядуваної опори. Це впливає з того, що: 1) тиск на опору з боку стержня визначається його реакцією \vec{S} , лінія дії якої завжди проходить по осі стержня; 2) відповідно до **аксіому 4** (див. [1] § 1.3) реакція \vec{R} опори рівна за величиною й *протилежна за напрямком* зазначеному тиску.

Приймімо зображену на рисунку 26z.1 сукупність стержнів $1 \div 6$ за просторову ферму і застосуємо до неї (як до абсолютно твердого тіла) принцип звільнення від в'язей: відкинемо від неї сферичні опори K , E , U , O та J і замінимо їх дію відповідними реакціями \vec{R}_K , \vec{R}_E , \vec{R}_U , \vec{R}_O та \vec{R}_J ; у результаті дістанемо, що на ферму діє система сил $\{\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}_K, \vec{R}_E, \vec{R}_U, \vec{R}_O, \vec{R}_J\}$, яка є **просторовою довільною** (див. [1], § 1.2, рис. 1.5 і відповідні визначення), **умови рівноваги** якої й відповідні задачі вивчаються та розглядаються у подальшому курсі теоретичної механіки, через що визначити зовнішні опорні реакції розглядуваної ферми поки що *неможливо*.

**2. Визначимо зусилля у стержнях $1 \div 6$ способом вирізан-
ня вузлів.** Визначення дійсних зусиль починаємо з припущення,
що всі стержні ферми є *розтягнутими*.

☛: якщо при розв'язуванні виявиться, що реакція певного стержня
визначається від'ємним числовим значенням, то зазначений стерж-
жень у дійсності є *стиснутим*, а отриманий знак мінус ураховується
в усіх подальших обчисленнях і міркуваннях.

Оскільки вся конструкція перебуває у рівновазі, то у рівнова-
зі знаходиться і будь-який її вузол. Тому будемо розглядати рівно-
вагу кожного окремого вузла ферми, як невірного матеріального
тіла; при цьому врахуємо, що оскільки зовнішні опорні реакції не
визначені, то розглядати рівновагу *опорних вузлів* K , E , U , O та
 J можливості також поки що немає.

З аналізу конструкції зрозуміло, що можна розглядати рівно-
вагу тільки вузлів A і B ². При цьому в'язями, які безпосередньо
обмежують рух кожного вузла, є стержні, що перетинаються (схо-
дяться) в цьому вузлі (так звані *внутрішні в'язі*). Застосовуючи
аксіому 5, послідовно звільняємо вузли від внутрішніх в'язей (**ви-
різаємо**) та розглядаємо окремо рівновагу кожного вузла ферми
під дією *зовнішніх сил*, прикладених до нього, й *реакцій стержнів*,
які перетинаються в цьому вузлі.

☛: у розв'язуваній задачі зовнішніми силами є: 1) задані активні си-
ли \vec{P} і \vec{Q} , які прикладені до вузлів A і B відповідно; 2) зовнішні
опорні реакції \vec{R}_K , \vec{R}_E , \vec{R}_U , \vec{R}_O та \vec{R}_J , які прикладені у відповідних
точках (вузлах).

² По суті для кожного з указаних вузлів розв'язується самостійна задача про його рі-
вновагу (аналогічно до задач 5÷21); кожна задача розв'язується відповідно до наве-
деного на сторінках 115÷118 **алгоритму** (у разі виникнення труднощів і (або) запи-
тань необхідно звернутися до ретельно розглянутих із наведеними розв'язками задач
5÷9 на с. 19÷55 та задачі 22 на с. 65÷80).

☛: тому що стержні ферми приймаються розтягнутими, то на розрахункових схемах вирізаних вузлів реакції всіх стержнів зображуються напрямленими вздовж своїх осей від розглядуваного вузла.

☛: оскільки реакції стержнів однозначно визначають внутрішні зусилля в них, то реакції стержнів на розрахункових схемах вузлів позначаються символами \vec{S}_i , де i – номер відповідного стержня.

☛: будь-який i -тий стержень ферми обмежує рух двох вузлів, розташованих на його кінцях (наприклад, стержень 3 – рух вузлів A і B), через що при розрахунках реакція \vec{S}_i i -того стержня фігурує двічі. Звісно, що обидві зазначені реакції будь-якого стержня на вузли, які розташовані на його кінцях, завжди рівні за величиною та протилежні за напрямом. Досить часто у різноманітних джерелах, наприклад, реакцію 3-ого стержня на вузол A позначають \vec{S}'_3 , а на вузол B – \vec{S}''_3 , указуючи, що $\vec{S}'_3 = -\vec{S}''_3$ та $S'_3 = S''_3$; оскільки обидві реакції визначають зусилля в *одному стержні*, то **умовимося** ці обидві реакції позначати однаково – \vec{S}_3 , безумовно, враховуючи відповідний необхідний напрямок.

Тому що всі вузли розглядуваної ферми приймаються як *точкові шарніри*, то у загальному випадкові до будь-якого вузла обов'язково виявляється прикладеною *просторова збіжна система сил*. Оскільки рівновага тіла під дією просторової збіжної системи сил визначається трьома рівняннями – див. [1], § 2.5, умову (2.14), то вибираємо таку **послідовність** вирізання (обходу) вузлів, щоб для кожного вирізуваного вузла *кількість стержнів, реакції яких ще невідомі, не була б більшою за три*.

