

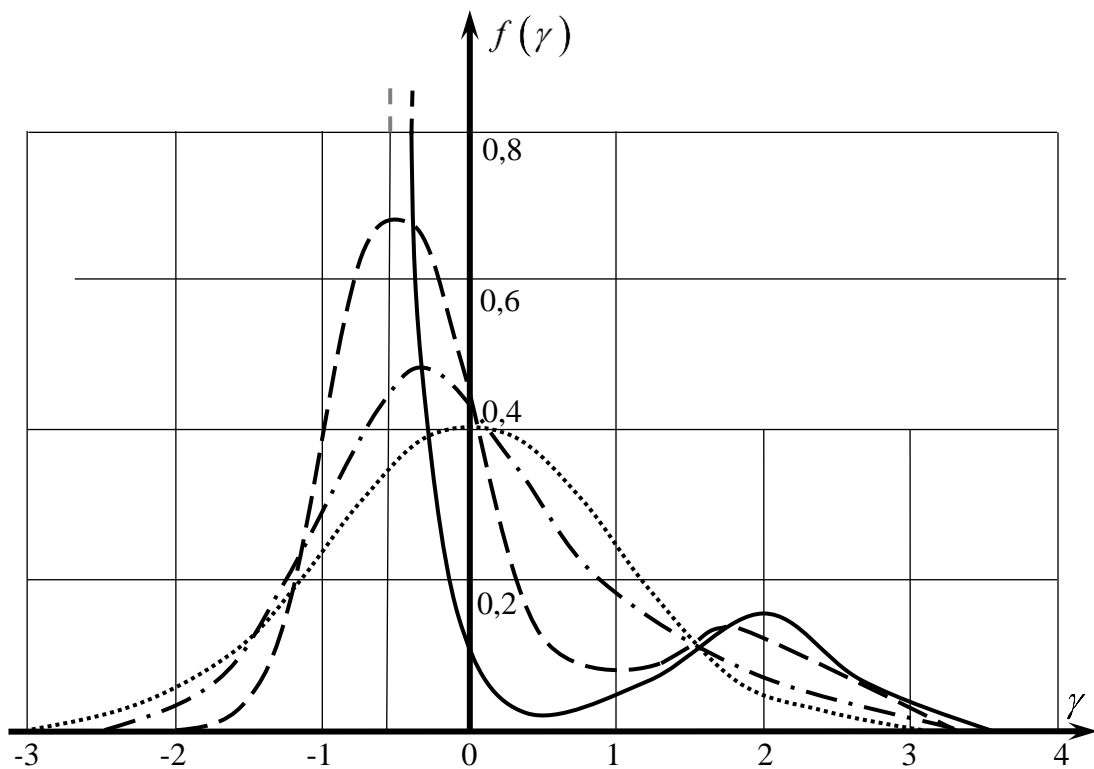
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ПОЛТАВСЬКА  
ПОЛІТЕХНІКА ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА»

Пічугін С.Ф.

**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ НАДІЙНОСТІ  
В БУДІВНИЦТВІ**

Навчальний посібник

(теоретична частина курсу)



Полтава 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ПОЛТАВСЬКА  
ПОЛІТЕХНІКА ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА»

Пічугін С.Ф.

**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ НАДІЙНОСТІ  
В БУДІВНИЦТВІ**

Навчальний посібник

(теоретична частина курсу)

Полтава 2023

УДК 624.014.2.004.15:624.042

ПЗ6

*Рекомендовано до друку навчально-методичною радою Навчально-інституту архітектури, будівництва та землеустрою Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (протокол №6 від 10.05.2023)*

**Рецензенти:**

**Є.В.Кліменко**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри залізобетонних конструкцій та транспортних споруд Одеської державної академії будівництва та архітектури;

**О.В. Семко**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівництва та цивільної інженерії Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

**Пічугін С.Ф.**

Сучасні проблеми надійності в будівництві: Навчальний посібник (теоретична частина курсу) / С.Ф. Пічугін. – Полтава: НУ ПП, 2023. – 254 с.

Навчальний посібник призначений студентам 5-го курсу, які навчаються за освітнім рівнем «магістр» з спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» на кафедрі будівельних конструкцій Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка». Посібник охоплює всі основні розділи дисципліни «Сучасні проблеми надійності в будівництві», а саме: ймовірнісний опис навантажень і міцності матеріалів; оцінювання надійності елементів будівельних конструкцій; оцінювання надійності стиснуто-зігнутих елементів; надійність статично невизначених систем. Цей навчальний курс є авторським, єдиним у вищих навчальних закладах України. Викладення курсу тісно пов'язано з діючими в Україні нормативними документами і нормами Єврокоду. Наведений у навчальному посібнику матеріал має на меті забезпечити засвоєння студентами теоретичних розділів названої дисципліни та полегшити підготовку до написання поточних та екзаменаційних тестів.

41.ОК6.01.03

© Пічугін С.Ф., 2023

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>5</b>
<b>РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАДІЙНОСТІ.....</b>	<b>6</b>
1.1. Проблема надійності та її значення для будівництва.....	6
1.2. Коротка історія досліджень надійності в будівництві.....	10
1.3. Основні поняття теорії надійності.....	15
<b>РОЗДІЛ 2 ІМОВІРНІСНИЙ ОПИС ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН</b>	
<b>І ФУНКЦІЙ.....</b>	<b>30</b>
2.1. Відомості з теорії ймовірностей.....	30
2.2. Криві розподілу випадкових величин.....	36
2.3. Експоненційний розподіл в задачах надійності.....	42
2.4. Випадкові процеси.....	45
<b>РОЗДІЛ 3 ІМОВІРНІСНИЙ ОПИС НАВАНТАЖЕНЬ</b>	
<b>І МІЦНОСТІ МАТЕРІАЛІВ.....</b>	<b>56</b>
3.1. Постійне навантаження.....	57
3.2. Снігове навантаження.....	66
3.3. Вітрове навантаження.....	77
3.4. Кранове навантаження.....	90
3.5. Статистичні дані щодо міцності матеріалів.....	108
<b>РОЗДІЛ 4 ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ БУДІВЕЛЬНИХ</b>	
<b>КОНСТРУКЦІЙ.....</b>	<b>120</b>
4.1. Загальний підхід до рішення задач надійності конструкцій.....	120
4.2. Оцінка надійності конструкцій у техніці випадкових величин..	125
4.3. Оцінка надійності залізобетонних балок з вуглепластиковим зовнішнім армуванням.....	131
4.4. Урахування фактора часу у розрахунках надійності.....	140
4.5. Розподіли суми і різниці розподілів.....	146
4.6. Частотні характеристики сполучення змінних навантажень.....	157
4.7. Оцінка надійності елементів при дії кранового навантаження..	162
4.8. Оцінка надійності елементів при дії снігового навантаження...	165
4.9. Оцінка надійності елементів при дії вітрового навантаження...	169
4.10. Розрахункові сполучення навантажень для перевірки надійності конструкцій.....	175
<b>РОЗДІЛ 5 ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ СТИСНУТО-ЗІГНУТИХ</b>	
<b>ЕЛЕМЕНТІВ.....</b>	<b>182</b>
5.1. Особливості імовірнісного розрахунку стиснуто-зігнутих елементів.....	182
5.2. Надійність сталевих стиснуто-зігнутих елементів постійного перерізу.....	190
5.3. Надійність сталевих ступінчастих стійок.....	198
5.4. Оцінка надійності ступінчастих стійок при врахуванні часу і реальних навантажень.....	202

<b>РОЗДІЛ 6 НАДІЙНІСТЬ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ.</b>	<b>208</b>
6.1. Структурна надійність типових схем.....	210
6.2. Розрахунок надійності систем методом станів.....	215
6.3. Застосування логіко-ймовірнісних методів для оцінки надійності статично невизначених систем.....	225
6.4. Розрахунок рам імовірнісним методом граничної рівноваги.....	241

## ВСТУП

Дисципліна «Сучасні проблеми надійності в будівництві» викладається студентам 5-го курсу, які навчаються за освітнім рівнем «магістр» з спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» на кафедрі будівельних конструкцій Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка».

Цей навчальний курс є авторським, єдиним у вищих навчальних закладах України, він базується головним чином на монографії-посібнику «Розрахунок надійності будівельних конструкцій» (С.Ф. Пічугін. – Полтава: Вид-во «АСМІ», 2016), а також на попередніх виданнях монографій автора, присвячених проблемі надійності в будівництві та методичних рекомендаціях з цієї проблеми. Автор читає дану дисципліну досить давно, використовуючи педагогічний досвід кафедри будівельних конструкцій та результати досліджень надійності будівельних конструкцій, які протягом багатьох років виконуються у університеті. Викладення курсу тісно пов'язано з діючими в Україні нормативними документами, у розробці котрих приймав участь автор, щодо навантажень і впливів, забезпечення надійності й конструктивної безпеки, проектування сталевих конструкцій та ін. Враховуються також основні положення Єврокодів – європейських норм будівельного проектування.

Посібник охоплює всі основні розділи дисципліни «Сучасні проблеми надійності в будівництві», а саме: ймовірнісний опис навантажень і міцності матеріалів; оцінювання надійності елементів будівельних конструкцій; оцінювання надійності стиснуто-зігнутих елементів; надійність статично невизначених систем.

Наведений у навчальному посібнику матеріал має на меті забезпечити засвоєння студентами теоретичних розділів названої дисципліни та полегшити підготовку до написання поточних та екзаменаційних тестів по матеріалу. Для виконання практичних розрахунків надійності рекомендується користуватися опублікованим раніше навчальним посібником з цієї ж дисципліни (С.Ф. Пічугін. – Полтава: ПолтНТУ, 2019).

Автор

## РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАДІЙНОСТІ

*"Res tuta est gloria et via in silva vitae"*  
*Надійність є слава і дорога в лісі життя*

Латинське прислів'я

### 1.1. ПРОБЛЕМА НАДІЙНОСТІ ТА ЇЇ ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ БУДІВНИЦТВА

**1.1.1. Очевидність проблеми.** Терміну «*надійність*» у словнику синонімів знаходиться достатньо аналогів: *непорушність, відповідальність, вірність, справність, стійкість, точність, міцність, безпека, солідність, непохитність, невразливість, фундаментальність, довговічність, твердість, забезпеченість, достовірність, неминучість, непорушність, ґрунтовність, доведеність, капітальність, переконливість, безбитковість, безсумнівність, авторитетність, неспростовність, кредитоспроможність, випробуваність, безпомилковість, безпрограшність.* Очевидно, тут йдеться про широко-побутове розуміння поняття надійності, однак таке багатослів'я певною мірою свідчить про багатогранність загальної проблеми надійності.

Якщо звузити розгляд питання галуззю будівництва, то можна констатувати, що поняття «*надійність*» і «*ненадійність*» будівельних об'єктів уживаються досить давно та широко. Кожному зрозуміло, наприклад, що ненадійним є хиткий міст, який явно не витримає вантаж, який необхідно через нього перевезти; ненадійним є трос, недостатньо міцний для вантажу, що на ньому підвішений; ненадійною є балка перекриття, що допускає надто великі прогини від діючого на неї навантаження і т.п. Вимоги до надійності і безвідмовності пред'являються до кожного

технічного пристрою, зокрема, до будівельних об'єктів. На користь важливості проблеми надійності можна додатково привести наступні очевидні доводи. Почнемо з того, що для підвищення ефективності будівництва одним із головних напрямів є зниження матеріалоемності конструкцій. Далі візьмемо до уваги, що одне з можливих рішень цього питання, що не потребує додаткових матеріальних й фінансових вкладень, – це вдосконалення методів розрахунку й проектування будівельних об'єктів. І, нарешті, як висновок відзначимо, що при сучасному досить високому розвитку теорії розрахунку конструкцій, підкріпленої широким застосуванням обчислювальної техніки, найменш вивченим і перспективним напрямком у даній області є імовірнісний розрахунок, що дозволяє оцінити надійність будівель, яка повинна бути досить високою.

**1.1.2. Гострота проблеми.** Необхідність забезпечення високого рівня надійності будівель пов'язана з тим, що їхній вихід з ладу в процесі експлуатації супроводжується більшими економічними втратами, пов'язаними із простоями, ремонтами, матеріальними й трудовими збитками. Більше того, на таких небезпечних виробництвах як, наприклад, АЕС, газопроводи, шахти, хімічні й металургійні підприємства, транспорт і т.п., а також у громадських і житлових будівлях недостатня надійність будівельних об'єктів може призвести до катастроф з людськими жертвами й небезпечними екологічними наслідками. Додаткову гостроту зазначена проблема набуває в умовах ринкової економіки, коли показники надійності й довговічності будівельної продукції можуть вирішальним образом впливати на результати конкурентної боротьби за замовлення в будівництві.

Наука про надійність у будівництві, як розділ науки про надійність технічних систем, вивчає закономірності зміни показників якості будівель та розробляє методи, які забезпечують безвідмовність і достатню довговічність їхньої роботи при найменших витратах. Надійність, сформульована коротко як «якість, розгорнута в часі», – це найважливіший техніко-економічний параметр будівельних об'єктів промислового, громадського та житлового призначення, що у великій мірі

визначає технічний рівень і конкуренто-спроможність будівельної продукції.

**1.1.3. Складність проблеми** надійності будівельних об'єктів пов'язана, насамперед, зі складним характером зовнішніх навантажень і впливів, що мають випадкову природу й залежать від фізичних, кліматологічних, технологічних й інших просторово-тимчасових факторів. Певні труднощі виникають при розрахунку надійності на реальні випадкові впливи елементів конструкцій, які працюють геометрично й фізично нелінійно. Додаткові складності аналітичного й обчислювального характеру повинні бути подолані при оцінці надійності конструктивних систем, особливо статично невизначених конструкцій. Існуючі норми проектування будівельних конструкцій, будучи за формою детерміністичними, забезпечують, крім окремих випадків, безаварійність конструкцій протягом строку експлуатації, однак не дають можливості кількісно оцінити закладений при цьому рівень надійності конструкцій. Розрахункові коефіцієнти методу граничних станів, що знаходяться в нормах проектування, потребують уточнення статистичними методами, зокрема, коефіцієнти надійності за навантаженнями, сполучень і умов роботи.

**1.1.4. Стохастичність проблеми.** У матеріальному світі неможливо створити нічого абсолютно надійного. Для підтвердження цього розглянемо елементарний приклад: балка, що знаходиться під навантаженням. Відмова її може наступити:

- як результат перевантаження конструкції;
- у випадках недостатньої міцності матеріалу балки;
- при зменшених розмірах конструкції;
- внаслідок поступової зміни перерізу й опору через корозію тощо.

Усі фактори, від яких залежать перелічені відмови, є випадковими, внаслідок чого відмови також відносяться до випадкових подій. Через це можна говорити тільки про ймовірність настання відмов і відповідно ймовірність безвідмовної роботи системи (об'єкта) протягом заданого



проміжку часу. Сказане свідчить про необхідність залучення до рішення задач надійності будівельних конструкцій теорії ймовірностей та математичної статистики.

**1.1.5. Напрями розв'язання проблеми.** Очевидно, що створити абсолютно надійну будівельну конструкцію принципово неможливо. Будь-які будівельні об'єкти, навіть найбільш досконалі, мають кінцеву надійність і допускають можливість відмови. Змінюючи параметри об'єкту, можна відповідно змінювати ймовірність відмови конструкції, доводячи її до досить малої величини, що вважається допустимою. Саме такий принцип покладено в основу створення всіх технічних систем, зокрема будівельних конструкцій. Вибір допустимої ймовірності відмови є техніко-економічним завданням: із підвищенням надійності росте вартість конструкції, але зменшуються збитки від імовірних відмов. Виходячи з цього, можна знайти оптимальну ймовірність відмови, що забезпечує мінімум сумарних витрат.

Теорія надійності вивчає закономірності зміни показників якості будівельних конструкцій і розробляє методи, що забезпечують достатню безвідмовність і довговічність їх роботи з мінімальними витратами. Теорія надійності розвивається у двох напрямках:

- вивчення фізики відмов конструкцій, розробка методів прогнозування міцності, стійкості, витривалості, зносостійкості тощо;
- розробка математичних методів, що базуються на використанні теорії ймовірності і математичної статистики.

Підкреслимо, що необхідний рівень надійності будівельних конструкцій має бути забезпеченим на всіх етапах життєвого циклу об'єкта, а саме:

- на етапі вишукування і проектування – виконанням комплексу розрахунків і задоволенням конструктивних вимог;
- у процесі виготовлення, транспортування та зберігання будівельних виробів – за рахунок реалізації вимог щодо якості матеріалів, точності розмірів і технологічних режимів виготовлення, транспортування і зберігання;

- під час освоєння будівельного майданчика та зведення об'єкта, приймання об'єкта в експлуатацію;
- у процесі експлуатації – грамотним використанням об'єкта за призначенням протягом встановленого терміну служби, підтриманням правильного режиму експлуатації, постійною оцінкою технічного стану, виконанням ремонтів;
- при реконструкції й подальшому використанні у нових умовах;
- на стадії ліквідації об'єкта.

## **1.2. КОРОТКА ІСТОРІЯ ДОСЛІДЖЕНЬ НАДІЙНОСТІ В БУДІВНИЦТВІ**

Як вказано вище, науковий підхід до проблеми надійності конструкцій вимагає використання імовірнісних методів для аналізу поведінки конструкцій при зовнішніх діях. Перші спроби такого підходу з'явилися в окремих публікаціях 20-30-х років минулого століття. У 1926 році М. Майер (Німеччина) запропонував замість розрахунку за допустимим напруженнями використовувати імовірнісні методи для вибору значень параметрів, що вводяться у розрахунок. У 1929 році М.Ф. Хоціалов, беручи до уваги мінливість основних параметрів, запропонував вести проектування конструкцій, виходячи з деякої регламентованої ймовірності аварійної відмови конструкції. Однак, пропозиція М.Ф. Хоціалова «Проектувати з урахуванням можливості аварії» зустріла у той час сильний опір, і його ідеї були надовго відкинуті. Цей напрямок був суттєво розвинений М.С. Стрілецьким, який відмітив, що виконання умови міцності конструкції можна передбачати тільки з визначеною часткою ймовірності. У своїй невеликій за обсягом, але виключно змістовній роботі [1] він обґрунтував висновок, що йдучи статистичним шляхом, вивчаючи і зіставляючи факти роботи однорідної групи споруд і матеріалу в конструкціях, можна установити закон появи цих факторів і екстраполювати цей закон на майбутнє, якщо мати для цього достатні підстави. Відмітимо також появу в 30-40-і роки закордонних публікацій по проблемі безпечності конструкцій, в яких в якості випадкових величин

використовувалися не тільки міцнісні характеристики матеріалу, а й параметри навантажень, при цьому мова йшла вже про ймовірність відмови у вигляді порушення деяких регламентованих вимог, а не про ймовірність аварії. Авторами цих робіт були М. Плот (Франція), В. Вержбицький (Польща), А.М. Фрейденталь (США). Останній і майже слідом за ним О.Р. Ржаніцин ввели в розгляд випадкову величину резерву міцності, за допомогою якої вимога надійності виражалося як необхідність того, щоб ця величина була позитивною з деякою наперед заданою ймовірністю.

50-і роки минулого століття відмічені введенням методики проектування конструкцій за граничними станами, система розрахункових коефіцієнтів якої була запропонована в 1944 році І.І. Гольденблатом, М.Г. Костюковським і А.Н. Поповим і покладена в основу схеми розрахунку для розробки будівельних норм і правил. Ця робота була виконана комісією у складі В.О. Балдіна, О.О. Гвоздева, І.І. Гольденבלата, Ю.М. Іванова, В.М. Келдиша, В.І. Коченова, Л.І. Онищика, М.С. Стрілецького, К.Е. Таля. Ця методика дала потужний імпульс імовірнісним дослідженням в області теорії розрахунку споруд, сформулювала по суті концепцію відмови будівельної конструкції як переходу в граничний стан, з усією очевидністю показала імовірнісний характер як методики в цілому, так і її основних параметрів (розрахункових навантажень і опорів матеріалів) і коефіцієнтів перевантаження, однорідності, сполучень навантажень та ін. Методика отримала визнання і була прийнята у ряді зарубіжних країн і в інших областях техніки. Вкажемо, що в системі європейських будівельних норм Єврокод ця методика має назву «методу часткових коефіцієнтів надійності».

Надалі питання вдосконалення методу граничних станів і розвитку імовірнісних методів розрахунку будівельних конструкцій послідовно проводили М.С. Стрілецький і О.Р. Ржаніцин [2].

Між тим в інших областях техніки, у тому числі електроніці, автоматиці, а потім і в інших галузях машинобудування, радіотехніки, обчислювальної техніки впродовж останніх 40-50-х років активно і успішно розвивалися методи розрахунку, основані на теорії надійності.

Проблема зближення розрахунків будівельних конструкцій з сучасними методами теорії надійності була успішно вирішена фундаментальними роботами В.В. Болотіна [3] і його наукової школи, який розвинув в спеціальний розділ будівельної механіки – статистичну динаміку – імовірнісний розрахунок конструкцій з урахуванням фактора часу і особливостей роботи при зовнішніх діях. Під керівництвом В.В. Болотіна був розроблений і введений ГОСТ 27.002-89, що дав методологічні основи єдиного підходу до питань надійності в різних областях техніки, у тому числі у будівництві.

Питання надійності й імовірнісного розрахунку будівельних конструкцій вивчалися в роботах ряду вчених, що відносяться до провідних вітчизняних наукових шкіл. Відмітимо тут литовську школу надійності, на базі якої проходили відомі конференції по проблемам надійності і оптимізації в будівельній механіці (вісім конференцій з 1965 по 1988 рр.). Школа відома іменами О.О. Чираса, який розвинув метод граничної рівноваги для пружно-пластичних систем; Б.І. Снарскіса, що розробив загальну процедуру розрахунку надійності конструкцій; А.П. Кудзіса, що заснував перспективний метод узагальненої коваріації. Були розгорнуті масштабні дослідження надійності будівельних конструкцій під керівництвом О.С. Личьова, який з 1972 по 1995 рр. організував одинадцять масштабних науково-практичних конференцій з масовою участю фахівців в галузі надійності в будівництві та публікацією збірників матеріалів і посібників по тематиці надійності [4]. Під керівництвом М.С. Стрілецького у плідно працювала наукова школа надійності і дійсної роботи сталевих конструкцій (до якої відносить себе й автор), найбільш вагомими результатами якої були досягнуті в галузі дослідження і нормування навантажень на конструкції; посилення на роботи цієї провідної наукової школи неодноразово наводяться в тексті даної книги.

У 70 – 80-і роки минулого століття вагомо заявила о собі уральська школа надійності, суттєвим доробком якої була система управління якістю виготовлення металевих конструкції, розроблена в Уральському Промбудпроекті під керівництвом С.А. Тімашева [5]. Саме тут у 1972 р. була організована одна із

перших наукових конференцій «Проблеми надійності у будівельному проектуванні», у який приймав участь автор книги.

В цей же період за кордоном питання надійності розробляли Д.Р. Бенжамін, С.А. Корнелл (США), І. Феррі-Боржес, М. Кастанета (Португалія), П. Тофт-Кристенсен (Данія), М.Д. Бейкер (Велика Британія), Г. Аугусті, А. Баратта, Ф. Кашіаті (Італія), О. Дитлевсен, Х.О. Мадсен (Данія), І. Єлішаков (США), С. Трезю (Франція) та ін.

В різний час висловлювалися пропозиції щодо переходу на цілком імовірнісний розрахунок будівельних конструкцій (Б.І. Беляєв, О.Р. Ржаніцин, С.А. Тімашев та ін.), проте у той час підтримки вони не отримали. В якості вдалого прикладу послідовного імовірнісного підходу до окремих реальних питань можна назвати розроблені під керівництвом А.Я. Дрівінга «Рекомендації по застосуванню економіко-статистичного методу при розрахунку споруд з чисто економічною відповідальністю».

1960 – 90-і роки відмічені високою активністю досліджень надійності в будівництві під керівництвом В.Д. Райзера, який опублікував серію монографій по проблемі надійності [6] і надалі продовжив дослідження і публікації по цій тематиці під час перебування у США. Корисні результати були одержані В.О. Отставновим, Ю.Д. Суховим, Є.І Федоровим та ін.

Принципово важливим являється введений в 1988 р. ГОСТ 27751-88 «Надійність будівельних конструкцій і основ. Основні положення із розрахунку», що об'єднав розрахунок надійності конструкцій з методом граничних станів.

Для вирішення деяких питань, що розглядаються в книзі, виявився корисним досвід досліджень надійності залізобетонних і металевих конструкцій будівель і споруд, висвітлений в роботах українських вчених А.Я. Барашикова, М.Д. Сироти, М.М. Застави, М.В. Савицького, а також М.Б. Краковського, О.М. Селезньової, В.П. Чиркова та ін.

Починаючи з 70-х років минулого століття в Україні активно розвиваються дослідження надійності в будівництві. Організатором і лідером цієї роботи є д.т.н. А.В. Перельмутер, під загальною редакцією якого вийшла і витримала 4 видання перша колективна монографія, в якій (разом з іншими питаннями) дається імовірнісний опис широкого кола навантажень і впливів

[7]; монографія стала справжнім науковим бестселером, одержала високу міжнародну оцінку і нагороджена Премією академіка Будникова Академії будівництва України. А.В. Перельмутер є керівником колективів (з участю автора книги), які вперше на теренах СНД розробили національні нормативні документи щодо надійності в будівництві [8], навантажень і впливів на конструкції [9], проектування конструкцій, а також відповідні Національні додатки до норм Єврокод. Читачам, які цікавляться імовірнісними методами, підґрунтям норм проектування та історією розвитку цих питань рекомендується познайомитися з книгами і останніми публікаціями вказаного автора [10].

Активно працює школа надійності в Національному університеті «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», де при виконанні докторських дисертацій С.Ф. Пічугіним розроблена загальна методика оцінки надійності металевих конструкцій, В.А. Пашинським – методологія нормування навантажень на будівельні конструкції, О.В. Семком – оцінка надійності сталезалізобетонних конструкцій, А.В. Махіньком – імовірнісний розрахунок баштових споруд зв'язку, О.П. Воскобійник – методологія керування ризиками при проектуванні та експлуатації сталезалізобетонних конструкцій, В.О. Семком – надійність несучих і огорожувальних конструкцій із сталевих холодноформованих тонкостінних профілів. Наукові результати С.Ф. Пічугіна і О.В. Семка в галузі надійності будівельних конструкцій ввійшли складовою частиною у комплексну наукову роботу [11], відзначену в 2012 році Державною премією України в галузі науки і техніки. Слід відмітити монографії з проблеми надійності будівельних конструкцій, на основі яких складено цей навчальний посібник [12, 13]. В університеті захищено також низку кандидатських дисертацій по проблемі надійності в будівництві. Узагальнена інформація щодо наукової школи надійності у Національному університеті «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» міститься у публікаціях [14, 15].

В інших ВНЗ України також ведуться дослідження надійності будівельних об'єктів: Р.І. Кінаш (Львівська політехніка) дослідив надійність залізобетонних конструкцій, зібрав і обробив великий масив статистичних даних по

кліматичним впливам, С.Б. Усаковський (КНУБА) оцінив вплив неповноти вихідної інформації на оцінку надійності споруд.

### 1.3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

Ці поняття визначаються відповідними державними стандартами у галузі надійності [8, 16].

**1.3.1. Визначення надійності.** Спочатку наведемо загальнотехнічне визначення надійності.

*Надійність – це властивість об'єкта зберігати у часі, в установлених межах значення всіх параметрів, що характеризують його здатність виконувати потрібні функції у заданих режимах та умовах застосування, технічного обслуговування, зберігання і транспортування.*

Можна коротко сформулювати, що **надійність – це якість, розгорнута у часі.**

Будівельні норми ДБН [8] регламентують, що основною вимогою, яка визначає **надійність будівельного об'єкта**, є його відповідність призначенню й здатність зберігати необхідні експлуатаційні якості протягом встановленого терміну експлуатації. До них належать:

- гарантія безпеки для здоров'я і життя людей, майна та довкілля;
- збереження цілісності об'єкта та його основних частин і виконання інших вимог, які гарантують можливість використання об'єкта за призначенням і нормального функціонування технологічного процесу, включаючи вимоги до жорсткості будівельних конструкцій і основ, тепло- і звукоізоляційних властивостей огорожень, їх герметичності, акустичних характеристик тощо;
- забезпечення можливості розвитку об'єкта (наприклад, добудови без підсилення наявних конструкцій або збільшення обсягів виробництва для промислової будівлі) та його пристосування до технічних, економічних або соціальних умов, що змінюються;

- створення необхідного рівня зручностей і комфорту для користувачів та експлуатаційного персоналу, включаючи вимоги до кліматичного режиму в приміщеннях (повітрообмін, температура, вологість, рівень освітленості тощо), а також доступність для оглядів і ремонтів, можливість заміни і модернізації окремих елементів тощо;

- обмеження ступеня ризику шляхом виконання вимог до вогнестійкості, безвідмовності роботи захисних пристроїв, надійності систем і мереж життєзабезпечення, живучості будівельних конструкцій тощо.

У конкретних випадках цей перелік може бути уточненим і розширеним (наприклад, введенням додаткової умови до межі радіаційного фону від застосованих будівельних матеріалів і виробів).

Пояснимо деякі терміни, що фігурують у визначенні надійності.

**Об'єкти** – це комплекси, споруди, конструктивні системи та окремі конструкції, а також їх компоненти (складальні одиниці, елементи, деталі). При визначенні надійності в будівництві об'єктом може бути як, наприклад, багатоелементний каркас багатоповерхового будинку, так і окрема конструкція і навіть зварне чи болтове з'єднання конструкцій – в залежності від поставленої задачі.

**Параметри** – міцність, жорсткість, стійкість та інші показники, що визначають відповідність конструкцій своєму призначенню і вимогам норм. З часом значення цих параметрів можуть змінюватися.

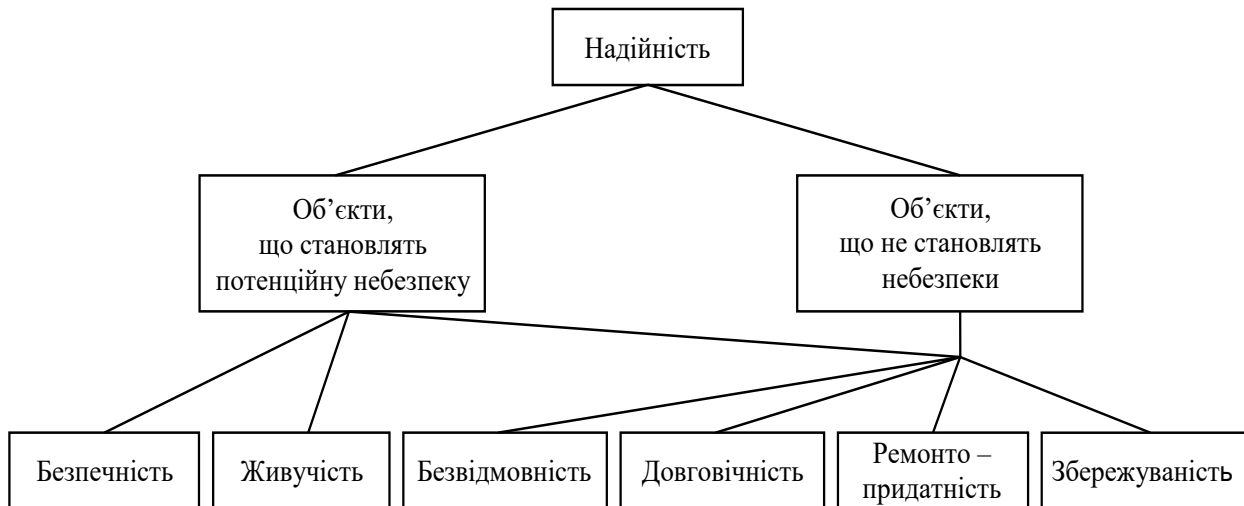
Якщо йдеться про будівельні об'єкти, що представляють потенційну небезпеку, важливими поняттями є також:

- **безпечність** – властивість будівельного об'єкта при виготовленні та експлуатації, а також у випадках порушення працездатності не створювати загрозу для життя і здоров'я людей, а також для навколишнього середовища;

- **живучість** – властивість об'єкта зберігати обмежену працездатність під впливами, що не передбачені умовами експлуатації; при наявності деяких дефектів і пошкоджень, а також при відмові деяких компонентів об'єкта. Приклад



живучості: зберігання несучої здатності конструкції після виникнення тріщин утоми, довжина яких не перевищує заданих розмірів.



