УДК 514.18

к.т.н., доц. **Воронцов О.В.,**
voronoleg6163@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7339-9196
Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія
к.пед.н., **Воронцова І.В.,**
ira061061@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9131-2816
Полтавський коледж нафти і газу
Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка».

ФОРМУВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ТОЧКОВИХ МНОЖИН ЗА ДАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ І ВЕЛИЧИНОЮ СКІНЧЕНОЇ РІЗНИЦІ

Варіювання функції розподілу зовнішнього навантаження між вузлами дискретної сітки у статико-геометричному методі дозволяє дискретно моделювати криві різної форми і розв'язувати задачі дискретної інтерполяції на площині.

Форма континуального аналога дискретно представленої кривої безпосередньо залежить від характеру функціонально заданого управляючого навантаження, яке формує дискретно представлену криву (ДПК).

Відомі дослідження аспектів зв'язку між статико геометричним методом формування ДПК і аналітичним описом неперервної кривої через синтез статико-геометричного методу формування дискретних кривих і способу моделювання їх числовими послідовностями. Також досліджені окремі питання визначення відповідності рівнянь неперервної поверхні дискретній функції розподілу зовнішнього навантаження.

У даній статті досліджено закономірності змін величин коефіцієнтів суперпозиції двох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок, при умові відомого закону розподілення величини скінченої різниці, яка в окремих випадках буде прообразом зовнішнього навантаження між вузлами каркасу, що є дискретною моделлю визначеного геометричного образу.

Якщо змінювати рівномірно розподілену величину скінченої різниці або значення функції розподілу величини скінченої різниці, або ординати однієї чи двох (крайових) вузлових точок при фіксованих величинах коефіцієнтів суперпозиції, зможемо управляти формою кривої, дискретно представленої вузловими точками її числової послідовності.

Дані дослідження визначають загальний підхід до одержання подібних закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції двох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок для *визначення координат n точок модельованих будь-яких одновимірних функціональних залежностей та довільних одновимірних множин точок.*

Результати дослідження закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції, заданих двох вузлових точок різних елементарних функцій, при умові відомого закону розподілення величини скінченої різниці, дозволять розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Ключові слова: дискретне моделювання; статико-геометричний метод; геометричний апарат суперпозицій; величина скінченої різниці; числові послідовності.

Постановка проблеми. Залучення геометричного апарату суперпозицій для розв'язання задач інтерполяції значно розширює можливості дискретного моделювання геометричних образів. Дослідивши закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції, як для суміжних, так і для не суміжних заданих вузлових точок аналітичних функцій, зможемо розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції такими функціями без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем рівнянь.

Дискретне моделювання неперервних образів статико-геометричним методом у більшості випадків пов'язано із певними похибками. Тому актуальним є дослідження щодо формування геометричних образів із заданою точністю дискретної моделі при умові мінімального обсягу вихідної інформації.

Однією із задач даної роботи є продовженні досліджень визначення дискретних образів кривих ліній на основі класичного методу скінчених різниць, статико-геометричного методу моделювання і геометричного апарату суперпозицій.

При формуванні дискретних образів на основі геометричного апарату суперпозицій доцільно використовувати терміни «величина, або функція розподілу величини скінченої різниці», що буде в окремому випадку тотожною величині зовнішнього формоутворюючого навантаження.

Одержання формул обчислення координат будь-якої точки числової послідовності *n*-го порядку як суперпозиції координат двох довільно заданих вузлових точок даної послідовності за умови заданої величини чи функції для визначення величини скінченої різниці дозволить управляти формою кривої, дискретно представленої вузловими точками її числової послідовності і у підсумку — розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей без трудомістких операцій складання та розв’язання великих систем рівнянь.

Також дані дослідження можуть бути основою для оцінки точності формування дискретних каркасів кривих, що аналітично описуються елементарними функціональними залежностями.

Аналіз останніх досліджень. Питанням застосування для дискретного моделювання кривих ліній геометричного апарату суперпозицій в поєднанні з класичним методом скінченних різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей, а також дослідженням закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції у процесі інтерполяції присвячені роботи авторів даної статті [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Формулювання цілей та завдання статті. Метою даної статті є дослідження закономірностей змін величин коефіцієнтів суперпозиції двох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок, при умові відомого закону розподілення величини скінченої різниці, а також одержання формул обчислення координат будь-якої точки числової послідовності n-го порядку як суперпозиції координат двох довільно заданих вузлових точок даної послідовності за умови заданої величини чи функції для визначення величини скінченої різниці.

Основна частина. Дискретна формоутворююча величина скінченої різниці для формування дискретного аналогу числової послідовності $y_i = 0{,}5i^2$ (рис. 1) суперпозиціями координат суміжних вузлових точок має вигляд [5]:

$$P_i = y_i - k_1 y_{i-1} - k_2 y_{i+1} \,. \tag{1}$$

Звідси:

$$P_i = 0 - 0{,}5 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}5 = -0{,}5 \,.$$

Візьмемо довільні (крайові) умови (рис.4.6): $i=0$, $p=1$, $p_1=0$, $p_2=3$, $y_{i+p}=0{,}5$, $y_{i+p1}=0$, $y_{i+p2}=4{,}5$, $P_{i+p}=-0{,}5$.

За формулами [5]:

$$P_{i+p} = k_1(y_{i+p_2} - y_{i+p_1}) + y_{i+p} - y_{i+p_2} \,; \tag{2}$$

$$-0{,}5 = k_1(4{,}5 - 0) + 0{,}5 - 4{,}5 = 4{,}5k_1 - 4 \Rightarrow k_1 = 0{,}7778 \,;$$

$$P_{i+p} = k_2(y_{i+p_1} - y_{i+p_2}) + y_{i+p} - y_{i+p_1} \,;$$

$$-0{,}5 = k_2(0 - 4{,}5) + 0{,}5 - 0 = -4{,}5k_2 + 0{,}5 \Rightarrow k_2 = 0{,}2222 \,,$$

або, за формулами [5]:

$$k_1 = \frac{P_{i+p} - y_{i+p} + y_{i+p_2}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} \,; \tag{3}$$

$$k_1 = \frac{-0{,}5 - 0{,}5 + 4{,}5}{4{,}5 - 0} = \frac{3{,}5}{4{,}5} = 0{,}7778 \,;$$

$$k_2 = \frac{P_{i+p} - y_{i+p} + y_{i+p_1}}{y_{i+p_1} - y_{i+p_2}} \,; \tag{4}$$

$$k_2 = \frac{-0{,}5 - 0{,}5 + 0}{0 - 4{,}5} = \frac{-1}{-4{,}5} = 0{,}2222 \,.$$

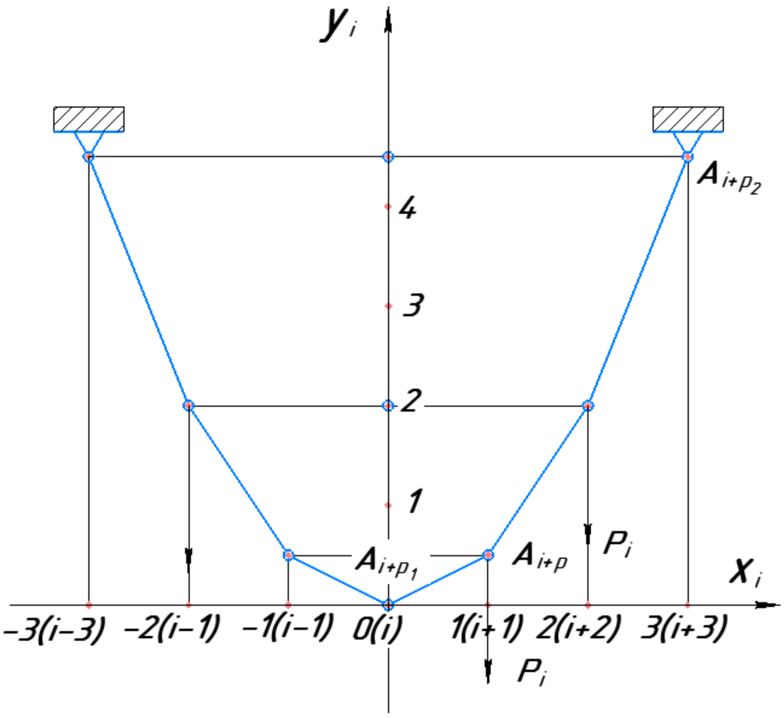


Рисунок 1. Дискретна модель числової послідовності $y_i = 0{,}5i^2$

Перевірка.

При підстановці у рівняння [5]:

$$y_{i+p} = P_{i+p} - k_1(y_{i+p_2} - y_{i+p_1}) + y_{i+p_2}\ , \qquad (5)$$

одержимо:

$$0{,}5 = -0{,}5 - 0{,}7778(4{,}5 - 0) + 4{,}5 = -0{,}5 - 3{,}5001 + 4{,}5 = 0{,}5\ .$$

Розглянемо процес формування одновимірних геометричних образів суперпозиціями точкових множин за даними двома довільними (крайовими) умовами і величиною скінченої різниці на прикладі моделювання числової послідовності 3-го ступеня.

