УДК. 514.18

ЗАЛЕЖНОСТІ ВЕЛИЧИНИ КІНЦЕВОЇ РІЗНИЦІ ТА ВЕЛИЧИН КОЕФІЦІЄНТІВ СУПЕРПОЗИЦІЇ ДВОХ ТОЧОК ДИСКРЕТНИХ КРИВИХ

DOI
Воронцов О.В., к.т.н.,
voronoleg6163@gmail.com, **ORCID: 0000-0001-7339-9196**
Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (м. Полтава, Україна).
Воронцова І.В., к.пед.н.,
ira061061@gmail.com, **ORCID: 0000-0001-9131-2816**
Полтавський коледж нафти і газу
Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (м. Полтава, Україна).

Формування дискретних моделей n-вимірних геометричних образів (ГО) передбачає залучення методів, що вимагають використання значних обчислювальних ресурсів. Геометричний об'єкт довільної форми завжди може бути представлений впорядкованою множиною точок за певним законом так, щоб можна було визначити координати будь-якої точки всередині контуру (області). Питанням є лише необхідна щільність вихідної інформації та затрати на її одержання, обробку і зберігання.

Тому необхідно проводити дослідження нових методів формування (ГО) які дозволяють забезпечити мінімальні витрати на отримання результату. Використання геометричного апарату суперпозицій при формування дискретних моделей (ГО) статико-геометричним методом дозволяє визначати координати вузлів дискретних каркасів за координатами мінімальної кількості заданих вузлів без складання додаткових великих систем лінійних рівнянь.

Задачею даної роботи, зокрема, є дослідження методики формування дискретних образів кривих ліній на основі класичного методу кінцевих різниць, статико-геометричного методу моделювання і геометричного апарату суперпозицій.

У даній статті запропоновано методику виведення аналітичних залежностей щодо визначення дискретних величин коефіцієнтів суперпозиції двох заданих вузлових точок та формоутворюючої величини кінцевої різниці для моделювання одновимірних геометричних образів на основі заданої симетричної розрахункової схеми.

Дана методика може бути застосована для виведення подібних аналітичних залежностей, що дозволяють визначати величини коефіцієнтів суперпозиції двох заданих вузлових точок на основі будь-яких числових послідовностей та довільних розрахункових схем і, тим самим *розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції одновимірними числовими послідовностями широкого спектру елементарних функцій.*

Ключові слова: дискретне моделювання, статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, величина кінцевої різниці, коефіцієнти суперпозиції.

Постановка проблеми. Необхідність оперативного втручання у хід розрахунків в задачах проектування інженерних споруд і мереж, будівельних та машинобудівних виробів за допомогою різних САПР вимагає подальшого удосконалення алгоритмів створення геометричних прообразів об'єктів та процесів, що не вимагають значних затрат обчислювальних ресурсів.

Одним із важливих напрямів дискретної геометрії є статико-геометричний метод, створений на основі статичної інтерпретації класичного методу кінцевих різниць. Однак головним його недоліком є необхідність складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь. Цього недоліку можна позбутися за рахунок використання геометричного апарату суперпозицій.

Аналіз останніх досліджень Питанням застосування для дискретного моделювання ГО геометричного апарату суперпозицій в поєднанні з класичним методом кінцевих різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей присвячені роботи авторів даної статті [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є створення методики виведення аналітичних залежностей для визначення дискретних величин коефіцієнтів суперпозиції двох заданих вузлових точок та формоутворюючої величини кінцевої різниці для моделювання одновимірних геометричних образів

Виклад основного матеріалу. **Твердження.** Координату будь-якої точки числової послідовності n-го степеня можна визначити як суперпозицію координат двох довільних точок даної послідовності при відомій величині кінцевої різниці [4].