**Рис. 1.1. Компоненти надійності.**

**1.3.2. Компоненти надійності.** *Надійність* – це комплексна властивість будівельного об'єкта, яка може включати у себе такі компоненти, як безвідмовність, довговічність, ремонтпридатність та збережуваність або поєднання цих якостей (див. блок-схему *рис. 1.1*).

*Безвідмовність* – це властивість об'єкта виконувати потрібні функції в певних умовах протягом заданого інтервалу часу чи наробітку. Аналогічне по суті визначення дають будівельні норми ДБН [8] - це здатність об'єкта безперервно зберігати працездатний стан протягом заданого терміну експлуатації.

*Довговічність* – це властивість об'єкта зберігати працездатний стан (тобто виконувати потрібні функції) до настання граничного стану в умовах установленної системи технічного обслуговування та ремонту.

*Ремонтпридатність* – це пристосованість об'єкта до підтримання і відновлення працездатного стану (тобто стану, в якому він здатний виконувати потрібні функції) за допомогою технічного обслуговування та ремонту.

*Збережуваність* – це властивість об'єкта зберігати в заданих межах значення параметрів, що характеризують здатність об'єкта

виконувати потрібні функції під час і після зберігання та (або) транспортування.

Зважаючи на наведений перелік складових надійності, підкреслимо, що будівельні конструкції повинні відповідати наступним вимогам:

- сприймати без руйнувань і недопустимих деформацій впливи, що виникають під час їх зведення і протягом встановленого терміну експлуатації;

- мати достатню *працездатність* (роботоздатність) в умовах нормальної експлуатації протягом усього встановленого терміну експлуатації, а саме: їх експлуатаційні параметри (переміщення, вібрації тощо) із заданою імовірністю не повинні виходити за встановлені нормативною або проектною документацією межі, а їх *довговічність* повинна бути такою, щоб погіршення властивостей матеріалів і конструкцій внаслідок гниття, корозії, стирання та інших форм фізичного зношування не призводило до недопустимо високої ймовірності відмови;

- мати достатню *живучість* по відношенню до локальних руйнувань і передбачених нормами аварійних впливів (пожеж, вибухів, наїздів транспортних засобів тощо), виключаючи при цьому явища прогресуючого руйнування, коли загальні пошкодження виявляються значно більшими ніж первісне збурення, що їх викликало.

Надійність, у тому числі довговічність і живучість, забезпечуються одночасним виконанням вимог, які висувуються до вибору матеріалів, конструктивних і об'ємно-планувальних рішень, до методів розрахунку, проектування та контролю якості робіт при виготовленні конструкцій та їх зведенні, а також дотриманням правил технічної експлуатації, нагляду і догляду за конструкціями.

**1.3.3. Види станів будівельних конструкцій.** Попередньо розшифруємо поняття *функції об'єкта*, яка має два види:

- *задана функція*: виконання в об'єкті процесу, що відповідає його призначенню, виявлення заданої умови чи властивості об'єкта відповідно вимогам нормативної та (чи) конструкторської (проектної) документації;

- **потрібна функція:** функція чи сукупність функцій об'єкта, виконання якої розглядають як необхідну умову відповідності об'єкта його призначенню.

В залежності від відповідності наведеним функціям розроблена класифікація станів будівельних об'єктів.

**Справний стан:** коли конструкція здатна виконувати *усі задані функції*. Будівельні норми ДБН [8] визначають справним такий стан, за якого об'єкт виконує всі передбачені функції, при цьому на об'єкті регулярно здійснюються ремонтно-профілактичні роботи.

**Несправний стан:** коли конструкція нездатна виконувати хоч би одну із заданих функцій (цей стан може бути наслідком відмови, але може бути і без неї). Несправності класифікуються аналогічно відмовам (див. нижче п. 1.2.4).

**Працездатний (роботоздатний) стан** об'єкта характеризується його здатністю виконувати *усі потрібні функції*. Будівельні норми ДБН [39] доповнюють це визначення імовірнісним аспектом і визначають цей стан як технічний стан, за якого об'єкт виконує всі свої функції, зберігаючи при цьому допустимий рівень ризику

**Непрацездатний стан** об'єкта, за яким він нездатний виконувати хоч би одну з *потрібних функцій*.

**Граничний стан:** за якого подальша експлуатація конструкції недопустима, пов'язана з труднощами або недоцільна. Перехід до граничного стану призводить до тимчасового або остаточного припинення експлуатації об'єкта. Граничні стани визначають межу між допустимими і недопустимими (позаграничними) станами конструкцій. Перехід через граничний стан відповідає одному з видів відмови, самі граничні стани вважаються при цьому допустимими. Граничні стани поділяються на дві групи.

**Перша група** містить граничні стани, перехід через які призводить до повної непридатності конструкцій до експлуатації і для яких позаграничними станами можуть бути: руйнування будь-якого характеру (в'язке, крихке, в результаті втомлюваності); втрата стійкості форми; втрата стійкості положення; перехід у змінну систему; якісна зміна конфігурації; інші явища, за яких

виникає потреба у припиненні експлуатації (наприклад, виникнення перфорації стінки ємкості з токсичними речовинами). Граничні стани цієї групи можуть бути пов'язані з порушенням вимог збереження цілісності чи можливості існування об'єкта або з недотриманням вимог безпеки для людей і довкілля.

*Друга група* містить граничні стани, які ускладнюють нормальну експлуатацію будівельного об'єкта або зменшують його довговічність порівняно зі встановленим терміном експлуатації і для яких позаграничними станами є: надмірні переміщення або повороти деяких точок конструкції; недопустимі коливання (надмірні значення амплітуди, частоти, швидкості, прискорення); утворення та розкриття тріщин, досягнення ними гранично-допустимих значень розкриття чи довжини; втрата стійкості форми у вигляді локального деформування; пошкодження від корозії чи інших видів фізичного зношення, які призводять до необхідності обмеження експлуатації внаслідок зменшення терміну експлуатації об'єкта. Граничні стани цієї групи можуть бути пов'язані з порушенням вимог щодо використання об'єкта без обмежень, порушенням вимог щодо рівня комфорту, зручностей персоналу, вимог до зовнішнього вигляду конструкцій або з недотриманням вимог щодо можливості розвитку і модернізації об'єкта з точки зору його призначення.

**1.3.4. Класифікація відмов.** Поняття відмови (відказу) – фундаментальне у теорії надійності.

**Відмова (відказ)** – це подія, яка полягає у втраті будівельним об'єктом здатності виконувати потрібну функцію, тобто у порушенні працездатного стану. Будівельні норми ДБН [8] трактують відмову як подію, що полягає в переході через один із граничних станів (реалізація позаграничного стану), і доповнюють це визначення; «Відмовою вважається реалізація такого стану споруди, її частини або елемента, який призводить до появи значних економічних збитків чи соціальних втрат». Уточнимо тут, що *збитками* прийнято вважати матеріальні чи фінансові втрати внаслідок відмови, а *втратами* – спричинені відмовою втрати нематеріального характеру (життя та здоров'я людей, культурні та духовні цінності тощо).

**Пошкодження (дефект)** – це порушення справності об'єкта зі зберіганням його працездатності.

Класифікація відмов будівельних об'єктів наведена на *рис. 1.2*. Дано деякі пояснення до блок-схеми.

**Повна відмова** – призводить до повної неспроможності об'єкта виконувати жодну з потрібних функцій.

**Неповна, часткова відмова** – призводить до неспроможності об'єкта виконувати частину з потрібних функцій.

**Катастрофічні відмови** – призводять до повного порушення працездатності конструкцій, наприклад, до руйнування або падіння конструкції. Сюди ж відноситься **відмова-зрив**, поява якої одразу ж викликає збитки (втрати).

**Параметричні відмови** – виявляються у погіршенні якості функціонування об'єкта, наприклад, у перевищенні прогинів балок граничних значень за нормами.

**Незалежна відмова** – не спричинена прямо чи непрямо відмовою або несправністю іншого об'єкта (наприклад, руйнування прогону покрівлі, що не пов'язано з відмовами інших конструкцій).

**Залежна відмова** – спричинена прямо чи непрямо відмовою або несправністю іншого об'єкта (наприклад, руйнування кроквяної ферми і елементів покриття внаслідок виходу з ладу стійки, на яку спирається ферма).

**Раптова відмова** – яку неможливо передбачити попередніми дослідженнями чи технічним оглядом, вона характеризується стрибкоподібною зміною одного чи кількох параметрів об'єкта (наприклад, крихке руйнування конструкції або втрата стійкості стиснутих елементів конструкції).

**Поступова відмова** – виникає як результат поступової зміни одного чи кількох параметрів об'єкта (наприклад, руйнування сталевого елемента, переріз якого з часом зменшився внаслідок корозії). Сюди ж відноситься **відмова-перешкода**, після появи якої починається поступове накопичення збитків (витрат).

**Деградовна відмова** – спричинена процесами деградації в об'єкті (природними процесами старіння, зносу, корозії, втоми тощо) при дотриманні усіх встановлених правил і (чи) норм його проектування, виготовлення та експлуатації.

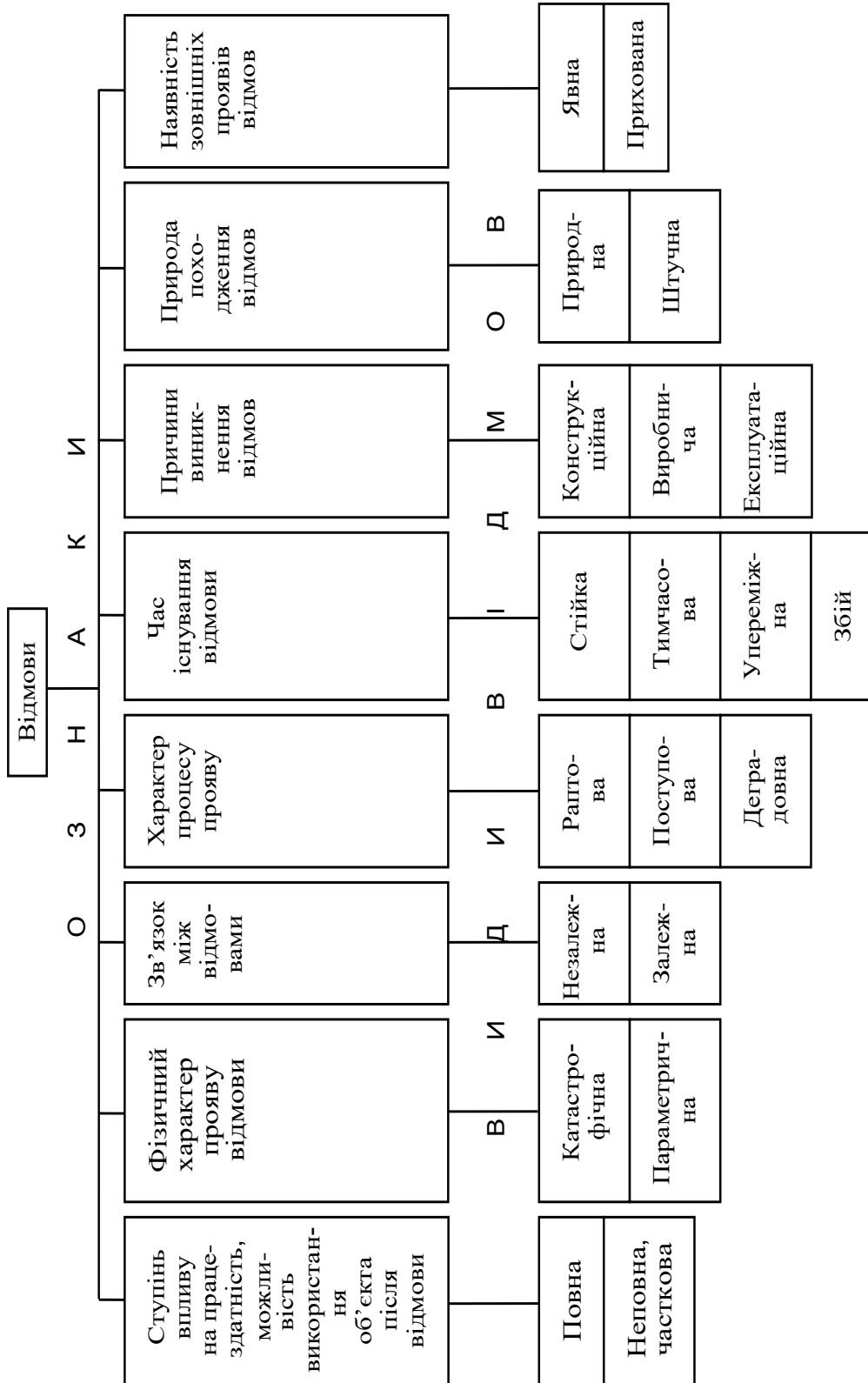


Рис. 1.2. Класифікація відмов будівельних об'єктів

**Стійкі відмови** – мають тривалий характер і усуваються за допомогою ремонту або заміни елемента, що відмовив.

**Тимчасові відмови** – можуть довільно зникати внаслідок усунення причини, що їх викликала (наприклад, великих перепадів температури або вологості, ненормативних прискорень та вібрацій тощо).

**Упереміжні відмови** – багаторазово виникають і зникають, маючи однаковий характер.

**Збій** – самоусувна або одноразова відмова, яку незначним втручанням усуває оператор (приклад збою – зупинка ПЕОМ, що усувається повторним пуском програми).

**Конструкційна відмова** – спричинена недосконалістю чи порушенням встановлених правил і (чи) норм проектування та конструювання об'єкта.

**Виробнича відмова** – спричинена невідповідністю виготовлення об'єкта до його проекту чи до норм виробничого процесу.

**Експлуатаційна відмова** – виникає внаслідок порушення встановлених правил і умов експлуатації конструкцій.

**Явна відмова** – виявляється візуально або штатними методами і засобами контролю та діагностування під час підготовки об'єкта до використання чи в процесі його використання за призначенням (наприклад, погиби елементів ферм або тріщини у залізобетонних балках).

**Прихована відмова** – не виявляється візуально чи штатними методами і засобами контролю і діагностики, але виявляється під час технічного обстеження чи спеціальними методами діагностики.

**1.3.5. Показники безвідмовності об'єктів.** Відзначимо дві фундаментальні особливості надійності будівельних конструкцій:

- залежність від часу, введення і використання часових параметрів;
- відмова – це випадкова подія, отже, потрібен імовірнісний підхід до завдань надійності.

Наведемо деякі часові поняття.

**Термін служби об'єкта** – календарна тривалість експлуатації будівельного об'єкта від початку чи його поновлення до переходу в граничний стан.

**Наробіток (напрацювання)** – тривалість чи обсяг роботи будівельного об'єкта. Для об'єкта, що працює безперервно, наробіток вимірюється в одиницях календарного часу і збігається з терміном служби. Якщо об'єкт працює з перервами, розрізняють безперервний і сумарний наробітки, які також вимірюються в одиницях календарного часу. Якщо фізичний знос конструкції залежить також від інтенсивності експлуатації конструкції, наробіток виражають через кількість робочих циклів.

**Показник надійності** – це кількісна характеристика однієї чи декількох із тих властивостей, що у сукупності складають надійність будівельного об'єкта. Наведемо тут основні показники надійності будівельних конструкцій.

**1. Ймовірність безвідмовної роботи** – це ймовірність того, що протягом заданого наробітку відмова будівельної конструкції не виникає.

Позначимо:  $t$  – час безперервної роботи або сумарний наробіток конструкції. Виникнення відмови – це випадкова подія, тому наробіток до першої відмови  $\tau$  – це випадкова величина. Ймовірність безвідмовної роботи  $P(t)$  в інтервалі від 0 до  $t$  дорівнює:

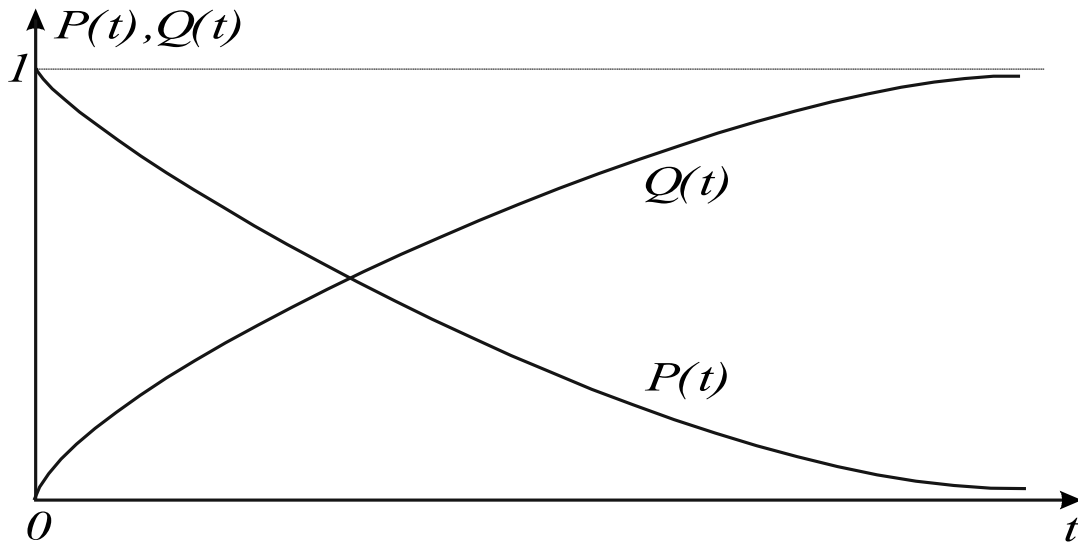
$$P(t) = P(\tau > t). \quad (1.1)$$

Таким чином,  $P(t)$  є функцією наробітку (часу)  $t$ , звичайно її вважають безперервною і такою, що диференціюється. Досить часто  $P(t)$  називають **функцією надійності конструкції**. Як показано на *рис. 1.3*, вона монотонно зменшується:  $P(0) = 1$ ;  $P(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**2. Ймовірність відмови  $Q(t)$ .** Це ймовірність того, що конструкція відмовляє один раз протягом заданого наробітку, причому вона є працездатною у початковий момент часу. Оскільки працездатний і непрацездатний стани є протилежними, несумісними подіями, можна записати:



$$Q(t) = 1 - P(t). \quad (1.2)$$



**Рис. 1.3. Зміна показників надійності з часом:**

$P(t)$  – ймовірність безвідмовної роботи,  $Q(t)$  – ймовірність відмови

Судячи з *рис. 1.3*, характер зміни  $Q(t)$  є протилежним  $P(t)$ , так що при  $t \rightarrow \infty$   $Q(t) = 1$ , і для будь якого моменту часу  $t$   $P(t) + Q(t) = 1$ .

Зв'яжемо ці поняття із звичайною інтегральною функцією розподілу  $F(t) = F(\tau < t)$  та функцією густини розподілу  $f(t) = f(\tau < t)$  випадкового часу безвідмовної роботи конструкції:

$$F(t) = 1 - P(t); \quad P(t) = 1 - F(t); \quad Q(t) = F(t);$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}. \quad (1.3)$$

**3. Інтенсивність відмов** – це умовна густина імовірності виникнення відмови конструкції, яка визначається за умови, що відмова не виникла до прийнятого моменту часу.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP(t)}{dt} = -\frac{p(t)}{P(t)}. \quad (1.4)$$

Інтенсивність відмов  $\lambda$  чисельно показує кількість об'єктів даного типу, що вийшли з ладу за одиницю часу роботи. Наприклад,  $\lambda = 10^{-3}$  1/рік може означати, що коли у роботі є 1000 однакових конструкцій, то за один рік можна очікувати виходу з ладу однієї конструкції.

Цікавим є характер зв'язку  $\lambda(t)$  із часом  $t$  (рис. 1.4), де можна виділити три стадії експлуатації конструкції.

I. *Припрацювання* («випалювання» дефектних елементів). Це пов'язано з тим, що у великій партії нових конструкцій завжди є екземпляри з прихованими дефектами, які виходять із ладу зразу після початку роботи. Для усунення цього етапу використовуються попереднє завантаження і перевірочні випробування (наприклад, приймальне випробування нового резервуара підвищеним тиском).

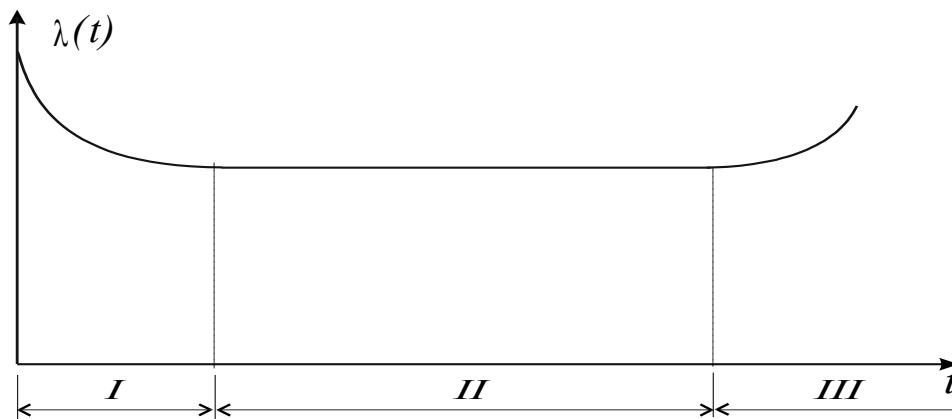


Рис. 1.4. Стадії роботи конструкції

II. *Період нормальної роботи* характеризується постійною інтенсивністю відмов  $\lambda(t) = \text{const}$ . Це основна стадія роботи кожної конструкції, вона має найбільшу тривалість, це «штатний режим конструкції». На умові  $\lambda(t) = \lambda$  побудовані рішення широкого класу задач надійності будівельних конструкцій.

III. *Період старіння* – коли спрацювання та старіння призводять до погіршення якості конструкції, небезпека відмов зростає. Термін служби багатьох будівельних об'єктів закінчується раніше, ніж настає помітне старіння цих об'єктів.

4. *Наробіток до відмови* - це час безвідмовної роботи конструкції від початку експлуатації до появи першої відмови.

**Середній наробіток до відмови** – це математичне сподівання наробітку конструкції до першої відмови.

$$T_1 = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (1.5)$$

Величина  $T_1$  дорівнює площі під кривою функції надійності  $P(t)$  (рис. 1.5).

Статистична оцінка середнього наробітку конструкції до відмови

$$T_1^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tau_j. \quad (1.6)$$

$N$  – кількість працюючих будівельних об'єктів при  $t = 0$ ;  
 $\tau_j$  – наробіток до першої відмови кожного з об'єктів.

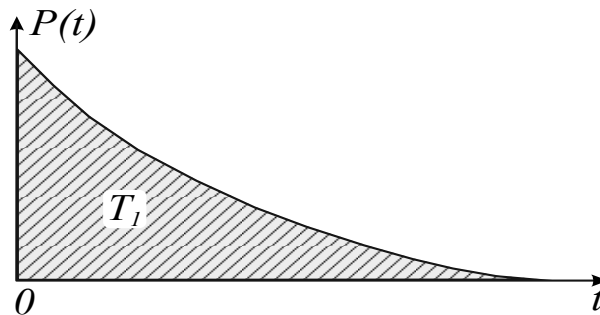


Рис. 1.5. Визначення середнього наробітку до відмови

**5. Гамма-відсотковий наробіток до відмови  $t_\gamma$**  – наробіток, протягом якого відмова конструкції не виникне з імовірністю  $\gamma$ , що виражена у відсотках, і котрий визначається як корінь рівняння

$$P(t_\gamma) = \frac{\gamma}{100}. \quad (1.7)$$

Таким чином  $t_\gamma$  – квантіль відповідного розподілу. Для визначення показників надійності конструкцій задаються досить високі  $\gamma = 90, 95, 99, 99,5\%$  тощо, що відповідає ймовірностям відмови в інтервалі  $[0; t]$   $Q = 0,10; 0,05; 0,01; 0,005$ .

### Література до 1 розділу

1. Стрелецкий Н.С. Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений / Н.С. Стрелецкий. – М.: Стройиздат, 1947.-94 с.
2. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1978 – 239 с.
3. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В.В. Болотин. – 2-е изд. – М.: Стройиздат, 1982. – 351 с.
4. Лычев А.С. Надежность строительных конструкций. Учебное пособие / А.С.Лычев. – М.: Изд-во АСВ, 2008. – 184 с.
5. Тимашев С.А. Надежность больших механических систем / С.А. Тимашев. – М: Наука, 1982. – 184 с.
6. Райзер В.Д. Методы теории надежности в задачах нормирования расчетных параметров строительных конструкций / В.Д. Райзер. – М.: Стройиздат, 1986. – 192 с.
7. Перельмутер А.В. Нагрузки и воздействия на здания и сооружения / А.В. Перельмутер, В.Н. Гордеев, А.И. Лантух-Лященко, А.В. Махинько, В.А. Пашинский, С.Ф. Пичугин. Под общей ред А.В Перельмутера. – 4-е изд., перераб. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, изд-во АСВ, изд-во ДМК Пресс, 2014 – 596 с.
8. ДБН В.1.2-14-2018. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд, – К.: Мінрегіон, 2018. – 30 с.
9. ДБН В.1.2-2:2006. Навантаження і впливи. – К.: Мінбуд України, 2006. – 51 с.
10. Перельмутер А.В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций / А.В. Перельмутер. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 256 с.
11. Онищенко В.О. Високоєфективні технології та комплексні конструкції в промисловому й цивільному будівництві: Монографія / В.О. Онищенко, О.Г. Онищенко, С.Ф. Пичугін, Л.І. Стороженко, О.В. Семко, Ю.С. Слюсаренко, І.А. Ємельянова. – Вид. 2-ге, доповнене. – Полтава: ТОВ «АСМІ», 2011. – 520 с.
12. Пичугин С.Ф. Надежность стальных конструкций производственных зданий / С.Ф. Пичугин. – М: Изд-во АСВ, 2011. – 456 с.

13. Пічугін С.Ф. Розрахунок надійності будівельних конструкцій / С.Ф. Пічугін. – Полтава: ТОВ «АСМІ», 2016 – 520 с.

14. Надежность строительных конструкций. Работа научной школы проф. Пичугина С.Ф.: Сб. науч. тр. – Полтава: ООО «АСМИ», 2010. – 434 с.

15. Пічугін С.Ф. Наукова школа «Надійність будівельних конструкцій» – досягнення і перспективи / С.Ф. Пічугін // Зб. наук. праць (галуз. машинобуд., будівництво). Вип. 1. – Полтава: ПолтНТУ ім. Юрія Кондратюка, 2015. – С. 3 – 16.

16. ДБН В.1.2-6:2021. Механічний опір та стійкість. – К.:Мінрегіон України, 2022. – 31 с.

## РОЗДІЛ 2 ІМОВІРНІСНИЙ ОПИС ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН І ФУНКЦІЙ

*Я вірю в бездоганну точність випадковості*

**Станіслав Єжи Лец, польський письменник**

### 2.1. ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

**2.1.1. Основні визначення.** *Випадковою величиною (ВВ)* називається змінна величина, що у результаті випробування може прийняти те чи інше значення, причому невідомо наперед, яке саме.

Приклади випадкових величин:

- геометричні розміри елементів конструкцій;
- фактичне значення міцності матеріалу конструкцій;
- навантаження на конструкції.

Позначення:  $\tilde{x}$  – випадкова величина;  $x$  – її можливе значення.

*Імовірністю події  $A$  або ВВ* називається чисельна міра ступеня об'єктивної можливості цієї події або ВВ, позначення  $P(A)$ ,  $P(x)$ .

Поняття ймовірності тісно пов'язано з поняттям *частоти*. Якщо у серії з  $n$  випробувань подія  $A$  трапляється в  $m$  випадках, частота визначається як

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \quad (2.1)$$

Якщо кількість випробувань необмежено росте, частота асимптотично прямує до ймовірності, згідно з теоремою Бернуллі

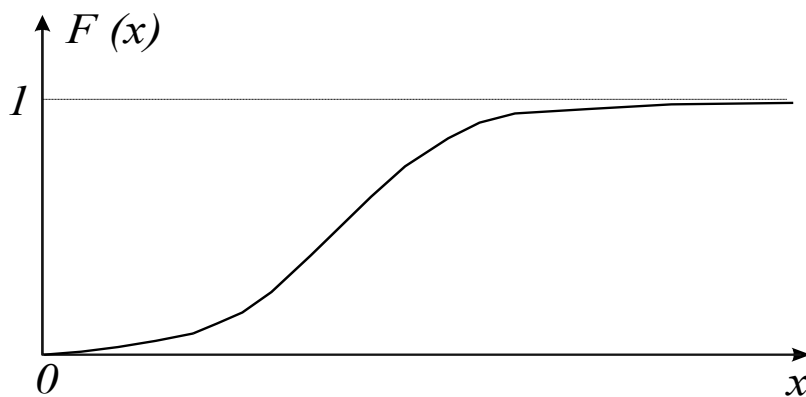
$$P^*(A) \rightarrow P(A), n \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Наприклад: кидання монети, коли  $P(A) = P(B) = 0,5$ , якщо  $n \rightarrow \infty$ , де  $A$  – випадіння «орла»,  $B$  – випадіння «решки».

**2.1.2. Криві розподілу ВВ.** Для характеристики ймовірності ВВ вводиться функція

$$F(x) = P(\tilde{x} < x). \quad (2.3)$$

Ця функція дорівнює ймовірності того, що випадкова величина  $\tilde{x}$  виявиться меншою від деякого її значення  $x$ ; ця функція називається інтегральною функцією розподілу випадкової величини, або просто **функцією розподілу**. У випадку позитивної безперервної ВВ функція розподілу має характер, що ілюструється *рис. 2.1*.