Визначимо вигляд функціональної залежності, якою описується поліном 3-го ступеня, що проходить через задані чотири вузлових точки. Візьмемо дві із них, що є крайовими умовами, а третя − центральним вузлом, за якими формується дискретний образ поліному 2-го ступеня (рис. 1) із попереднього прикладу: $A_1(-3;\ 4{,}5)$, $A_2(3;\ 4{,}5)$, $A_3(0;\ 0)$, і – довільною вузловою точкою $A_4(x_1;\ y_1)$.

$$\begin{cases} a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + d = 4{,}5 \\ a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d = 4{,}5 \\ d = 0 \\ a{x_1}^3 + b{x_1}^2 + cx_1 = y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -27\cdot a + 9\cdot b - 3c = 4{,}5 \\ 27\cdot a + 9\cdot b + 3\cdot c = 4{,}5 \\ a{x_1}^3 + b{x_1}^2 + cx_1 = y_1 \end{cases}.$$

Звідси вищезазначена функціональна залежність матиме вигляд:

$$y = ax^3 + \frac{1}{2}x^2 - 9ax\ ,\ \text{де}\ \ a = \frac{y_1 - \frac{{x_1}^2}{2}}{x_1({x_1}^2 - 9)}\ .$$

Або, у вигляді числової послідовності:

$$y_i = ai^3 + 0{,}5i^2 - 9ai\ . \tag{6}$$

Якщо задати конкретні координати точки ***A***

Якщо задати конкретні координати точки $\boldsymbol{A_4}$: $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, то послідовність (6) матиме вигляд:

$$y_i = 0{,}1 \cdot i^3 + 0{,}5i^2 - 9 \cdot 0{,}1i\ . \tag{7}$$

Дискретний точковий каркас послідовності (7) графічно представлений на рис. 2 а), б)., а числові значення наведені у таблиці 1.

Таблиця 1.

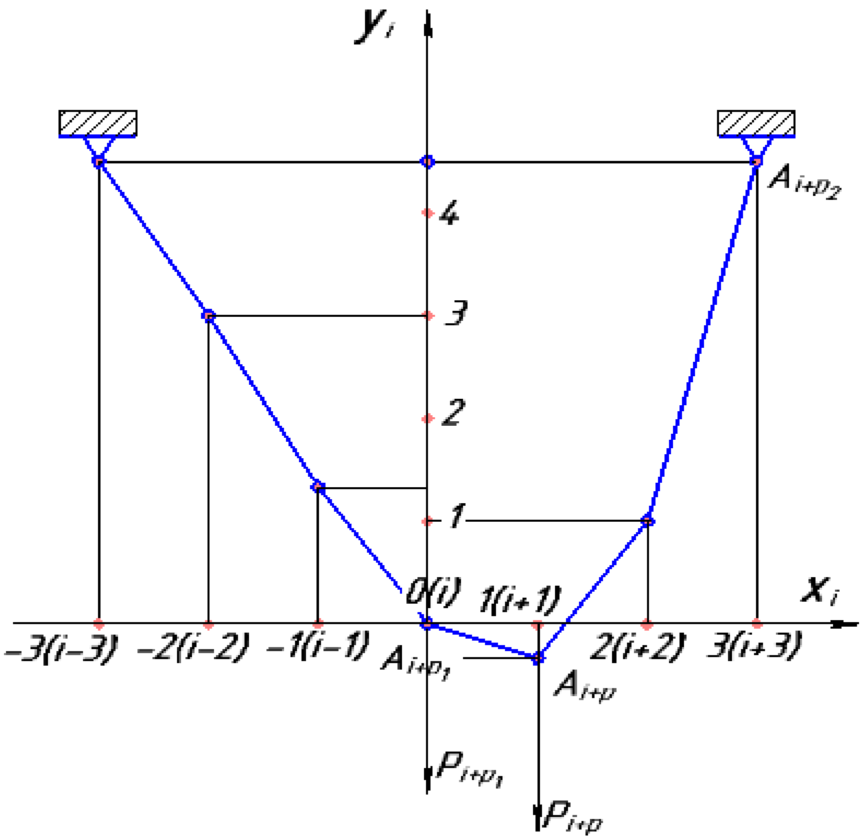
Значення числової послідовності $y_i = 0{,}1 \cdot i^3 + 0{,}5i^2 - 9 \cdot 0{,}1i$

i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	4,5	3	1,3	0	-0,3	1	4,5

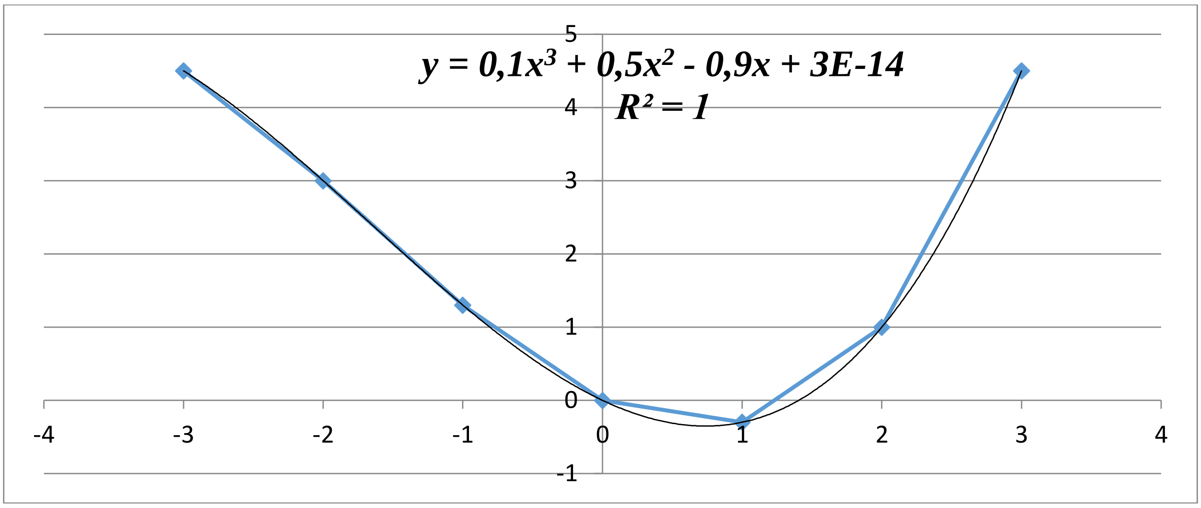
Як вже було показано у [6], функція розподілу величини скінченої різниці для формування дискретної множини точок послідовності (7) при три-точковій залежності буде лінійною:

$$P_i = -6a_3 i - 2a_2\ ,$$

тобто $P_i = -6 \cdot 0{,}1i - 2 \cdot 0{,}5$.



а)



б)

Рисунок 2 а), б). Дискретна модель числової послідовності $y_i = 0{,}1 \cdot i^3 + 0{,}5i^2 - 9 \cdot 0{,}1i$

Тоді, якщо *i=-3* , *i=-2* , *i=-1* , *i=0* , *i=1* , *i=2* , *i=3* , то:
$P_{i=-2} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot (-2) - 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$.

Далі, із [7] для суміжних вузлів:

$k_1 = \frac{y_{i+1} - y_i + P_i}{y_{i+1} - y_{i-1}} = \frac{1{,}3 - 3 + 0{,}2}{1{,}3 - 4{,}5} = \frac{-1{,}5}{-3{,}2} = 0{,}46875$; $k_2 = 0{,}53125$,

$y_{i=-2} = k_1 y_{i-1} + k_2 y_{i+1} + P_i = 0{,}46875 \cdot 4{,}5 + 0{,}53125 \cdot 1{,}3 + 0{,}2 = 3$;

$P_{i=-1} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0{,}5 = 0{,}6 - 1 = -0{,}4$,

$k_1 = \frac{0 - 1{,}3 - 0{,}4}{0 - 3} = \frac{-1{,}7}{-3} = 0{,}56667$; $k_2 = 0{,}4333$,

$y_{i=-1} = 0{,}5667 \cdot 3 + 0{,}4333 \cdot 0 - 0{,}4 = 1{,}3$;

$P_{i=0} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot 0 - 2 \cdot 0{,}5 = 0 - 1 = -1$,

$k_1 = \frac{-0{,}3 - 0 - 1}{-0{,}3 - 1{,}3} = \frac{-1{,}3}{-1{,}6} = 0{,}8125$; $k_2 = 0{,}1875$,

$y_{i=0} = 0{,}8125 \cdot 1{,}3 + 0{,}1875 \cdot (-0{,}3) - 1 = 0$;

$P_{i=1} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot 1 - 2 \cdot 0{,}5 = -0{,}6 - 1 = -1{,}6$,

$k_1 = \frac{1 - (-0{,}3) - 1{,}6}{1 - 0} = \frac{-0{,}3}{1} = -0{,}3$; $k_2 = 1{,}3$,