2.1. Розглянемо рівновагу вузла A (оскільки рух його обмежено стержнями $1 \div 3$, реакції яких невідомі). Вирізаємо цей вузол, вибираємо систему координат $Axuz$ (рис. 26z.3), записуємо умови і складаємо відповідні рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad -S_2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma - P \cdot \cos \alpha = 0; \quad (26.1)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad -S_3 - S_2 \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = 0; \quad (26.2)$$

$$\sum Z = 0 \quad \left| \quad -S_1 - S_2 \cdot \sin \beta - P \cdot \sin \alpha = 0. \quad (26.3)$$

❏: реакції \vec{S}_1 і \vec{S}_3 виявилися *хорошими*³ силами, оскільки їх лінії дій проходять по осях Az і Ay відповідно; сила \vec{P} лежить у правій профільній площині й тому проектується тільки на осі Ax і Az , які утворюють зазначену площину; проекції реакції \vec{S}_2 на осі Ax і Ay знайдено *способом подвійного проектування*⁴: спочатку силу \vec{S}_2 спроектовано на горизонтальну площину $ABCD$, а потім отриману проекцію $\vec{S}_{2гор.}$, модуль якої $S_{2гор.} = S_2 \cdot \cos \beta$, спроектовано на осі Ax і Ay (див. рис. 26z.3 та рис. 26z.4, де окремо зображена горизонтальна площина $ABCD$).

З трикутників ADI , ABC та AEC за теоремою Піфагора:

$$AI = \sqrt{AD^2 + DI^2} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \text{ (см)},$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \text{ (см)},$$

$$AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{AC^2 + c^2} = \sqrt{(\sqrt{52})^2 + 5^2} = \sqrt{52 + 25} = \sqrt{77} \text{ (см)};$$

тоді

$$\sin \alpha = \sin(\angle DAI) = \frac{DI}{AI} = \frac{5}{\sqrt{41}} \quad \text{та} \quad \cos \alpha = \cos(\angle DAI) = \frac{AD}{AI} = \frac{4}{\sqrt{41}},$$

$$\sin \gamma = \sin(\angle CAB) = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{\sqrt{52}} \quad \text{та} \quad \cos \gamma = \cos(\angle CAB) = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{\sqrt{52}},$$

$$\sin \beta = \sin(\angle CAE) = \frac{CE}{AE} = \frac{5}{\sqrt{77}} \quad \text{та} \quad \cos \beta = \cos(\angle CAE) = \frac{AC}{AE} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{77}}.^5$$

³ Див. **зауваження № 23.1** до задачі 23 на с. 84.

⁴ Див. викладене у підпункті **9** задачі 23 на с. 89÷92.

⁵ Див. зноску 3 до задачі 23 на с. 86.

З рівняння (26.1)

$$S_2 = \frac{-P \cdot \cos \alpha}{\cos \beta \cdot \sin \gamma} = -\frac{9 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}}}{\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{77}} \cdot \frac{4}{\sqrt{52}}} = -\frac{9 \cdot 4}{\sqrt{41}} = -\frac{9 \cdot 4}{\sqrt{41}} \cdot \frac{\sqrt{77}}{4} =$$

$$= -\frac{9 \cdot \sqrt{77}}{\sqrt{41}} \approx -12,33(\text{kH}).$$

З рівняння (26.2)

$$S_3 = -S_2 \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = -\left(-\frac{9 \cdot \sqrt{77}}{\sqrt{41}}\right) \cdot \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{77}} \cdot \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{54}{\sqrt{41}} \approx 8,43(\text{kH}).$$

З рівняння (26.3)

$$S_1 = -S_2 \cdot \sin \beta - P \cdot \sin \alpha = -\left(-\frac{9 \cdot \sqrt{77}}{\sqrt{41}}\right) \cdot \frac{5}{\sqrt{77}} - 9 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{45}{\sqrt{41}} - \frac{45}{\sqrt{41}} = 0.$$