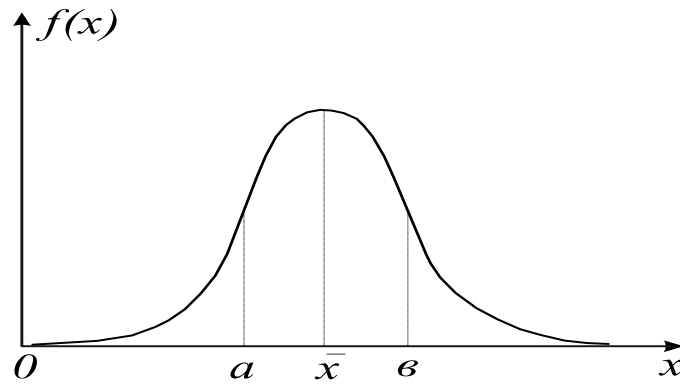


**Рис. 2.1.** Функція розподілу випадкової величини

Похідна функції  $F(x)$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2.4)$$

називається диференційною функцією розподілу або **густиною (щільністю) розподілу** випадкової величини  $\tilde{x}$ . Графік функції  $f(x)$  називається **кривою розподілу**  $\tilde{x}$  (*рис. 2.2*).



**Рис. 2.2. Крива розподілу випадкової величини**

Важливими є наступні співвідношення на основі кривої розподілу ВВ.

1. Перехід від диференційної функції  $f(x)$  до інтегральної функції розподілу ВВ  $F(x)$ :

$$F(x = a) = F(\tilde{x} < [x = a]) = \int_{-\infty}^a f(x) dx; \quad (2.5)$$

2. Визначення ймовірності попадання ВВ в інтервал

$$F(a < \tilde{x} < b) = \int_a^b f(x) dx; \quad (2.6)$$

3. Умова нормування, згідно з якою площа під кривою розподілу дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

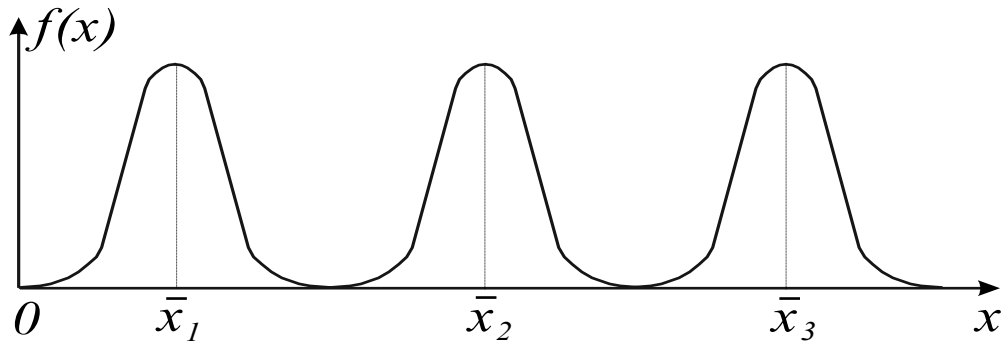
**2.1.3. Числові характеристики розподілу випадкових величин.**

*Математичне сподівання (очікування):*

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx. \quad (2.7)$$



Математичне сподівання визначає *положення розподілу* на віссі абсцис, геометрично воно інтерпретується як центр ваги площі, обмеженої кривою розподілу і віссю абсцис (рис. 2.3).

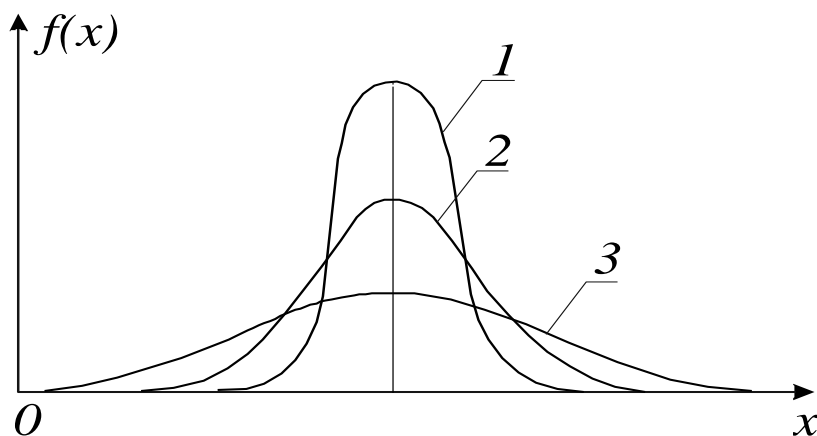


**Рис. 2.3.** Криві розподілу з різним математичним сподіванням:  
( $\bar{x}_3 > \bar{x}_2 > \bar{x}_1$ )

**Дисперсія** – це математичне сподівання квадрата відхилення ВВ  $\tilde{x}$  від її центра  $\bar{x}$

$$\hat{x} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx. \quad (2.8)$$

Геометрично дисперсія може розглядатися як центральний момент інерції площі, обмеженої кривою розподілу.



**Рис. 2.4** Криві розподілу з різним стандартом ( $\hat{x}_1 < \hat{x}_2 < \hat{x}_3$ ).

**Середнє квадратичне відхилення (стандарт)  $\hat{x}$  і коефіцієнт варіації  $V$**  характеризують розкид значень випадкової величини (рис. 2.4)

$$\hat{x} = \sqrt{\bar{x}}; \quad V = \frac{\hat{x}}{\bar{x}}. \quad (2.9)$$

**Коефіцієнт асиметрії  $A_x$**  визначає скошеність розподілу випадкової величини (рис. 2.5, а)

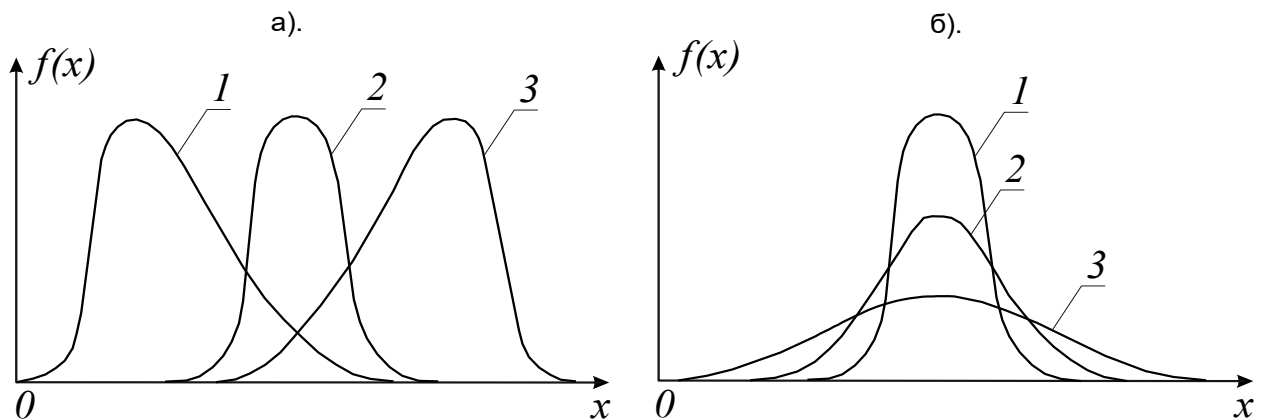
$$A_x = \frac{\mu_3}{\hat{x}^3}, \quad (2.10)$$

де  $\mu_3$  – центральний момент третього порядку, він дорівнює

$$\mu_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^3 f(x) dx.$$

**Ексцес  $E_x$**  оцінює шпильчастість (приплюснутість) розподілу випадкової величини (рис. 2.5, б):

$$E_x = \frac{\mu_4}{\hat{x}^4} - 3. \quad (2.11)$$



**Рис. 2.5. Варіанти кривих розподілу:**  
 а) з різною асиметрією:  $A_1 > 0$ ,  $A_2 \approx 0$ ,  $A_3 < 0$ ;  
 б) з різним ексцесом:  $E_1 > 0$ ,  $E_2 \approx 0$ ,  $E_3 < 0$ .

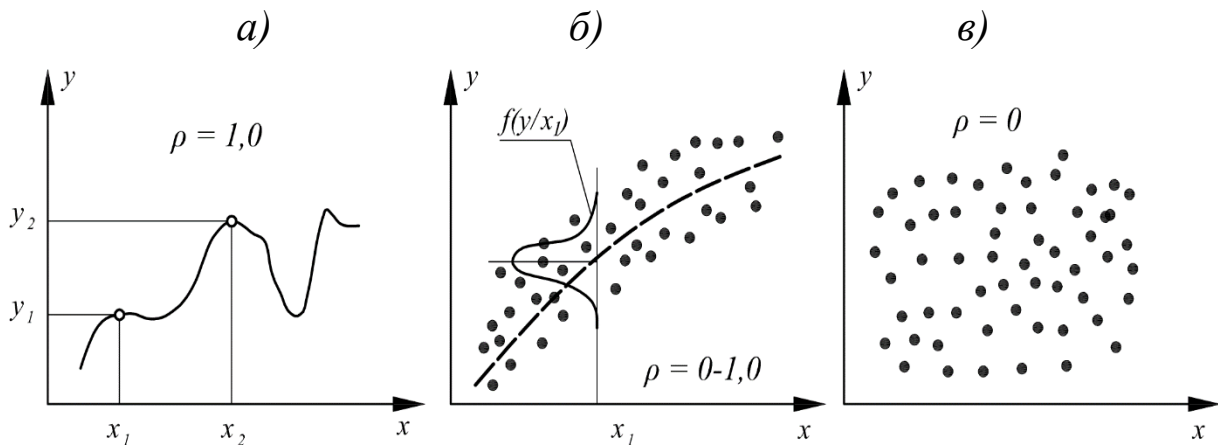
**2.1.4. Кореляція випадкових величин.** На практиці випадкові величини можуть зв'язані між собою або залежать одна від одної. В якості прикладів можна навести випадкове зусилля у колоні, яке залежить від випадкових навантажень, або випадкову межу текучості сталі, що залежить від вмісту хімічних елементів.

Види можливих зв'язків між аргументами  $x$  і  $y$  ілюструються на *рис. 2.6*.

1. **Функціональний** зв'язок  $y = c(x)$ , коли будь-якому значенню аргументу  $x_i$  відповідає єдине значення функції  $y_i = c(x_i)$  (*рис. 2.6, а*).

2. **Кореляційний** (статистичний) зв'язок, коли множина експериментальних точок на графіку має виражену тенденцію, фіксованому значенню аргументу  $x_i$  відповідає розподіл  $f(y/x_i)$  (*рис. 2.6, б*), і випадкові величини  $\tilde{x}$  і  $\tilde{y}$  вважаються кореляційно залежними.

3. **Відсутність** зв'язку, коли множина експериментальних точок на графіку не має чіткої тенденції, залежність між аргументами  $x$  і  $y$  відсутня і випадкові величини  $\tilde{x}$  і  $\tilde{y}$  вважаються незалежними (*рис. 2.6, в*).



**Рис. 2.6.** Види зв'язку між аргументами  $x$  і  $y$  :

а – функціональний зв'язок; б – кореляційний зв'язок;

в – відсутність зв'язку

Для опису кореляційного зв'язку між випадковими величинами визначається **кореляційний момент**, що дорівнює

математичному сподіванню добутку відхилень випадкових величин  $\tilde{x}$  і  $\tilde{y}$ :

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y})f(x, y)dxdy, \quad (2.12)$$

де  $f(x, y)$  – щільність розподілу двох випадкових величин  $\tilde{x}$  і  $\tilde{y}$ .

Для незалежних випадкових величин  $\tilde{x}$  і  $\tilde{y}$  маємо

$$f(x, y) = f(x)f(y). \quad (2.13)$$

В залежності від характеру кореляційної залежності вона може бути лінійною або нелінійною. Для характеристики тісноти лінійного зв'язку вводиться *коефіцієнт кореляції*

$$\rho = \frac{K_{xy}}{\hat{x}\hat{y}}. \quad (2.14)$$

Цей безрозмірний коефіцієнт дорівнює  $\rho = 1$  для функціональної залежності (рис. 2.6, а), знаходиться в інтервалі  $\rho = 0 \dots 1$  для статистичної залежності (рис. 2.6, б) і дорівнює  $\rho = 0$  при відсутності зв'язку між випадковими величинами (рис. 2.6, в).

Лінія регресії, яка характеризує загальну тенденцію зв'язку між аргументами, має при лінійній кореляційній залежності рівняння наступного виду

$$y - \bar{y} = \rho \frac{\hat{y}}{\hat{x}}(x - \bar{x}). \quad (2.15)$$

## 2.2. КРИВІ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

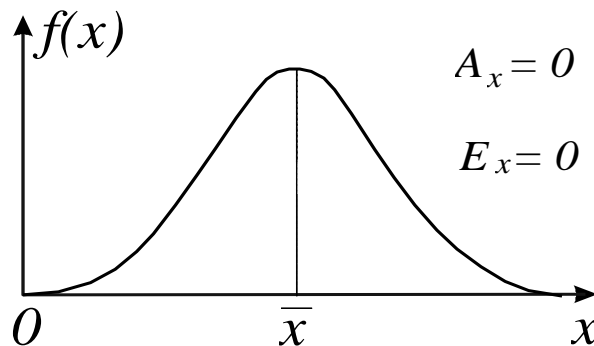
Важливим аспектом імовірнісних методів розрахунку є обґрунтований вибір законів розподілу випадкових величин і

ординат випадкових процесів. Коротко зупинимося на тих із них, які будуть використані в подальшому викладенні.

**2.2.1. Нормальний розподіл.** Цей симетричний розподіл з безкінечними межами, який називається також законом Гаусса (рис. 2.7), є найбільш поширеним в теорії і практиці імовірнісних розрахунків [1], він має щільність

$$f(x) = \frac{1}{\hat{X}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(X - \bar{X})^2}{2\hat{X}^2}\right]. \quad (2.16)$$

Тут:  $X$  – випадковий аргумент;  $\bar{X}$  і  $\hat{X}$  – відповідно математичне очікування і стандарт (середньоквадратичне відхилення) аргументу  $X$ .



**Рис. 2.7. Нормальний розподіл випадкової величини**

Якщо замість аргументу  $X$  враховується нормоване відхилення від центру  $\gamma = (X - \bar{X}) / \hat{X}$ , то визначається нормована щільність нормального закону наступного виду:

$$f(\gamma) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-0.5\gamma^2). \quad (2.17)$$

З урахуванням цього інтегральна функція нормального розподілу буде

$$F(X) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^X \exp(-0.5\gamma^2) d\gamma = \Phi(\gamma), \quad (2.18)$$

де  $\Phi(\gamma)$  – функція Лапласа, табульована разом з (2.16) в численних статистичних таблицях [1] і посібниках [2,3]

Поширеність нормального закону в задачах надійності пов'язана з його відносною аналітичною простотою, оскільки він залежить від двох параметрів, наявністю готових таблиць, близькою відповідністю розподілам міцності матеріалів і деяких навантажень, асимптотичним прагненням до нормального розподілу суми декількох випадкових величин з різними законами розподілу.

Порядок підбору нормального розподілу ілюструється у посібнику [2].

**2.2.2. Розподіл Вейбулла.** Широко поширений в задачах надійності також розподіл Вейбулла, що має наступні диференціальну і інтегральну функції розподілу [4]:

$$f(X) = \frac{\beta}{\alpha} (X - \gamma)^{\beta-1} \exp\left[-\frac{(X - \gamma)^\beta}{\alpha}\right]; \quad (2.19)$$

$$F(X) = 1 - \exp\left[-\frac{(X - \gamma)^\beta}{\alpha}\right], \quad (2.20)$$

де  $\gamma$  – параметр положення розподілу; зазвичай  $\gamma = 0$ , тоді розподіл можливий тільки при  $X \geq 0$ ;  $\alpha > 0$  – параметр масштабу, що визначає витягнутість розподілу;  $\beta > 0$  – параметр форми, від якого залежить вид розподілу (рис. 2.8); при  $\beta = 1$  розподіл Вейбулла перетворюється в експоненційний розподіл (див. п. 2.3), при  $\beta = 2$  – в розподіл Релея.

Математичне очікування і дисперсія аргументу  $X$ , що підпорядковується розподілу Вейбулла при  $\gamma = 0$ , визначаються як

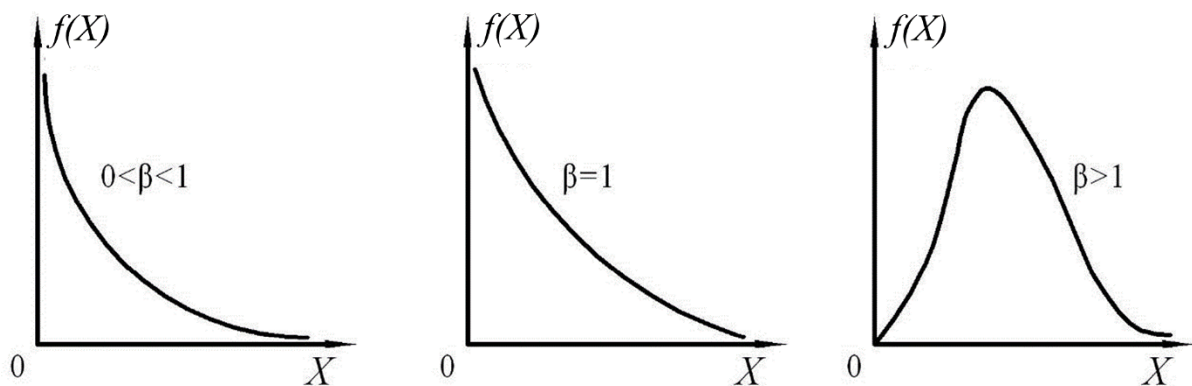
$$\bar{X} = \alpha^{1/\beta} \Gamma(1 + 1/\beta); \quad (2.21)$$

$$\hat{X} = \alpha^{2/\beta} \left\{ \Gamma(1 + 2/\beta) - \left[ \Gamma(1 + 1/\beta) \right]^2 \right\}, \quad (2.22)$$

де  $\Gamma$  – гамма-функція виду

$$\Gamma(1 + p) = \int_0^{\infty} X^p e^{-x} dx, \quad (2.23)$$

що визначається чисельно або по таблицях [5].



**Рис. 2.8.** Розподіл Вейбулла при  $\gamma = 0$  і різних значеннях коефіцієнту форми  $\beta$

Формули для визначення асиметрії і ексцесу розподілу Вейбулла наведені в [6]. Для підбору цього розподілу методом моментів необхідно мати в розпорядженні два перші моменти, з використанням яких вирішується трансцендентне рівняння, що включає гамма-функцію; можна також виконувати підбір по початковій вибірці.

Розподіл Вейбулла, що є граничним для мінімальних значень випадкових величин, добре описує крихке руйнування конструкцій і служить основою для розв'язання деяких завдань надійності [6].

**2.2.3. Подвійний експоненційний розподіл.** Статистика екстремальних (найбільших) значень має асимптотичні розподіли 3-х типів [7], з яких для опису навантажень використовується

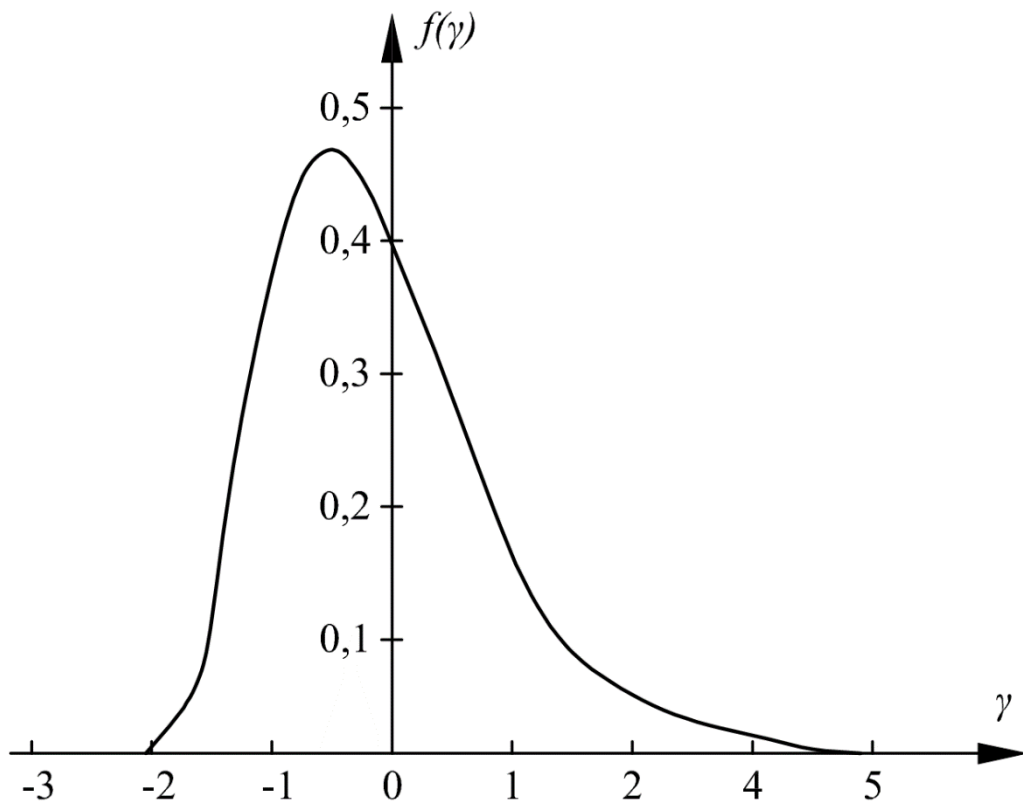
закон I типу (закон Гумбеля) – подвійний експоненціальний розподіл, що має інтегральну і диференціальну функції виду

$$F(X) = \exp[-\exp(-y)], \quad (2.24)$$

$$f(X) = \alpha_n \exp(-y) \exp[-\exp(-y)]. \quad (2.25)$$

Тут  $y = \alpha_n(X - u_n)$  – нормоване ухилення аргументу від моди;  $u_n = \bar{X}_n - 0,45005\hat{X}_n$  – характеристичний екстремум;  $\alpha_n = \pi/(\sqrt{6}\hat{X}_n)$  – екстремальна інтенсивність;  $\bar{X}_n, \hat{X}_n$  – відповідно вибіркові середнє і стандарт сукупності з  $n$  членів.

Розподіл Гумбеля табульований у вигляді таблиць [7], він залежить від двох параметрів  $u_n$  і  $\alpha_n$ , пов'язаних з середнім і стандартом; асиметрія і ексцес розподілу Гумбеля постійні:  $S = 1,1396$ ;  $E = 2,4$ . Вид закону Гумбеля для найбільших значень ілюструється *рис. 2.9*.



**Рис. 2.9.** Подвійний експоненціальний розподіл (розподіл Гумбеля)



Розподіл Гумбеля є стійким, тобто він не змінюється при зведенні в  $n$ -у степінь, зміщуючись уздовж осі абсцис на величину  $\ln n/\alpha_n$ :

$$F^n(X) = \exp[-\exp(-y + \ln n)]. \quad (2.26)$$

Ця перевага закону Гумбеля корисна, наприклад, при екстраполяції екстремумів навантажень (річних, місячних та ін.) на триваліший термін.

Екстремальний розподіл Гумбеля в порівнянні з нормальним розподілом зміщений вліво, його мода знаходиться на відстані  $-0,45\hat{X}$ , що відповідає позитивній асиметрії  $S = 1,14$ . Він більш загострений, ніж нормальний розподіл (ексцес  $E = 2,4$ ). Розподіл Гумбеля має "хвіст", більше витягнутий у бік великих значень аргументу, чим нормальний закон (рис. 2.9).

**2.2.4. Інші імовірнісні представлення.** У деяких випадках може вдало застосовуватися *логнормальний розподіл*, отриманий логарифмічним перетворенням нормального закону, який має асиметричний характер і є асимптотичним для добутку випадкових величин. Корисним в застосуваннях є також *розподіл Грам-Шарльє*, отриманий шляхом коригування нормального розподілу на моменти 3-го і більшого порядку. Разом з безперечними перевагами, цей розподіл, маючи також нескінченні межі, при деяких значеннях аргументу може набувати негативних значень і давати побічні екстремуми. Досить широко в завданнях надійності застосовуються *криві Пірсона*, особливо III типу (гамма-розподіл) [8]. Для практичних рішень конкретних питань можуть виявитися корисними розподіл Крицького-Менкеля, отриманий степеневим перетворенням кривої Пірсона III типу, розподіл Гриневича на основі закону Вейбулла, усічені розподіли, лінійні комбінації нормальних, вейбулловських та інших законів.

Незважаючи на численність стохастичних розподілів, тільки частково перелічених вище, актуальним залишається питання про вибір закону для багатoverшинних розподілів, наприклад, снігового навантаження. У зв'язку з цим було обґрунтовано

застосування поліномо-експоненційного розподілу (3.15), детально розглянутого нижче у розділі 3.

## 2.3. ЕКСПОНЕНЦІЙНИЙ РОЗПОДІЛ В ЗАДАЧАХ НАДІЙНОСТІ

**2.3.1. Загальні формули.** Проінтегруємо вираз (1.4) щодо визначення інтенсивності відмов

$$\int_0^t \lambda(t) dt = -\ln P(t).$$

Далі виконаємо операцію потенціювання, в результаті чого одержується формулу функції надійності

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}. \quad (2.27)$$

У межах періоду нормальної роботи системи (стадія II на *рис. 1.4*) з постійною інтенсивністю відмов  $\lambda(t) = \lambda = const$  маємо

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (2.28)$$

Це **експоненційний закон** зміни надійності у часі (*рис. 2.10, a*), широко розповсюджений у практичних розрахунках надійності у техніці, зокрема будівельних об'єктів і конструкцій. Експоненційний закон є природним з фізичної точки зору, він простий і зручний у користуванні, має всього один параметр  $\lambda$ . Його застосування суттєво спрощує формули теорії надійності конструкцій.

Інтегральна функція експоненційного закону

$$F(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (2.29)$$

Диференційна функція експоненційного закону

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (2.30)$$

Числові характеристики експоненційного закону – математичне сподівання і стандарт – дорівнюють одне одному:

$$\bar{t} = \hat{t} = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.31)$$

Коефіцієнт варіації при цьому, очевидно,  $V_t = 1$ .

### 2.3.2. Характеристична якість експоненційного закону.

Ця особливість експоненційного закону пов'язана з тим, що ймовірність безвідмовної роботи в інтервалі  $(t, t + \Delta t)$  не залежить від часу попередньої роботи  $t$ , а тільки від довжини інтервалу  $\Delta t$ . Це легко показати:

- ймовірність відсутності відмови в інтервалі  $(0, t + \Delta t)$ :

$$P(t + \Delta t) = e^{-\lambda(t + \Delta t)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda \Delta t};$$

- ймовірність відсутності відмови в інтервалі  $(0, t)$ :

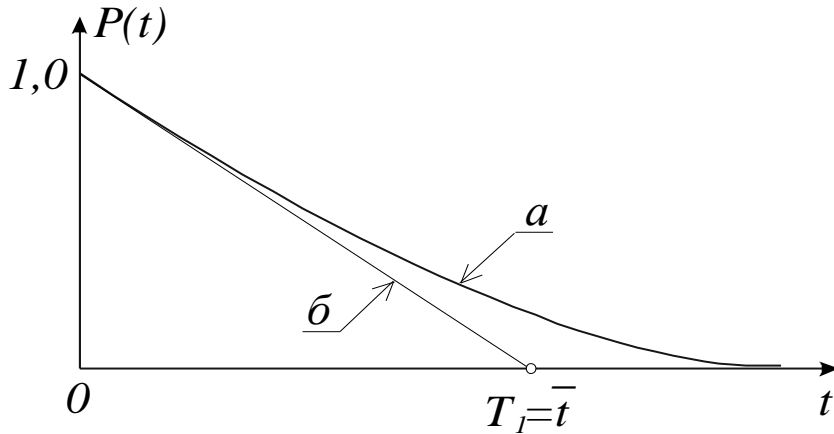
$$P(t) = e^{-\lambda t};$$

- умовна ймовірність  $P_t(\Delta t)$  відсутності відмови в інтервалі  $(t, t + \Delta t)$  протягом  $\Delta t$ , обчислена при умові безвідмовної роботи у попередньому інтервалі:

$$P_t(\Delta t) = \frac{P(t, t + \Delta t)}{P(t)} = \frac{e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t}.$$

Одержана формула не містить  $t$ , а тільки  $\Delta t$ . Це свідчить про те, що у випадку експоненційного закону відсутність відмови “у минулому” не впливає на ймовірність її відсутності (або появи) “у

найближчому майбутньому”. Ця якість характерна тільки для експоненційного закону. З іншого боку, якщо випадковий фактор, що вивчається, має таку властивість – він розподілений згідно з експоненційним законом.



**Рис. 2.10. Експоненційний закон зміни надійності:**  
а) функція (2.28); б) лінеаризований вираз (2.32).

**2.3.3. Лінеаризація експоненційного закону.** У випадку, коли  $P(t) > 0,9$ , тобто для високонадійних об’єктів, виконується операція лінеаризації із заміною нелінійної функції дотичною у вибраній точці. Для цього функцію розкладають у ряд Тейлора та відкидають нелінійні члени. У даному випадку використовується ряд Маклорена, що є частинним випадком ряду Тейлора, коли абсциса точки розкладу  $t = 0$ :

$$P(t) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}t + \frac{P''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}t^n;$$

$$P(t) = 1 - \lambda t + \frac{\lambda^2}{2!}t^2 - \frac{\lambda^3}{3!}t^3 + \dots$$

Відкидаючи нелінійні члени, одержуємо більш простий вираз щодо функції надійності (рис.2.10, б)

$$P(t) = e^{-\lambda t} \cong 1 - \lambda t. \quad (2.32)$$

Інтегральна функція розподілу відповідно має вираз:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \cong \lambda t.$$

Формула (2.32) дає достатню точність практичних розрахунків, зокрема, будівельних конструкцій, про що свідчить числовий приклад, розглянутий у посібнику [2].

## 2.4. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

**2.4.1. Основні визначення і характеристики.** Подальшим розвитком імовірнісного опису є перехід від випадкової величини  $\tilde{x}$  до *випадкової функції*  $\tilde{x}(l)$ , яка в результаті спроби може прийняти вигляд тієї чи іншої *реалізації*, невідомої наперед, якої саме [4]. Кожна реалізація являє собою звичайну не випадкову функцію  $x_i(l)$ . Група спроб складає сімейство або *ансамбль* реалізацій (рис. 2.11).

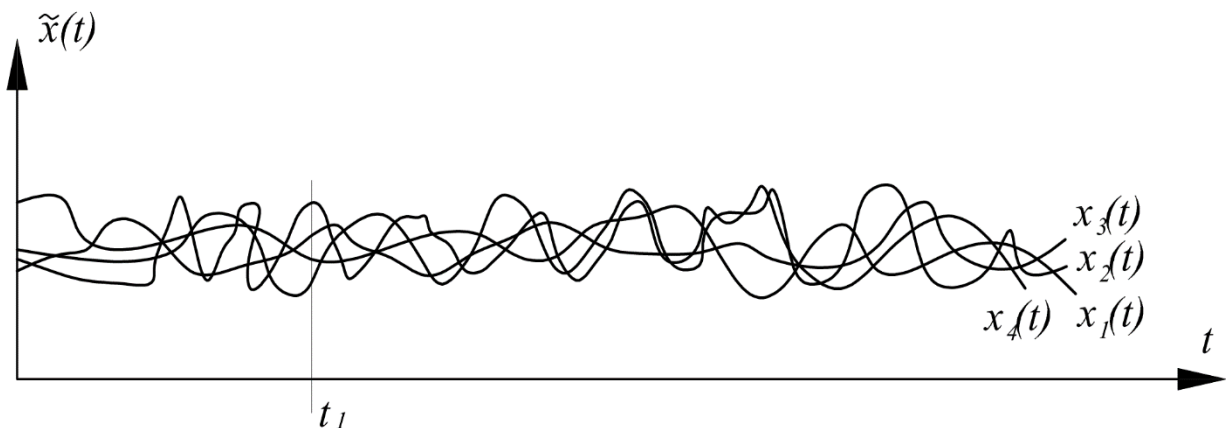


Рис. 2.11. Ансамбль реалізацій випадкової функції

При фіксованому значенні аргументу  $l = l_1$  випадкова функція перетворюється у випадкову величину  $\tilde{x}(l)$ . Таким чином, випадкова функція поєднує в собі ознаки функції і випадкової величини.