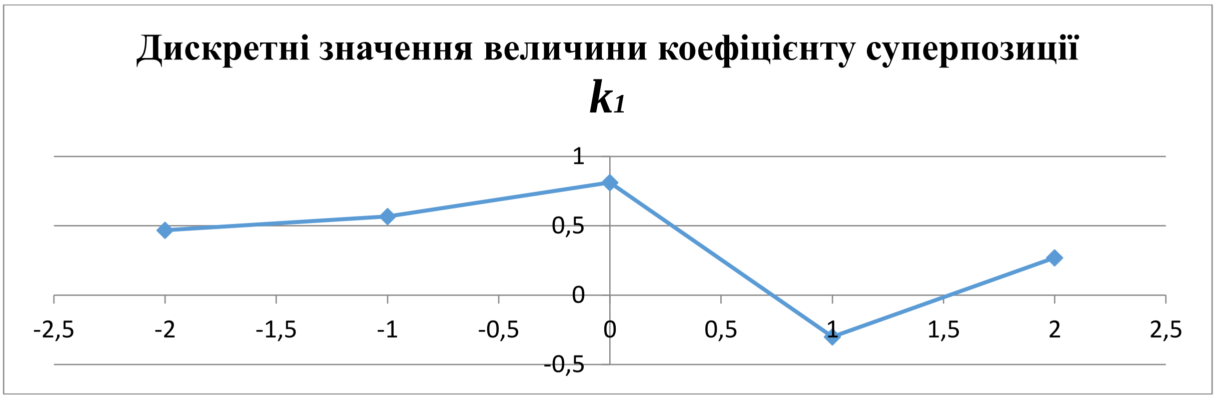
$y_{i=1} = -0{,}3 \cdot 0 + 1{,}3 \cdot 1 - 1{,}6 = 1{,}3 - 1{,}6 = -0{,}3$;

$P_{i=2} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot 2 - 2 \cdot 0{,}5 = -1{,}2 - 1 = -2{,}2$,

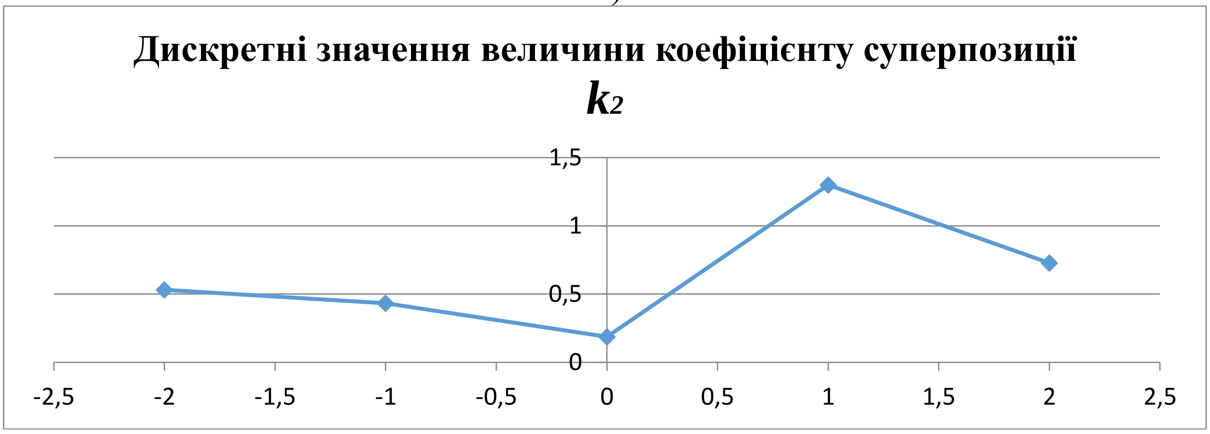
$k_1 = \frac{4{,}5 - 1 - 2{,}2}{4{,}5 - (-0{,}3)} = \frac{1{,}3}{4{,}8} = 0{,}27083$; $k_2 = 0{,}72917$,

$y_{i=2} = 0{,}27083 \cdot (-0{,}3) + 0{,}72917 \cdot 4{,}5 - 2{,}2 = 1$.

Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції графічно представлені на рисунках 3 а), б).



а)



б)

Рисунок 3 а), б). Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 суміжних точок за умови лінійної функції розподілу величини скінченої різниці.

Але, одночасно, числову послідовність (7) можна уявити, як сформовану під дією рівномірно розподіленої величини скінченої різниці при відповідних значеннях коефіцієнтів суперпозиції.

Для суміжних вузлів (1), маємо:

$$P_i = y_i - k_1 y_{i-1} - k_2 y_{i+1} \ .$$

Наприклад, якщо $P_i = -2$, та при вищенаведених значеннях i ,

$k_1 = \frac{y_{i+1} - y_i + P_i}{y_{i+1} - y_{i-1}} = \frac{1{,}3-3-2}{1{,}3-4{,}5} = \frac{-3{,}7}{-3{,}2} = 1{,}15625$; $k_2 = -0{,}15625$;

$y_{i=-2} = k_1 y_{i-1} + k_2 y_{i+1} + P_i = 1{,}15625 \cdot 4{,}5 - 0{,}15625 \cdot 1{,}3 - 2 = 3$;

$k_1 = \frac{0-1{,}3-2}{0-3} = \frac{-3{,}3}{-3} = 1{,}1$; $k_2 = -0{,}1$;

$y_{i=-1} = 1{,}1 \cdot 3 - 0{,}1 \cdot 0 - 2 = 3{,}3 - 2 = 1{,}3$;

$k_1 = \frac{-0{,}3-0-2}{-0{,}3-1{,}3} = \frac{-2{,}3}{-1{,}6} = 1{,}4375$; $k_2 = -0{,}4375$;

$y_{i=0} = 1{,}4375 \cdot 1{,}3 - 0{,}4375 \cdot (-0{,}3) - 2 = 1{,}86875 + 0{,}13125 - 2 = 0$;

$k_1 = \frac{1-(-0{,}3)-2}{1-0} = \frac{-0{,}7}{1} = -0{,}7$; $k_2 = 1{,}7$;

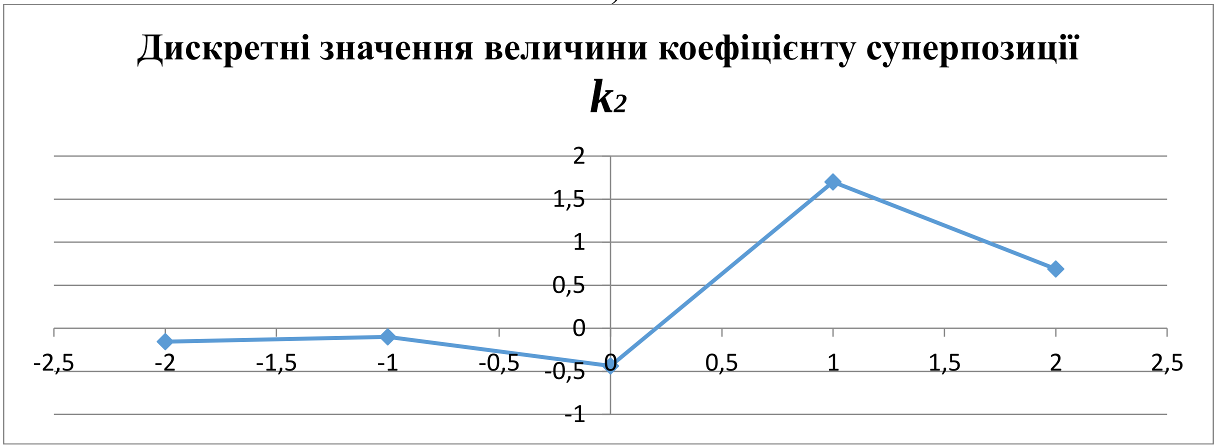
$y_{i=1} = -0{,}7 \cdot 0 + 1{,}7 \cdot 1 - 2 = 1{,}7 - 2 = -0{,}3$;

$k_1 = \frac{4{,}5-1-2}{4{,}5-(-0{,}3)} = \frac{1{,}5}{4{,}8} = 0{,}3125$; $k_2 = 0{,}6875$;

$y_{i=2} = 0{,}3125 \cdot (-0{,}3) + 0{,}6875 \cdot 4{,}5 - 2 = -0{,}09375 + 3{,}09375 - 2 = 1$.

Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції графічно представлені на рисунках 4 а), б).

а)



б)

Рисунок 4 а), б). Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 суміжних точок за умови рівномірно розподіленої між вузлами величини скінченої різниці.

Розглянемо процес формування одновимірних геометричних образів суперпозиціями точкових множин за даними двома ***довільними*** (крайовими) умовами при умові рівномірного характеру розподілення величини скінченої різниці.

Візьмемо довільні початкові (крайові) умови для моделювання дискретного каркасу точок послідовності (7):

$i=0$, $p_1=-2$, $p_2=3$, $y_{i+p_1}=3$, $y_{i+p_2}=4{,}5$;

та, наприклад, $P_{i+p}=-2$.

За формулами (1), (3) для двох довільних вузлів, при $p=-3$:

$k_1 = \frac{y_{i+p_2} - y_{i+p} + P_{i+p}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} = \frac{4{,}5-4{,}5-2}{4{,}5-3} = \frac{-2}{1{,}5} = -1{,}3333$; $k_2 = 2{,}3333$;

$y_{i+p} = k_1 y_{i+p_1} + k_2 y_{i+p_2} + P_{i+p}$;

$y_{i+p} = -1{,}3333 \cdot 3 + 2{,}3333 \cdot 4{,}5 - 2 = -3{,}9999 + 10{,}49985 - 2 = 4{,}5$.