Враховуючи результати досліджень [1, 2, 3, 4], зможемо скласти систему рівнянь (1):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2} k_n = 1 \\ \sum_{n=1}^{2} k_n i_n = i \\ \sum_{n=1}^{2} k_n y_{i_n} + P_{i_0} = y_{i_0} \end{cases} \tag*{1}$$

для виведення формул обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 та ординати шуканого вузла y_{i_0} за даними координатами двох довільних вузлових точок певної числової послідовності та величиною кінцевої різниці P_{i_0} у шуканому вузлі, а також для виведення формул обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 та величини кінцевої

P_{i_0} різниці у шуканому вузлі за даними координатами двох довільних вузлових точок та ординатою y_{i_0} .

Також, враховуючи результати досліджень [1, 2, 3, 4], зможемо скласти систему рівнянь (2):

$\begin{cases} i_0 = k_1 i_1 + (1-k_1) i_2 \\ y_{i_0} = k_1 y_{i_1} + (1-k_1) y_{i_2} + P_{i_0} \end{cases}$	2

для виведення формул обчислення величини одного коефіцієнту суперпозиції (k_1 чи k_2) та ординати шуканого вузла y_{i_0} за даними координатами двох довільних вузлових точок певної числової послідовності та величиною кінцевої різниці P_{i_0} у шуканому вузлі, а також для виведення формул обчислення величини одного коефіцієнту суперпозиції (k_1 чи k_2) та величини кінцевої P_{i_0} різниці у шуканому вузлі за даними координатами двох довільних вузлових точок та ординатою y_{i_0} вузла певної числової послідовності:

Розв'язавши систему (2), знайдемо вирази (3), (4), (5) для обчислення величини коефіцієнту суперпозиції та ординати шуканого вузла:

$k_1 = \frac{(i_2 - i_0)}{(i_2 - i_1)}$	3
$y_{i_0} = \frac{i_2 y_{i_1} - i_1 y_{i_2} + i_0 (y_{i_2} - y_{i_1})}{i_2 - i_1} + P_{i_0}$	4

а також, для обчислення величини коефіцієнту суперпозиції та величини кінцевої різниці у шуканому вузлі:

$P_{i_0} = \frac{i_1 y_{i_2} - i_2 y_{i_1} + i_0 (y_{i_1} - y_{i_2})}{i_2 - i_1} + y_0$	5

Для вихідних умов (6):

$i_1 = 10,\ i_2 = 0\ ;\ y_{i_1} = 100,\ y_{i_2} = 0$	6

розрахункової схеми, представленої на рисунку 1, обчислимо величини коефіцієнтів суперпозиції k_1 і k_2 за формулами (3).