Якщо аргументом випадкової функції є час  $t$ , вона називається *випадковим процесом*. Найчастіше його визначають як випадкову величину, розподіл якої залежить не тільки від аргументу  $t = t_1$ , але й від того, які часткові значення приймає ця

величина при інших значеннях аргументу  $t = t_2$ . Прикладами випадкових процесів є кліматичні (снігові, вітрові) і кранові навантаження на будівлі, а також міцність матеріалів, що змінюється в часі.

На відміну від випадкових величин, які мають числові характеристики, випадкові процеси мають аналогічні характеристики у вигляді функцій.

**Математичне сподівання.** Розглянемо переріз випадкової функції  $\tilde{x}(t)$  при фіксованому значенні аргументу  $t = t_1$ . Він представляє випадкову величину з математичним сподіванням  $\bar{x}(t_1)$ , яке в загальному випадку залежить від аргументу  $t$ , тобто змінюється вдовж осі абсцис (рис. 2.12). Отже, *математичним сподіванням випадкового процесу  $\tilde{x}(t)$*  називається не випадкова функція  $\bar{x}(t)$ , котра при кожному значенні аргументу  $t$  дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу випадкового процесу. За змістом математичне сподівання випадкового процесу є деяка середня функція, біля якої різним чином варіюються конкретні реалізації випадкового процесу.

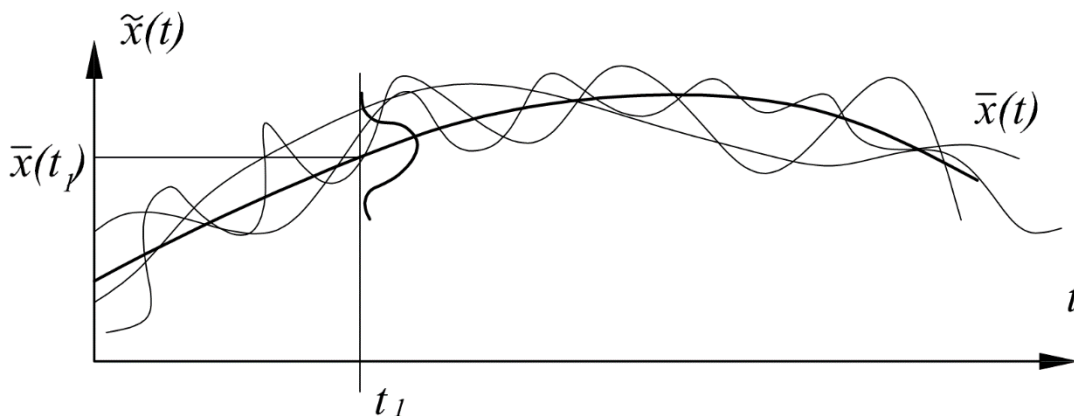


Рис. 2.12. Математичне сподівання випадкового процесу

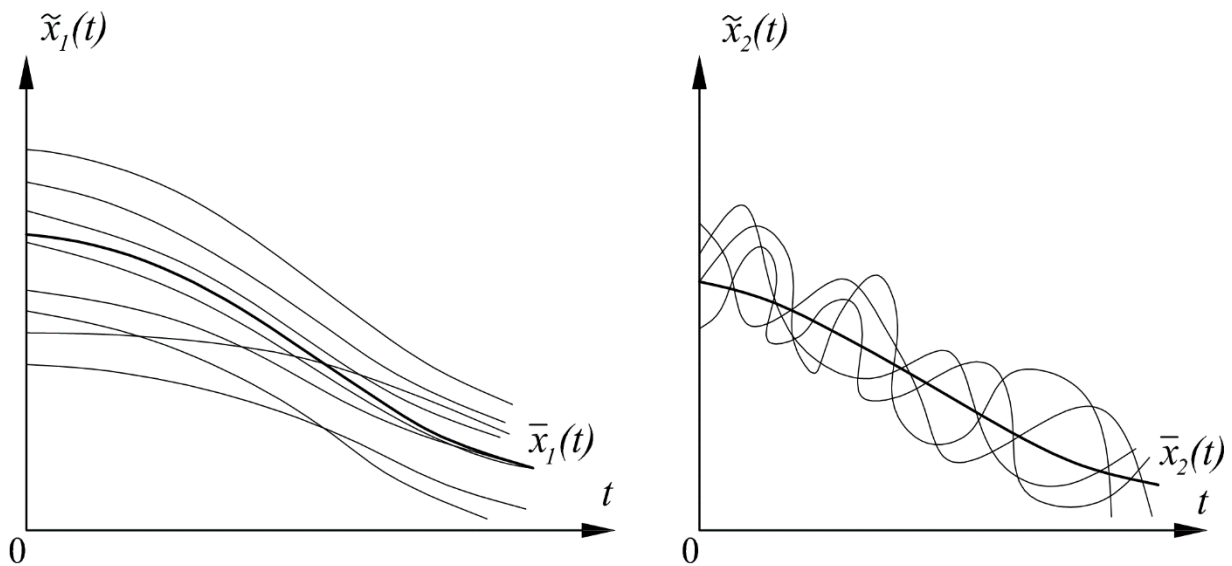
**Дисперсія, стандарт.** Дисперсією випадкового процесу  $\tilde{x}(t)$  називається не випадкова функція  $\hat{x}(t)$ , значення якої для кожного  $t_1$  дорівнює дисперсії відповідного перерізу випадкового процесу  $\tilde{x}(t_1)$ . Аналогічно визначається середньоквадратичне відхилення (стандарт) випадкового процесу  $\tilde{x}(t)$

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\bar{x}(t)}.$$

Наведені характеристики є дуже важливими, вони оцінюють розкид значень процесу, однак їх недостатньо для його повного опису. Це положення ілюструється *рис.2.13*, на якому наведені процеси з приблизно однаковими математичними сподіваннями і дисперсіями. Однак інтенсивність зміни процесів суттєво відрізняється, що не враховується вказаними характеристиками  $\bar{x}(t)$  і  $\hat{x}(t)$ .

**Кореляційна функція.** Внутрішня частотна структура випадкових процесів враховується *кореляційною функцією* – не випадковою функцією двох аргументів  $t_1$  і  $t_2$ , яка при кожній парі значень  $t_1$  і  $t_2$  дорівнює кореляційному моменту відповідних перерізів випадкового процесу

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - \bar{x}(t_1)][x(t_2) - \bar{x}(t_2)] p[x(t_1), x(t_2)] dx(t_1) dx(t_2) \quad (2.33)$$



**Рис. 2.13.** Випадкові процеси різної частотної структури

Як видно на *рис. 2.13*, кореляційна функція процесу  $\tilde{x}_1(t)$  убиває повільніше, ніж кореляційна функція процесу  $\tilde{x}_2(t)$ .

При рівності аргументів  $t_2 = t_1$  кореляційна функція перетворюється в дисперсію.

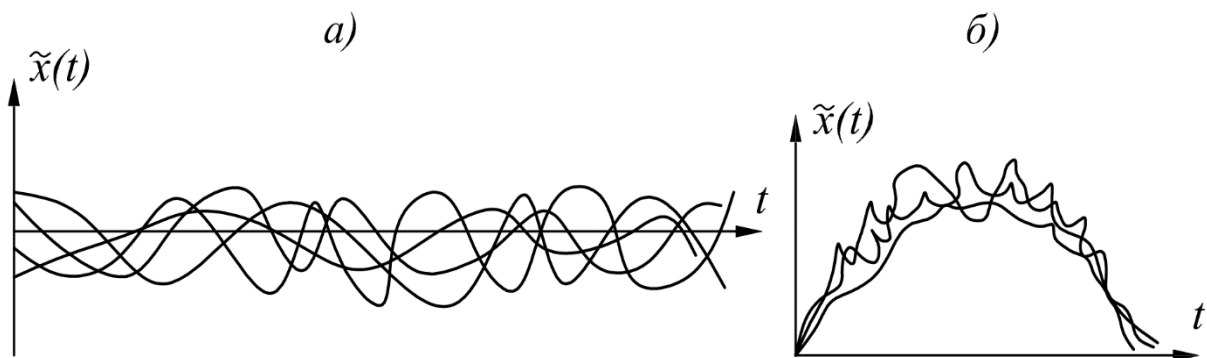
Досить часто використовується *нормована кореляційна функція*, аналогічна коефіцієнту кореляції системи випадкових величин:

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)}. \quad (2.34)$$

При рівності аргументів  $t_2 = t_1$  нормована кореляційна функція дорівнює одиниці.

**2.4.2. Стаціонарні випадкові процеси.** Такі процеси є найбільш важливими і широко розповсюдженими у задачах надійності конструкцій.

Випадковий процес називається *стаціонарним*, якщо його імовірнісні характеристики не залежать від часу  $t$ , тобто не змінюються при переносі початку відліку координати  $t$  (рис 2.14, а). Прикладами таких процесів є кранові навантаження та вітрові впливи (на окремих відрізках часу). *Нестаціонарним* називається випадковий процес, який має тенденцію до зміни або розвитку у часі (рис. 2.14, б). Прикладами таких процесів є снігове навантаження і міцність бетону.



**Рис. 2.14. Реалізації випадкових процесів:**  
а – стаціонарний процес; б – нестаціонарний процес

Стаціонарні випадкові процеси мають наступні особливості.

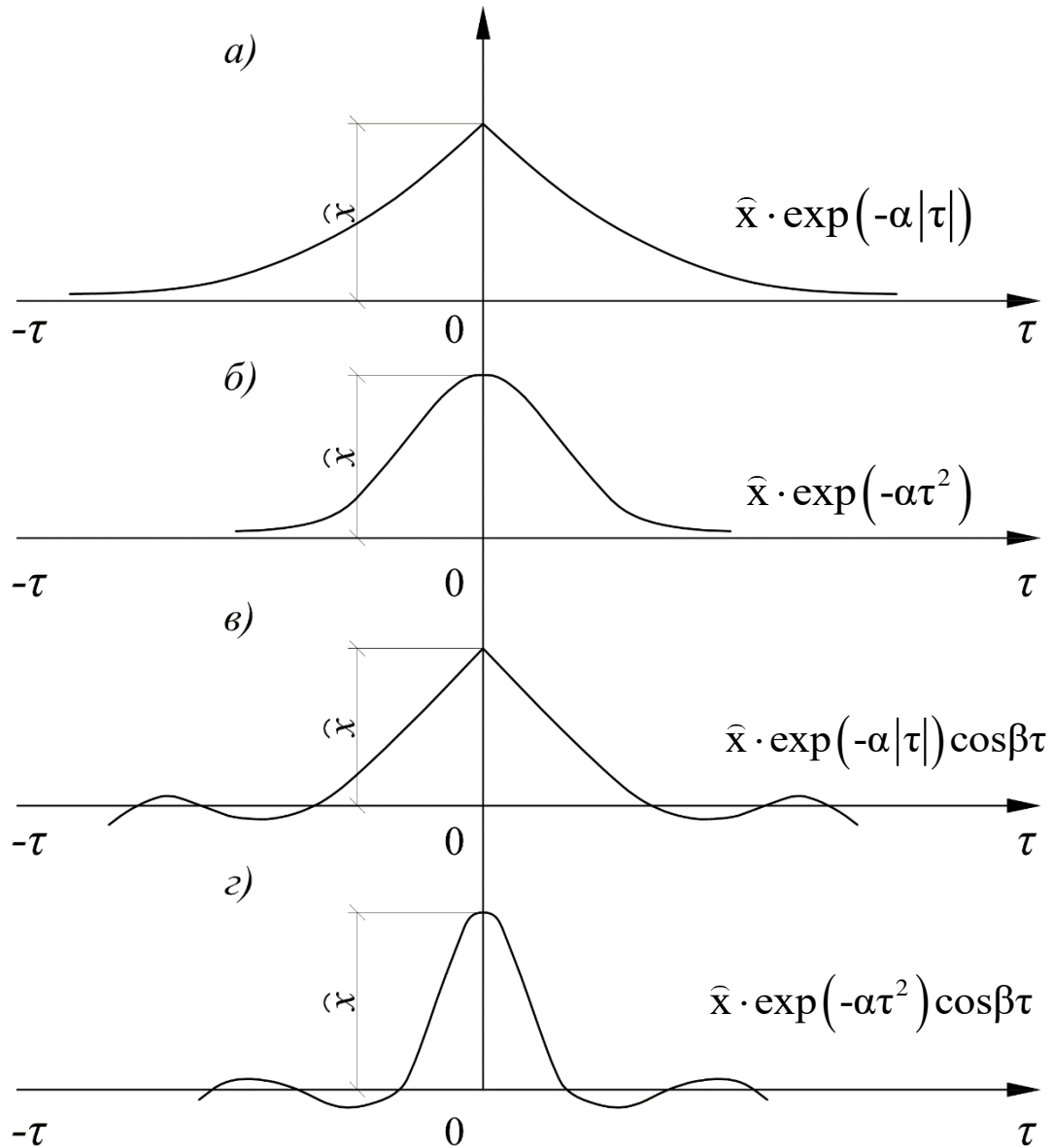
- Математичне сподівання є постійним

$$\bar{x}(t) = \bar{x} = const.$$



- Кореляційна функція залежить тільки від різниці  $\tau = t_1 - t_2$ , тобто є функцією тільки одного аргументу  $\tau$  (рис. 2.15), що суттєво спрощує імовірнісні розрахунки

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_1 - t_2) = K_x(\tau). \quad (2.35)$$



**Рис. 2.15. Приклади кореляційних функцій стаціонарних випадкових процесів:** а – недиференційована при  $\tau = 0$ ; б – диференційована при  $\tau = 0$ ; в – недиференційована при  $\tau = 0$  з періодичністю; г – диференційована при  $\tau = 0$  з періодичністю

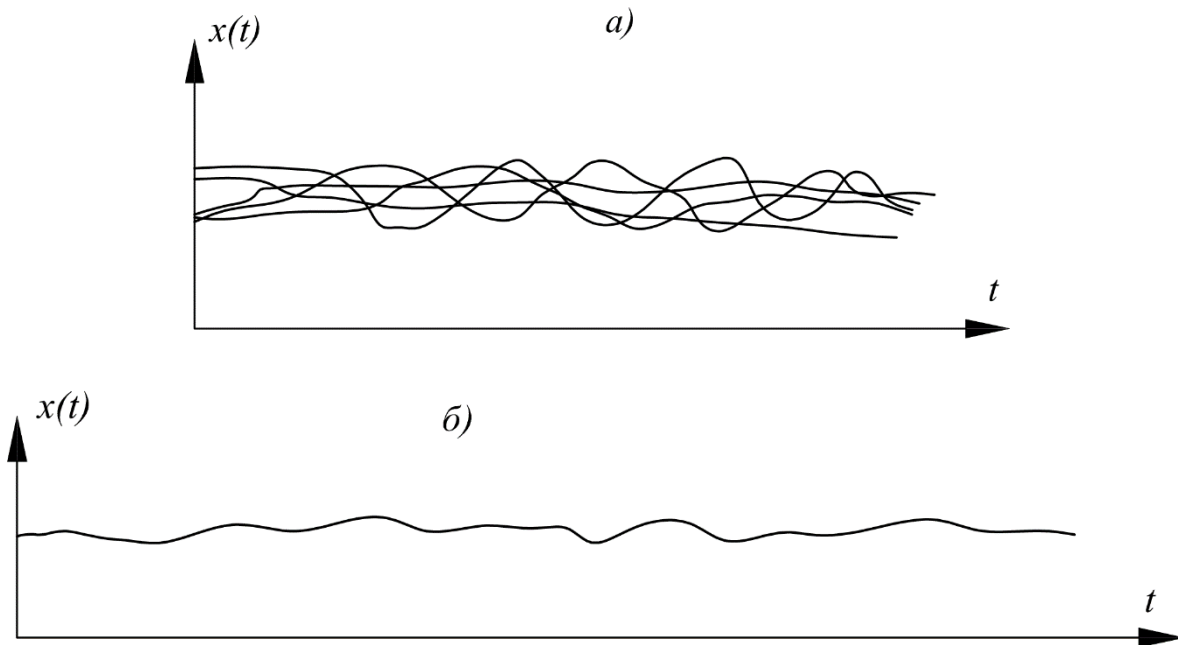
- При  $\tau = 0$  кореляційна функція перетворюється у дисперсію, що не залежить від часу

$$K_x(\tau = 0) = K_x(0) = \hat{x}. \quad (2.36)$$

Якщо кореляційна функція прямує до нуля (рис. 2.15), тобто

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{x}(\tau) = 0,$$

це свідчить про *ергодичність* випадкового процесу і можливість його обробки не по ансамблю реалізацій, а у вигляді однієї достатньо довгої реалізації (рис. 2.16, б). Це полегшує збирання вихідної інформації по процесам, що досліджуються.



**Рис. 2.16. Ергодичний випадковий процес:**  
а – ансамбль реалізацій; в – одна довга реалізація

**2.4.3. Спектральна щільність стаціонарного випадкового процесу.** Існує зв'язок між характером кореляційної функції і внутрішньою структурою відповідного випадкового процесу: в залежності від того, які частоти переважають у випадковому процесі, його кореляційна функція змінює свій вигляд. Тому можна застосовувати спектральне представлення випадкового процесу.

**Спектр** стаціонарного випадкового процесу описує розподіл дисперсій по різних частотах. **Спектральна щільність** такого процесу – це щільність розподілу його дисперсії по частотах (рис.2.17).

$$\hat{x} = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (2.37)$$

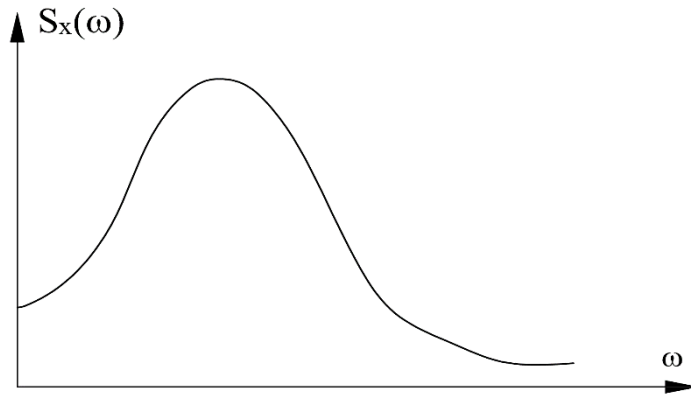


Рис. 2.17. Спектральна щільність випадкового процесу

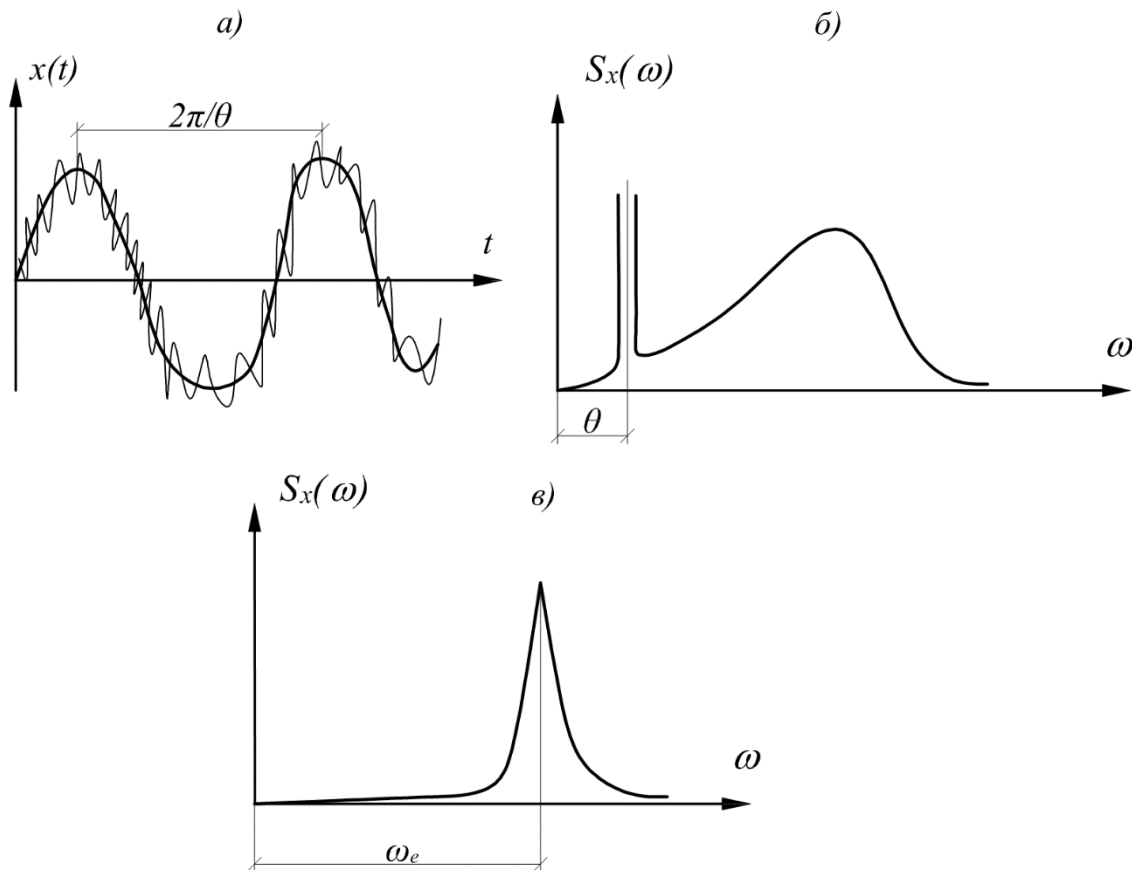


Рис. 2.18. Спектральна щільність різних випадкових процесів:  
а, б – двохчастотний випадковий процес і його спектральна щільність;  
в – спектральна щільність вузькосмугового процесу

Площа, що обмежується кривою  $S_x(\omega)$ , дорівнює дисперсії стаціонарного випадкового процесу  $\hat{x}$ . Розподіли спектральної щільності можуть мати різний характер і одну, дві (рис. 2.18, б) і більше вершин.

Процеси, потужність дисперсії яких концентрується біля однієї частоти, називаються **вузькополосними (вузькосмуговими) процесами**, а їхня частота називається **ефективною частотою  $\omega_e$**  (рис. 2.18, в).

Спектральна щільність зв'язана з кореляційною функцією перетворенням Фур'є наступного вигляду:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{x}(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad (2.38)$$

$$\hat{x}(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (2.39)$$

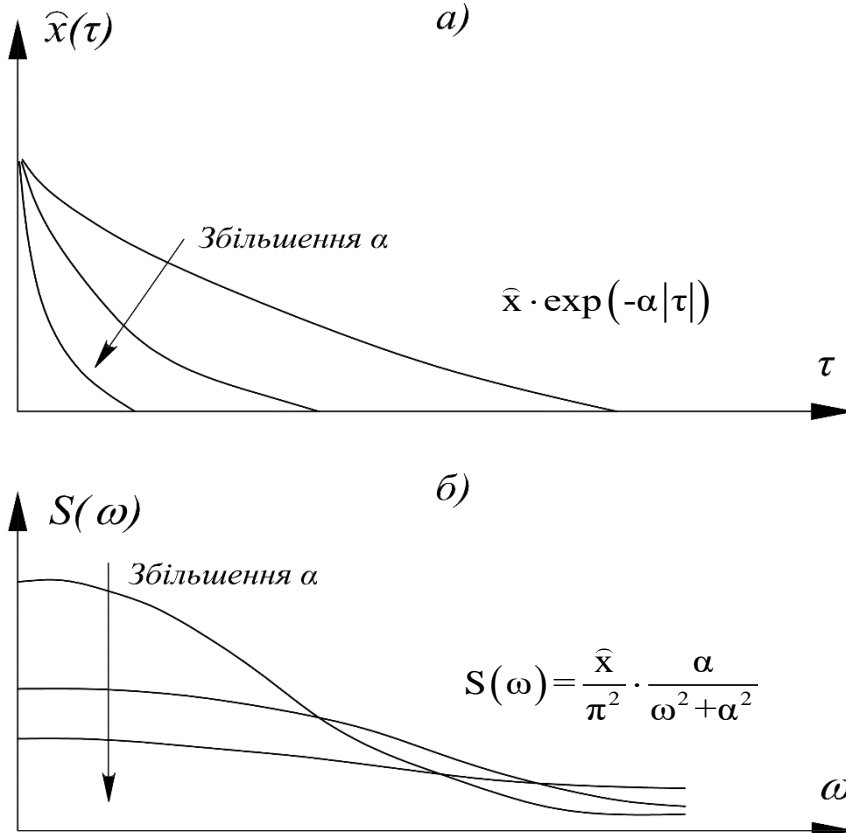


Рис. 2.19. Взаємозв'язок кореляційної функції (а) зі спектральною щільністю (б)

Отже, по виразу кореляційної функції можна визначити характер і вираз спектральної функції. На *рис. 2.19* ілюструється перехід від найпростішої кореляційної функції до відповідної спектральної щільності. На цьому рисунку видно, що зі збільшенням параметру  $\alpha$  кореляційна функція прямує до  $\delta$ -функції, а спектральна щільність – до деякого постійного значення.

Випадковий процес з постійною спектральною щільністю називається «білим шумом». Подібні процеси досить часто виникають у випадкових явищах, наприклад, у броунівському русі. Походження терміну пов'язано з тим, що означення «білий» асоціюється із білим світлом, спектральний склад якого приблизно однорідний, а слово «шум» вперше виник як відображення поміх у радіотехніці. Абсолютно білий шум у природі не існує, однак наближено цю модель можна застосувати в імовірнісних розрахунках, наприклад, випадкових навантажень.

**2.4.4. Викиди випадкових процесів.** Основна мета застосування моделі випадкових процесів у задачах оцінки надійності і опису навантажень – це визначення ймовірності досягнення певних значень, тобто викидів за певні рівні. При цьому широко застосовується формула викидів процесів за постійний рівень:

$$v_+(X) = Wf(X) = f_x(X) \int_0^{\infty} f_v(V) V dV, \quad (2.40)$$

де  $X$  – ордината випадкового процесу;  $V$  – швидкість зміни ординати (перша похідна випадкового процесу);  $f_x(X)$ ,  $f_v(V)$  – щільності розподілу відповідно ординати й швидкості;  $W$  – половина першого абсолютного моменту розподілу похідної, або математичне очікування позитивної похідної процесу.

При нормальному розподілі ординати з формули (2.40) одержується відома формула Райса:

$$v_+(X) = \frac{\omega}{2\pi} \exp \left[ -\frac{(X - \bar{X})^2}{2\hat{X}^2} \right], \quad (2.41)$$

де  $\bar{X}$  й  $\hat{X}$  – математичне очікування й середньоквадратичне відхилення (стандарт) ординати процесу;  $\omega = \hat{V} / \hat{X}$  – ефективна частота, що характеризує частотно-часову структуру випадкового процесу; зокрема, для вузькополосного процесу, як вказано вище, ефективна частота збігається з несучою частотою.

В окремому випадку, коли при нормальному розподілі швидкості  $V$  розподіл ординати стаціонарного випадкового процесу відрізняється від нормального, з (2.49) виведена наступна формула частоти викидів процесу:

$$v_+(X) = \frac{\omega \hat{X}}{\sqrt{2\pi}} f(X). \quad (2.42)$$

При переході до нормованого рівня  $\gamma = (X - \bar{X}) / \hat{X}$  дана формула набуває наступного вигляду:

$$v_+(\gamma) = \omega f(\gamma) / \sqrt{2\pi}, \quad (2.43)$$

де  $f(\gamma) = f(X) / \hat{X}$  – нормована щільність розподілу навантаження.

## Література до 2 розділу

1. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К.: ЦУП, 2002. – 446 с.
2. Пічугін С.Ф. Сучасні проблеми надійності в будвництві: Навчальний посібник / С.Ф. Пічугін. – Полтава: ПолтНТУ, 2019 – 81 с.
3. Pichugin S.F., Klochko L.A. Modern problems of reliability in construction: manual for students / S.F. Pichugin, L.A. Klochko. – Poltava: NY PP, 2021. – 147 p.
4. Пічугін С.Ф. Розрахунок надійності будівельних конструкцій: монографія / С.Ф. Пічугін. – Полтава: ТОВ «АСМІ», 2016. – 520 с.

5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн / Пер. с англ. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
6. Справочник по надежности, в 3-х томах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1969.
7. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений / Э. Гумбель / Пер. с англ. – М.: Мир, 1965. – 450 с.
8. Кендалл М.Дж. А. Теория распределений / М.Дж. Кендалл, А. Стьюарт / Пер. с англ.– М.: Наука, 1966. – 588 с.

## РОЗДІЛ 3 ІМОВІРНІСНИЙ ОПИС НАВАНТАЖЕНЬ І МІЦНОСТІ МАТЕРІАЛІВ

*Лише після того, як наука про навантаження досягне того ж рівня, що і наука про міцність конструкцій, розрахунок останніх стане досить досконалим.*

**О.Р. Ржаніцин, доктор технічних наук**

Як слідує з викладеного вище в розділі 1, обґрунтована оцінка надійності конструкцій в якості обов'язкової частини повинна включати дані про навантаження, що діють на конструкції, а також про механічні характеристики матеріалів конструкцій. Тому основний зміст цього розділу складають результати імовірнісного дослідження постійних, кранових, вітрових і снігових навантажень, що істотно впливають на надійність конструкцій будівельних об'єктів. В розділі також приведені статистичні дані про міцність конструкційних матеріалів.

Описані імовірнісні моделі перерахованих навантажень і міцності базуються на представницькому вихідному статистичному матеріалі і мають узагальнений характер, чим визначається обґрунтованість їх використання в різних задачах надійності конструкцій і спільність отриманих висновків і рекомендацій.

Постійні навантаження і міцність матеріалів мають статистичний характер і можуть описуватися випадковими величинами. Кранові і атмосферні навантаження також мають статистичну природу, проте є випадковими функціями часу. Тому їх опис і рішення завдань надійності конструкцій повинні виконуватися передусім в техніці випадкових процесів, що реалізовано і детально викладено в даному посібнику.



### 3.1. ПОСТІЙНЕ НАВАНТАЖЕННЯ

**3.1.1. Опис постійного навантаження.** Згідно з ДБН [1], до постійних навантажень відноситься:

а) вага частин споруд, у тому числі вага несучих та огорожуючих конструкцій;

б) вага та тиск ґрунтів (насипів, засипок), гірничий тиск.

Зусилля від попереднього напруження, що зберігаються у конструкції чи в основі, слід враховувати при розрахунках як зусилля від постійних навантажень.