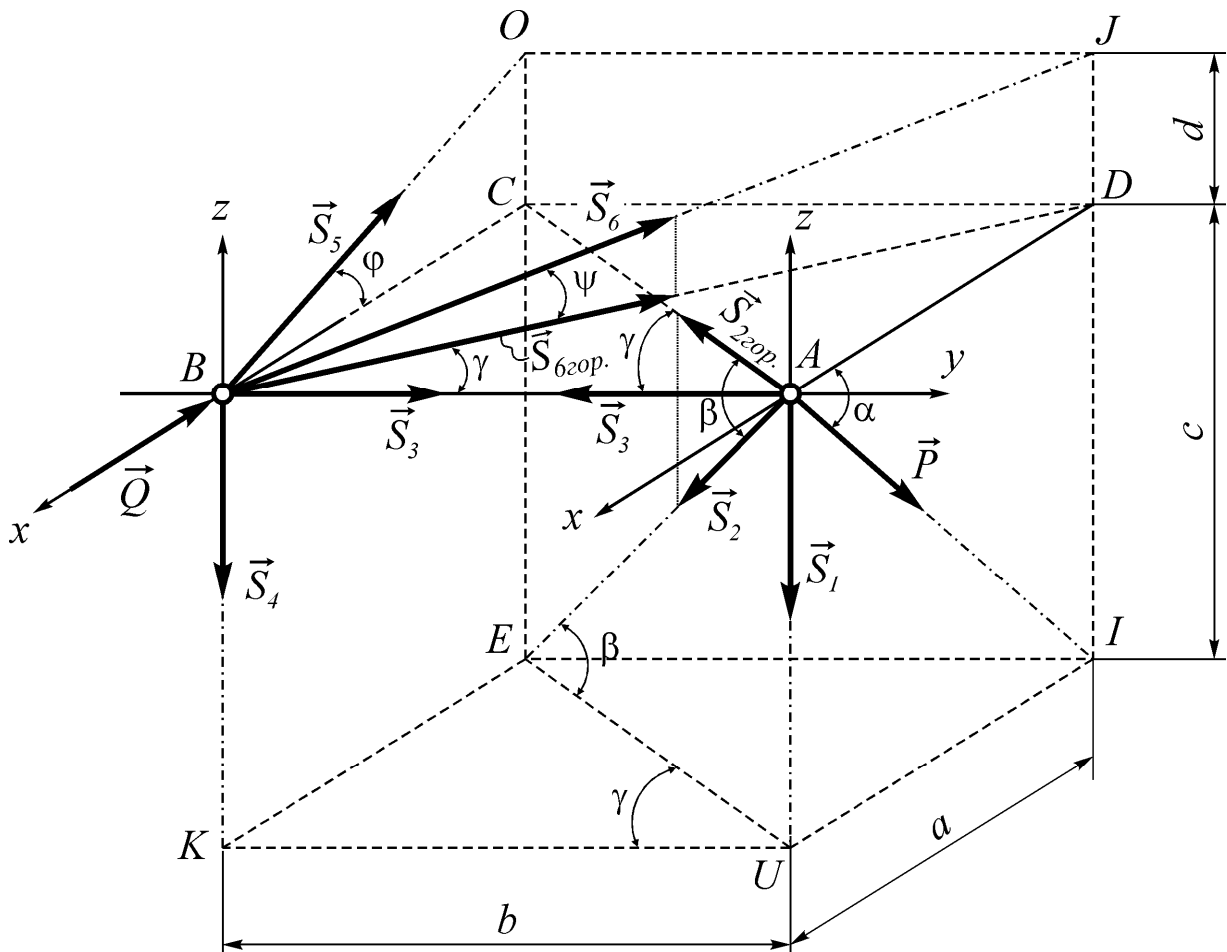


Рисунок 26z.3. Розрахункові схеми вузлів A і B

2.2. Розглянемо рівновагу вузла B (рух його обмежено стержнями $3 \div 6$, але невідомих реакцій три – \vec{S}_4 , \vec{S}_5 і \vec{S}_6). Вирізаємо цей вузол, вибираємо систему координат $Bxyz$ (рис. 26z.3), записуємо умови та складаємо відповідні рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0 \quad \left| \quad -S_5 \cdot \cos \varphi - S_6 \cdot \cos \psi \cdot \sin \gamma - Q = 0; \quad (26.4)$$

$$\sum Y = 0 \quad \left| \quad S_3 + S_6 \cdot \cos \psi \cdot \cos \gamma = 0; \quad (26.5)$$

$$\sum Z = 0 \quad \left| \quad -S_4 + S_5 \cdot \sin \varphi + S_6 \cdot \sin \psi = 0. \quad (26.6)$$

☛: сили \vec{S}_3 , \vec{S}_4 і \vec{Q} – хороші, оскільки їх лінії дій проходять по осях Bu , Bz і Bx відповідно; реакція \vec{S}_5 лежить у лівій профільній площині й тому проектується тільки на осі Bx і Bz , які утворюють зазначену площину; проекції реакції \vec{S}_6 на осі Bx та Bu знайдено способом подвійного проектування: спочатку силу \vec{S}_6 спроектовано на горизонтальну площину $ABCD$, а потім отриману проекцію $\vec{S}_{6гор.}$, модуль якої $S_{6гор.} = S_6 \cdot \cos \psi$, спроектовано на осі Bx і Bu (див. рис. 26z.3 та рис. 26z.4).

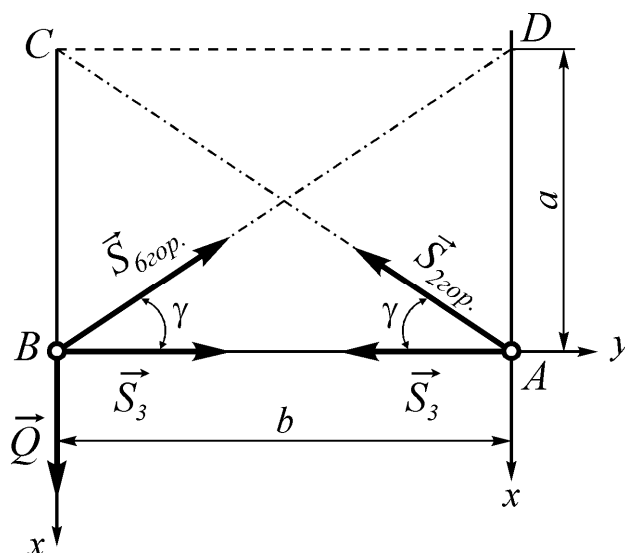


Рисунок 26z.4

З трикутників ABC і BCD очевидно, що $BD = AC = \sqrt{52}$ (см) та $\angle DBA = \angle CAB = \gamma$.