Для p=-2 :

$$k_1 = \frac{y_{i+p_2} - y_{i+p} + P_{i+p}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} = \frac{4{,}5-3-2}{4{,}5-3} = \frac{-0{,}5}{1{,}5} = -0{,}3333\ ;\ \ k_2 = 1{,}3333\ ;$$

$$y_{i+p} = -0{,}3333 \cdot 3 + 1{,}3333 \cdot 4{,}5 - 2 = -0{,}9999 + 5{,}9999 - 2 = 3\ .$$

Для p=-1 :

$$k_1 = \frac{4{,}5-1{,}3-2}{4{,}5-3} = \frac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}8\ ;\ \ k_2 = 0{,}2\ ;$$

$$y_{i+p} = k_1 y_{i+p_1} + k_2 y_{i+p_2} + P_{i+p} = 0{,}8 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 4{,}5 - 2 =$$

$$= 2{,}4 + 0{,}9 - 2 = 1{,}3\ .$$

Для p=0 :

$$k_1 = \frac{4{,}5-0-2}{4{,}5-3} = \frac{2{,}5}{1{,}5} = 1{,}6667\ ;\ \ k_2 = -0{,}6667\ ;$$

$$y_{i+p} = 1{,}66675 \cdot 3 - 0{,}6667 \cdot 4{,}5 - 2 = 5{,}0001 - 3{,}00015 - 2 = 0\ .$$

Для p=1 :

$$k_1 = \frac{4{,}5-(-0{,}3)-2}{4{,}5-3} = \frac{2{,}8}{1{,}5} = 1{,}86667\ ;\ \ k_2 = -0{,}86667\ ;$$

$$y_{i+p} = 1{,}86667 \cdot 3 - 0{,}86667 \cdot 4{,}5 - 2 = 5{,}60001 - 3{,}900015 - 2 = -0{,}3\ .$$

Для p=2 :

$$k_1 = \frac{4{,}5-1-2}{4{,}5-3} = \frac{1{,}5}{1{,}5} = 1\ ;\ \ k_2 = 0\ ;$$

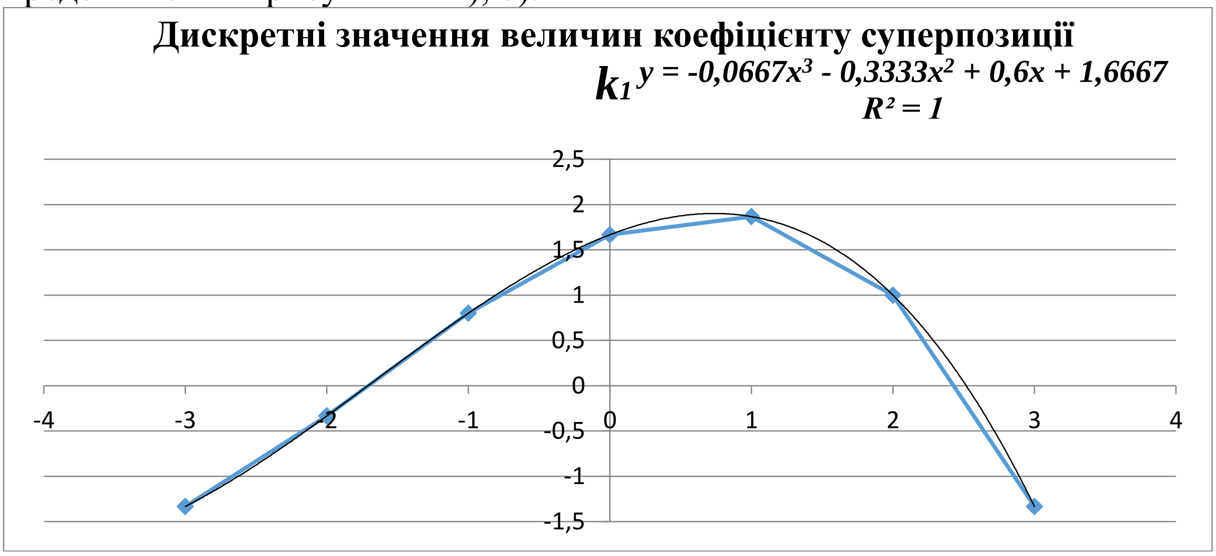
$$y_{i+p} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4{,}5 - 2 = 3 + 0 - 2 = 1\ .$$

Для p=3 :

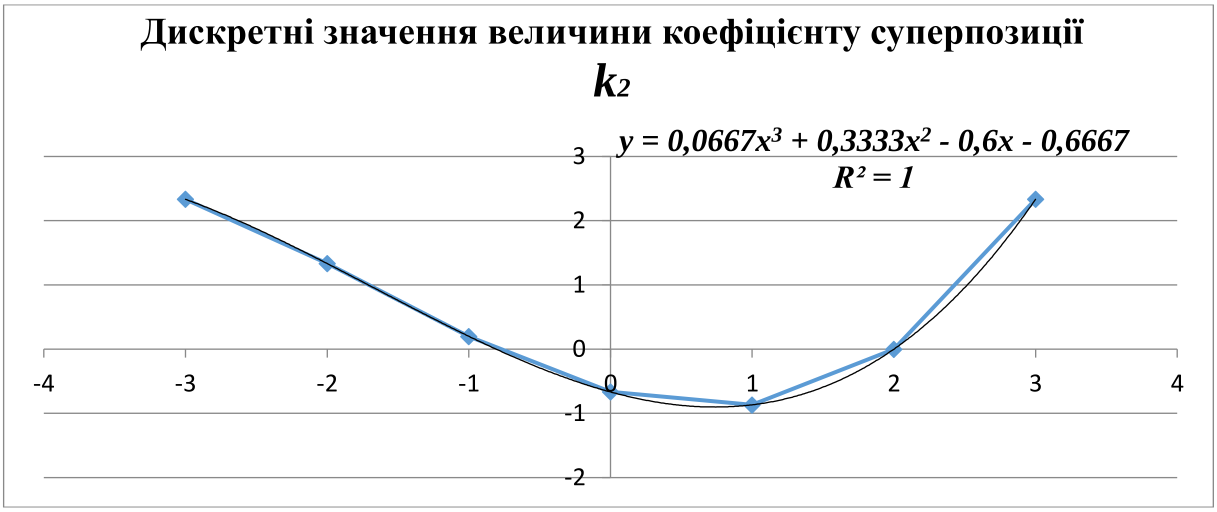
$$k_1 = \frac{4{,}5-4{,}5-2}{4{,}5-3} = \frac{-2}{1{,}5} = -1{,}3333\ ;\ \ k_2 = 2{,}3333\ ;$$

$$y_{i+p} = -1{,}3333 \cdot 3 + 2{,}3333 \cdot 4{,}5 - 2 = -3{,}9999 + 10{,}49985 - 2 = 4{,}5\ .$$

Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції графічно представлені на рисунках 5 а), б).



а)



б)

Рисунок 5 а), б). Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 довільних точок за умови рівномірно розподіленої між вузлами величини скінченої різниці.

Як видно із наведених на рисунках 5 а), б), результатів поліноміальної інтерполяції дискретних значень величин коефіцієнтів суперпозиції, дані коефіцієнти аналітично описуються замкненими формами наступних числових послідовностей:

$$k_1\colon\ y_i = -0{,}0667i^3 - 0{,}3333i^2 + 0{,}6i + 1{,}6667\ ; \tag{8}$$

$$k_2\colon\ y_i = 0{,}0667i^3 + 0{,}3333i^2 - 0{,}6i - 0{,}6667\ . \tag{9}$$

При умові вищенаведеного лінійного характеру розподілення величини скінченої різниці тобто $P_i = -0{,}6i - 1$, при тих же вихідних (крайових) умовах:

$i=0$, $p=-1$, $p_1=-2$, $p_2=3$, $y_{i+p_1}=3$, $y_{i+p_2}=4{,}5$,

одержимо за формулами (4.28), для $p=-3$:

$$P_{i=-3} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot (-3) - 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}8 - 1 = 0{,}8\ ;$$

$$k_1 = \frac{y_{i+p_2} - y_{i+p} + P_{i+p}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} = \frac{4{,}5 - 4{,}5 + 0{,}8}{4{,}5 - 3} = \frac{0{,}8}{1{,}5} = 0{,}53333\ ;\ k_2 = 0{,}46667\ ;$$

$$y_{i+p} = 0{,}53333 \cdot 3 + 0{,}46667 \cdot 4{,}5 + 0{,}8 = 1{,}59999 + 2{,}100015 + 0{,}8 = 4{,}5\ .$$

Для $p=-2$:

$$P_{i=-2} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot (-2) - 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2\ ;$$

$$k_1 = \frac{y_{i+p_2} - y_{i+p} + P_{i+p}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} = \frac{4{,}5 - 3 + 02}{4{,}5 - 3} = \frac{1{,}7}{1{,}5} = 1{,}13333\ ;\ k_2 = -0{,}13333\ ;$$

$$y_{i+p} = 1{,}13333\ \cdot 3 - 0{,}13333 \cdot 4{,}5 + 0{,}2 = 3{,}4 - 0{,}59999 + 0{,}2 = 3\ .$$

Для $p=-1$:

$$P_{i=-1} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0{,}5 = 0{,}6 - 1 = -0{,}4\ ;$$

$$k_1 = \frac{y_{i+p_2} - y_{i+p} + P_{i=-1}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} = \frac{4{,}5 - 1{,}3 - 0{,}4}{4{,}5 - 3} = \frac{2{,}8}{1{,}5} = 1{,}86667\ ;\ k_2 = -0{,}86667\ ;$$

$$y_{i+p} = 1{,}8667 \cdot 3 - 0{,}8667 \cdot 4{,}5 - 0{,}4 = 5{,}6001 - 3{,}90015 - 0{,}4 = 1{,}3\ .$$

Для $p=0$:

$P_{i=0} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot 0 - 2 \cdot 0{,}5 = 0 - 1 = -1$;

$k_1 = \frac{y_{i+p_2} - y_{i+p} + P_{i=-1}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} = \frac{4{,}5-0-1}{4{,}5-3} = \frac{3{,}5}{1{,}5} = 2{,}33333$; $k_2 = -1{,}33333$;

$y_{i+p} = 2{,}33333 \ \cdot 3 - 1{,}33333 \cdot 4{,}5 - 1 = 7 - 5{,}99999 - 1 = 0$.