ДБН [1] приписує, що характеристичне значення ваги конструкцій заводського виготовлення слід визначати за стандартами, робочими кресленнями чи паспортними даними заводів-виробників, а інших будівельних конструкцій та ґрунтів – за проектними розмірами та питомою вагою матеріалів і ґрунтів з урахуванням їхньої вологості в умовах будівництва та експлуатації споруд.

Таблиця 3.1

Питома вага основних матеріалів [2]

№ з/п	Найменування матеріалу	Питома вага, кН/м <sup>3</sup>	№ з/п	Найменування матеріалу	Питома вага кН/м <sup>3</sup>
1	Бетон	24,0	8	Деревина	3,5...10,8
2	Легкий бетон	9,0...20,0	9	Деревина (клеєна)	3,7...4,2
3	Розчин (цементний)	19,0...23,0	10	Плити з дерев'яної стружки	7,0...12,0
4	Розчин (гипсовий)	12,0...18,0	11	Деревоволокнисті плити	4,0...12,0
5	Глина	18,5...19,5	12	Фанера	4,5...7,0
6	Пісок	15,0...16,0	13	Скло	22,0...25,0
7	Шифер	28,0	14	Полістірол	0,30

При визначенні навантажень від ваги конструкцій має бути приділена належна увага правильній оцінці можливої питомої ваги матеріалу, з якого виготовляється конструкція. Між тим у вітчизняних нормах по навантаженням і впливам такі дані відсутні. У нормах проектування сталевих, алюмінієвих і

дерев'яних конструкцій наводяться дані про щільність відповідних будівельних матеріалів, хоча вони відсутні в нормах проектування бетонних і залізобетонних, а також кам'яних і армокам'яних конструкцій. В той же час деякі зарубіжні нормативні документи приводять довідкові дані про щільність матеріалів будівельних конструкцій (табл. 3.1 [2]). В тих випадках, коли обґрунтовані дані про об'ємну вагу відсутні, слід орієнтуватися на більш високі узагальнені довідкові дані.

Для виробів і конструкцій з деревини слід враховувати збільшення питомої ваги, обумовлене просоченням її антисептичними або іншими спеціальними складами. Для виробів і конструкцій, експлуатованих в умовах підвищеної вологості повітря (по відношенню до вологості, при якій визначено вихідне значення питомої ваги) або схильних до безпосереднього зволоження, слід враховувати збільшення питомої ваги матеріалів відповідно до можливої зміни їх вагової вологості.

Питома вага матеріалу може помітно відхилитися від значень, прийнятих у розрахунку. Якщо для сталі цей параметр практично співпадає із середнім значенням, то для інших матеріалів відхилення можуть бути суттєвими. Особливо значно може відхилитися від проектного питомої ваги різних утеплювачів, в якості яких для покриттів широке поширення отримали пінобетон, пеносілікат і інші матеріали щільністю до 300...600 кг/м<sup>3</sup>. Значення щільності цих матеріалів має великий розкид і залежить від багатьох причин як технологічного порядку, так і умов зберігання і монтажу. Потрапляючи у вологе середовище, іноді навіть під опади при неправильному зберіганні або укладанні в покриття, ці матеріали насичуються вологою, погіршуючи при цьому свої теплотехнічні властивості і збільшуючи щільність до 700...1000 кг/м<sup>3</sup>. Інакше кажучи, вага утеплювача може зрости майже удвічі. За даними досліджень, питома вага пінобетона у покриттях досягала 10,0 кН/м<sup>3</sup> замість 6,0 кН/м<sup>3</sup>, прийнятих у проекті, тобто фактичне навантаження перевищувало проектне на 65 %. До підвищення вологості і збільшення ваги утеплювача при експлуатації будівлі призводять також дефекти гідроізоляційного килима або пароізоляції. Зустрічаються випадки, коли через відсутність на будівництві передбачених проектом утеплювачів для теплоізоляції покрівлі застосовувалися наявні матеріали з

великою щільністю. Наприклад, на деяких обстежених об'єктах для утеплення покрівлі замість пінобетону був використаний паливний шлак щільністю 800...1000 кг/м<sup>3</sup>.

На практиці відхилення дійсних об'ємів матеріалів конструкцій від підрахованих за проектом можуть бути достатньо великими. Внаслідок цього, власна вага, зокрема, сталевого прокату може дещо відрізнятись від теоретичного. Середнє значення великої кількості вимірювань власної ваги прокатних профілів перевищує теоретичне на 1...2 %, а окремі значення відрізняються ще більше. Закордонні дані щодо стандартних відхилень розмірів будівельних конструкцій наведені в *табл. 3.2*.

**Таблиця 3.2**

**Стандартні відхилення геометричних розмірів елементів конструкцій**

<i>Конструкції</i>	<i>Відхилення, мм</i>	
	<i>Розміри поперечного перерізу</i>	<i>Довжина</i>
<i>Залізобетонні</i>	<i>5...7</i>	<i>5...20</i>
<i>Сталеві</i>	<i>0,1...1,5</i>	<i>5...10</i>
<i>Дерев'яні</i>	<i>5</i>	<i>5...20</i>
<i>Кам'яні</i>	<i>5...10</i>	<i>5...20</i>

Обстеження широко вживаних для вітчизняних промислових будівель збірних залізобетонних плит типу ПКЖ або ПНС розміром 1,5×6 м, 3×6, 3×12 м показали, що проектний допуск ± 3 мм для цих плит завтовшки 30 мм, як правило, не витримується. Виявляється, що товщина їх фактично складає 35...40 мм, а в деяких випадках доходить до 50 мм. Таким чином, власна вага плит ПКЖ і ПНС в натурі часто перевершує проектне значення на 10...20 %, а іноді до 30 %. Натурні обстеження показали, що фактична товщина збірних залізобетонних панелей може знаходитися в межах 26...60 мм (проти 30 мм за проектом), причому середнє значення товщини за результатами вимірів перевищує проектну величину на 32 %. Внаслідок цього навантаження від панелей перевищує проектне на 0,90 кН/м<sup>2</sup>.

Досить часто утеплювач обважнюється внаслідок збільшення товщини шару укладання матеріалу на покритті (10...40 %). Найбільші відхилення від проекту спостерігаються при насипному матеріалі, застосування плитного утеплювача дозволяє у більшій мірі дотриматися потрібної товщини шару укладання. Вирівнюючі асфальтові і цементно-піщані стяжки найчастіше задаються в проектах товщиною 20 мм. Проте середня товщина шару стяжки складає фактично 25...30 мм (іноді 50...80 мм), і навантаження від стяжки зростає на 30...50 % і більше. До збільшення навантаження призводить і порушення правил ремонту покрівлі, його часто роблять накладенням додаткових шарів руберойду без зняття пошкоджених. Як показують обстеження, число шарів руберойду доходить до 8...10, а навантаження від них до 0,04...0,5 кН/м<sup>2</sup> проти 0,1...0,15 кН/м<sup>2</sup> за проектом.

Як наслідок, сумарне навантаження від покрівель може суттєво перевищувати проектні значення. Результати вимірювань ваги покрівель з урахуванням відхилень розмірів і питомої ваги. Показали, що фактична вага покрівлі при характеристичному значенні 5,57 кН/м<sup>2</sup> складала 6,43 кН/м<sup>2</sup> (більше на 16 %), а при характеристичному значенні 2,17 кН/м<sup>2</sup> – 2,47 кН/м<sup>2</sup> (більше на 14 %). Інші дослідження також виявили перевищення фактичних навантажень від утепленої покрівлі по залізобетонним панелям: 24 % для цементної стяжки і 19 % для асфальтової стяжки.

### **3.1.2. Постійне навантаження в нормах проектування.**

Згідно з ДБН [1], граничне розрахункове значення ваги конструкцій та ґрунтів визначається множенням характеристичного значення на коефіцієнт надійності за граничним навантаженням  $\gamma_{fn}$ , наведений у *табл. 3.3*.

При визначенні навантаження від ґрунту слід враховувати навантаження від матеріалів, обладнання та транспортних засобів, що передаються на ґрунт.

Коефіцієнти надійності за навантаженням для ваги ґрунтів диференційовані залежно від вигляду ґрунтів (скельні і нескельні)

та їх стану (грунти в природному стані і насипні грунти). Ці коефіцієнти враховують можливу мінливість об'ємної ваги ґрунтів. Особливу роль в навантаженні від ваги нескільких ґрунту грає вода, що частково або повністю заповнює проміжки між частками ґрунту. Дія води, якщо вона має місце, повинна враховуватися незалежно від коефіцієнтів надійності за навантаженням.

Коефіцієнти надійності за навантаженням для тиску ґрунтів в нормах не встановлені, оскільки величина тиску ґрунту залежить не лише від його об'ємної ваги, але і від інших характеристик (кута внутрішнього тертя, зчеплення), мінливість яких повинна враховуватися окремо. Це питання є предметом спеціальних норм.

Таблиця 3.3

## Коефіцієнти надійності за граничним постійним навантаженням

<i>Конструкції споруд та вид ґрунтів</i>	$\gamma_{fn}$
<i>Конструкції</i>	
<i>металеві, у яких зусилля від власної ваги:</i>	
• менші 50%;	1,05 (0,95)
• дорівнюють або перевищують 50%	1,10 (0,90)
<i>бетонні (з середньою густиною понад 1600 кг/м<sup>3</sup>), залізобетонні, кам'яні, армокам'яні, дерев'яні</i>	1,10 (0,90)
<i>бетонні (з середньою густиною 1600 кг/м<sup>3</sup> і менше), ізоляційні, вирівнювальні та опоряджувальні шари (плити, матеріали у рулонах, засипки, стяжки тощо), виконані:</i>	
• у заводських умовах	1,20(0,90)
• на будівельному майданчику	1,30(0,90)
<i>Ґрунти:</i>	
• у природному стані	1,10(0,90)
• насипні	1,15(0,90)
<i>Примітка.</i> Значення у дужках слід використовувати для перевірки стійкості конструкції на перекидання, а також в інших випадках, коли зменшення ваги конструкцій і ґрунтів може погіршити умови роботи конструкції.	

Значення  $\gamma_f$ , вказані в табл. 3.3 у дужках, слід приймати у несприятливих випадках, коли вони збільшують вплив на

конструкції. Причому понижені значення коефіцієнту надійності не залежать від того, вага якої конструкції враховується.

### 3.1.3. Імовірнісний опис постійного навантаження.

Навантаження від власної ваги несучих і огорожуючих конструкцій, що виходить в результаті перемноження двох величин (питомої ваги і об'єму), кожна із яких є випадковою величиною, є випадковою величиною, що відхиляється від характеристичного значення.

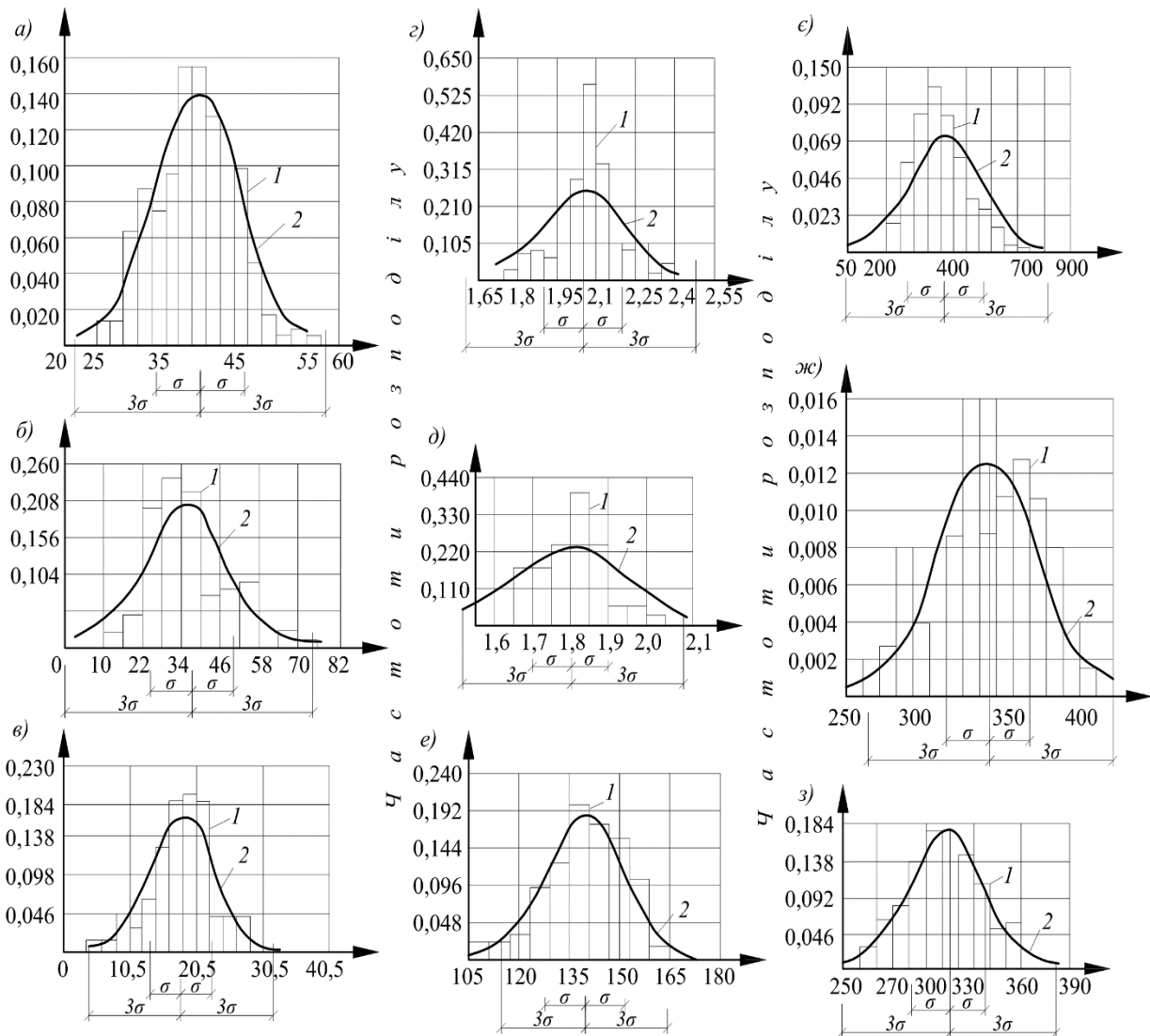
Випадкові значення питомої ваги різних матеріалів добре описуються нормальним законом, узагальнені числові характеристики якого наведені в *табл. 3.4*.

**Таблиця 3.4**

**Статистичні характеристики питомої ваги основних матеріалів**

<i>№ з/п</i>	<i>Найменування матеріалу</i>	<i>Середнє значення, кН/м<sup>3</sup></i>	<i>Коефіцієнт варіації</i>
1	<i>Глина</i>	<i>19,70</i>	<i>0,046</i>
2	<i>Суглинок</i>	<i>19,10</i>	<i>0,029</i>
3	<i>Важкий бетон</i>	<i>24,0</i>	<i>0,024...0,04</i>
4	<i>Високоміцний бетон</i>	<i>24,0...26,0</i>	<i>0,030</i>
	<i>Легкий бетон</i>	<i>5,0...18,0</i>	<i>0,04...0,08</i>
	<i>Ніздрюватий бетон</i>	<i>10,0...12,0</i>	<i>0,05...0,10</i>
4	<i>Керамзитобетон М100</i>	<i>14,30</i>	<i>0,091</i>
5	<i>Цементна стяжка</i>	<i>20,60</i>	<i>0,073</i>
6	<i>Асфальтова стяжка</i>	<i>18,20</i>	<i>0,011</i>
7	<i>Руберойдний килим</i>	<i>9,10</i>	<i>0,011</i>
8	<i>Керамзит</i>	<i>3,10</i>	<i>0,069</i>
	<i>Кам'яна кладка</i>	<i>14,0...19,0</i>	<i>0,050</i>
9	<i>Деревина</i>	<i>4,40...6,80</i>	<i>0,065...0,10</i>
10	<i>ДСП</i>	<i>6,70</i>	<i>0,116</i>

Гістограми результатів вимірювань, наведені на *рис. 3.1*, підтверджують можливість опису випадкового постійного навантаження та його складових нормальним розподілом, що було підтверджено застосуванням критерію Колмогорова. Як видно на графіках, практично всі дослідні значення укладаються у діапазон «середнє значення  $\pm$  три стандарти», тобто підтверджується відоме у математичній статистиці «правило  $3\sigma$ »..



**Рис. 3.1. Статистичні дані щодо навантаження від покрівлі:**

а – товщина полук панелей покриття; б – те ж, цементна стяжка; в – те ж, асфальтова стяжка; г – питома вага цементної стяжки; д – питома вага асфальтової стяжки; е – товщина утеплювача; є – питома вага утеплювача; ж – маса покрівлі з цементною стяжкою; з – те ж, з асфальтовою стяжкою; 1 – дослідна гістограма; 2 – нормальний розподіл.

Змінність навантаження від власної ваги наглядно ілюструють дані вимірювань на покрівлях виробничих будівель, зведені в *табл. 3.5*. Вони наочно свідчать про помітне перевищення фактичного навантаження  $q_{\text{факт}}$  від ваги покрівель над характеристичними значеннями  $q_{\text{хар}}$ , що регламентуються нормами.

**Таблиця 3.5**

**Орієнтовні статистичні характеристики питомої ваги і товщини елементів утепленої залізобетонної покрівлі**

Елементи покриття	Кількість вимірів	Середнє/стандарт		Коефіцієнт варіації		$\frac{q_{\text{факт}}}{q_{\text{хар}}}$
		товщина $\delta$ , мм	питома вага $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$V_{\delta}$	$V_{\gamma}$	
Тришаровий рулонний килим	206	8,6/2,35	9,07/10,02	0,273	0,107	0,85
Цементна стяжка	97	35,6/12,21	20,60/1,54	0,343	0,073	1,83
Асфальтова стяжка	110	18,7/4,95	18,20/1,32	0,246	0,070	1,40
Утеплювач	207	140/12,3	4,20/1,41	0,088	0,335	1,0
Залізобетонні плити	260	39,8/5,95	27,40	0,149	-	1,5

З табл. 3.5 також видно, що мінливість по питомій вазі і товщині суттєво відрізняється для різних шарів покрівлі, про що свідчать коефіцієнти варіації, що відрізняються у 2...3 рази

### 3.1.4. Коефіцієнт сполучення постійного навантаження.

Постійне навантаження, наприклад, від покриттів будівель, є сумою декількох випадкових навантажень, врахування спільної дії яких представляє певний науковий і економічний інтерес.

Вирішення цього питання розпочнемо з систематизації переходу від розрахункових величин навантажень до їх числових характеристик. Розглянемо розрахункове навантаження  $X^P$ , що представляє собою суму  $n$  розрахункових навантажень  $X_i^P$ , які додаються з коефіцієнтами (частками у сумарному навантаженні)  $C_i$ , тобто

$$X_i^P = C_i X^P; \sum_{i=1}^n C_i = 1; X^P = \sum_{i=1}^n X_i^P = \sum_{i=1}^n C_i X^P. \quad (3.1)$$

Зв'яжемо розрахункове значення  $i$ -го навантаження з його статистичними характеристиками:



$$X_i^p = \bar{X}_i + \gamma_i \hat{X}_i = \bar{X}_i + \gamma_i V_i \bar{X}_i = \bar{X}_i (1 + \gamma_i V_i) = C_i X^p, \quad (3.2)$$

де  $\bar{X}_i$  – математичне очікування  $i$ -го навантаження;  $\hat{X}_i$  – середньоквадратичне відхилення (стандарт)  $i$ -го навантаження;  $V_i$  – коефіцієнт варіації  $i$ -го навантаження;  $\gamma_i$  – нормоване відхилення  $i$ -го розрахункового навантаження.

Одержаний вираз дозволяє визначити математичне очікування  $i$ -го навантаження:

$$\bar{X}_i = \frac{X_i^p}{1 + \gamma_i V_i} = \frac{C_i X^p}{1 + \gamma_i V_i}. \quad (3.3)$$

Середньоквадратичне відхилення  $i$ -го навантаження:

$$\hat{X}_i = \bar{X}_i V_i = \frac{C_i V_i X^p}{1 + \gamma_i V_i}. \quad (3.4)$$

Для навантаження, що є сумою випадкових навантажень, тобто  $\tilde{X}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i$ , числові характеристики в загальному випадку визначаються наступним чином:

$$\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n \bar{X}_i; \quad \hat{X}_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{X}_i^2}. \quad (3.5)$$

Підставляємо у формули (3.5) вирази (3.3) і (3.4) і одержуємо значення числових характеристик навантаження  $\tilde{X}_n$ :

а) математичне очікування:

$$\bar{X}_n = X^p \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{1 + \gamma_i V_i}; \quad (3.6)$$

б) стандарт

$$\hat{X}_n = X^p \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{C_i V_i}{1 + \gamma_i V_i} \right)^2}. \quad (3.7)$$

Визначивши розрахункове навантаження як  $X_n = \bar{X}_n + \gamma_n \hat{X}_n$ , одержуємо для коефіцієнту сполучення  $\psi = X_n / X^p$ :

$$\psi = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{1 + \gamma_i V_i} + \gamma_n \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{C_i V_i}{1 + \gamma_i V_i} \right)^2}. \quad (3.8)$$

Проведені розрахунки показують, що, зокрема, для багат шарових утеплених покрівель коефіцієнт сполучення може дорівнювати  $\psi = 0,90 \dots 0,95$ .

## 3.2. СНІГОВЕ НАВАНТАЖЕННЯ

**3.2.1. Опис снігового навантаження.** Сніговий покрив відіграє суттєву позитивну роль у житті людини.



**Рис. 3.2. Снігові заноси на дорогах**

Він має велике значення у формуванні кліматичного і гідрологічного режимів місцевостей. У той же час сильні снігопади порушують рух транспорту, блокують роботу міського господарства, ламають дерева, руйнують будівлі. Відомо, що

кожна зима приходить несподівано, і великі снігопади досить часто набувають катастрофічного характеру (рис. 3.2).

Особливу небезпеку складає сніговий покрив і його нерівномірні відкладення на дахах і покриттях будівель, де знаходиться велика кількість людей і дороге технологічне устаткування. Багатосніжні зими останніх років відмічені обваленнями покриттів різних будівель у ряді країн, що мали серйозні і навіть трагічні наслідки. Наведемо деякі приклади аварій, спричинених сніговими навантаженнями.

В січні 1987 р. у місті Запоріжжя (Україна) за одну ніч впали дахи на чотирьох заводах. Особливо багато клопоту доставила аварія на шихтовому дворі "Запоріжсталь" – падаючи, покрівля розбила мостові крани і перекрила шлях доставки металобрухту. Мартени виявилися на голодному пайку. Кожну добу "Запоріжсталь" недодавала 1000 тон продукції. Величезними збоями обернулися для багатьох одержувачів запорізького металу вказана аварія.



**Рис. 3.3. Обвалення покриття спортивного комплексу**  
( м. Бад-Райхенваль, Німеччина)

В січні 2006 р. у баварському містечку Бад-Райхенваль (Німеччина) рухнув дах спортивно-розважального комплексу, побудованого в 70-і роки. Ділянка плоского даху обвалилася на на

ковзанку, де у цей момент знаходилися не менше 50 чоловік, усі вони виявилися під уламками. Загинули 15 чоловік, у тому числі діти. Причина обвалення – півметровий шар снігу на даху (рис. 3.3).

Опис численних форс-мажорних ситуацій, пов'язаних зі снігопадами, вміщений у монографії [3].

Формування снігових опадів в атмосфері залежить від багатьох чинників, але головним чином від температури довкілля і наявності переохолодженої води. Утворення снігового покриву в Україні пов'язане із загальним сезонним пониженням температури повітря і ґрунту, а також з снігопадами, що викликаються вторгненням арктичних мас повітря і їх взаємодією з повітрям помірних широт. Середнє число днів з сніговим покривом на рівнинній частині України складає 30...100, на північному сході і в гірських районах Українських Карпат – 100...110, на заході України – менше 80, на Причорноморській низовині і в Степовому Криму – 30...40, на узбережжі – близько 20. У окремі зими відхилення від середнього може досягати великих значень. Так, на північному сході число днів з сніговим покривом може змінюватися від 40 до 160, а на півдні і заході – від 2 до 100 днів.

Регулярні спостереження за відкладеннями снігу, головним чином снігомірні зйомки, почали проводитися метеорологами з 1924 р (на території України працює близько 200 метеостанцій і понад 400 метеопостів). При цьому на досить великому майданчику, умови якого є характерними для певної території, виконується 100 вимірів висоти снігового покриву і відбирається 10 проб для визначення щільності снігу. Як правило, снігомірні зйомки виконуються в полі (місцевість, відкрита дії вітру), на лісовій поляні або в лісі під кронами дерев (місцевість, захищена від дії вітру). У місцевостях із стабільно негативними зимовими температурами повітря і стійким сніговим покривом снігомірні зйомки проводяться щодаки, а в районах з нестійким сніговим покривом (наприклад, на території України) – кожні 5 діб. Деякі метеостанції ведуть снігомірні зйомки в ярах і в гірській місцевості. Точність і об'єм наземних оцінок снігового покриву, особливо у важкодоступних районах, підвищується аерометадами, що включають аерофотозйомки і аеровізуальні спостереження. Важлива роль належить метеорологічним супутникам, які разом з

іншими метеорологічними елементами створюють картину розподілу снігового покриву у ряді районів світу, особливо в тих, де не робляться систематичні спостереження над сніговим покривом.

Багаторічні снігомірні спостереження дозволяють достовірно оцінити такий важливий для нормування снігового навантаження параметр, як *запас води* у сніговому покриві. У сучасній метеорології його прийнято виражати в міліметрах, він чисельно дорівнює еквівалентній товщині шару талої води. З урахуванням того, що щільність води дорівнює одиниці, від величини запасу води легко перейти до ваги снігового покриву на одиницю площі, тобто до нормативу, необхідного для розрахунку снігових навантажень ( $1\text{мм} = 1\text{ кгс/м}^2 = 10\text{ Па}$ ):

$$S = 0,01 \cdot h_B, \quad (3.9)$$

де  $S$  – снігове навантаження в кПа;  $h_B$  – середній по ділянці запас води в сніговому покриві, мм.

В попередні роки снігомірні спостереження включали виміри висоти снігового покриву і його щільності. У таких випадках снігове навантаження може бути визначене як добуток висоти снігового покриву та його об'ємної ваги (щільності):

$$S = 0,1 \cdot \rho \cdot h, \quad (3.10)$$

де  $S$  – снігове навантаження в кПа;  $\rho$  – щільність снігу в  $\text{г/см}^3$ ;  $h$  - висота снігового покриву в см.

Як вказувалося вище, залежно від кліматичних умов сніговий покрив може мати різну висоту і щільність як в просторі, так і в часі. Зокрема, параметри щільності снігового покриву мають істотний територіальний розкид для території України: середня щільність –  $0,200 \dots 0,267\text{ г/см}^3$ , коефіцієнт варіації  $V = 16 \dots 17\%$ , максимальна щільність  $0,270 \dots 0,700\text{ г/см}^3$ .

Отже, отримані за формулою (3.10) значення снігового навантаження можуть мати істотний розкид. Проте, на думку метеорологів, такий підхід дає досить інформативні результати і

дозволяє істотно продовжити кліматичні ряди спостережень за сніговим навантаженням.

**3.2.2. Нормування снігового навантаження.** Снігове навантаження є змінним, для якого встановлено три розрахункові значення: граничне, експлуатаційне та квазіпостійне розрахункові значення. З урахуванням розглянутих у монографії питань надійності, обмежимося розглядом *граничного розрахункового значення* снігового навантаження.

Це значення снігового навантаження на горизонтальну проекцію покриття (конструкції) обчислюється за формулою

$$S_m = \gamma_{fm} S_0 C, \quad (3.11)$$

де  $\gamma_{fm}$  – коефіцієнт надійності за граничним значенням снігового навантаженням;  $S_0$  – характеристичне значення снігового навантаження (в Па);  $C$  – коефіцієнт, що визначається за формулою (3.12).

*Характеристичне значення* снігового навантаження  $S_0$  (в Па) дорівнює вазі снігового покриву на 1 квадратний метр поверхні ґрунту, яке може бути перевищене у середньому один раз за 50 років. Характеристичне значення снігового навантаження  $S_0$  визначається залежно від снігового району (ДБН [1], карта *рис. 8.1* або за додатком Е) (*табл. 3.6*).

Відмітимо, що снігове районування території України згідно з ДБН [1] більш диференційоване у порівнянні зі СНиП [6] (шість районів замість трьох) і містить збільшені розрахункові значення снігового навантаження (в 1,5...2,0 рази).

**Таблиця 3.6**  
**Характеристичні значення снігового навантаження за ДБН [1]**

<i>Снігові райони</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>
<i>Характеристичне значення снігового навантаження <math>S_0</math>, КПа</i>	<i>0,80</i>	<i>1,00</i>	<i>1,20</i>	<i>1,40</i>	<i>1,60</i>	<i>1,80</i>

*Коефіцієнт C* визначається за формулою

$$C = \mu C_e C_{alt}, \quad (3.12)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт переходу від ваги снігового покриву на поверхні ґрунту до снігового навантаження на покрівлю;  $C_e$  – коефіцієнт, що враховує режим експлуатації покрівлі;  $C_{alt}$  – коефіцієнт географічної висоти.

*Коефіцієнт  $\mu$*  визначається за додатком Ж [1] залежно від форми покрівлі і схеми розподілу снігового навантаження,

*Коефіцієнт  $C_e$*  враховує вплив особливостей режиму експлуатації на накопичення снігу на покрівлі (очищення, танення тощо) і встановлюється завданням на проектування. При визначенні снігових навантажень для неутеплених покрівель цехів з підвищеною тепловіддачею при ухилах покрівлі понад 3% і забезпеченні належного відводу талої води слід приймати  $C_e = 0,8$ .

*Коефіцієнт  $C_{alt}$*  враховує висоту  $H$  (у кілометрах) розміщення будівельного об'єкта над рівнем моря і визначається за формулою

$$C_{alt} = 1,4H + 0,3 \text{ (при } H \geq 0,5 \text{ км); } C_{alt} = 1 \text{ (при } H < 0,5 \text{ км)} \quad (3.13)$$

*Коефіцієнт надійності  $\gamma_{fm}$*  за граничним розрахунковим значенням снігового навантаження визначається залежно від заданого середнього періоду повторюваності  $T$  за табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Значення коефіцієнту надійності  $\gamma_{fm}$ 

$T$ , роки	1	5	10	20	40	50	60	80	100	150	200	300	500
$\gamma_{fm}$	0,24	0,55	0,69	0,83	0,96	1,00	1,04	1,10	1,14	1,22	1,26	1,34	1,44

Проміжні значення коефіцієнта  $\gamma_{fm}$  слід визначати лінійною інтерполяцією.

Для об'єктів масового будівництва допускається середній період повторюваності  $T$  приймати таким, що дорівнює встановленому строку експлуатації конструкції  $T_{ef}$ .



Норми ДБН [1] допускають в необхідних випадках визначати значення снігового навантаження  $S_0$  шляхом статистичного оброблення результатів снігомірних зйомок.