З трикутників OBC та JBD за теоремою Піфагора:

$$OB = \sqrt{BC^2 + CO^2} = \sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{4^2 + 1,5^2} = \sqrt{16 + 2,25} = \sqrt{18,25} \text{ (см)},$$

$$BJ = \sqrt{BD^2 + DJ^2} = \sqrt{(\sqrt{52})^2 + d^2} = \sqrt{52 + 1,5^2} = \sqrt{54,25} \text{ (см)};$$

тоді

$$\sin \varphi = \sin(\angle OBC) = \frac{CO}{OB} = \frac{1,5}{\sqrt{18,25}}, \quad \cos \varphi = \cos(\angle OBC) = \frac{BC}{OB} = \frac{4}{\sqrt{18,25}},$$

$$\sin \psi = \sin(\angle JBD) = \frac{DJ}{BJ} = \frac{1,5}{\sqrt{54,25}}, \quad \cos \psi = \cos(\angle JBD) = \frac{BD}{BJ} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{54,25}}.^6$$

З рівняння (26.5)

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{-S_3}{\cos \psi \cdot \cos \gamma} = -\frac{\frac{54}{\sqrt{41}}}{\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{54,25}} \cdot \frac{6}{\sqrt{52}}} = -\frac{\frac{54}{\sqrt{41}}}{\frac{6}{\sqrt{54,25}}} = -\frac{54}{\sqrt{41}} \cdot \frac{\sqrt{54,25}}{6} = \\ &= -\frac{9 \cdot \sqrt{54,25}}{\sqrt{41}} \approx -10,35(\text{kH}). \end{aligned}$$

З рівняння (26.4)

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{-S_6 \cdot \cos \psi \cdot \sin \gamma - Q}{\cos \varphi} = -\frac{S_6 \cdot \cos \psi \cdot \sin \gamma}{\cos \varphi} - \frac{Q}{\cos \varphi} = \\ &= -\frac{\left(-\frac{9 \cdot \sqrt{54,25}}{\sqrt{41}}\right) \cdot \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{54,25}} \cdot \frac{4}{\sqrt{52}}}{\frac{4}{\sqrt{18,25}}} - \frac{6}{\frac{4}{\sqrt{18,25}}} = \frac{9 \cdot 4}{\sqrt{41}} - \frac{6}{\frac{4}{\sqrt{18,25}}} = \\ &= \frac{9 \cdot 4}{\sqrt{41}} \cdot \frac{\sqrt{18,25}}{4} - 6 \cdot \frac{\sqrt{18,25}}{4} = \frac{9 \cdot \sqrt{18,25}}{\sqrt{41}} - 1,5 \cdot \sqrt{18,25} \approx -0,40(\text{kH}). \end{aligned}$$

З рівняння (26.6)

$$\begin{aligned} S_4 &= S_5 \cdot \sin \varphi + S_6 \cdot \sin \psi = \\ &= \left(\frac{9 \cdot \sqrt{18,25}}{\sqrt{41}} - 1,5 \cdot \sqrt{18,25}\right) \cdot \frac{1,5}{\sqrt{18,25}} + \left(-\frac{9 \cdot \sqrt{54,25}}{\sqrt{41}}\right) \cdot \frac{1,5}{\sqrt{54,25}} = \\ &= \frac{9 \cdot \sqrt{18,25}}{\sqrt{41}} \cdot \frac{1,5}{\sqrt{18,25}} - 1,5 \cdot \sqrt{18,25} \cdot \frac{1,5}{\sqrt{18,25}} - \frac{9 \cdot \sqrt{54,25}}{\sqrt{41}} \cdot \frac{1,5}{\sqrt{54,25}} = \\ &= \frac{9 \cdot 1,5}{\sqrt{41}} - 1,5 \cdot 1,5 - \frac{9 \cdot 1,5}{\sqrt{41}} = -2,25(\text{kH}). \end{aligned}$$

⁶ Див. виноску 3 до задачі 23 на с. 86.

Таким чином, зусилля в усіх стержнях ферми визначено (або розрахунок ферми закінчено). Отримані результати свідчать, що в дійсності стержень 1 нульовий, стержень 3 розтягнутий, а стержні 2, 4, 5 та 6 – стиснуті.

3. Виконаємо **перевірку** правильності проведених розрахунків.

☛: скористатися для перевірки *графічним* (або *графоаналітичним*) *способом розв'язування задачі* (як це зроблено, наприклад, у задачах 5÷9) достатньо складно через те, що виникає потреба для відповідних зрівноважених *просторових систем сил* зображувати їх силові многокутники (які повинні бути замкненими) на *плоскому* рисунку.

Для забезпечення можливості виконати *аналітичну перевірку* врахуємо те, що оскільки вся конструкція перебуває у рівновазі, то у рівновазі знаходиться і будь-який її елемент. Тоді розглянемо, наприклад, стержень 3, як невільне матеріальне тіло, на яке діють активні сили \vec{P} та \vec{Q} , що прикладені до його вузлів A і B відповідно, та рух якого у точці A обмежено стержнями 1 і 2, а у точці B – стержнями 4, 5 і 6. Застосувавши принцип звільнення від в'язей і зобразивши на рисунку 2бз.5 розрахункову схему, дістанемо, що стержень 3 перебуває у рівновазі під дією системи сил $\{\vec{P}, \vec{Q}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6\}$, яка є **просторовою довільною** (див. [1], § 1.2, рис. 1.5 і відповідні визначення).