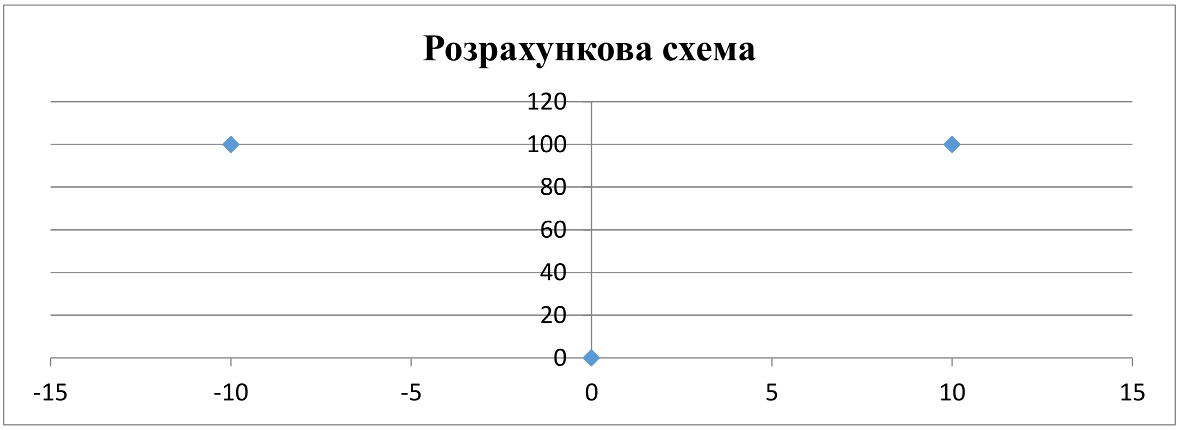


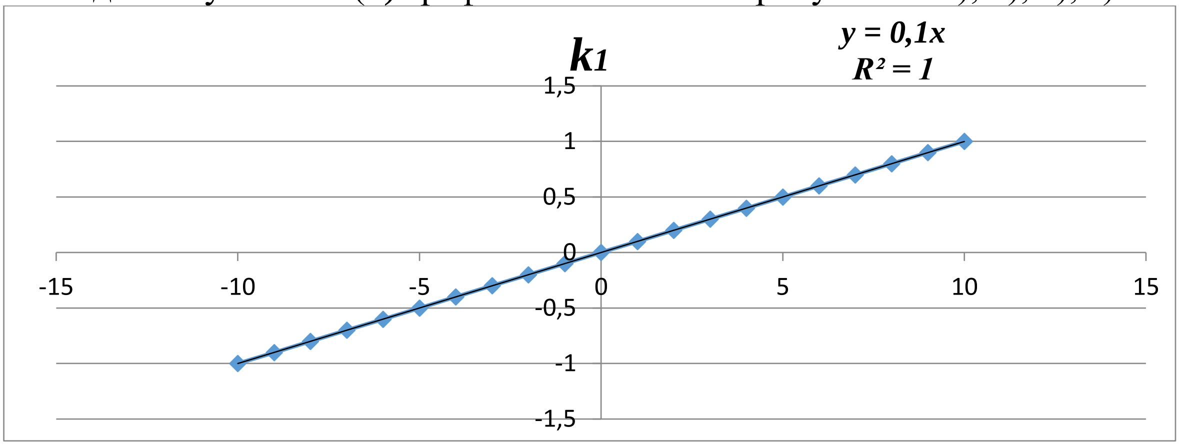
Рисунок 1. Розрахункова схема моделювання кривих за симетричними вихідними умовами:

$$i_1 = -10;\ i_2 = 0;\ i_3 = 10\ ;\ y_{i_1} = 100;\ y_{i_2} = 0, 2, 4, 6, 8, 10;\ y_{i_3} = 100\ .$$

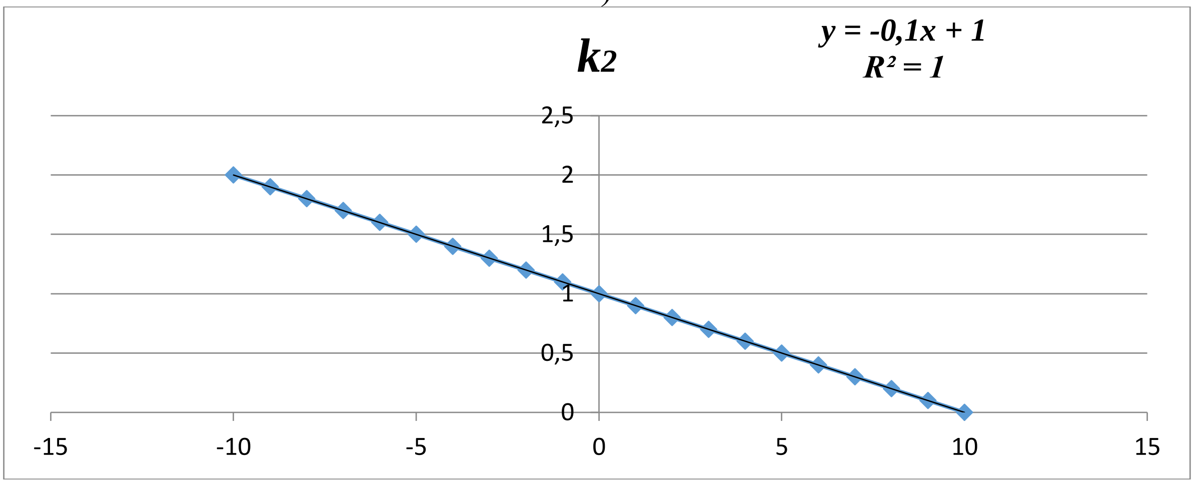
Результати обчислень дискретних значень величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 і k_2, величини кінцевої різниці, ординат шуканих вузлів для заданих вузлів $i_1 = 10$, $y_{i_1} = 100$; $i_2 = 0$, $y_{i_2} = 0$ за формулами (3) на основі числової послідовності (7):