**3.2.3. Імовірнісний опис снігового навантаження.** В якості вихідного статистичного матеріалу для опису снігового навантаження використовувалися результати регулярних снігозйомок тривалістю 15...40 років, отримані на 69 метеостанціях, у тому числі на 62 метеостанціях на території України [4]. Була обґрунтована можливість представлення снігового навантаження у формі квазістаціонарного випадкового процесу із річним періодом нестационарності [3,5].

Специфічним для річного циклу снігового навантаження є наявність на початку зими (нагромадження снігу) і наприкінці зими (танення снігу) невеликих перехідних нерегулярних ділянок. В основній же частині зими, від середньої дати початку  $t_{\Pi}$  до середньої дати кінця  $t_K$ , знаходиться найбільш важливий період стійкого снігового покриття з відносно високими значеннями навантаження, що представляють інтерес для розрахунку конструкцій. У межах  $t_3 = t_K - t_{\Pi}$  цього періоду простежується ряд описаних нижче закономірностей.

Річний тренд математичного очікування снігового навантаження описаний поліномом 3-го ступеня; коефіцієнт варіації, асиметрію й ексцес виявилось можливим приймати постійними в межах періоду стійкого снігового навантаження. На *рис. 3.4, а* показаний характер річного тренда математичного очікування і стандарту снігового навантаження для кожного району, описаного поліномом 3-го ступеня. Функції  $\bar{X}(t)$  і  $\hat{X}(t)$  являють собою несиметричні криві, заключені між датами  $t_{\Pi}$  й  $t_K$ , вершини яких приходяться на лютий. У *табл. 3.8* як розрахункові параметри враховані максимальні значення математичного очікування для  $t_0 = 165$  діб (15 лютого) і коефіцієнти варіації, які є загальними для всіх моделей снігового навантаження. Тому для визначення числового значення снігового навантаження, що має нормоване відхилення  $\gamma$ , використовується наступна відома залежність:



$$X = \bar{X} + \gamma\hat{X} = \bar{X}(1 + \gamma W),$$

де  $\bar{X}$  й  $V$  – розрахункові параметри з *табл. 3.8*.

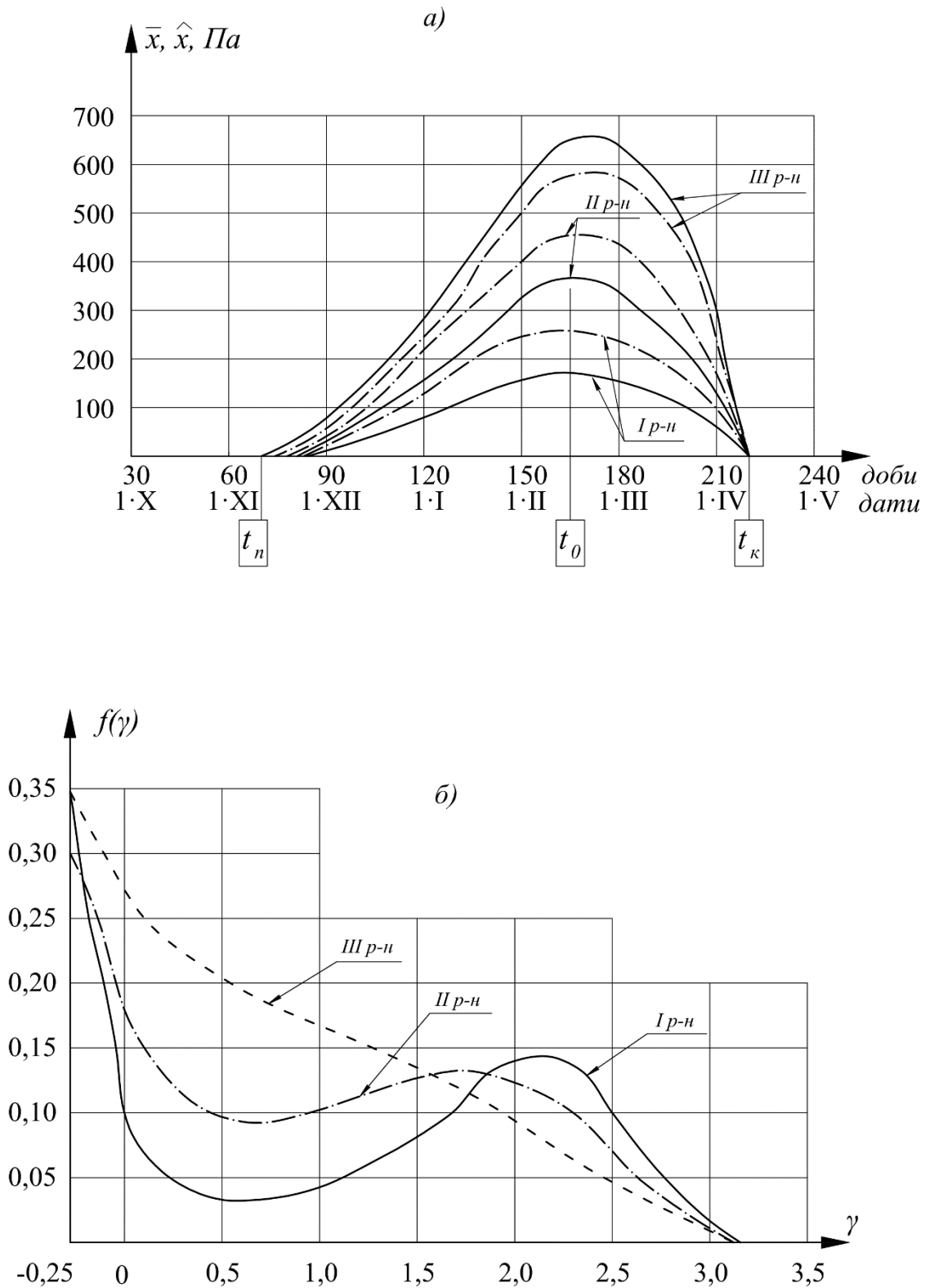
Для виявлення частотної структури снігового навантаження, для 10 метеостанцій, що відносяться до різних снігових районів, були побудовані послідовності оцінок нормованих кореляційних функцій при інтервалах від 10 до 40 діб, а також ефективних частот, визначених чисельним диференціюванням. Більшість цих послідовностей виявилася стаціонарною, що підтверджує **стаціонарність** випадкового процесу снігового навантаження по частоті й можливість прийняття постійних осереднених за часом НКФ і ефективних частот  $\omega$ .

Аналіз форми розподілів ординати випадкового процесу показав, що для снігового навантаження на території України характерна двумодальна форма, для якої непридатний нормальний закон, що задовільно описує навантаження багатосніжних районів. Тому був застосований розподіл наступного вигляду:

$$f(X) = \exp(C_0 + C_1X + C_2X^2 + C_3X^3). \quad (3.14)$$

Такі порівняно маловідомі розподіли, що характеризуються «мінімальною упередженістю» або максимумом ентропії, будемо надалі називати «експоненціальним з показником у вигляді полінома», або коротко – «поліномо-експоненціальним». Окремими випадками розподілу (3.14) є експоненціальний, нормальний, гамма-розподіл та ін.

Судячи зі степеня полінома, у наведеному розподілі не повинно бути більше двох мод, а підбір коефіцієнтів полінома виконується по оцінках математичного очікування, дисперсії, асиметрії й ексцесу, тобто по моментах 1...4-го порядків шляхом рішення системи нелінійних рівнянь. Розподіл (3.14) добре описує снігові й вітрові навантаження, а також їхні комбінації в задачах сполучення навантажень.



**Рис. 3.4.** До моделі снігового навантаження

а – тренд числових характеристик: позначення:

— математичне очікування, — · — стандарт;

б – нормовані розподіли ординатци

Недоліком розподілу (3.14) є трудомісткість підбору, незважаючи на застосування ЕОМ, особливо при деяких співвідношеннях оцінок моментів. Порівняння експериментальних і обчислених по описаній моделі частот викидів снігового навантаження (річних) показало їхню добру відповідність.

Перейдемо від звичайної форми щільності (3.14) (при врахуванні показника степеня, рівного 3) до нормованого виду, з огляду на  $f(X) = f(\gamma)/\hat{X}$ :

$$f(\gamma) = \exp(C_0 + C_1\gamma + C_2\gamma^2 + C_3\gamma^3). \quad (3.15)$$

Нормовані розподіли (3.15) для кожного району (див. коефіцієнти в *табл. 3.8*) залишаються постійними й не залежать від дати  $t$ . Таким чином, випадковий процес снігового навантаження є стаціонарним як по частоті, так і за нормованим законом розподілу ординати, одержаним при виділенні тренда. Нормовані розподіли, показані на *рис. 3.4, б*, мають специфічний двумодальний характер, виразний для I району й мало помітний для III району. Лівий (експонентний) пік кривих  $y$  на початку відліку навантаження відбиває відсутність снігового навантаження в окремі зимові періоди, що характерно для малосніжних і нестійких зим України. Друга вершина ("горб" кривої) визначається періодами стійкого снігового навантаження. На *рис. 3.4, б* наочно видна неможливість застосування нормального й інших простих законів для апроксимації дослідних розподілів снігового навантаження в малосніжних районах, зокрема, України.

Параметри імовірнісної снігової моделі були узагальнені для територіальних районів України (згідно з нормами [6]) і вміщені в *табл. 3.8*. Для представлення снігового навантаження у формі випадкового процесу в *табл. 3.8* включені середньорайонні ефективні частоти. В таблицю вміщені також коефіцієнти тренда  $K_{tr}$ , які обчислювалися на базі максимуму тренда й найбільшої частоти викидів при  $t_0 = 165$  діб. Величини  $K_{tr}$  при  $t = 1 \dots 50$  років перебувають у діапазоні 0,13...0,59. Використання  $K_{tr}$  дозволяє

застосовувати для опису квазістаціонарного випадкового процесу снігового навантаження залежності для стаціонарного процесу.

Таблиця 3.8

## Розрахункові випадкові параметри снігового навантаження

Представлення (модель) навантаження		Параметри					
		Найменування	Позначення	Розмірність	Числові значення для снігових районів України		
					I	II	III
Загальні параметри	Числові характеристики	Математичне очікування	$\bar{X}$	кПа	0,164	0,344	0,631
		Коефіцієнт варіації	V	-	1,60	1,26	0,92
	Розподіл (3.14)	Коефіцієнти полінома аргумента експоненти	$C_0$	-	-2,26543	-1,73623	-1,31299
			$C_1$	-	-3,88499	-1,92608	-0,72538
			$C_2$	-	3,85527	1,88519	0,44527
			$C_3$	-	-0,92030	-0,50588	-0,17771
		Коефіцієнт тренда	$K_{tr}$	-	0,132	0,180	0,229
Тривалість зими	$t_3$	доба	145	145	150		
Квазістаціонарний ВП	Ефективна частота	$\omega$	1/добу	0,141	0,095	0,073	

Враховуючи вираз (3.7) для щільності розподілу, одержуємо оцінку імовірності перевищення нормованого рівня  $\gamma$  снігового навантаження:

$$Q(t) = \frac{\omega t t_3 K_{tr}}{\sqrt{2\pi}} \exp(C_0 + C_1 \gamma + C_2 \gamma^2 + C_3 \gamma^3), \quad (3.16)$$

де  $\omega$  – ефективна частота випадкового процесу снігового навантаження (1/добу);  $t$  – час (у роках);  $t_3$  – тривалість зими (у добах);  $K_{tr}$  – коефіцієнт тренда.

Всі параметри формули (3.16) наведені в табл.3.8.

Якщо імовірність  $Q(t)$  (3.16) обчислюється для  $t = 1$  рік, то легко визначається період повторюваності  $T$  (у роках) навантаження, що має нормований рівень  $\gamma$ :

$$T = \frac{1}{Q(t=1 \text{ рік})}. \quad (3.17)$$

Продовжуючи вивчення снігового навантаження, в ПолтНТУ виконані дослідження відкладень снігу на покриттях з перепадами висот (дисертація Ю.В. Дрижирука), практичним результатом яких є обґрунтування зниженого коефіцієнту сполучень, що дорівнює 0,8 для снігових мішків на території України. Вплив теплотехнічних характеристик покриттів на величину снігового навантаження досліджений у дисертації І.В. Мольки, основні результати котрої наведено у формі диференційованого коефіцієнта експлуатації покриття  $C_e$ . Дисертація Н.М. Попович дозволила встановити розрахункові значення снігового навантаження на холодні покрівлі будівель з додатними внутрішніми температурами повітря.

### 3.3. ВІТРОВЕ НАВАНТАЖЕННЯ

**3.3.1. Опис вітрового навантаження.** Атмосферне повітря Землі знаходиться в постійному русі. Єдиним джерелом енергії, що викликає рух атмосфери, є Сонце. Нерівномірний нагрів поверхні Землі, яка, у свою чергу, нагріває повітря, створює різницю в атмосферному тиску. Холодне повітря щільніше, тому воно опускається вниз і створює зону високого тиску, тепле повітря, навпаки – менш щільне і, піднімаючись вгору, створює область низького тиску. *Вітер* – це рух повітря відносно земної поверхні з областей з високим тиском до ділянок з низьким тиском.

Системи формування погоди і вітрового клімату всього світу виникають в результаті спільної дії на атмосферу сонячної радіації і обертання Землі навколо Сонця. У загальній циркуляції атмосфери, при усій різноманітності її безперервних змін, є деякі стійкі особливості, що повторюються з року в рік. При цьому

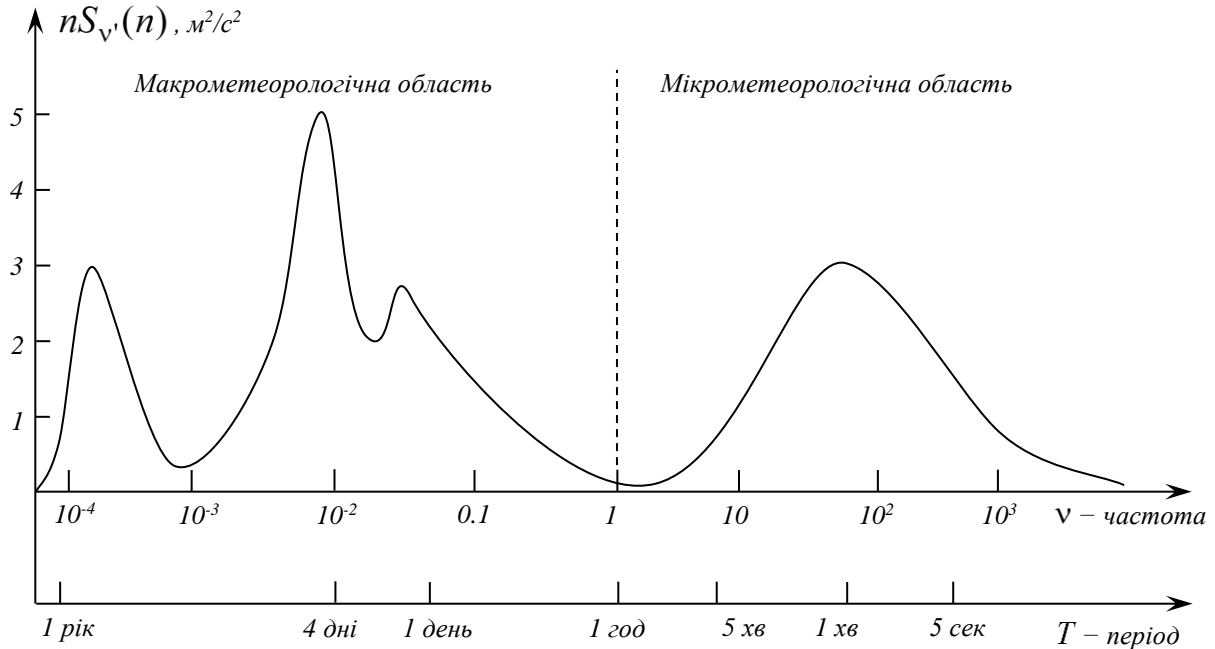
кожній ділянці планети властиві певні переважаючі (пануючі) вітри. Різноманітність проявів загальної циркуляції атмосфери особливо залежить від того, що в атмосфері постійно виникають величезні хвилі і вихори, що по-різному розвиваються і по-різному переміщуються. Це утворення атмосферних обурень – *циклонів і антициклонів* – є найхарактернішою рисою загальної циркуляції атмосфери. Від загальної циркуляції атмосфери відрізняють місцеві циркуляції, такі як бризи на узбережжях морів, гірсько-долинні вітри, льодовикові вітри та ін. Ці місцеві циркуляції в певних районах накладаються на течії загальної циркуляції.

Для точної оцінки вітрового навантаження потрібна достовірна інформація про характеристики вітру, таких як швидкість, напрям, частота появи вітру різної швидкості, розподіл швидкості по висоті, амплітуді і тривалості поривів тощо. Ця інформація одержується на основі спостережень за вітром та статистичної обробки даних 240 метеостанцій на території України. Прилади для виміру швидкості вітру на метеорологічних станціях встановлені на стандартній висоті 10 м від поверхні землі, спостереження проводяться 8 раз на добу з десятихвилинним усереднюванням. Таким чином, на вітчизняних метеостанціях робляться дискретні виміри, що дають інформацію про усереднені локальні параметри вітрової течії в місці розташування метеостанції, така ж ситуація має місце і за кордоном.

В якості первинних вимірювальних перетворювачів швидкості вітру використовуються механічні вимірювачі – анеморумбметри і флюгери Вільда (в якості резервних). Реєстрація вимірювальної інформації робиться як за допомогою аналогових реєстраторів (самописців, шлейфових осцилографів, відеомагнітофонів і магнітографів), так і з використанням цифрових систем збору і обробки інформації на основі спеціалізованих контролерів і персональних комп'ютерів. Статистична інформація щодо вітрового навантаження наводиться у метеорологічних довідниках і монографіях [5, 7].

Оскільки зміни швидкості і напрямку вітру в основному викликаються змінами температури, вітер має цикли, що відповідають річному, метеорологічному (тривалість близько чотирьох діб) і добовому циклам інсоляції. Це добре видно на

графіці спектральної щільності потужності швидкості вітру (енергетичного спектру пульсацій подовжньої компоненти швидкості вітру), отриманому Ван дер Ховеном [7] (рис.3.5).



**Рис. 3.5. Спектр пульсацій Ван дер Ховена**

Графік має два максимуми енергії:

а) лівий – синоптичний, з періодом четверо діб і частковими максимумами при  $T = 1$  рік і  $T = 10$  годин;

б) правий – турбулентний, з періодом  $T = 1$  хв., що викликається тертям потоку повітря об поверхню землі.

Між цими двома максимумами при  $T = 5$  годин...10 хв. спостерігається широкий мінімум, що називається спектральним "провалом". Така особливість вітрового спектру дозволяє:

а) розбити вітровий спектр на дві ділянки:

- мікрометеорологічний (високочастотний) з періодами в секундах і хвилинах;
- макрометеорологічний (низькочастотний) з періодами в десятки і сотні годин;

б) представити вітрове навантаження у вигляді двох складових:

- *статична (середня)* складова, що відповідає швидкості вітру, що в середньому встановилася;

- динамічна (пульсаційна) складова, залежна від пульсаційної (турбулентної) компоненти швидкості.

Наявність сили тертя у пограничному (приземному) шарі атмосфери призводить до того, що швидкість вітру змінюється з висотою. Нині існують дві пропозиції по опису залежності швидкості вітру від висоти, відомі як *логарифмічний* [1] і *степеневий* [6] закони.

Вертикальний профіль середньої швидкості вітру при логарифмічному законі записується у вигляді:

$$\frac{\bar{v}(z_2)}{\bar{v}(z_1)} = \frac{\ln(z_2/z_0)}{\ln(z_1/z_0)}, \quad (3.18)$$

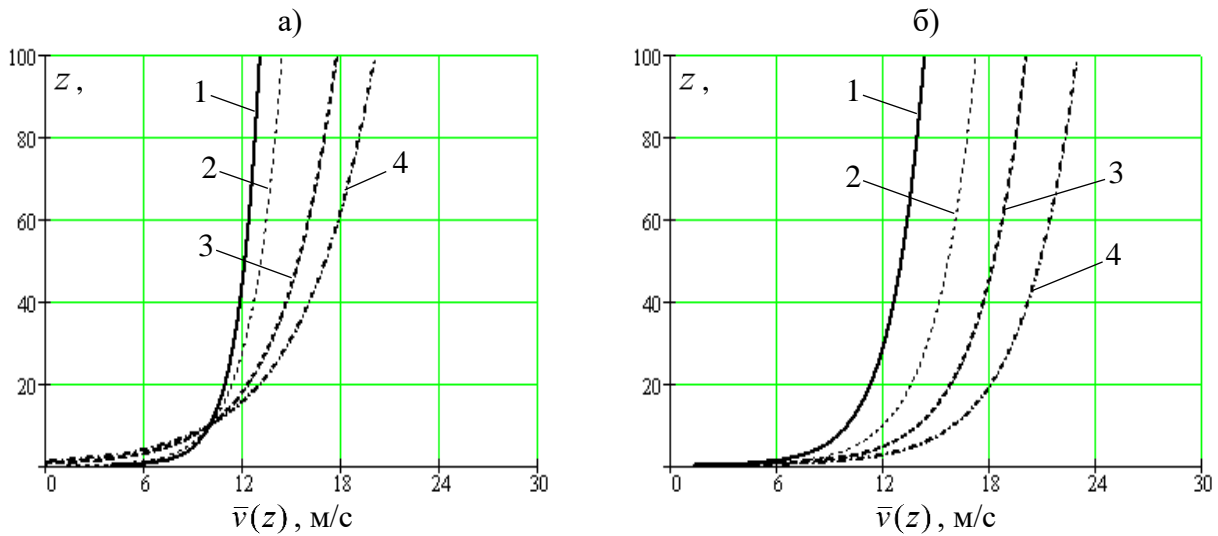
де  $\bar{v}(z_1)$  і  $\bar{v}(z_2)$  – середні швидкості вітру на висоті  $z_1$  і  $z_2$  відповідно;  $z_0$  – параметр шорсткості підстеляючої поверхні, пропорційний середньому розміру нерівностей, що височіють над підстеляючою поверхнею, причому швидкість вітру на висоті  $z_0$  дорівнює нулю. Значення  $z_0$  для різних типів поверхонь знаходяться в широкому інтервалі від 0,003 см (поверхня моря) до 300 см (центри великих міст) [8].

Графічна інтерпретація формули (3.18) наведена на *рис. 3.6* при варіюванні  $\bar{v}_{10}$  і  $z_0$  [7].

Сепеневий закон найбільше поширення отримав в країнах Східної Європи, зокрема, він описує вертикальний профіль швидкості і швидкісного натиску вітру в СНиП [6].

Висновок про те, який закон краще відповідає експериментальним даним, не має однозначної відповіді. У кожному окремому випадку, для конкретної місцевості і заданого інтервалу висот задовільний опис вертикального профілю швидкості вітру може бути досягнутий як на основі логарифмічного, так і на основі степеневого закону. Проте у зв'язку з використанням нормами Єврокоду логарифмічного закону, а також переходом до цього закону українських норм [1], можна вважати обґрунтованим використання саме логарифмічного закону в практиці будівельного проектування.





**Рис. 3.6. Вертикальні профілі швидкості вітру при логарифмічному законі**

а) для різних типів підстеляючої поверхні (при  $\bar{v}_{10} = 10$  м/с):

1 –  $z_0 = 0,005$  м; 2 –  $z_0 = 0,05$  м; 3 –  $z_0 = 0,5$  м; 4 –  $z_0 = 1,0$  м;

б) для різних швидкостей вітру (при  $z_0 = 0,05$  м):

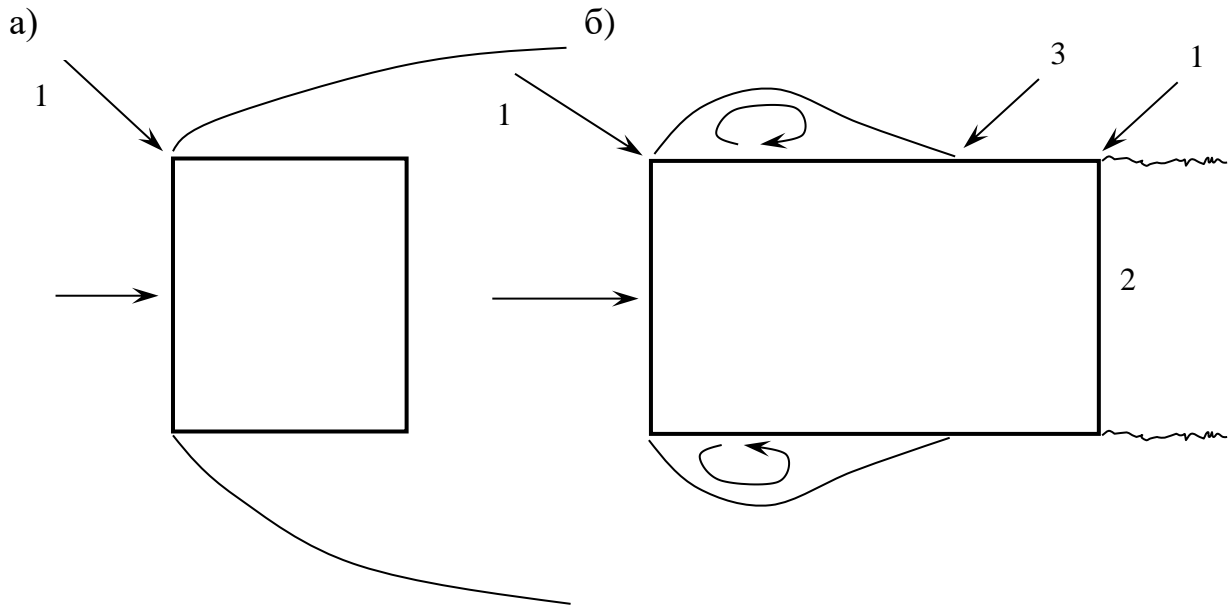
1 –  $\bar{v}_{10} = 10$  м/с; 2 –  $\bar{v}_{10} = 12$  м/с; 3 –  $\bar{v}_{10} = 14$  м/с; 4 –  $\bar{v}_{10} = 16$  м/с

Опис впливу вітру на споруди включає питання будівельної аеродинаміки, основними завданнями якої є визначення сил, що діють на обтічне повітрям тіло, розподіл тиску на його поверхні і швидкостей в повітрі, його оточуючому. Аеродинаміка будівель і споруд відноситься до аеродинаміки поганооптічних (російський термін – «плохообтекаемых») тіл. При їх розгляді використовується універсальний параметр – число Рейнольдса:

$$Re = \frac{vL}{\nu}, \quad (3.19)$$

де  $v$  – характерна швидкість потоку;  $L$  – характерний розмір потоку;  $\nu$  – кінематична в'язкість повітря. Для повітря при нормальному атмосферному тиску і температурі  $20^\circ \text{C}$   $\nu = 1.512 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Поганооптічні тіла, особливо трикутні, квадратні, прямокутні і інші призми правильної і неправильної геометричної форми, викликають явища зриву вихорів [8].



**Рис. 3.7. Обтікання квадратної (а) і прямокутної (б) перешкод:**  
1 – відрив; 2 – спутний струмінь; 3 – повторне з'єднання

На результуючий спутний струмінь впливає не лише поганооптічна лобова поверхня тіла, але також довжина тіла у напрямі течії і його загальна форма. При порівнянні обтікання квадратних і прямокутних призм (рис. 3.7) видно, що квадратний поперечний переріз (при досить великому  $Re$ ) викликає відрив потоку, що супроводжується появою широкого турбулентного спутного струменя, тоді як при більше витягнутій прямокутній формі (залежно від відношення довжини до ширини) відрив потоку може статися в передніх кутах, за ним вниз за течією слідує відновлення безвідривного обтікання і ще один відрив потоку на задній кромці.

**3.3.2. Нормування вітрового навантаження.** Вітрове навантаження є змінним навантаженням, для якого встановлені два розрахункові значення: граничне і експлуатаційне розрахункове значення. Зважаючи на поставлені у монографії питання надійності, обмежимося розглядом *граничного розрахункового значення* вітрового навантаження.

Це значення вітрового навантаження визначається за формулою

$$W_m = \gamma_{fm} W_0 C, \quad (3.20)$$

де  $\gamma_{fm}$  – коефіцієнт надійності за граничним розрахунковим значенням вітрового навантаження;

$W_0$  – характеристичне значення вітрового тиску (в Па);

$C$  – коефіцієнт, що визначається за формулою (3.21).

Характеристичне значення вітрового тиску  $W_0$  дорівнює середній (статичній) складовій тиску вітру на висоті 10 м над поверхнею землі, який може бути перевищений у середньому один раз за 50 років. Характеристичне значення вітрового тиску  $W_0$  визначається залежно від вітрового району за ДБН [1] (карта *рис. 9.1* або за додатком Е) (*табл. 3.9*).

**Таблиця 3.9**

**Характеристичні значення вітрового навантаження за ДБН [1]**

<i>Вітрові райони</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>Характеристичне значення в вітрового навантаження <math>W_0</math>, КПа</i>	<i>0,40</i>	<i>0,45</i>	<i>0,50</i>	<i>0,55</i>	<i>0,60</i>

Відмітимо, що вітрове районування території України згідно з ДБН [1] враховує значну територіальну мінливість вітрового навантаження, що помітно відрізняється від його занадто узагальненого нормування за СНиП [6], згідно з якими практично уся територія України відносилася до II-го (нормативне навантаження  $W_0 = 0,3$  кПа, розрахункове 0,42 кПа) і III-го ( $W_0 = 0,38$  кПа, розрахункове 0,53 кПа) вітрових районів. Більш детальне територіальне районування України по характеристичним значенням вітрового навантаження включає п'ять територіальних районів з розрахунковими характеристичними значеннями від 0,4 до 0,6 кПа. Найменші значення вітрового навантаження спостерігаються в центральних і північно-західних районах України, а також в Закарпатті. Великі вітрові навантаження реалізуються в Карпатах, Прикарпатті і в приморських районах.

Порівняння вітрового районування за ДБН [1] зі СНиП [6] виявляє порівняно невелику різницю розрахункових швидкісних

тисків. Для центральних областей, Криму, Львова, Одеси, Херсона і Луганська вітрове навантаження менше, ніж в нормах СНиП. У Приазов'ї, навпаки, вітрове навантаження набагато вище. В середньому по Україні районування за ДБН [1] знижує вітрове навантаження на 4 %. При цьому для 34 % пунктів спостереження вітрове навантаження знижене на 15...25%, а для 12 % пунктів – підвищене на 25...65% [5].

*Коефіцієнт  $C$*  визначається за формулою

$$C = C_{aer} C_h C_{alt} C_{rel} C_{dir} C_d, \quad (3.21)$$

де  $C_{aer}$  – аеродинамічний коефіцієнт;  $C_h$  – коефіцієнт висоти споруди;  $C_{alt}$  – коефіцієнт географічної висоти;  $C_{rel}$  – коефіцієнт рельєфу;  $C_{dir}$  – коефіцієнт напрямку;  $C_d$  – коефіцієнт динамічності.

*Аеродинамічні коефіцієнти  $C_{aer}$*  враховують характер обдування споруд вітром і визначаються залежно від форми споруди або конструктивного елемента за додатком І [1].