Як зазначалося раніше, задача про *рівновагу просторової довільної системи сил* буде розглядатися у подальшому курсі теоретичної механіки, але (забігаючи наперед та без доведення) скористаємося **необхідними умовами рівноваги** цієї системи сил, які полягають у *рівності нулю алгебраїчної суми проєкцій сил системи на декартові координатні осі* (**достатні умови рівноваги** неможливо усвідомити без ще одного фундаментального поняття теоретичної механіки – поняття про **момент сили**).

⁷ Звернімо увагу, що для збіжної системи сил **умова** рівності нулю алгебраїчної суми проєкцій сил системи на декартові координатні осі є **необхідною** та **достатньою**.

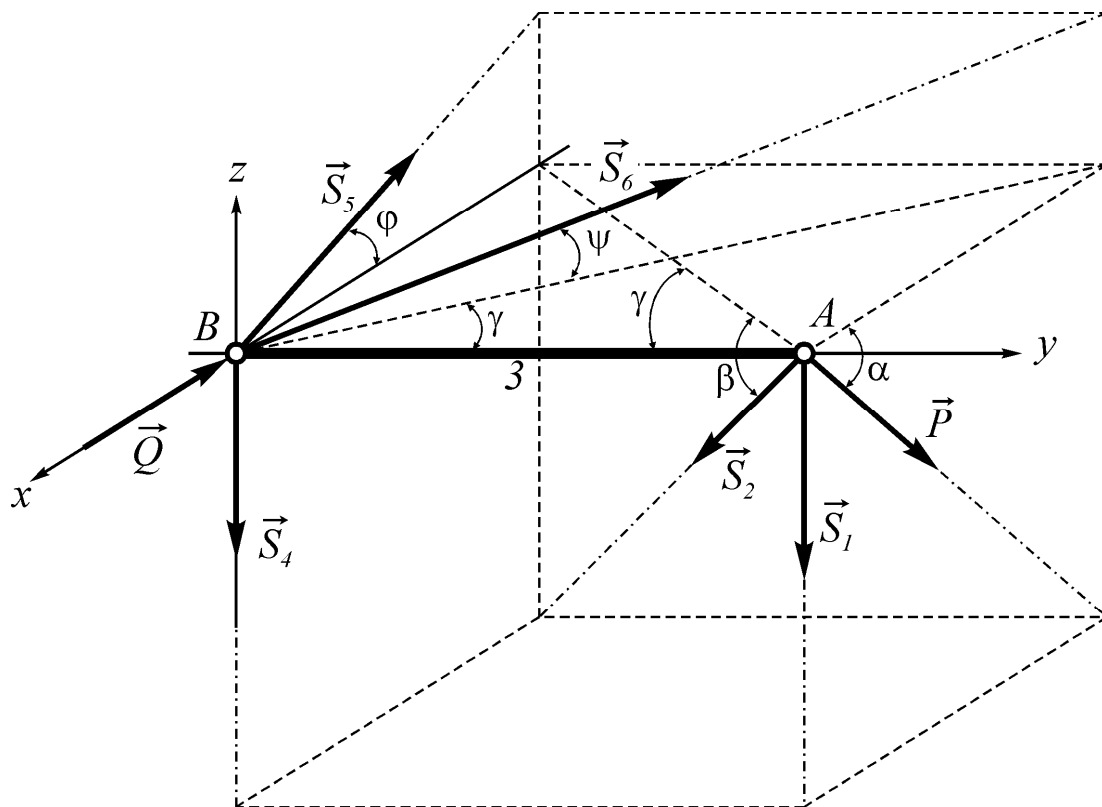


Рисунок 26z.5. Розрахункова схема стержня 3

Отже, для **аналітичної перевірки** розрахунку ферми, розглядаючи рівновагу стержня 3, складімо відповідні перевіірочні рівняння, підставимо в них усі необхідні значення та пересвідчи-мося у виконанні умови рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum X &= -P \cdot \cos \alpha - Q - S_2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma - S_5 \cdot \cos \varphi - S_6 \cdot \cos \psi \cdot \sin \gamma = \\ &= -9 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} - 6 - \left(-\frac{9 \cdot \sqrt{77}}{\sqrt{41}} \right) \cdot \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{77}} \cdot \frac{4}{\sqrt{52}} - \left(\frac{9 \cdot \sqrt{18,25}}{\sqrt{41}} - 1,5 \cdot \sqrt{18,25} \right) \cdot \\ &\cdot \frac{4}{\sqrt{18,25}} - \left(-\frac{9 \cdot \sqrt{54,25}}{\sqrt{41}} \right) \cdot \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{54,25}} \cdot \frac{4}{\sqrt{52}} = -\frac{36}{\sqrt{41}} - 6 + \frac{36}{\sqrt{41}} - \frac{9 \cdot \sqrt{18,25}}{\sqrt{41}} \cdot \\ &\cdot \frac{4}{\sqrt{18,25}} + 1,5 \cdot \sqrt{18,25} \cdot \frac{4}{\sqrt{18,25}} + \frac{36}{\sqrt{41}} = -6 - \frac{36}{\sqrt{41}} + 1,5 \cdot 4 + \frac{36}{\sqrt{41}} \equiv 0. \end{aligned}$$

☛: інші перевіірочні рівняння пропонується скласти та обчислити самостійно.

Оскільки перевірка виконується, то робимо **висновок**: розрахунок ферми виконаний правильно.