$y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$	7

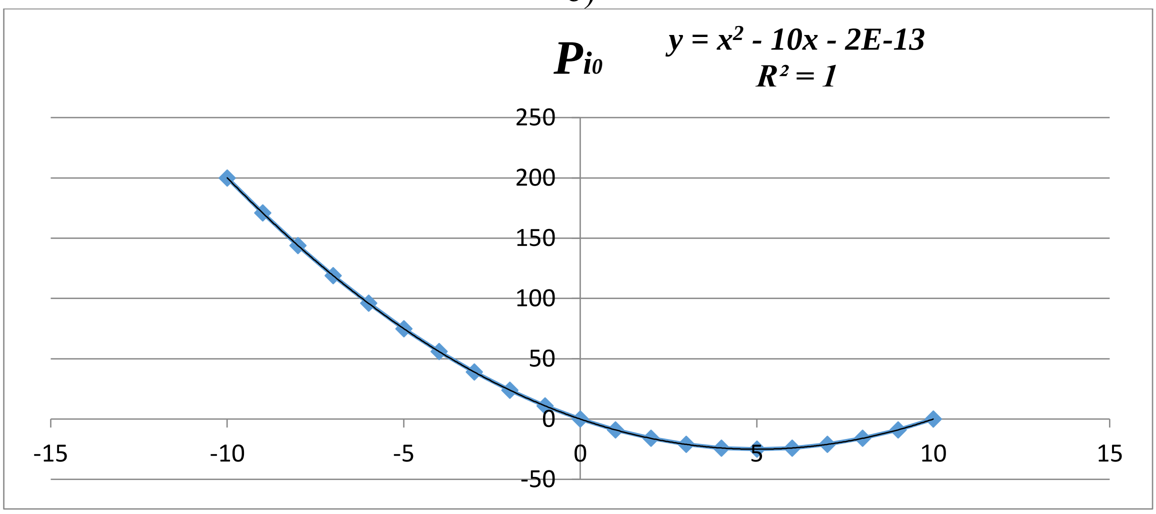
за вихідними умовами (6) графічно показано на рисунках 2 а), б), в), г).



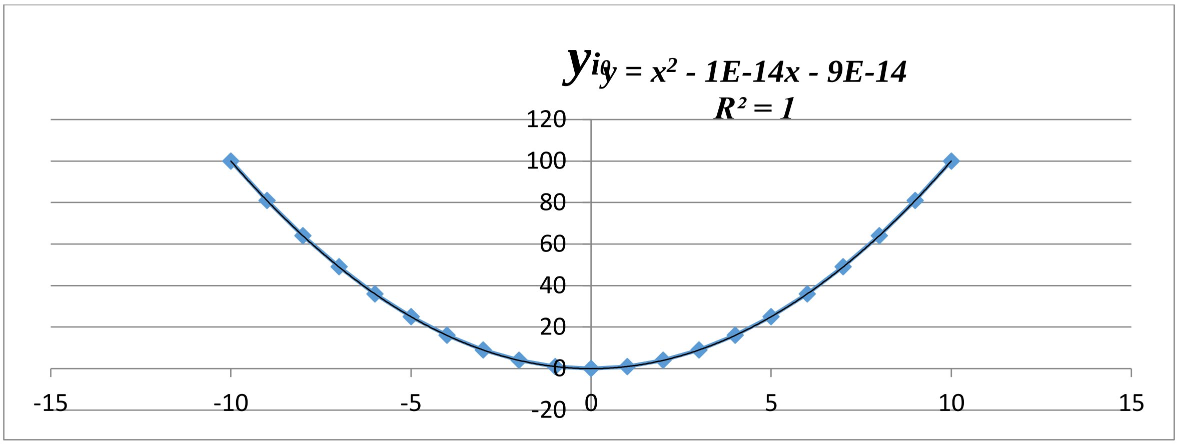
а)