Для *p=1* :

$P_{i=1} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot 1 - 2 \cdot 0{,}5 = -0{,}6 - 1 = -1{,}6$;

$k_1 = \frac{y_{i+p_2} - y_{i+p} + P_{i=-1}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} = \frac{4{,}5-(-0{,}3)-1{,}6}{4{,}5-3} = \frac{3{,}2}{1{,}5} = 2{,}13333$; $k_2 = -1{,}13333$;

$y_{i+p} = 2{,}133333 \ \cdot 3 - 1{,}133333 \cdot 4{,}5 - 1{,}6 = 6{,}4 - 5{,}099999 - 1{,}6 = -0{,}3$.

Для *p=2* :

$P_{i=2} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot 2 - 2 \cdot 0{,}5 = -1{,}2 - 1 = -2{,}2$;

$k_1 = \frac{y_{i+p_2} - y_{i+p} + P_{i=-1}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} = \frac{4{,}5-1-2{,}2}{4{,}5-3} = \frac{1{,}3}{1{,}5} = 0{,}86667$; $k_2 = 0{,}13333$;

$y_{i+p} = 0{,}866667 \ \cdot 3 + 0{,}133333 \cdot 4{,}5 - 2{,}2 = 2{,}6 + 0{,}6 - 2{,}2 = 1$.

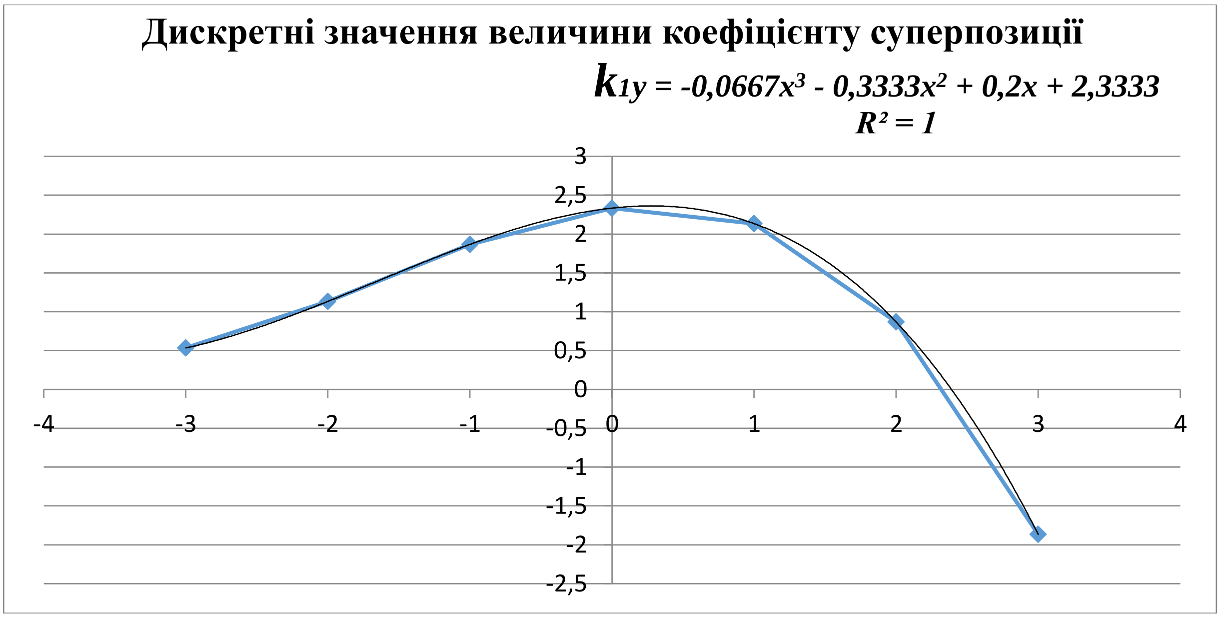
Для *p=3* :

$P_{i=3} = -6 \cdot 0{,}1 \cdot 3 - 2 \cdot 0{,}5 = -1{,}8 - 1 = -2{,}8$;

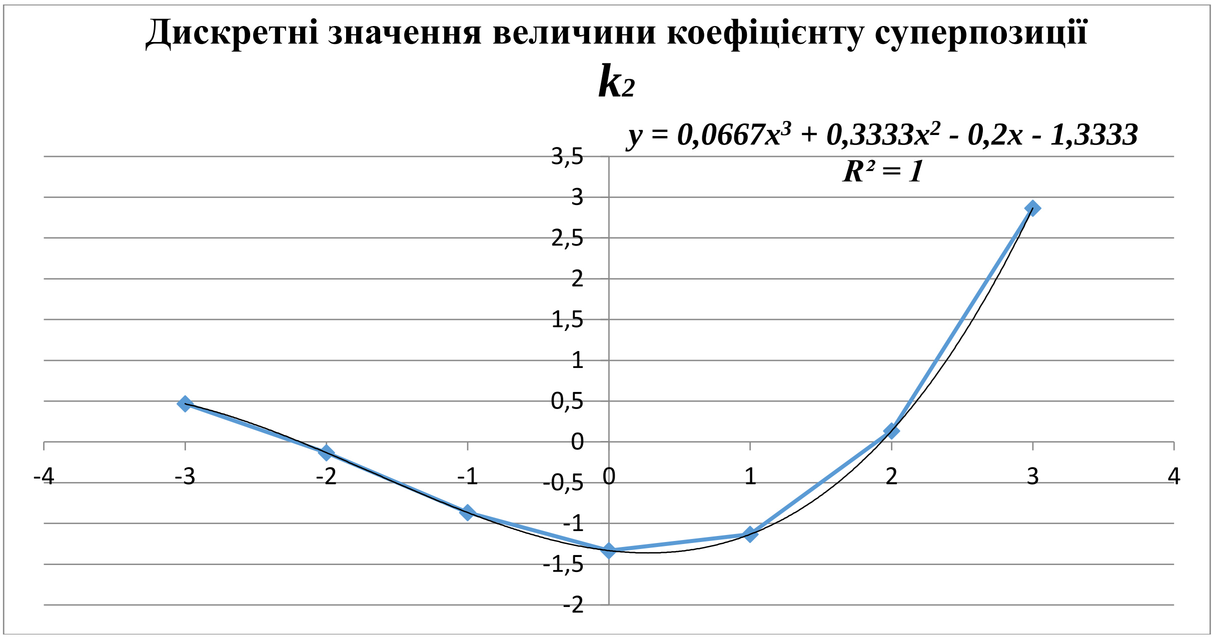
$k_1 = \frac{y_{i+p_2} - y_{i+p} + P_{i=-1}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} = \frac{4{,}5-4{,}5-2{,}8}{4{,}5-3} = \frac{-2{,}8}{1{,}5} = -1{,}86667$; $k_2 = 2{,}86667$;

$y_{i+p} = -1{,}866667 \ \cdot 3 + 2{,}866667 \cdot 4{,}5 - 2{,}8 = -5{,}6 + 12{,}9 - 2{,}8 = 4{,}5$.

Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції графічно представлені на рисунках 6 а), б).



а)



б)

Рисунок 6 а), б). Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 довільних точок за умови лінійної функції розподілу величини скінченої різниці.

Якщо змінювати рівномірно розподілену величину скінченої різниці або значення функції розподілу величини скінченої різниці, або ординати однієї чи двох (крайових) вузлових точок при фіксованих величинах коефіцієнтів суперпозиції, зможемо управляти формою кривої, дискретно представленої вузловими точками її числової послідовності.

Розглянемо процес формування одновимірних геометричних образів суперпозиціями точкових множин за даними двома вузловими точками, якщо одна із цих точок є початком системи координат, при відомій величині скінченої різниці.

Розглянемо числову послідовність

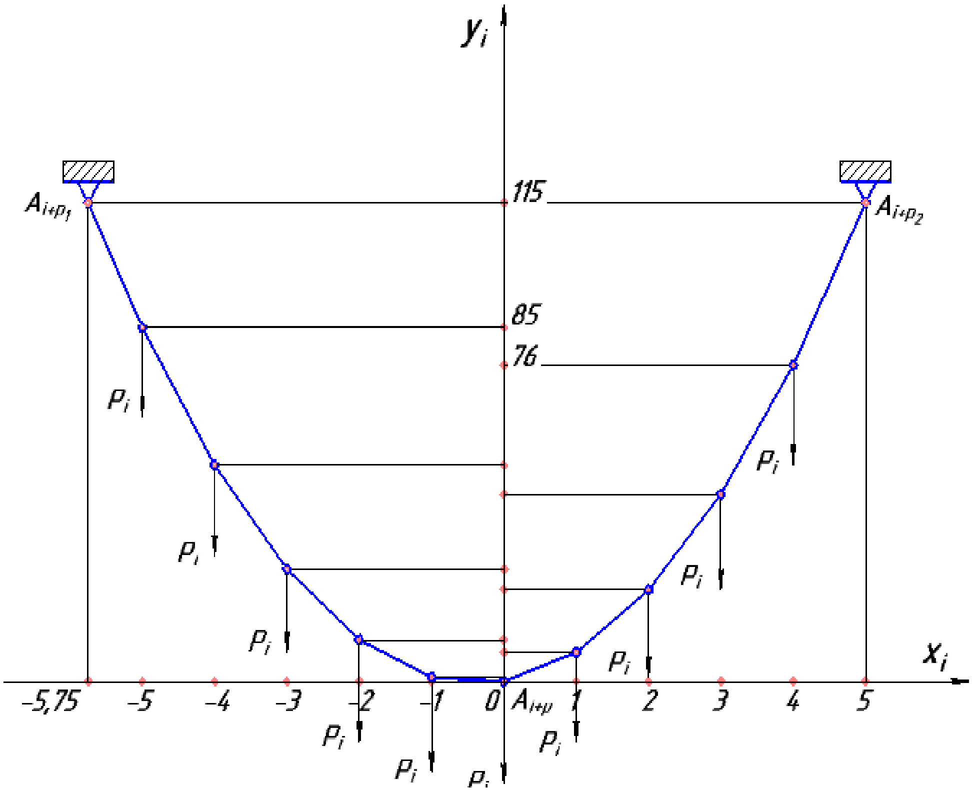
$$y_i = 4i^2 + 3i \tag{10}$$

графічно представлену на рисунку 7 а), б), і числові значення якої наведено у таблиці 2.