*Коефіцієнт висоти споруди  $C_h$*  враховує збільшення вітрового навантаження з висотою. Коефіцієнт  $C_h$  враховує висоту споруди або її частини, що розглядається, над поверхнею землі та тип навколишньої місцевості. Типи місцевості, що оточує будівлю чи споруду, визначаються для кожного розрахункового напрямку вітру окремо:

I – відкриті поверхні морів, озер, а також плоскі рівнини без перешкод, що піддаються дії вітру на ділянці довжиною не менш як 3 км;

II – сільська місцевість з огорожами (парканами), невеликими спорудами, будинками і деревами;

III – приміські і промислові зони, протяжні лісові масиви;

IV – міські території, на яких принаймні 15% поверхні зайняті будівлями, що мають середню висоту понад 15 м.

*Коефіцієнт географічної висоти  $C_{alt}$*  враховує висоту  $H$  (в кілометрах) розміщення будівельного об'єкта над рівнем моря і обчислюється за формулою

$$C_{alt} = 2H \quad (H > 0,5 \text{ км}); \quad C_{alt} = 1 \quad (H \leq 0,5 \text{ км}). \quad (3.22)$$

*Коефіцієнт рельєфу  $C_{rel}$*  враховує мікрорельєф місцевості поблизу площадки розташування будівельного об'єкта і приймається таким, що дорівнює одиниці, за винятком випадків, коли об'єкт будівництва розташований на пагорбі або схилі. В цих випадках швидкість вітру може збільшуватися.

*Коефіцієнт напрямку  $C_{dir}$*  враховує нерівномірність вітрового навантаження за напрямками вітру і, як правило, приймається таким, що дорівнює одиниці. Значення  $C_{dir}$ , що відрізняється від одиниці, допускається враховувати при спеціальному обґрунтуванні тільки для відкритої рівнинної місцевості та при наявності достатніх статистичних даних.

*Коефіцієнт динамічності  $C_d$*  враховує вплив пульсаційної складової вітрового навантаження і просторову кореляцію вітрового тиску на споруду. Для будівель і споруд, старший період коливань яких не перевищує 0,25 сек,  $C_d = 1$ . Для основних типів будівель і споруд, старший період коливань яких перевищує 0,25 сек, значення  $C_d$  визначаються за графіками, наведеним в ДБН (рис. 9.5...9.10 [1]).

*Коефіцієнт надійності  $\gamma_{fm}$*  за граничним розрахунковим значенням вітрового навантаження визначається залежно від заданого середнього періоду повторюваності  $T$  за табл. 3.10.

Таблиця 3.10

Значення коефіцієнту надійності  $\gamma_{fm}$ 

<i>T, ро-ків</i>	5	10	15	25	40	50	70	100	150	200	300	500
$\gamma_{fm}$	0,55	0,69	0,77	0,87	0,96	1,00	1,07	1,14	1,22	1,28	1,35	1,45

Для об'єктів масового будівництва допускається середній період повторюваності  $T$  приймати таким, що дорівнює встановленому терміну експлуатації конструкції  $T_{ef}$ .

В необхідних випадках  $W_0$  допускається визначати шляхом статистичного оброблення результатів строкових вимірювань швидкості вітру.

**3.3.3. Імовірнісний опис середньої складової вітрового навантаження.** Результати імовірнісного дослідження цієї складової вітрового навантаження детально викладені в

монографіях [5,7]. В якості вихідної інформації для імовірнісного опису були зібрані дані 77 метеостанцій України й додатково для порівняння 10 метеостанцій інших країн СНД.

Від значень швидкості вітру здійснювався перехід до вітрового тиску  $w_0$  за формулою Бернуллі з умови, що вся кінетична енергія вітру переходить в енергію вітрового напору:

$$w_0 = 0,61v_0^2, \quad (3.23)$$

де  $v_0$  – швидкість вітру на рівні 10 м над поверхнею землі для відкритої місцевості, що визначається при 10-хвилинному інтервалі осереднення й перевищується в середньому раз в  $T = 50$  років.

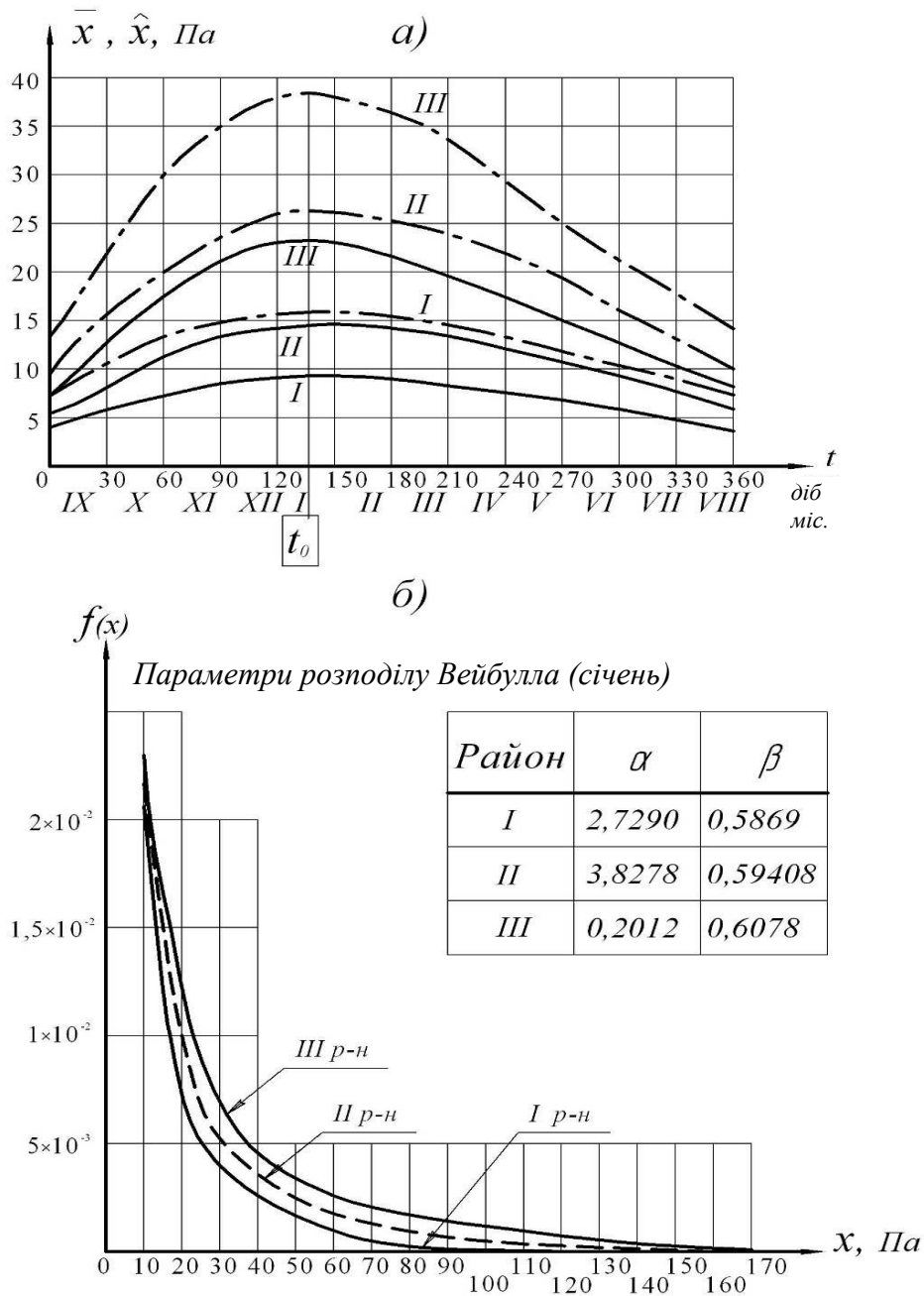
Розподіл Вейбулла, який добре описує дослідні дані, було використано для імовірнісного опису вітрового навантаження (п. 2.2.2).

Аналіз стохастичної природи вітрового навантаження дозволив представити його у вигляді квазістаціонарного випадкового процесу з відносно повільно мінливими протягом річного циклу числовими характеристиками й розподілом ординати, з постійною частотною структурою [9]. Сезонні зміни математичного очікування вітрового навантаження протягом року описуються алгебраїчним поліномом 3-го ступеня, середньорайонні коефіцієнти варіації й асиметрії – виявилися постійними для території України. Характер річного тренда математичного очікування  $\bar{X}$  й стандарту  $\hat{X}$  середньорайонних вітрових навантажень ілюструється *рис. 3.8, а*. Тут видно, що функції  $\bar{X}(t)$  і  $\hat{X}(t)$  являють собою порівняно невисокі плавні криві з вершиною, що приходить на зимові місяці.

Було виявлено, що місячні оцінки НКФ становлять стаціонарні послідовності і не залежать від пори року, а саме вітрове навантаження є стаціонарним за частотною структурою і постійною ефективною частотою  $\omega$ .

Випадковий процес вітрового навантаження виявився стаціонарним не тільки по частоті, але й по нормованому розподілу при виключенні тренда. Характер підібраних розподілів

Вейбулла ілюструється *рис. 3.8, б*, вони мають експоненційну форму, як і повинно бути при  $0 < \beta < 1$ .



**Рис. 3.8.** До моделі вітрового навантаження

а – тренд числових характеристик:

— математичне очікування; - - - стандарт

б – розподіл Вейбулла для ординати (для січня)

Для можливості подальших перетворень, приведемо розподіл Вейбулла (п. 2.2.2) до нормованого вигляду. Помітимо,

що аргумент  $X$  може бути виражений через стандарт, коефіцієнт варіації  $V$  й нормоване відхилення  $\gamma$  як  $X = \hat{X}(\gamma V + 1) / V$ . З урахуванням цього, а також співвідношення для параметра масштабу  $\alpha$ , одержуємо для інтегральної й диференціальної функцій розподілу Вейбулла наступні вирази:

$$F(\gamma) = 1 - \exp\left\{-\left[(\gamma V + 1)\Gamma(1 + \beta^{-1})\right]^\beta\right\}, \quad (3.24)$$

$$f(\gamma) = \beta V \Gamma(1 + \beta^{-1})^\beta (\gamma V + 1)^{\beta-1} \exp\left\{-\left[(\gamma V + 1)\Gamma(1 + \beta^{-1})\right]^\beta\right\} \quad (3.25)$$

Як видно з останньої формули, при постійному коефіцієнті варіації нормована щільність залишається постійною.

Формула для частоти викидів стаціонарного ВП за нормований рівень  $\gamma$  при розподілі Вейбулла має наступний вигляд:

$$v_+(\gamma) = 0.4\omega\beta\sqrt{V}\Gamma^\beta(\gamma V + 1)^{\beta-0.5} \exp\left\{-\left[(\gamma V + 1)\Gamma\right]^\beta\right\}. \quad (3.26)$$

У даному виразі для компактності опущений аргумент гамма-функції  $\Gamma(1 + \beta^{-1})$ .

Для квазістаціонарного ВП вітрового навантаження, як і раніше для снігового навантаження, вводиться коефіцієнт тренда  $K_{tr}$ , що дорівнює відношенню числа викидів квазістаціонарного ВП за час  $t_1$  до числа викидів за цей ж час стаціонарного ВП, що відповідає  $t_0$  – вершині тренда, тому  $K_{tr} < 1$ :

$$K_{tr} = \int_0^{t_1} v_+(X, t) dt / [v_+(X, t_0)t_1]. \quad (3.27)$$

Використання  $K_{tr}$  дозволяє застосовувати для квазістаціонарного ВП вітрового навантаження замкнуті формули



стаціонарного ВП. Числові значення коефіцієнту тренда знаходяться у відносно вузькому інтервалі  $K_{tr} = 0,35 \dots 0,52$  в залежності від рівня навантаження різного періоду повторюваності. Подальше спрощення досягається виділенням наступного параметра:

$$\delta = -\ln[0.4\beta\sqrt{V}\Gamma^\beta] - (\beta - 0.5)\ln(\gamma V + 1). \quad (3.28)$$

Тут перший доданок постійний для кожного з вітрових районів, а другий доданок укладається у вузьких межах  $0,2 \dots 0,4$  для всього діапазону досліджуваних вітрових навантажень. Підставляючи  $\delta$  й  $K_{tr}$  в (3.18), одержуємо оцінку імовірності перевищення нормованого рівня  $\gamma$  вітрового навантаження у наступній лаконічній формі [10]:

$$Q(t) = v_+(\gamma)t = \omega t K_{tr} \exp\left(-[(\gamma V + 1)\Gamma]^\beta - \delta\right). \quad (3.29)$$

В окремому випадку, коли  $t = 1$  рік, період повторюваності вітрового навантаження, що має нормований рівень  $\gamma$ , може визначатися за наведеною вище формулою (3.17).

На основі викладених положень з використанням узагальнених дослідних даних обґрунтовані розрахункові параметри імовірнісної моделі вітрового навантаження, які наведені в *табл. 3.10*, куди включені максимальні значення математичного сподівання  $\bar{X}$  для  $t_0 = 135$  діб (місяць січень) і коефіцієнти варіації  $V$ . У *табл. 3.11* включені також середньорайонні значення  $\beta$  й  $\Gamma(1 + \beta^{-1})$ , які разом з параметром  $V$  повністю визначають розподіл ординати для випадкового процесу й інших моделей. Для моделі квазістаціонарного випадкового процесу в *табл. 3.11* включені середнерайонні ефективні частоти  $\omega$  та коефіцієнти тренда  $K_{tr}$ .

**Таблиця 3.11**

**Розрахункові параметри вітрового навантаження**

<i>Представлення (модель) навантаження</i>		<i>Параметри</i>					
		<i>Найменування</i>	<i>Позначення</i>	<i>Розмірність</i>	<i>Числові значення для вітрових районів України</i>		
					<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
<i>Загальні параметри</i>	<i>Числові характеристики</i>	<i>Математичне сподівання</i>	$\bar{X}$	<i>кПа</i>	$8,6 \cdot 10^{-3}$	$1,46 \cdot 10^{-2}$	$2,23 \cdot 10^{-2}$
		<i>Коефіцієнт варіації</i>	$V$	–	1,81	1,78	1,73
	<i>Розподіл Вейбулла</i>	<i>Параметр форми</i>	$\beta$	–	0,5862	0,5941	0,6078
		<i>Гамма-функція</i>	$\Gamma^\beta$	–	1,55185	1,52435	1,47969
<i>Квазістаціонарний ВП</i>	<i>Ефективна частота</i>	$\omega$	<i>1/добу</i>	6,58	5,16	5,42	
	<i>Коефіцієнт тренда</i>	$K_{tr}$	–	0,52	0,49	0,44	
	<i>Числовий параметр</i>	$\delta$	-	0,66	0,65	0,62	

### 3.4. КРАНОВЕ НАВАНТАЖЕННЯ

Технологічний процес більшості виробничих підприємств пов'язаний з необхідністю механізувати операції по вертикальному й горизонтальному транспортуванню вантажів. Цю механізацію разом з іншими транспортними засобами здійснюють за допомогою мостових (опорних) і підвісних кранів.

**3.4.1. Класифікація мостових кранів.** Мостові крани поділяються:

- за способом підвісу вантажу – крани з гнучким та жорстким підвісом вантажу;
- за приводом механізму руху моста крану – крани з центральним та роздільним приводом.

Залежно від призначення мостові крани поділяються на наступні основні групи:

- крани загального призначення: ручні крюкові однобалочні і двохбалочні крани; електричні крюкові однобалочні і двохбалочні крани (чотириколісні); електричні крюкові великої вантажопідйомності (багатоколісні);
- спеціальні крани: магнітні крани; грейферні крани;
- металургійні крани: мульті-завалочні крани; ливарні крани; крани для роздягання зливків (стрипер-крани); колодязні крани; кувальні крани; крани прокатних цехів

Більш детальний опис мостових кранів різного призначення наводиться у монографії [11].

**3.4.2. Режими роботи кранів.** Основними параметрами мостових кранів, що впливають на створювані ними навантаження, є вантажопідйомність, проліт, вид приводів, спосіб підвісу вантажів і група режимів їх роботи. Група режиму роботи кранів (1К – 8К) визначається залежно від класу використання і класу навантаження.

Клас використання крану визначається залежно від числа циклів роботи крану за термін його служби. Термін служби кранів встановлюється в стандартах або технічних умовах на крани конкретних видів.

Клас навантаження крану визначається залежно від коефіцієнту навантаження, при визначенні якого враховується маса вантажу, переміщуваного краном; кількість циклів роботи крану з вантажем; кількість циклів роботи крану за термін його служби,

За відсутності у паспорті крану даних про групу режиму роботи, а також за відсутності вихідних даних, необхідних для визначення класу навантаження і коефіцієнту використання, групу режиму допускається визначати за даними рекомендованого переліку кранів, який наводиться в додатку до нормативних документів Наведемо тут класифікацію кранів (табл. 3.12) за групами режимів роботи, що міститься в чинних нормах проектування [1].

Таблиця 3.12

## Мостові та підвісні крани (приблизний перелік, додаток Г [1])

<i>Крани</i>	<i>Умови використання</i>	<i>Групи режимів роботи</i>
<i>Ручні усіх видів</i>	<i>Будь-які</i>	<i>1К-3К</i>
<i>З привідними підвісними талями, у тому числі з навісними захватами</i>	<i>Ремонтні і перевантажувальні роботи обмеженої інтенсивності</i>	
<i>З лебідочними вантажними візками, у тому числі з навісними захватами</i>	<i>Машинні зали електростанцій, монтажні роботи, перевантажувальні роботи обмеженої інтенсивності</i>	
<i>З лебідочними вантажними візками, у тому числі з навісними захватами</i>	<i>Перевантажувальні роботи середньої інтенсивності, технологічні роботи в механічних цехах, склади готових виробів підприємств будівельних матеріалів, склади металозбуту</i>	<i>4К-6К</i>
<i>Грейферні, магнітно-грейферні</i>	<i>Змішані склади, робота з різноманітними вантажами</i>	
<i>Магнітні</i>	<i>Склади напівфабрикатів, робота з різноманітними вантажами</i>	
<i>Гартівні, кувальні, штирбові, ливарні</i>	<i>Цехи металургійних підприємств</i>	<i>7К</i>
<i>З лебідочними вантажними візками, у тому числі з навісними захватами</i>	<i>Технологічні крани при цілодобовій роботі</i>	
<i>Траверсні, мультдогрейферні, мультдозавальні, для роздягання зливків, копрові, вагранкові, колодязні</i>	<i>Цехи металургійних підприємств</i>	<i>8К</i>
<i>Магнітні</i>	<i>Цехи і склади металургійних підприємств, великі металобазис з однорідними вантажами</i>	
<i>З грейферами двоканатного типу, магнітно-грейферні</i>	<i>Склади насипних вантажів і металобрухту з однорідними вантажами (при цілодобовій роботі)</i>	

### 3.4.3. Особливості навантажень мостових кранів

#### *Вихідна інформація щодо кранових навантажень.*

Вивчення навантажень кранів включає, передусім, експериментальні дослідження, які повинні виконуватися переважно в умовах нормальної експлуатації діючих цехів. Тому отримання і накопичення експериментальних даних по навантаженнях кранів є завданням великої трудомісткості. Велику роль тут відіграють такі специфічні чинники, як безперервна робота мостових і підвісних кранів, великі динамічні дії від переміщення візків і мостів крану по рейках, магнітні поля на кранах, високі температурні дії та ін. Натурні дослідження виявили ряд суттєвих особливостей кранових навантажень, які описуються нижче.

***Нерівномірність тиску колес кранів.*** Експерименти показують, що фактичні вертикальні тиски на окремі колеса кранів можуть суттєво відрізнятись від паспортних значень. Це є наслідком того, що мостовий кран являє собою статично невизначену просторову систему, що має у вертикальному напрямі досить велику жорсткість. Тому, наприклад, реальний 4-колісний кран при русі по реальним коліям в окремі моменти може спиратися на рейки у трьох і навіть у двох точках (що розміщені по діагоналі моста). Внаслідок цього навантаження вертикальні навантаження на колеса мостових кранів можуть суттєво змінюватися як у бік збільшення, так і зменшення.

Причинами такого ефекту є можливий перекис конструкції крана, допущений при його виготовленні та монтажі, прогини підкранових балок, деформації колон і основ фундаментів і головним чином – нерівності кранових колій, масові у реальних умовах експлуатації. В певній мірі такі нерівності допускаються нормами монтажу і експлуатації: допускається різниця відміток головок кранових рейок в одному створі колон 15...25 мм, на сусідніх колонах – 10...20 мм, ухили колій 1/1000. Однак натурні обстеження кранових колій діючих промислових будівель виявили значно більші поздовжні ухили, відхилення по вертикалі від проектного положення і різниці відміток колій у поперечному напрямі до 50...100 мм. Була обґрунтована пропозиція враховувати цю особливість шляхом множення тиску колеса

мостового крана на коефіцієнт нерівномірності, який знаходиться в інтервалі  $\gamma_H = 1,1 \dots 1,3$  для кранів різної вантажопідйомності.

**Динамічний характер кранових навантажень.** Крім статичного впливу, робота кранів спричиняє коливання і відповідні динамічні зусилля підтримуючих конструкцій. Динамічний ефект від кранового навантаження створюється в основному ударним впливом колес крана при його русі по коліям з нерівностями. Деякий вплив може спричинити обертання невривноважених частин механізмів крана. Експериментальні значення загального коефіцієнту динамічності  $k_d = 1,0 \dots 1,2$  не відрізняються суттєво від величин, що нормуються ДБН.

Слід також розглядати динамічний вплив окремих кранових колес, який враховується місцевим динамічним коефіцієнтом, значення якого для кранів різного призначення знаходяться в інтервалі  $k_{d,loc} = 1,0 \dots 1,5$ .

**Природа горизонтальних кранових навантажень** [11]. Як показали численні експериментальні дослідження, основну частку (порядку 70...90 %) поперечних навантажень всіх без винятку мостових кранів складають **бічні сили**. За фізичною природою – це сили тертя, що виникають при поперечному ковзанню колес при русі крана. Це поперечне ковзання є результатом неспівпадіння площини обертання колеса крана з напрямом його руху, тобто перекосу колеса на кут  $\gamma$ . Перекоси колес характерні для будь-яких мостових кранів, що рухаються по реальним крановим коліям. Вони мають взагалі постійний характер, оскільки їх викликають численні причини, зокрема:

- перекіс моста при його русі;
- непаралельність кранових колій;
- неточність встановлення і нерівномірне зношення ходових колес;
- різний коефіцієнт тертя кранових колій внаслідок нерівномірного змащування колій мазутом і мастилом, наявності на рейках води і льоду, забруднення колій тощо;
- податливість вузлових з'єднань моста крана;
- несправності механізму руху моста крана тощо.

Одержані експериментально значення бічних сил чотириколісних кранів приблизно у 2...5 разів більше гальмівних сил за нормами СНиП [6]. Тому можна стверджувати, що норми, що діяли в Україні раніше, суттєво занижували горизонтальні навантаження чотириколісних кранів, особливо для кранів груп режимів 1К...4К.

**3.4.4. Нормування кранових навантажень.** Кранові навантаження поділяються на вертикальні, горизонтальні поперечні і горизонтальні поздовжні. Згідно норм ДБН [1], навантаження від мостових і підвісних кранів – це змінні навантаження, для яких встановлено чотири види розрахункових значень:

- граничні розрахункові значення (використовуються для перевірки міцності конструкцій);
- експлуатаційні розрахункові значення (застосовуються для перевірки жорсткості (прогинів) конструкцій);
- циклічні розрахункові значення (фігурують у перевірці підкранових конструкцій на втому);
- квазіпостійні розрахункові значення (є складовими перевірки конструкцій на повзучість).

**Граничні розрахункові значення вертикального кранового навантаження** для мостових і підвісних кранів визначаються за формулою:

$$F_m = \gamma_{fm} \psi F_0, \quad (3.30)$$

де  $\gamma_{fm}$  – коефіцієнт надійності за граничним розрахунковим значенням кранового навантаження (за *табл. 3.13*);  $F_0$  – характеристичне значення вертикального навантаження від **двох найбільш несприятливих за впливом кранів**;  $\psi$  – коефіцієнт сполучень кранових навантажень.

Характеристичні значення вертикального тиску на колесо крана можуть бути визначені за наступними формулами (*рис.3.9*):

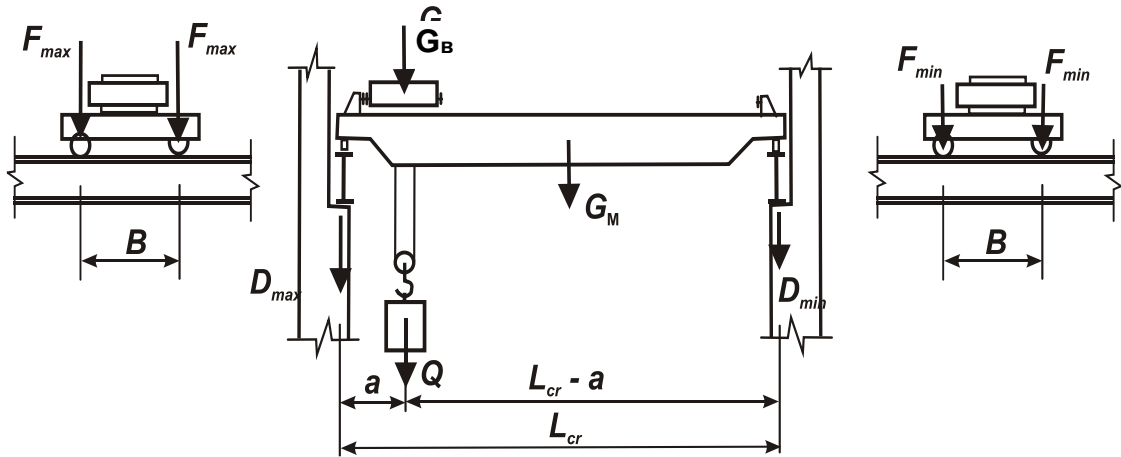


Рис. 3.9. До визначення тиску на колеса мостового крана

а) максимальний тиск на колесо на боці крана, до якого максимально наближений візок з вантажем

$$F_{max}^n = \left[ \frac{G_M}{2} + \frac{(Q + G_B)(L_{cr} - a)}{L_{cr}} \right] \frac{1}{n_0}, \quad (3.31)$$

де  $Q$  – вантажопідйомність крана,  $G_M$  – вага моста крана,  $G_B$  – вага візка крана,  $L_{cr}$  – проліт крана,  $a$  – мінімальне наближення гака крана до осі кранової рейки,  $n_0$  – кількість колес з одного боку крана;

б) мінімальний тиск на колесо на протилежному боці крана

$$F_{min}^n = \left[ \frac{G_M}{2} + \frac{(Q + G_B)a}{L_{cr}} \right] \frac{1}{n_0}. \quad (3.32)$$

З урахуванням приведених у формулі (3.22) коефіцієнтів граничні розрахункові значення вертикальних навантажень, наприклад, на поперечну раму ОВБ визначаються як

$$D_{max} = \gamma_{fm} \psi F_{0max} + G_{nk} = \gamma_{fm} \psi F_{max}^n \sum_{i=1}^n y_i + G_{nk};$$

$$D_{min} = \gamma_{fm} \psi F_{0min} + G_{nk} = \gamma_{fm} \psi F_{min}^n \sum_{i=1}^n y_i + G_{nk}, \quad (3.33)$$



де  $\sum_{i=1}^n y_i$  – сума ординат лінії впливу опорного тиску на колону;  $G_{nk}$  – вага підкранових конструкцій.

**Граничні розрахункові значення горизонтального навантаження мостових кранів, спрямованого поперек кранової колії.**

*Чотириколісні крани.* З точки зору величин і характеру горизонтальних навантажень ці крани виділяються в окрему групу кранів, схильних до перекосу при русі. Особливо ця схильність проявляється для кранів з відношенням прольоту до бази  $L_{cr}/B \geq 5$ . Найбільші навантаження чотириколісні крани реалізують у так званому «найбільш косому положенні», коли перекіс моста крана обмежується ребордами коліс, що контактують з рейками. Обмеження перекосу може здійснюватися колесами однієї сторони крана або колесами, що знаходяться по діагоналі крана.

Граничне розрахункове значення поперечного навантаження чотириколісних кранів визначається за формулою:

$$H_m = \gamma_{fm} H_{01}, \quad (3.34)$$

де  $H_{01}$  – характеристичне значення бічної сили від **одного крана**, найбільш несприятливого за впливом із кранів, розташованих на одній крановій колії або в одному створі.

Характеристичне значення горизонтального навантаження чотириколісних мостових кранів, спрямованого поперек кранового шляху, яке спричиняється перекосами мостових електричних кранів і непаралельністю кранових колій (**бічну силу**), для колеса крана слід визначати за формулою:

$$H_k^n = 0,1F_{max}^n + \frac{\alpha(F_{max}^n - F_{min}^n)L_{cr}}{B}, \quad (3.35)$$

де  $F_{max}^n$ ,  $F_{min}^n$  – характеристичне значення вертикального тиску на колесо, відповідно на більш або на менш навантаженій стороні крана;  $B$ ,  $L_{cr}$  – відповідно база і проліт крана;  $\alpha$  – коефіцієнт, прийнятий таким, що дорівнює 0,03 при

центральному приводі механізму руху моста і 0,01 – при роздільному приводі.

Бічні сили  $H_k^n$ , обчислені за формулою (3.35), можуть бути прикладені:

- до коліс однієї сторони крана і спрямовані в різні сторони (всередину або назовні прольоту будівлі, що розглядається), що відповідає обмеженню перекосу крана колесами однієї сторони (рис. 3.10, а);

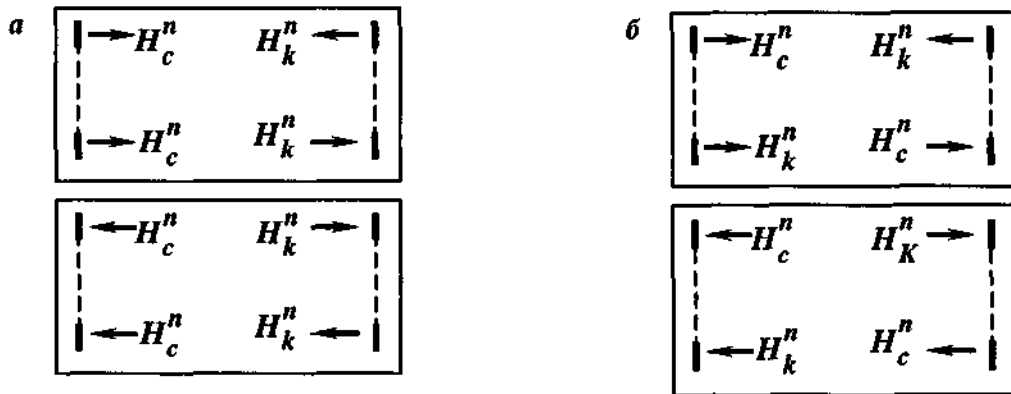


Рис. 3.10. Варіанти прикладення бічних сил для чотириколесних кранів

- до коліс по діагоналі крана і спрямовані в різні сторони (всередину або назовні прольоту будівлі, що розглядається), що відповідає випадку обмеження перекосу крана колесами, що знаходяться на діагоналі крана (рис. 3.10, б).

При цьому до інших коліс прикладаються сили, що дорівнюють  $H_c^n = 0,1F_{max}^n$  або  $H_c^n = 0,1F_{min}^n$  (приймається не вигідний варіант), кожна з яких може бути спрямована як назовні, так і всередину прольоту.