б)



в)



г)

Рисунок 2 а), б), в), г). Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 і k_2, величини кінцевої різниці P_{i_0} та ординат шуканих вузлів y_{i_0} для вихідних умов:

$$i_1 = 10\ ,\ y_{i_1} = 100\ ;\ i_2 = 0\ ,\ y_{i_2} = 0$$

Але одночасно, враховуючи дослідження [2, 4]можемо записати:

$$k_1 = \frac{P_{i_0} - y_{i_0} + y_{i_2}}{y_{i_2} - y_{i_1}}\ ;\ k_2 = \frac{P_{i_0} - y_{i_0} + y_{i_1}}{y_{i_1} - y_{i_2}} \qquad (8)$$

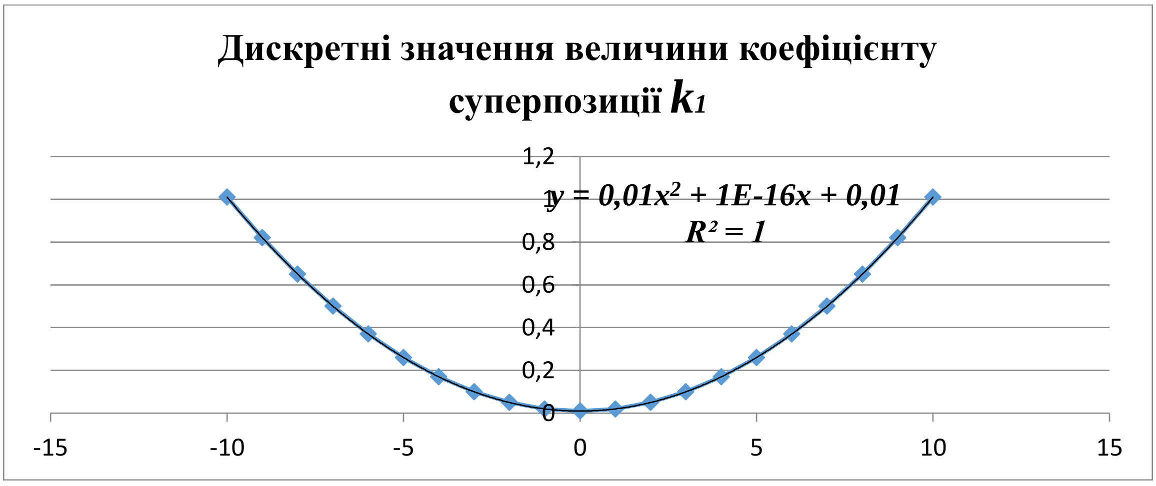
Розглянемо процес формування одновимірних геометричних образів на основі числової послідовності (7), суперпозиціями координат двох заданих вузлових точок при відомій рівномірно розподіленій між вузлами модельованого образу величині кінцевої різниці.

Для вихідних умов (9):

$$i_1 = 10,\ i_2 = 0\ ;\ y_{i_1} = 100,\ y_{i_2} = 0\ ;\ P_{i_0} = -1 \qquad (9)$$

розрахункової схеми, представленої на рисунку 1, обчислимо величини коефіцієнтів суперпозиції k_1 і k_2 за формулами (8), де: $k_1 + k_2 = 1$.

Результати обчислень дискретних значень величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 і k_2 за формулами (8) на основі числової послідовності (7) графічно показано на рисунках 3 а), б).