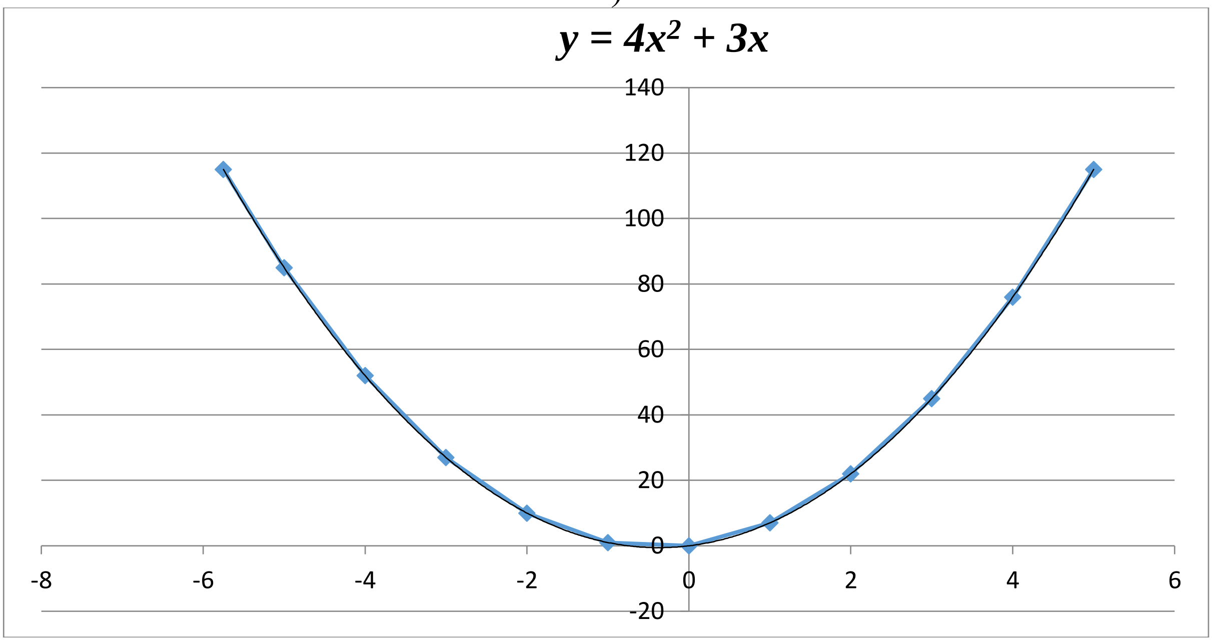
Таблиця 2.

Значення числової послідовності $y_i = 4i^2 + 3i$

i	*-5,75*	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
y_i	*115*	*85*	*52*	*27*	*10*	*1*	*0*	*7*	*22*	*45*	*76*	*115*



а)



б)

Рисунок 7. Дискретна модель числової послідовності $y_i = 4i^2 + 3i$

Величина рівномірно розподіленого зовнішнього навантаження для формування дискретного аналогу даної числової послідовності статико-геометричним методом визначиться із залежності:

$$KP_i = -2a_2 = -2 \cdot 4 = -8\ .$$

Дискретна формоутворююча величина скінченої різниці для формування дискретного аналогу цієї ж числової послідовності суперпозиціями координат суміжних вузлових точок дорівнює:

$$P_i = y_i - k_1 y_{i-1} - k_2 y_{i+1} = P_i = 0 - 0{,}5 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 7 = -4 \,.$$

Візьмемо початкові (крайові) умови для моделювання дискретного каркасу точок послідовності (10): $i=0$, $p=-1$, $p_1=-5{,}75$, $p_2=0$, $y_{i+p}=1$, $y_{i+p_1}=115$, $y_{i+p2}=0$, $P_{i+p}=-4$.

За формулами (3), при, наприклад, $p=-1$:

$$k_1 = \frac{y_{i+p_2} - y_{i+p} + P_{i+p}}{y_{i+p_2} - y_{i+p_1}} = \frac{0-1-4}{0-115} = \frac{-5}{-115} = 0{,}04348 \,; \; k_2 = 0{,}95652 \,;$$

і, далі – координати шуканої точки:

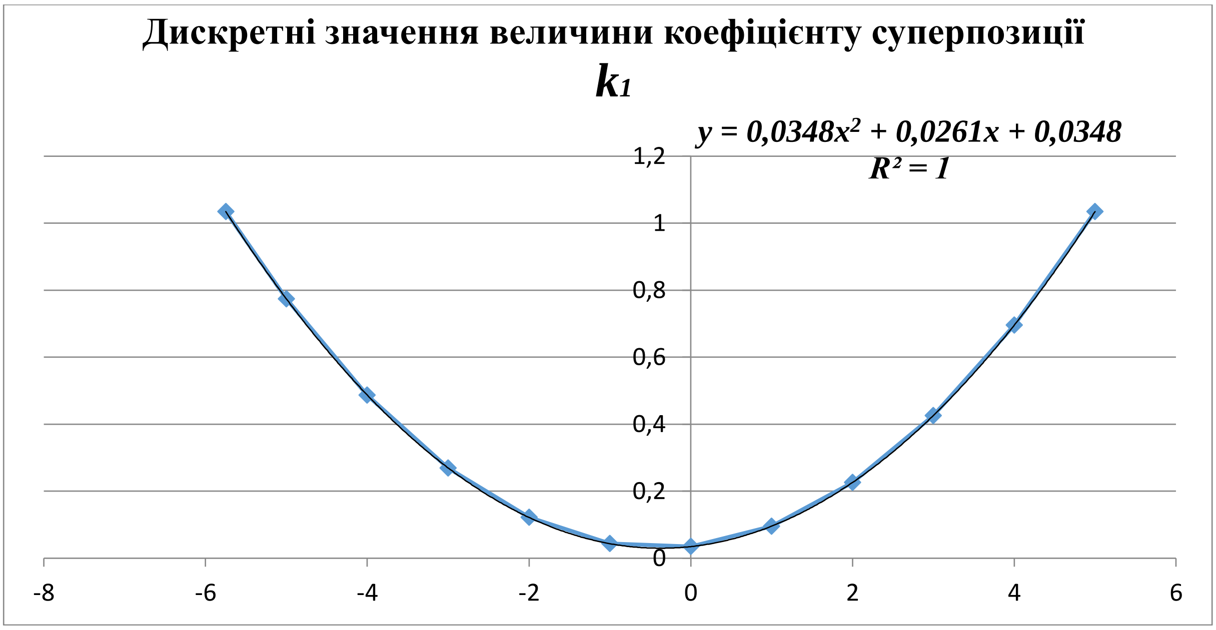
$$y_{i+p} = k_1 y_{i+p_1} + k_2 y_{i+p_2} + P_{i+p} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 1 = 0{,}04348 \cdot 115 + 0{,}95652 \cdot 0 - 4 = 5{,}0002 + 0 - 4 = 1 \,.$$

Значення величин коефіцієнтів суперпозиції координат двох заданих точок для визначення координат решти вузлових точок дискретного аналогу числової послідовності (10) на заданому інтервалі при заданій величині скінченої різниці P_{i+p}=-4 , наведені у таблиці 3, і графічно представлені на рисунках 8 а), б).