На закінчення відмітимо, що після визначення зусиль у стержнях ферми з'явилася можливість надзвичайно просто знайти реакції сферичних опор K , E , U , O та J . Для цього необхідно вирізати кожний указаний опорний вузол та розглянути його рівновагу (можна у думці), враховуючи дійсний напрямок знайденої реакції \vec{S}_i стержня, що примикає до відповідного вузла; модуль реакції кожної опори буде

дорівнювати модулю реакції відповідного стержня, а напрямки зазначених реакцій будуть протилежними⁸. Наприклад, на рисунку 26z.6 розглянуто вузли K , E , U та встановлено: 1) оскільки стержень 1 нульовий, то його механічна дія на вузол U відсутня, через що $R_U = 0$; 2) оскільки вертикальний стержень 4 стиснутий, то його реакція \vec{S}_4 напрямлена до вузла K , через що реакція \vec{R}_K опори K напрямлена вертикально вгору та $R_K = S_4 = 2,25 \text{ kH}$; 3) оскільки стержень 2 стиснутий, то його реакція \vec{S}_2 напрямлена до вузла E , тоді лінія дії реакції \vec{R}_E проходить через відрізок EA та $R_E = S_2 \approx 12,33 \text{ kH}$.

☛: реакції інших опор знаходять аналогічно.

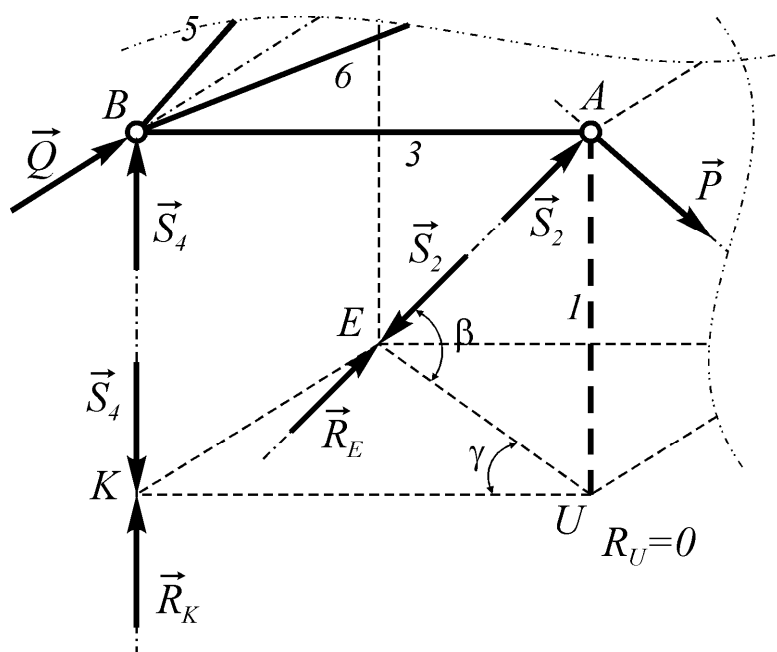


Рисунок 26z.6

⁸ Див. зауваження № 26.1 на с. 102.

Відповідь: знайдені зусилля в стержнях наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Номер стержня	1	2	3	4	5	6
Знак зусилля		-	+	-	-	-
Зусилля (кН)	0	12,33	8,43	2,25	0,40	10,35

ЗАДАЧА № 27

Кронштейн, що складається з шести ідеальних стержнів, шарнірно з'єднаних між собою у точках A та C , закріплений до вертикальної стіни точковими шарнірами B, D, E та K (точки A, C, K, D утворюють прямокутник, що лежить у горизонтальній площині, а точки B, E, D та K – прямокутник на вертикальній стіні).

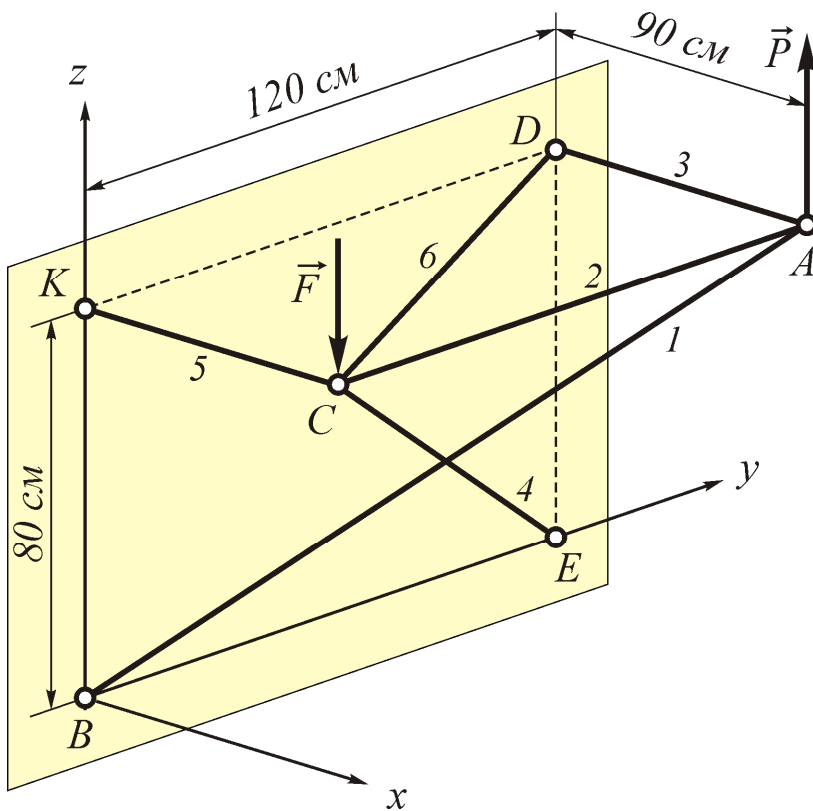


Рисунок 27z

До шарнірів A й C відповідно прикладено вертикальні сили \vec{P} та \vec{F} (рис. 27z).