а)

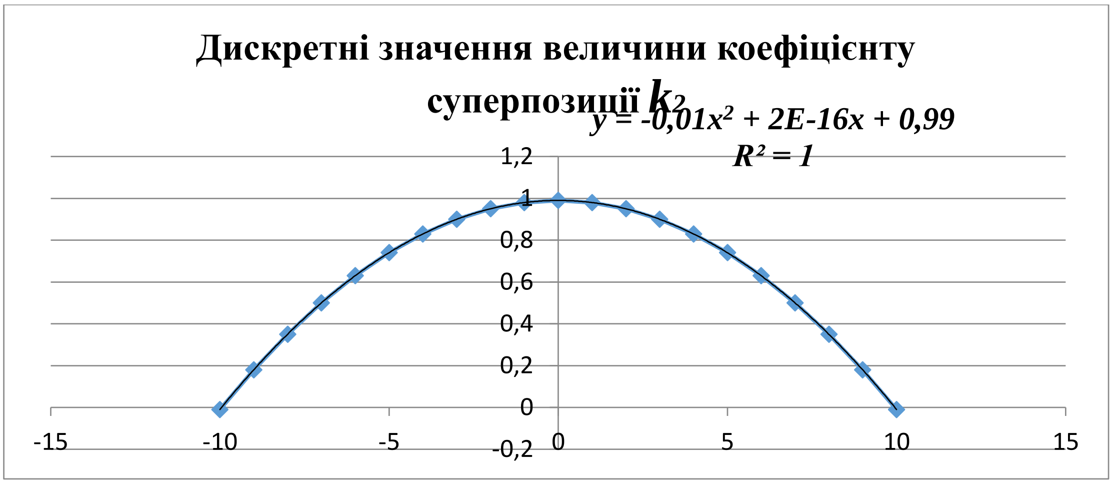


Рисунок 3 а), б). Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 для $y_{i_2} = 0$, $P_{i_0} = -1$.

Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції аналітично описуються замкненими формами числових послідовностей (10):

k_1: $y_i = 0{,}01i^2 + 0{,}01$; k_2: $y_i = -0{,}01i^2 + 0{,}99$	10

Ординати y_{i_0} модельованих кривих будуть визначені із формул (2):

$y_{i_0} = P_{i_0} - k_1(y_{i_2} - y_{i_1}) + y_{i_2}$	11

або, із формул [2, 4]:

$y_{i_0} = P_{i_0} + k_1 y_{i_1} + k_2 y_{i_2}$	12

за вихідними умовами (6), у яких постійними величинами будуть:

$$i_1 = 10,\ i_2 = 0\ ;\ y_{i_1} = 100\ ,$$

а змінними величинами будуть y_{i_2} та P_{i_0} .

Ординати y_{i_0} модельованих кривих для $i_1 = 10$ будуть завжди дорівнювати y_{i_1} , і, конкретно для вихідних даних (6), будуть дорівнювати 100, тобто – $y_{i_0} = y_{i_1} = 100$.

Тому при заданій змінній величині y_{i_2} , величину кінцевої різниці P_{i_0} зможемо визначити із (12):

$P_{i_0} = y_{i_0} - k_1 y_{i_1} - k_2 y_{i_2}$	13

Наприклад, якщо у вихідних даних (6) ордината центрального вузла y_{i_2} буде дорівнювати 1: $y_{i_2} = 1$, то, за умови $y_{i_0} = y_{i_1} = 100$, за формулою (13):

$$P_{i_0} = y_{i_0} - k_1 y_{i_1} - k_2 y_{i_2} = y_{i_1} - k_1 y_{i_1} - k_2 y_{i_2} =$$
$$= 100 - 1{,}01 \cdot 100 - (-0{,}01) \cdot 1 = -0{,}99\ .$$

Або, навпаки, наприклад, величина кінцевої різниці P_{i_0} буде дорівнювати $-0{,}99$: $P_{i_0} = -0{,}99$, то, за умови $y_{i_0} = y_{i_1} = 100$, за формулою (12):

$$y_{i_0} = P_{i_0} + k_1 y_{i_1} + k_2 y_{i_2} \Longrightarrow y_{i_1} = P_{i_0} + k_1 y_{i_1} + k_2 y_{i_2} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow y_{i_2} = \frac{y_{i_1} - P_{i_0} - k_1 y_{i_1}}{k_2} = \frac{100-(-0{,}99)-1{,}01\cdot 100}{-0{,}01} = 1 \ .$$

Якщо змінювати рівномірно розподілену величину кінцевої різниці або величину ординати фіксованого (одного із двох заданих вузлів), при фіксованих величинах коефіцієнтів суперпозиції двох довільно заданих вузлових точок, зможемо управляти формою кривої, дискретно представленої вузловими точками її числової послідовності.