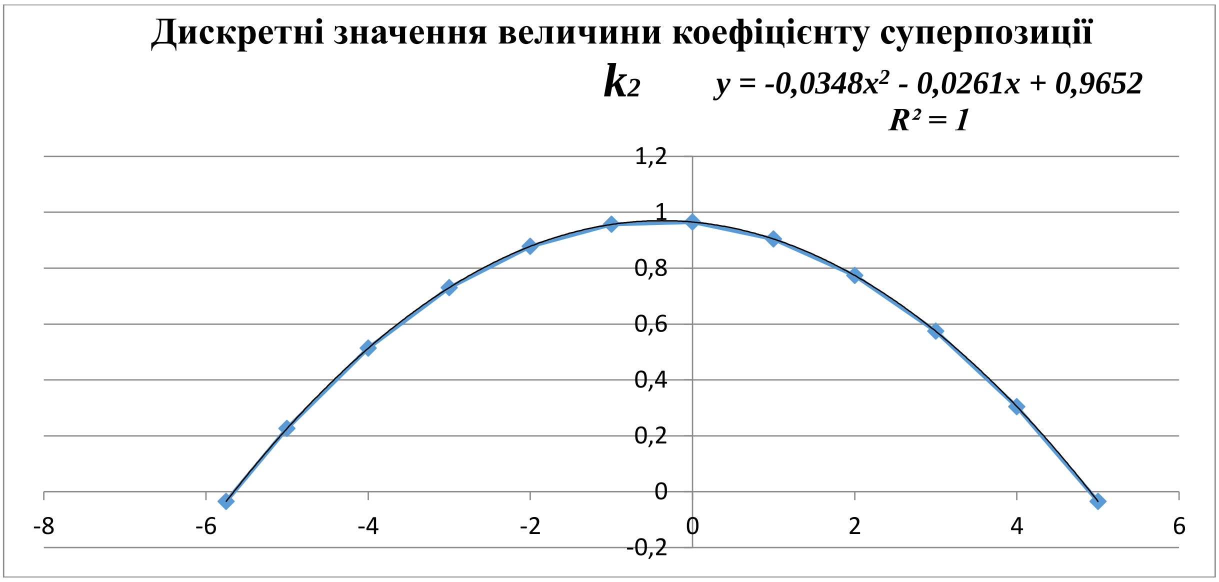
Таблиця 3.

Величини коефіцієнтів суперпозиції для визначення координат точок числової послідовності $y_i = 4i^2 + 3i$

i	**-5,75**	-5	-4	-3	-2	-1	**0**	1	2	3	4	5
yi	**115**	85	52	27	10	1	**0**	7	22	45	76	115
k1	**1,03478**	0,77391	0,48696	0,26957	0,12174	0,04348	**0,03478**	0,09565	0,22609	0,42609	0,69565	1,03478
k2	**-0,03478**	0,22609	0,51304	0,73043	0,87826	0,95652	**0,96522**	0,90435	0,77391	0,57391	0,30435	-0,03478



а)



б)

Рисунок 8 а), б). Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 обчислені за формулами (3)

Як видно із наведених на рисунках 8 а), б), результатів поліноміальної інтерполяції дискретних значень величин коефіцієнтів суперпозиції, дані коефіцієнти аналітично описуються замкненими формами наступних числових послідовностей:

k_1: $y_i = 0{,}0348i^2 + 0{,}0261i + 0{,}0348$;

k_2: $y_i = -0{,}0348i^2 - 0{,}0261i + 0{,}9652$.

Доведемо вірність наступного твердження аналогічного твердженню із [5].

Твердження. Координати будь-якої точки числової послідовності n-го порядку можна визначити як суперпозицію координат двох точок даної послідовності, якщо одна із точок є початком системи координат, при відомій величині скінченої різниці.

Доведемо дане твердження на конкретному прикладі.

У вище наведеному прикладі координати другої базової точки дорівнюють нулю. У такому випадку зможемо записати:

$$\begin{cases} P_{i+p} = y_{i+p} - k_1 y_{i+p_1} - k_2 \cdot 0 \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases}, \qquad (11)$$

і, відповідно, формули (3) зможемо записати у вигляді:

$$k_1 = \frac{P_{i+p} - y_{i+p}}{y_{i+p_1}} . \qquad (12)$$

Звідси одержимо формулу для визначення координат шуканих точок у вигляді:

$$y_{i+p} = P_{i+p} - k_1 y_{i+p_1} .$$

Візьмемо, наприклад, початкові (крайові) умови для моделювання дискретного каркасу точок послідовності (4.37): $i=0$, $p=-1$, $p_1=-5,75$, $p_2=0$, $y_{i+p}=1$, $y_{i+p_1}=115$, $y_{i+p_2}=0$, $P_{i+p}=-4$.

За формулами (12):

$$k_1 = \frac{P_{i+p}-y_{i+p}}{y_{i+p_1}} = \frac{-4-1}{115} = \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{115}} = -0{,}04348 \ ; \ k_2 = 1{,}04348 \ ;$$

і, далі – координати шуканої точки:

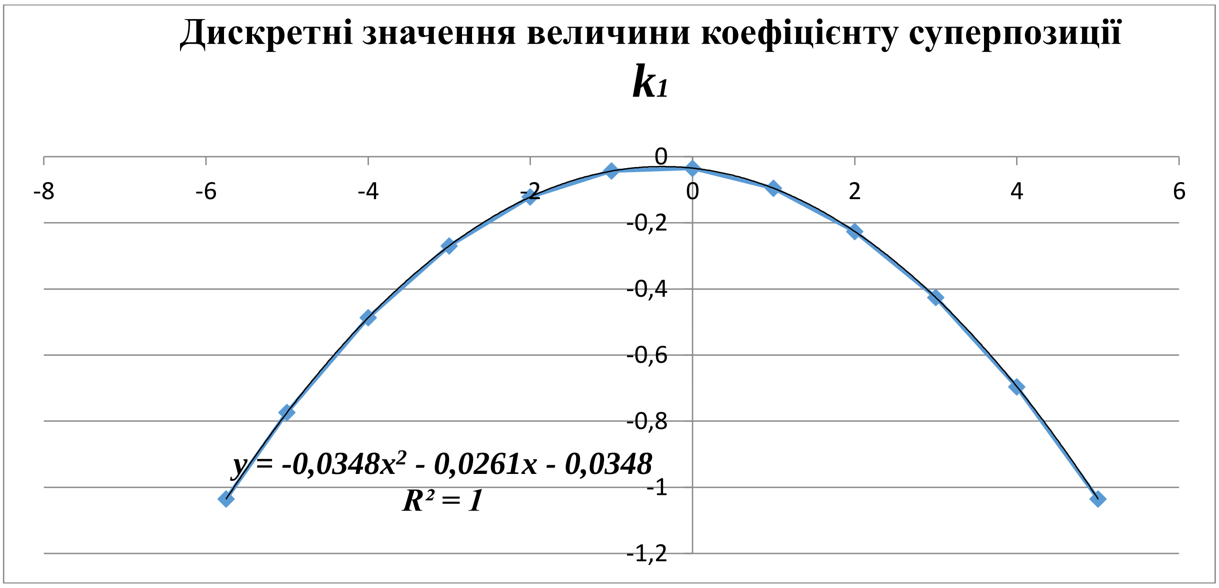
$$y_{i+p} = P_{i+p} - k_1 y_{i+p_1} \Rightarrow 1 = -4 - (-0{,}04348) \cdot 115 = -4 + 5{,}0002 = 1 \ .$$

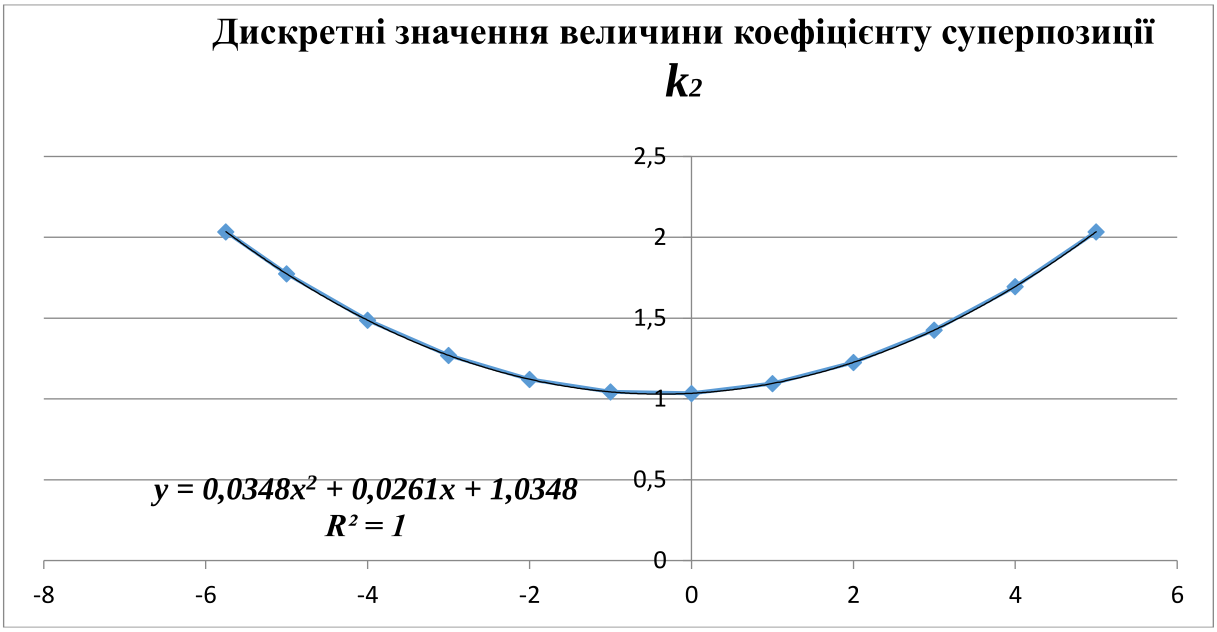
У таблиці 4 наведені обчислені за формулами (12), (11) дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції координат двох заданих точок, за умови, що одна із точок є початком системи координат для визначення координат решти вузлових точок дискретного аналогу числової послідовності (10) на заданому інтервалі при заданій величині скінченої різниці $P_{i+p}=-4$. Графічно дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції представлені на рисунках 9 а), б).

Таблиця 4.