Знайти зусилля у кожному стержні кронштейна, якщо $P = 136 \text{ Н}$, $F = 120 \text{ Н}$ (розміри взяти з рисунка).

Відповідь: значення зусиль у стержнях наведено в таблиці 3.

Таблиця 3

Номер стержня	1	2	3	4	5	6
Знак зусилля	+	-	-	-	-	+
Зусилля (кН)	289	204	153	255	153	480

ДОДАТОК А

Таблиця 4

	Числові значення тригонометричних функцій кутів:	
	синус (або косинус) кута	відповідне значення косинуса (або синуса) кута
1	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{13}$
2	$\frac{15}{17}$	$\frac{8}{17}$
3	$\frac{6}{10}$	$\frac{8}{10}$
4	0,6	0,8
5	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
6	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$

ДОДАТОК Б

АЛГОРИТМ

розв'язування задач статички про рівновагу матеріальних тіл

1. Визначити матеріальне тіло, рівновага якого розглядається в конкретній задачі або в окремій частині її.
2. Прикласти до розглядуваного тіла всі задані активні сили.
3. З'ясувати, які в'язі накладено на розглядуване тіло.
4. Відкинути від розглядуваного тіла накладені на нього в'язі, а їх дію замінити реакціями відкинутих в'язей (тобто застосувати аксіому №5) та зобразити *розрахункову схему*.

Зауваження № 1 (до пунктів **1÷4** алгоритму): важливе значення має правильно та акуратно виконані рисунок і розрахункова схема до задачі.

Зауваження № 2 (до пункту **4** алгоритму): різниця між поняттями рисунок (або малюнок) і розрахункова схема полягає в такому: на рисунку зображують усі матеріальні тіла, які згадуються в умові (тексті) задачі, а на розрахунковій схемі зображують одне-єдине розглядуване матеріальне тіло, до котрого прикладена відповідна система діючих сил (у багатьох задачах рисунок та розрахункову схему можна поєднувати).

Зауваження № 3 (до пунктів **3÷4** алгоритму): якщо накладеною в'яззю є ідеальний стержень (стержнева в'язь), то на початку розв'язування задачі умовно приймають, що зазначений стержень є *розтягнутим*, напрямляючи його реакцію вздовж осі стержня *від кінцевого шарніра*, яким стержень кріпиться до розглядуваного тіла; якщо в результаті виконаних розрахунків виявиться, що зусилля в стержні визначається *від'ємним* числовим значенням, то це означає, що зазначений стержень у насправді є *стиснутим*.

5. Уважаючи розглядуване тіло умовно вільним, визначити, яка система сил¹ прикладена до тіла.
6. Вибрати систему координат, *записати* умови та *скласти* відповідні рівняння рівноваги отриманої системи сил.

Зауваження № 4 (до пункту **6** алгоритму): інколи раціональний вибір напрямку координатних осей дає змогу спростити рівняння рівноваги та процес їх подальшого розв'язування; у разі потреби осі варто напрямляти так, щоб одна з них проходила б паралельно до певної невідомої сили; тоді зазначена сила буде проектуватися на так проведену вісь у дійсну (натуральну) величину, а на іншу вісь (або інші осі) проектуватися не буде (якщо координатні осі напрямлені „традиційно“: вісь x – горизонтально праворуч, а вісь y – вертикально вгору, то такі осі можна і не зображувати, уявляючи їх у думці; якщо ж з певних доречних міркувань напрямки координатних осей вибрані іншими, то їх необхідно показувати на розрахунковій схемі).

Зауваження № 5 (до пункту **6** алгоритму): звертаємо увагу на слова *записати* та *скласти*: умови рівноваги **записують**, оскільки їх зовнішній вигляд є незмінним для кожної з існуючих систем сил; рівняння ж рівноваги **складають** для конкретної розв'язуваної задачі й вигляд їх залежить і від діючих сил, і від напрямків осей прийнятої системи координат (див. також [1], § 2.5 відповідне зауваження на с. 60).

Зауваження № 6 (до пункту **6** алгоритму): умови рівноваги необхідно записувати, притискаючи їх до лівої границі аркуша, потім ставити вертикальну риску, а після неї – в тому ж рядочку, що й умова, записувати відповідне рівняння рівноваги.

7. Розв'язати складені рівняння відносно шуканих невідомих².

¹ Звісно, що систему сил треба аналізувати з *геометричної точки зору*, оскільки з *динамічної точки зору* система сил будь-якої задачі статички є *зрівноваженою*.

Зауваження № 7 (до пункту 7 алгоритму): розв'язувати складену систему алгебраїчних рівнянь з відповідною кількістю невідомих можна будь-яким з відомих легітимних способів: методом підстановки, методом додавання або віднімання, за теоремою Вієта, за правилом (методом) Крамера тощо; якщо зазначені способи розв'язування ще невідомі, то варто звернутися або до відповідних розділів елементарної алгебри, або до будь-кого, хто зможе це пояснити.