Висновки. У даній статті запропоновано методику виведення аналітичних залежностей щодо визначення дискретних величин коефіцієнтів суперпозиції двох заданих вузлових точок та формоутворюючої величини кінцевої різниці для моделювання одновимірних геометричних образів.

Перспективи подальших досліджень. Дана методика може бути застосована для виведення подібних аналітичних залежностей, що дозволяють визначати величини коефіцієнтів суперпозиції двох заданих вузлових точок на основі будь-яких числових послідовностей та довільних розрахункових схем і, тим самим розв’язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції одновимірними числовими послідовностями широкого спектру елементарних функцій.

Література

1. Воронцов О.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями координат трьох точок одновимірних числових послідовностей на прикладі дробово-лінійних функцій // О.В. Воронцов, І.В. Воронцова // Сучасні проблеми моделювання. Збірник наукових праць Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Мелітополь: – МДПУ. Випуск 18. 2020. С. 90.— 98.
https://doi.org/10.33842/2313-125X/2020/18/90/98

2. Воронцов О.В. Величина рекурентної залежності у формуванні дискретних кривих на основі суперпозиції одновимірних точкових множин / О.В. Воронцов, І.В. Воронцова, Л.О. Тулупова // Збірник наукових праць Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Мелітополь: – МДПУ. Випуск 5. 2016. С. – 24 – 29.
http://reposit.pntu.edu.ua/handle/PoltNTU/249.

3. Воронцов О.В.,Воронцова І.В. Спосіб одновимірної дискретної інтерполяції за координатами трьох точок числових послідовностей на прикладі показникових функцій. Прикладні питання математичного моделювання. Херсон: ХНТУ, Т.3, №2.2. 2020. С. 35 – 43.
https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.3

4. Воронцов О.В. Дискретне моделювання геометричних образів об’єктів проектування суперпозиціями одновимірних числових послідовностей з урахуванням функціонального навантаження / О.В. Воронцов, І.В. Воронцова // Збірник наукових праць (галузеве

машинобудування, будівництво) / Полтав. нац. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка. – Полтава: ПолтНТУ, 2015. – Вип. 3(45). – С. 28 – 39.

5. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Систематизація поліноміальних кривих за виглядом функції зовнішнього формоутворюючого навантаження або величини кінцевої різниці / О.В. Воронцов, В.Г, Усенко, О.В. Воронцова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 103. – С. 23-37.
https://doi.org/10.32347/0131-579x.2022.103/23-27

6. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Величина кінцевої різниці у формуванні одновимірних геометричних образів представлених числовими послідовностями елементарних функціональних залежностей / О.В. Воронцов, В.Г, Усенко, О.В. Воронцова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 102. – С. 39-55.
https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.39-55

7. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями координат чотирьох точок двовимірних точкових множин на прикладі параболічних поверхонь / О.В. Воронцов, В.Г, Усенко, О.В. Воронцова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 101. – С. 19-33.
https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.19-33

THE FINITE DIFFERENCE DEPENDENCIES AND THE SUPERPOSITION COEFFICIENTS OF TWO POINTS OF DISCRETE CURVES

Oleg Vorontsov, Irina Vorontsova

The discrete models' formation of n-dimensional geometric images (GO) involves using of methods that require the application of significant computing resources. A geometric object of an arbitrary shape can always be represented by an ordered set of points according to a certain law so that the coordinates of any point inside the contour (area) can be determined. The only question is the necessary density of the source information and the costs of its acquisition, processing, and storage.

Consequently, it is necessary to conduct research on new methods of formation (GO) that allow ensuring minimum costs for obtaining results. The use of the geometric apparatus of superposition in the formation of discrete models (GO) by the static-geometric method allows determining the coordinates of nodes of discrete frames based on the coordinates of the minimum number of specified nodes without compiling additional large systems of linear equations.