Значення коефіцієнтів суперпозиції за формулами (4.39) для визначення координат точок числової послідовності $y_i = 4i^2 + 3i$

i	**-5,75**	-5	-4	-3	-2	-1	**0**	1	2	3	4	5
yi	**115**	85	52	27	10	1	**0**	7	22	45	76	115
k1	**-1,03478**	-0,77391	-0,48696	-0,26957	-0,12174	-0,04348	**-0,03478**	-0,09565	-0.22609	-0,42609	-0,69565	-1,03478
k2	**2,03478**	1,77391	1,48696	1,26957	1,12174	1,04348	**1,03478**	1,09565	1.22609	1,42609	1,69565	2,03478





б)

Рисунок 9 а), б). Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 обчислені за формулами (12)

Як видно із наведених на рисунках 9 а), б), результатів поліноміальної інтерполяції дискретних значень величин коефіцієнтів суперпозиції, дані коефіцієнти аналітично описуються замкненими формами наступних числових послідовностей:

$$k_1:\ \ y_i = -0{,}0348i^2 - 0{,}0261i + 0{,}0348\ ;$$
$$k_2:\ \ y_i = 0{,}0348i^2 + 0{,}0261i + 1{,}0348\ .$$

Таким чином, якщо змінювати рівномірно розподілену величину скінченої різниці або значення функції розподілу величини скінченої різниці, або ординати однієї заданої вузлової точки при фіксованих величинах коефіцієнтів суперпозиції двох довільно заданих вузлових точок, якщо одна із цих точок є початком системи координат, зможемо управляти формою кривої, дискретно представленої вузловими точками її числової послідовності.

Висновки. У даній статті досліджено закономірності змін величин коефіцієнтів суперпозиції двох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок, при умові відомого закону розподілення величини скінченої різниці, для дискретного моделювання поліноміальних кривих, а також одержано формули обчислення координат будь-якої точки числової послідовності *n*-го порядку як суперпозиції координат двох довільно заданих вузлових точок даної послідовності за умови заданої величини чи функції для визначення величини скінченої різниці.

Дані дослідження визначають загальний підхід до одержання подібних закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції двох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок для визначення координат n точок модельованих будь-яких одновимірних функціональних залежностей та довільних одновимірних множин точок.

Перспективи подальших досліджень. Результати дослідження закономірностей зміни величини коефіцієнтів суперпозиції заданих двох вузлових точок різних елементарних функцій, при умові відомого закону розподілення величини скінченої різниці, дозволять розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Література

1. Воронцов О.В., Воронцова І.В. Закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції у процесі інтерполяції гіперболічними функціями. Прикладні питання математичного моделювання. Херсон: ХНТУ, Т.4, №1. 2021. С. 59 – 66.
https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.6

2. Vorontsov O.V.,Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Discrete modeling of building structures geometric images. International Journal of Engineering & Technology. Vol. 7 No. 3.2. 2018. P. 727 – 731.
DOI: 10.14419/ijet.v7i3.2.15467

3. Vorontsov O.V.,Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms. International Journal of Engineering & Technology. №7 (4.8), Special Issue №8. 2018. Pages 560-565.
DOI: **10.14419/ijet.v7i4.8.27306**

4. Vorontsov O.V.,Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Modeling of shell type spatial structural forms by superpositions of support nodes coordinates. Lecture Notes in Civil Engineering. Volume 73. 2019. Pages 501-513.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-42939-3

5. Воронцов О.В. Величина рекурентної залежності у формуванні дискретних кривих на основі суперпозиції одновимірних точкових множин / О.В. Воронцов, І.В. Воронцова, Л.О. Тулупова // Збірник наукових праць Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Мелітополь: – МДПУ. Випуск 5. 2016. С. – 24 – 29. (http://reposit.pntu.edu.ua/handle/PoltNTU/249).

6. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Систематизація поліноміальних кривих за виглядом функції зовнішнього формоутворюючого навантаження або величини скінченої різниці / О.В. Воронцов, В.Г, Усенко, О.В. Воронцова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 103. – С. 23-37.

DOI: https://doi.org/10.32347/0131-579x.2022.103/23-27

7. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Величина скінченої різниці у формуванні одновимірних геометричних образів представлених числовими послідовностями елементарних функціональних залежностей / О.В. Воронцов, В.Г, Усенко, О.В. Воронцова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 102. – С. 39-55.
DOI: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.39-55

8. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями координат чотирьох точок двовимірних точкових множин на прикладі параболічних поверхонь / О.В. Воронцов, В.Г, Усенко, О.В. Воронцова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 101. – С. 19-33.
DOI: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.19-33

PhD, assistant professor **Oleg Vorontsov**
voronoleg6163@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7339-9196
National University «Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic».
PhD, lecturer **Iryna Vorontsova**
ira061061@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9131-2816
Poltava Oil and Gas College of
National University «Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic».

THE ONE-DIMENSIONAL GEOMETRIC IMAGES FORMATION BY SUPERPOSITIONS OF POINT SETS UNDER THE GIVEN BOUNDARY CONDITIONS AND FINITE DIFFERENCE

A variation of the external load distribution function between nodes of a discrete grid in the static-geometric method allows discretely modeling curves of different shapes and solving problems of discrete interpolation on the area.

The form of the continuous analogue of the discretely presented curve directly depends on the nature of the functions specified control load, which forms the discretely presented curve (DPC).

There are known studies of the aspects of the relationship between the static geometric method of forming the DPC and the analytical description of a continuous curve through the synthesis of the static geometric method of forming discrete curves and the method of modeling them with numerical sequences. Separate issues of determining the correspondence of the equations of the continuous surface to the discrete function of the distribution of the external load are also investigated.

This article examines the patterns of changes in the values of the superposition coefficients of two arbitrarily specified, both adjacent and non-adjacent nodal points, under the condition of a known distribution law of the magnitude of the finite difference, which in some cases will be a prototype of the

external load between the nodes of the frame, which is a discrete model of a defined geometric image.

If we change the uniformly distributed value of the finite difference or the value of the distribution function of the value of the finite difference, or the ordinates of one or two (marginal) nodal points at fixed values of the superposition coefficients, we can control the shape of the curve, discretely represented by the nodal points of its numerical sequence.

The research data determine a general approach to obtaining similar patterns of changes in the values of the superposition coefficients of two arbitrarily specified, both adjacent and non-adjacent nodal points for determining the coordinates of points of modeling any one-dimensional functional dependencies and arbitrary one-dimensional sets of points.

The results of the study of the regularities of changes in the values of the superposition coefficients given by two nodal points of different elementary functions, under the condition of a known distribution law of the magnitude of the finite difference, will allow solving the problems of continuous discrete interpolation and extrapolation by numerical sequences of any one-dimensional functional dependencies (determine the ordinates of the sought points of discrete curves) without time-consuming operations of assembling and solving large systems of linear equations.

Keywords: discrete modeling; static-geometric method; geometric apparatus of superposition's; the value of the finite difference; numerical sequences.

References

1. Vorontsov O.V., Vorontsova I.V. Zakonomirnosti zminy velychyn koefitsiientiv superpozytsii u protsesi interpoliatsii hiperbolichnymy funktsiiamy. Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia. Kherson: KhNTU, T.4, №1. 2021. S. 59 – 66.
https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.6

2. Vorontsov O.V.,Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Discrete modeling of building structures geometric images. International Journal of Engineering & Technology. Vol. 7 No. 3.2. 2018. P. 727 – 731. {in English}.
DOI: 10.14419/ijet.v7i3.2.15467

3. Vorontsov O.V.,Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Modeling of shell type spatial structural forms by superpositions of support nodes coordinates. Lecture Notes in Civil Engineering. Volume 73. 2019. Pages 501-513. {in English}.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-42939-3

4. Vorontsov O.V.,Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms. International Journal of Engineering & Technology. №7 (4.8), Special Issue №8. 2018. Pages 560-565. {in English}.

DOI: 10.14419/ijet.v7i4.8.27306
5. Vorontsov O.V. Velychyna rekurentnoi zalezhnosti u formuvanni dyskretnykh kryvykh na osnovi superpozytsii odnovymirnykh tochkovykh mnozhyn / O.V. Vorontsov, I.V. Vorontsova, L.O. Tulupova // Zbirnyk naukovykh prats Melitopolskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho. Melitopol: – MDPU. Vypusk 5. 2016. S. – 24 – 29.
(http://reposit.pntu.edu.ua/handle/PoltNTU/249).
6. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. Systematyzatsiia polinomialnykh kryvykh za vyhliadom funktsii zovnishnoho formoutvoriuiuchoho navantazhennia abo velychyny skinchenoi riznytsi / O.V. Vorontsov, V.H, Usenko, O.V. Vorontsova // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. – K.: KNUBA, 2022. – Vyp. 103. – S. 23-37.
DOI: https://doi.org/10.32347/0131-579x.2022.103/23-27
7. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. Velychyna skinchenoi riznytsi u formuvanni odnovymirnykh heometrychnykh obraziv predstavlenykh chyslovymy poslidovnostiamy elementarnykh funktsionalnykh zalezhnostei / O.V. Vorontsov, V.H, Usenko, O.V. Vorontsova // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. – K.: KNUBA, 2022. – Vyp. 102. – S. 39-55.
DOI: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.39-55
8. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. Dyskretna interpoliatsiia superpozytsiiamy koordynat chotyrokh tochok dvovymirnykh tochkovykh mnozhyn na prykladi parabolichnykh poverkhon / O.V. Vorontsov, V.H, Usenko, O.V. Vorontsova // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. – K.: KNUBA, 2022. – Vyp. 101. – S. 19-33.
DOI: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.19-33