Зауваження № 8 (до пункту 7 алгоритму): розв'язуючи будь-яке рівняння, обов'язково необхідно: а) записати алгебраїчний вираз, що визначає шукану невідому величину; б) підставити у зазначений вираз необхідні числові значення; в) виконати обчислення-розрахунки та отримати відповідь. При розв'язуванні багатьох задач спростити певні математичні обчислення можна, підставляючи ті чи інші необхідні значення у загальному вигляді (алгебраїчному або у вигляді ірраціональних числових виразів); кінцеві ж результати у відповіді задачі завжди необхідно подавати у вигляді дійсних чисел.

8. Виконати перевірку та (якщо це необхідно) аналіз отриманих результатів.

Зауваження № 9 (до пункту 8 алгоритму): традиційно курс теоретичної механіки викладається та вивчається так, що у задачах про рівновагу матеріальних тіл під дією *збіжної системи сил* (плоскої чи просторової) немає можливості виконати *аналітичну перевірку* за допомогою складання відповідного *перевірочного алгебраїчного рівняння* (оскільки поняття про *момент сили* вважається *невідомим*). Тоді за перевірку приймається **графоаналітичний спосіб**³, який по суті є іншим самостійним способом розв'язування задачі⁴.

² Розв'язування задачі шляхом складання необхідних алгебраїчних рівнянь рівноваги та наступним знаходженням з них шуканих величин називається **аналітичним способом розв'язування**.

³ Логіка назви **графоаналітичний спосіб** походить від застосування при розв'язуванні задач двох дій: **графічної** побудови силового багатокутника та наступних **аналітичних** розрахунків його.

Зауваження № 10: при графоаналітичному способі розв'язування розрахункову схему задачі та силовий багатокутник, який необхідно будувати де-небудь поряд із розрахунковою схемою, дозволяється зображувати ескізно (без жорсткого дотримання лінійного і силового масштабів), але варто прагнути до найбільш точного відображення дійсної ситуації, що може суттєво спростити подальший геометричний аналіз необхідних графічних об'єктів.

Зауваження № 11: треба чітко розуміти, що при побудові силового багатокутника не здійснюється ніякого паралельного перенесення діючих сил та не відбувається ніякої зміни точок їх прикладання; силовий багатокутник є *додатковим* до розрахункової схеми *самостійним графічним об'єктом* тієї чи іншої задачі, який визначає факт рівності нулю рівнодійної зрівноваженої збіжної системи сил.

Зауваження №12: крім **графоаналітичного** способу розв'язування задач, існує **графічний спосіб**, який принципово не відрізняється від графоаналітичного; при графічному розв'язуванні і розрахункову схему, і силовий багатокутник необхідно зображувати не ескізно, а обов'язково з жорстким дотриманням: а) певних лінійного та силового масштабів (які вибирають довільно, але доцільно); б) паралельності відповідних прямих. Шукані зусилля при графічному розв'язуванні не обчислюють, а вимірюють на силовому багатокутнику з урахуванням силового масштабу (масштабу сил), який визначає, наприклад, кількість ньютонів в одному міліметрі сторони силового багатокутника. Через це точність графічного способу суттєво залежить від точності зображення всіх графічних об'єктів задачі (рисунка, розрахункової схеми й силового багатокутника), точності вимірювальних приладів (наприклад, лінійки) та ретельності самого процесу вимірювання.

⁴ При бажанні аналогічні задачі можна розв'язувати графоаналітичним способом, а для перевірки отриманих результатів уживати аналітичний спосіб.

ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1. Жигилій С.М. Статика, ч. 1: курс лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти / С.М. Жигилій. – Полтава: Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», 2023. – 202 с.
2. Павловський М.А. та ін. Теоретична механіка: підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
3. Timoshenko S. Engineering mechanics, fourth edition / S. Timoshenko, D. Young. – New York: McGraw-Hill book Company, Inc, 1960. – 508 p.
4. Ruina A. Introduction to Statics and Dynamics / Andy Ruina, Rudra Pratap. – Oxford University Press (Preprint), 2011. – 1029 p.
5. Каплунова А.В. Методика та приклади розв'язування задач з теоретичної механіки: навчальний посібник / А.В. Каплунова, В.А. Михаловський, І.П. Сірош, В.І. Станкевич, А.А. Фельдман. – К.: Держсільгоспвидав УРСР, 1961. – 392 с.
6. Beer F. Vector mechanics for engineers: statics and dynamics, tenth edition / Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell – New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 2013. – 1360 p.
7. Путята Т.В. Методика розв'язування задач з теоретичної механіки: навчальний посібник / Т.В. Путята, Б.Н. Фрадлін. – К.: «Радянська школа», 1955. – 392 с.
8. Muhovec Ivan. Tehnička mehanika sažetak osnova statike: posebno izdanje / Ivan Muhovec, Ivan Paska, Aleksej Aniskin. – Varaždin: Sveučilište Sjever, 2015. – 169 str.

Навчально-методичне видання

Жигилій Сергій Михайлович

**РІВНОВАГА ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ.
МЕТОДИКА ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ**

Навчальний посібник

У авторській редакції

Комп'ютерна верстка – авторська