The aim of this work, in particular, is to study the method of forming discrete images of curved lines based on the classical method of finite differences, the static-geometric modeling method, and the geometric apparatus of superposition.

The article proposes a technique for deriving analytical dependencies for discrete values determining the superposition coefficients of two given nodal points and the shape-forming value of the finite difference for modeling one-dimensional geometric images based on a given symmetrical calculation scheme.

This procedure can be applied to derive similar analytical dependencies, which allow determining the values of the superposition coefficients of two given nodal points on the basis of any numerical sequences and arbitrary calculation schemes and, thus, solving problems of continuous discrete interpolation with one-dimensional numerical sequences of a wide range of elementary functions.

Keywords: discrete modeling, static-geometric method, geometric apparatus of superposition, finite difference value, superposition coefficients.

References

1. Vorontsov O.V. Dyskretna interpoliatsiia superpozytsiiamy koordynat trokh tochok odnovymirnykh chyslovykh poslidovnostei na prykladi drobovo-liniinykh funktsii // O.V. Vorontsov, I.V. Vorontsova // Suchasni problemy modeliuvannia. Zbirnyk naukovykh prats Melitopolskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho. Melitopol: – MDPU. Vypusk 18. 2020. S. 90.— 98.
https://doi.org/10.33842/2313-125X/2020/18/90/98

2. Vorontsov O.V. Velychyna rekurentnoi zalezhnosti u formuvanni dyskretnykh kryvykh na osnovi superpozytsii odnovymirnykh tochkovykh mnozhyn / O.V. Vorontsov, I.V. Vorontsova, L.O. Tulupova // Zbirnyk naukovykh prats Melitopolskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho. Melitopol: – MDPU. Vypusk 5. 2016. S. – 24 – 29.
http://reposit.pntu.edu.ua/handle/PoltNTU/249.

3. Vorontsov O.V.,Vorontsova I.V. Sposib odnovymirnoi dyskretnoi interpoliatsii za koordynatamy trokh tochok chyslovykh poslidovnostei na prykladi pokaznykovykh funktsii. Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia. Kherson: KhNTU, T.3, №2.2. 2020. S. 35 – 43.
https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.3

4. Vorontsov O.V. Dyskretne modeliuvannia heometrychnykh obraziv obiektiv proektuvannia superpozytsiiamy odnovymirnykh chyslovykh poslidovnostei z urakhuvanniam funktsionalnoho navantazhennia / O.V. Vorontsov, I.V. Vorontsova // Zbirnyk naukovykh prats (haluzeve mashynobuduvannia, budivnytstvo) / Poltav. nats. tekhn. un-t im. Yuriia Kondratiuka. – Poltava: PoltNTU, 2015. – Vyp. 3(45). – S. 28 – 39.

5. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. Systematyzatsiia polinomialnykh kryvykh za vyhliadom funktsii zovnishnoho formoutvoriuiuchoho navantazhennia abo velychyny skinchenoi riznytsi / O.V.

Vorontsov, V.H, Usenko, O.V. Vorontsova // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. – K.: KNUBA, 2022. – Vyp. 103. – S. 23-37.
https://doi.org/10.32347/0131-579x.2022.103/23-27

6. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. Velychyna skinchenoi riznytsi u formuvanni odnovymirnykh heometrychnykh obraziv predstavlenykh chyslovymy poslidovnostiamy elementarnykh funktsionalnykh zalezhnostei / O.V. Vorontsov, V.H, Usenko, O.V. Vorontsova // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. – K.: KNUBA, 2022. – Vyp. 102. – S. 39-55.
https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.39-55

7. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. Dyskretna interpoliatsiia superpozytsiiamy koordynat chotyrokh tochok dvovymirnykh tochkovykh mnozhyn na prykladi parabolichnykh poverkhon / O.V. Vorontsov, V.H, Usenko, O.V. Vorontsova // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. – K.: KNUBA, 2022. – Vyp. 101. – S. 19-33.
https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.19-33