Для розрахунку конструкцій слід вибирати з наведених схем найбільш не вигідні схеми завантаження конструкцій, що розраховуються.

В формулі (3.35) перша складова виражає граничну силу при перекосі площини колеса відносно поздовжньої осі рейки при відсутності контакту реборди колеса з рейкою. Тут використовується багатократно підтверджений експериментально коефіцієнт пропорційності, який зв'язує силу поперечного

ковзання рухомого колеса і вертикальне навантаження, що діє на колесо. Друга складова враховує вплив на бічну силу наявності моменту від перекосу моста у плані. Тут видно визначальний вплив відношення проліта крана до бази  $L_{cr}/B$ , а також типу приводу механізму руху моста крана, оскільки при роздільному приводі перекіс моста при русі крана зменшується у порівнянні з центральним приводом.

*Багатоколісні (вісім коліс і більше) крани.* Граничне розрахункове горизонтального навантаження багатоколісних кранів, спрямованого поперек кранової колії, визначається як:

$$H_m = \gamma_{fm} H_0, \quad (3.36)$$

де  $H_0$  – характеристичне значення бічної сили від *двох* найбільш несприятливих за впливом кранів, розташованих на одній крановій колії або на різних коліях в одному створі.

Характеристичне значення бічної сили, прикладеної до колеса багатоколісних кранів з гнучким підвісом  $H_k^n$  приймається таким, що дорівнює 0,1 від вертикального навантаження на колесо, підрахованого при розташуванні візка з вантажем, що дорівнює паспортній вантажопідйомності крана, *посередині моста*.

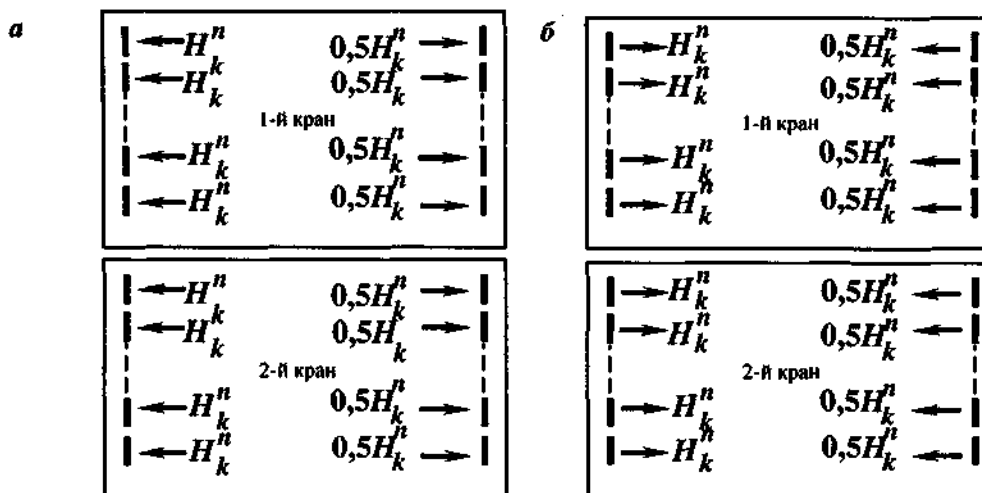


Рис. 3.11. Варіанти прикладення бічних сил для багатоколісних кранів

При визначенні характеристичних значень навантажень  $H_k^n$  слід враховувати, що бічні сили багатоколісних кранів передаються на обидві сторони кранової колії. На кожній стороні крана бічні сили мають один напрямок – назовні або всередину прольоту, на різних коліях вони спрямовані у протилежні боки (обидві всередину прольоту або обидві назовні). На одній із колій приймається повна бічна сила, на іншій колії приймається половина від бічної сили (рис. 3.11, а, б).

**Коефіцієнт надійності за граничним розрахунковим значенням** кранового навантаження  $\gamma_{fm}$  визначається залежно від заданого середнього періоду повторюваності  $T$  за табл. 3.13.

Таблиця 3.13

**Коефіцієнти надійності за граничним розрахунковим значенням**

$T$ , років	$\geq 50$	10	1	0,1
$\gamma_{fm}$	1,1	1,07	1,02	0,97

Імовірнісне обґрунтування цього коефіцієнту наводиться нижче в п. 3.4.5.

**Коефіцієнт збільшення тиску колеса крана.** При урахуванні місцевого і динамічного впливу зосередженого вертикального навантаження від одного колеса крана характеристичне значення цього навантаження слід множити при розрахунку міцності балок кранових колій на додатковий коефіцієнт  $\gamma_{f1}$ , що дорівнює:

1,6 – для групи режиму роботи кранів 8К із жорстким підвісом вантажу;

1,4 – для групи режиму роботи кранів 8К із гнучким підвісом вантажу;

1,3 – для групи режиму роботи кранів 7К;

1,1- для інших груп режимів роботи кранів.

При перевірці місцевої стійкості стінок балок значення додаткового коефіцієнта  $\gamma_{f1}$  слід приймати рівним 1,1.

**Динамічний коефіцієнт.** При розрахунку міцності і стійкості балок кранової колії та їхніх кріплень до несучих конструкцій граничні розрахункові значення вертикальних

кранових навантажень слід множити на коефіцієнт динамічності, що дорівнює:

- при кроці колон не більш як 12 м:  
 $k_d = 1,2$  – для групи режиму роботи мостових кранів 8К;  
 $k_d = 1,1$  – для груп режимів роботи мостових кранів 6К і 7К;  
 $k_d = 1,1$  – для усіх груп режимів роботи підвісних кранів;
- при кроці колон понад 12 м –  $k_d = 1,1$  для групи режиму роботи мостових кранів 8К.

Граничні розрахункові значення горизонтальних навантажень від мостових кранів групи режиму роботи 8К слід враховувати з коефіцієнтом динамічності, що дорівнює  $k_d = 1,1$ .

**Кількість кранів**, що враховується у розрахунках. Вертикальні навантаження при розрахунку міцності і стійкості балок кранових колій слід враховувати не більш як від **двох** найбільш несприятливих за впливом мостових або підвісних кранів.

Вертикальні навантаження при розрахунку міцності і стійкості рам, колон, фундаментів, а також основ у будівлях із мостовими кранами в декількох прольотах (у кожному прольоті на одному ярусі) слід приймати на кожній колії не більш як від **двох** найбільш несприятливих за впливом кранів, а при врахуванні суміщення в одному створі кранів різних прольотів – не більш як від **чотирьох** найбільш несприятливих за впливом кранів.

Горизонтальні навантаження при розрахунку міцності і стійкості балок кранових колій, колон, рам, кроквяних і підкроквяних конструкцій, фундаментів, а також основ слід враховувати не більш як від **двох** найбільш несприятливих за впливом кранів, розташованих на одній крановій колії або на різних коліях в одному створі (для чотириколісних кранів – від **одного** крану на кожній крановій колії). При цьому для кожного крана необхідно враховувати тільки одне горизонтальне навантаження (поперечне або поздовжнє).

**Коефіцієнт сполучення  $\psi$** , що враховується у формулах (3.30) ля навантажень від двох кранів, визначається таким чином:

$\psi = 0,85$  – для груп режимів роботи кранів 1К...6К;

$\psi = 0,95$  – для груп режимів роботи кранів 7К, 8К.

При врахуванні чотирьох кранів навантаження від них необхідно множити на коефіцієнт сполучень:

$\psi = 0,7$  – для груп режимів роботи кранів 1К...6К;

$\psi = 0,8$  – для груп режимів роботи кранів 7К, 8К.

**Врахування обмеження наближення візка.** При визначенні кранових навантажень допускається враховувати фактичне розміщення зон обслуговування крана і фактичне наближення візка до ряду колон, якщо розміщення і габарити постійно встановленого в будівлі обладнання такі, що порушення цих обмежень фізично неможливе, або ж у відповідних місцях встановлені обмежувачі переміщень кранів по коліях і візків по мосту крана (упори).

Якщо фактичне наближення візків мостових кранів до розглядуваного ряду колон,  $y_{min} = y_0 + pL_{cr}$ , перевищує паспортне значення  $y_0$ , то вертикальне кранове навантаження на конструкції розглядуваного ряду може бути скориговане множенням на коефіцієнт  $K_y$ , що обчислюється за формулою:

$$K_y = 1 - \frac{pL_{cr}(m_c + m_q)}{m_b} \left/ \left( 2L_{cr} + (m_c + m_q) \frac{L_{cr} - y_0}{m_b} \right) \right., \quad (3.37)$$

де  $m_c$ ,  $m_b$  – маса візка і моста відповідно;  $m_q$  – вантажо-підйомність крана;  $L_{cr}$  – проліт крана;  $p$  – відносна частина прольоту крана.

В залежності від значення  $p$  і параметрів кранів вказаний коефіцієнт знаходиться в діапазоні  $K_y = 0,810 \dots 0,965$  [11].

### 3.4.5. Аналіз наслідків переходу від СНиП [6] до ДБН [1].

Як показано вище, введення з 1 січня 2007 року норм навантажень ДБН призвело до суттєвого збільшення, зокрема, розрахункових значень горизонтальних кранових навантажень. Порівняльний аналіз показав, що для чотириколісних кранів характерні значення горизонтального навантаження на колесо мостового крана середнього режиму роботи, визначені за ДБН, перевищують нормативні горизонтальне навантаження, визначені згідно зі СНиП у 5...8 разів, важкого режиму роботи – в 1,5...5 разів.

Зусилля у підкранових балках за ДБН від дії вертикального навантаження залишаються незмінними, від дії горизонтального навантаження збільшуються в середньому на 45 %, проте площі підібраних перерізів підкранових балок за ДБН лише на 2...5% перевищують значення, отримані згідно СНиП. При важкому режимі та роздільному приводі крана перерізи не змінюються. Горизонтальні навантаження на поперечну раму ОВБ, визначені згідно з ДБН від впливу мостового крана при середньому режимі роботи, переважають значення навантажень, отримані за СНиП, у 2,8...5 разів, при важкому режимі роботи – в 2,3...4,5 разів. Значення згинальних моментів у опорному перерізі колони поперечної рами від бічних сил, визначених за ДБН, у 2,1...4,1 разів перевищують зусилля від гальмівної сили, яка визначена згідно зі СНиП. Можливі перевитрати сталі (для нижніх частин колон до 24 %) виключаються врахуванням просторової роботи каркасу будівлі.

Для багатоколісних кранів перехід до розрахунку за ДБН призвів до зростання горизонтальних навантажень на колесо мостового крана, порівняно зі СНиП для кранів середнього режиму роботи у 1,40...1,63 разів та до відповідного зростання зусиль у підкранових балках (без зміни їхніх перерізів). Горизонтальні кранові навантаження на поперечну раму зростають у 1,81...2,11 разів без суттєвого збільшення зусиль у колонах ОВБ.

Для мостових кранів важкого режиму роботи із гнучким підвісом вантажу розрахунок кранових навантажень за ДБН дозволяє знизити розрахункові бічні сили до 20...50 % порівняно з рекомендаціями СНиП. Відповідно зменшуються зусилля на 24...41 % у колонах і на 37...39 % у підкранових балках, що не впливає на зміну поперечних перерізів колон і дозволяє знизити вагу підкранових балок на 8 %.

**3.4.6. Імовірнісний опис навантаження від мостових кранів.** Натурними експериментами в діючих цехах було підтверджено, що кранове навантаження має чітко виражений випадковий характер. Були узагальнені 83 процеси вертикального навантаження та 14 процесів горизонтального навантаження, із

яких 8 відносяться до кранів із жорстким підвісом вантажу, а інші – до кранів із гнучким підвісом вантажопідйомністю 5...650 тс груп режимів роботи 4К...8К.

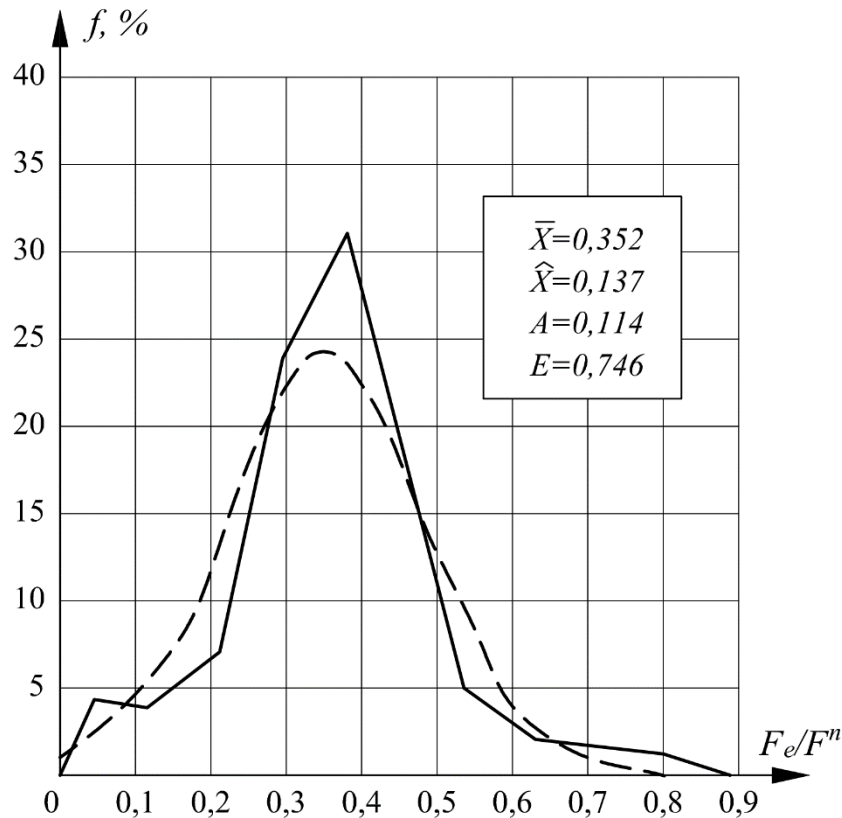
Були виявлені основні ймовірнісні особливості кранових навантажень:

- стаціонарність випадкового процесу кранового навантаження, що проявляється у швидкій стабілізації і подальшій постійності розподілів ординати і числових характеристик, незмінності частот викидів і частотних параметрів випадкового процесу;
- добра частотна перемішаність випадкового процесу кранового навантаження, відсутність періодичної складової;
- тісний зв'язок роботи кранів і кранових навантажень з технологією виробництва цехів, в яких вони працюють, стабільність траєкторій руху кранів і візків, вплив технологічних особливостей на ймовірнісні характеристики кранових навантажень (фактичне розміщення зон роботи кранів, неоднакове завантаження конструкцій різних рядів, обмеження наближення візків кранів);
- специфічна особливість навантажень деяких кранів з гнучким підвісом (наприклад, ливарних), що полягає у виділенні в їхніх розподілах крайніх «хвостових» частин, що відповідають операціям з вантажами, близькими до вантажопідйомності; ці частини слід розглядати окремо;
- можливість застосування нормального розподілу для опису розподілу ординати кранового навантаження (рис. 3.12) відомої формули нормованої щільності цього розподілу:

$$f(\gamma) = \exp(-0,5\beta^2) / \sqrt{2\pi}, \quad (3.38)$$

де, як і раніше,  $\gamma = (x - \bar{x}) / \hat{x}$  – нормований випадковий аргумент ( $\bar{x}$  і  $\hat{x}$  – відповідно математичне сподівання та стандарт навантаження  $x$ ).





**Рис. 3.12.** Приклад розподілу вертикального кранового навантаження (розливальний проліт сталеплавильного цеху):

$F_e$  – експериментальні значення;  $F^n$  – нормативне навантаження.

Як наслідок, обґрунтовано загальний висновок, що випадкове кранове навантаження найповніше описується моделлю **нормального стаціонарного випадкового процесу**.

Для нормального стаціонарного ВП з використанням виразу нормованої щільності розподілу нормального закону (2.17) виведена формула для частоти викидів:

$$v_+(\gamma) = \omega \exp(-0,5\gamma^2) / (2\pi). \quad (3.39)$$

З урахуванням цього, імовірність перевищення нормованого рівня кранового навантаження за час  $t$  визначається як

$$Q(\gamma, t) \cong v_+(\gamma)t = \omega t \exp(-\gamma^2/2) / (2\pi). \quad (3.40)$$

На основі одержаних експериментальних даних обґрунтовані узагальнені імовірнісні параметри вертикального кранового навантаження, наведені в *табл. 3.14* [11]. В таблиці числові характеристики  $\bar{X}$  і  $\hat{X}$  подані у частках від нормативного навантаження одного крана. Вантажна характеристика кранів визначалася як  $\eta = Q/G_{cr}$ ; де  $Q$  – вантажопідйомність крана,  $G_{cr}$  – вага крана (моста з візком). Значення математичного сподівання  $\bar{X}$  і стандарту  $\hat{X}$  були визначені із запасом по сукупності досліджених процесів навантаження із забезпеченістю 0,99. Ці характеристики разом з ефективною частотою  $\omega$  повністю описують ВП вертикального кранового навантаження.

Таблиця 3.14

## Узагальнені імовірнісні параметри кранового навантаження

Вид параметрів	Значення параметрів						
	Найменування	Позначення	Розмірність	Числові значення для підвісу и режиму роботи кранів			
				гнучкий			жорсткий
				4К-6К	7К	8К	8К
Числові характеристики	Математичне сподівання	$\bar{X}$	—	0,66 – 0,243 $\eta$			0,758
	Стандарт	$\hat{X}$	—	0,131			0,274
Часовий параметр	Ефективна частота	$\omega$	1/год	71,0	106,8	215,0	215,0

Формула (3.32) дає можливість визначення нормованого відхилення від математичного сподівання граничного розрахункового значення кранового навантаження при заданій імовірності його перевищення  $Q(T)$ :

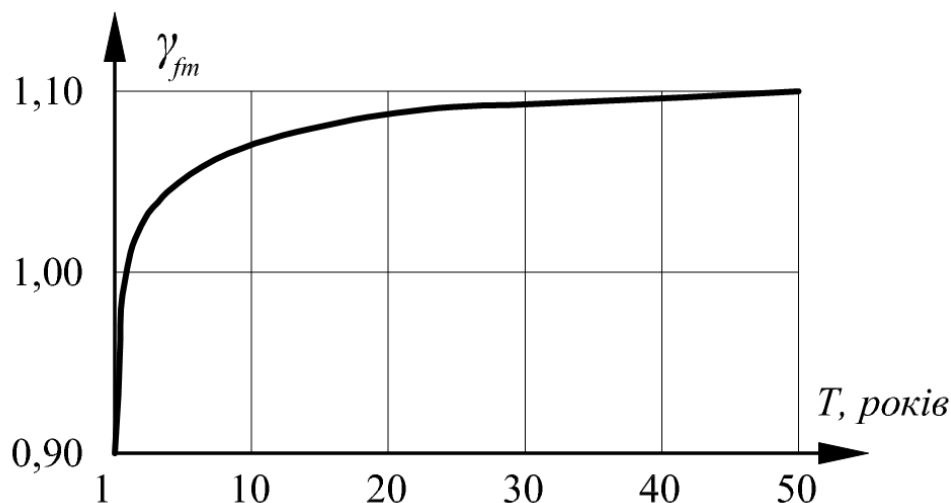
$$\gamma(T) = \sqrt{2 \ln \frac{\omega T}{2\pi Q(T)}}. \quad (3.41)$$

На основі цієї формули коефіцієнт надійності за граничним розрахунковим значенням кранового навантаження наближено, але з достатньою точністю, визначається із співвідношення:

$$\gamma_{fm}(T) = \frac{1 + V\gamma(T)}{1 + V\gamma(T = 50 \text{ років})}. \quad (3.42)$$

Тут  $V = \hat{X}/\bar{X}$  – коефіцієнт варіації кранового навантаження.

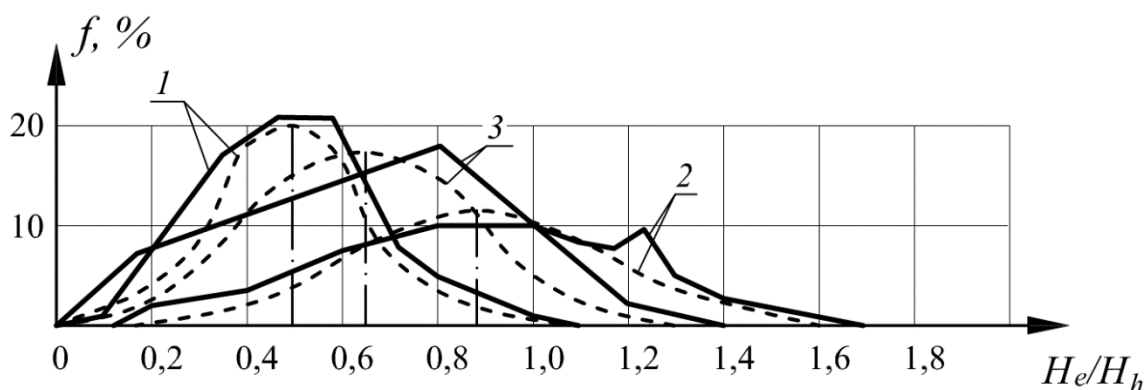
В наочній формі зв'язок коефіцієнту  $\gamma_{fm}$  з середнім періодом повторюваності кранового навантаження  $T$  ілюструється графіком на *рис. 3.13*.



**Рис. 3.13.** Залежність коефіцієнту надійності  $\gamma_{fm}$  від періоду повторюваності  $T$

Ця залежність за пропозицією автора монографії включена в національні норми ДБН [1].

Горизонтальні кранові навантаження, мають випадковий характер і такі ж особливості, як вертикальні навантаження: стаціонарність, нормальність статистичних розподілів (асиметрія й ексцес незначні), витягнутість їхніх хвостових частин (*рис. 3.14*).



**Рис. 3.14. Розподіли горизонтальних кранових навантажень:**

1 – багатоколісні кран з гнучким підвісом на ділянках з нормальною колією (розливальні крани сталеплавильного цеху); 2 – те ж, на ділянках зі звуженнями і розширеннями колії; 3 – кран з жорстким підвісом (стриперний цех).

— дослідний розподіл - - - - - нормальна крива

З урахуванням характеру і величин бічних сил всі мостові крани були поділені на чотириколісні крани та багатоколісні крани із гнучким або жорстким підвісом

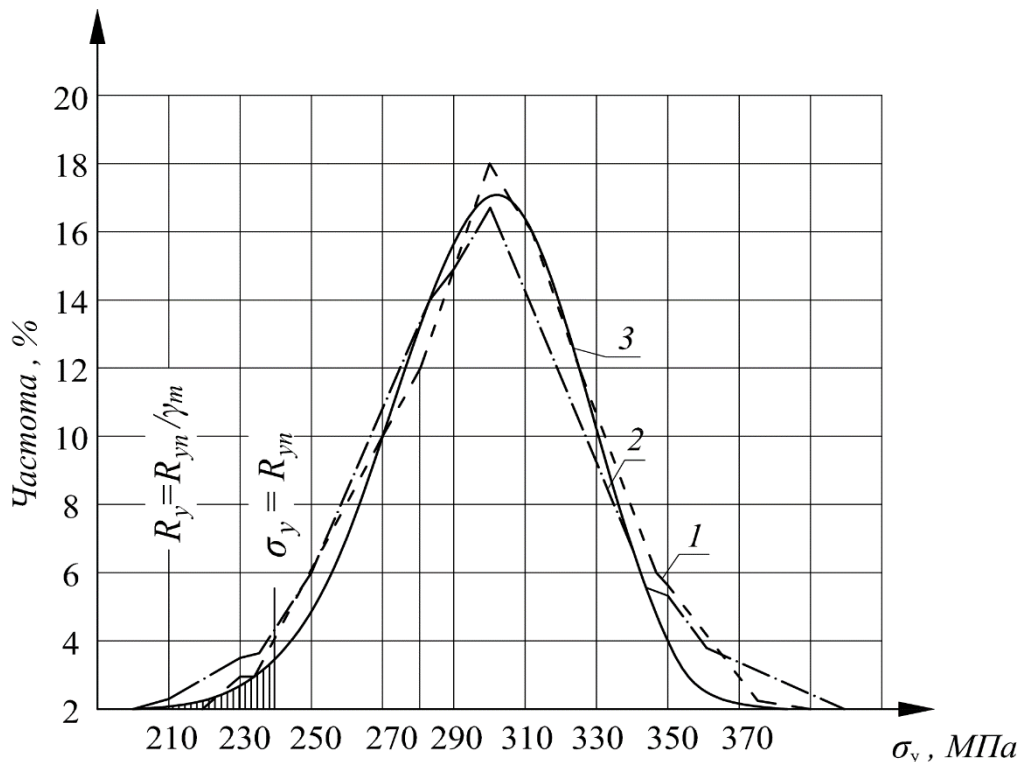
### 3.5. СТАТИСТИЧНІ ДАНІ ЩОДО МІЦНОСТІ МАТЕРІАЛІВ

#### 3.5.1. Статистичні параметри міцності прокатної сталі

*Статистичний характер міцності сталі.* Як відомо, процес виплавки сталі є досить складним і не ідеально контрольованим (висока температура, час процесу плавки, вміст легуючих домішок тощо). Згодом при прокатці відбувається обтискання металу, роздрібнення зерен і різна їхня орієнтація вздовж і поперек прокату, що впливає на механічні властивості металу. На властивості сталі впливають також температура прокатки і подальше охолодження. Крім того, при збільшенні товщини прокату механічні характеристики металу понижуються. При наявності таких численних факторів, що впливають на міцність сталі, цілком природно, що показники міцності мають певну змінність, наочне уявлення про яку дають статистичні криві розподілу різних характеристик сталі.

Межа текучості та інші механічні характеристики сучасних сталей мають статистичний розкид, який добре описується нормальним законом, що було неодноразово підтверджено даними випробування зразків сталі (рис. 3.14).

Результати масштабних досліджень статистичних характеристик маловуглецевої сталі марки Ст3 для будівельних металоконструкцій наведені в табл. 3.15 [12]. Із наведених даних видно, що кипляча сталь щодо міцності більш однорідна, чим спокійна сталь. Статистичний розкид значень межі міцності виявився меншим, чим розкид межі текучості, а коефіцієнт варіації відносного видовження помітно більше, чим відповідний коефіцієнт показників міцності. З табл. 3.15 видно, що середнє значення межі текучості і міцності із збільшенням товщини прокату зменшується внаслідок зростання початкових дефектів структури металу у більш товстих виробках.



**Рис. 3.14.** Статистичні розподіли межі текучості сталі марки Ст3:  
1,2 – по даним різних заводів; 3 – нормальний розподіл (Гаусса)

Для модуля пружності коефіцієнт варіації коливається від 0,02 до 0,06.

Таблиця 3.15

## Статистичні характеристики межі текучості прокатної сталі

Марка сталі і вид прокату	Товщина листа або полиці профіля, мм	Сталь групи I		Сталь групи II	
		Середнє значення межі текучості $\bar{\sigma}_y, \text{МПа}$	Коефіцієнт варіації $V_y$	Середнє значення межі текучості $\bar{\sigma}_y, \text{МПа}$	Коефіцієнт варіації $V_y$
ВСтЗсп, лист	4 – 6	285	0,049	321	0,064
	8 – 10	283	0,050	315	0,060
	12 – 16	273	0,052	303	0,060
ВСтЗпс, лист	4 – 6	280	0,055	313	0,058
	8 – 10	277	0,056	309	0,055
	12 – 16	270	0,053	298	0,055
ВСтЗсп, фасон	4 – 6	293	0,080	330	0,062
	8 – 10	292	0,080	325	0,058
	12 – 16	282	0,051	311	0,056
ВСтЗпс, фасон	4 – 6	284	0,050	318	0,062
	8 – 10	282	0,050	313	0,053
	12 – 16	280	0,051	308	0,053

**Нормування міцності прокатної сталі.** Основною характеристикою міцності конструктивного матеріалу є нормативний опір. Імовірнісна забезпеченість (імовірність відхилень у менший бік) нормативного опору матеріалу повинна дорівнювати  $P = 0,95$  (рис. 3.14) [14]. Це значення забезпеченості оцінюється на основі розподілу Гаусса як:

$$P = 0,5 + \Phi(\beta), \quad (3.43)$$

де  $\beta = 1,64$  – величина аргументу, що відповідає значенню функції Лапласа  $\Phi = 0,45$ .

Відповідне значення нормативного опору сталі дорівнює:

$$R_{yn} = \bar{\sigma}_y (1 - 1,64V_m). \quad (3.44)$$

За діючими в Україні нормами [15], основним показником сталі є характеристичний (замість нормативного) опір  $R_{yn}$ , що дорівнює значенням межі текучості (бракувальному мінімуму), встановленим стандартами чи технічними умовами. Ці значення, визначені за нормами поставки, прийнятими і діючими на протязі багатьох років, не мають послідовного статистичного обґрунтування. Згідно із численними статистичними дослідженнями, для більшості будівельних сталей забезпеченість характеристичного опору за межею текучості  $R_{yn}$  складає 0,95...0,99, тобто дещо вище наведеного рівня  $P$ .

Можливість попадання в конструкцію сталі із значенням межі текучості нижче встановленого стандартом бракувального мінімуму враховується **коефіцієнтом надійності за матеріалом**  $\gamma_m = R_{yn}/R_y \geq 1,0$ .

Цим коефіцієнтом враховуються:

- неминучі змінність і розкид властивостей сталі, що оцінюються на основі статистичної обробки численних результатів заводських випробувань сталі (див. криву розподілу на *рис. 3.14*);
- відхилення, обумовлені неточністю залежностей між матеріалом конструкції і вибілковими лабораторними зразками, по даним випробування яких встановлюються нормативні значення міцнісних характеристик сталі;
- можливі відхилення площі перерізу від номінального значення в межах встановлених стандартами допусків на прокатні профілі (щоб не вводити додаткових коефіцієнтів).

Розрахунковий опір сталі – це мінімальний імовірний опір сталі, який може бути визначений на основі статистичного розподілу межі текучості (*рис. 3.14*), наприклад, на основі правила «трьох сігма». При цьому забезпеченість розрахункового опору повинна бути не менше 0,998 [15]. У сучасних нормах проектування сталевих конструкцій у формулу  $R_y = R_{yn}/\gamma_m$  вводяться значення коефіцієнти надійності за матеріалом, що дорівнюють  $\gamma_m = 1,025$  для сталей за ГОСТ 27772-88 (крім високоміцних сталей С590 і С590К),  $\gamma_m = 1,05$  для сталей за ГОСТ

380-71\* і  $\gamma_m = 1,10$  для сталей, що поставляються за іншими стандартами.

Значення нормативних і розрахункових опорів сталі наведені в нормах проектування сталевих конструкцій [15]. На основі наведених в *табл. 3.15* статистичних даних для межі текучості сталі Ст3, можна визначити імовірнісну забезпеченість вказаних опорів і оцінити відповідність наведених вище значень коефіцієнтів надійності за матеріалом.

**3.5.2. Статистичні характеристики міцності арматури.**  
Статистичні характеристики міцності арматурної сталі, розподіленої за нормальним законом, наведені в *табл. 3.16*

**Таблиця 3.16**  
**Статистичні характеристики міцності арматури**

<i>Клас арматури</i>	<i>A-I</i>	<i>A-II</i>	<i>A-III</i>	<i>A-IIIв</i>	<i>A-IV</i>
<i>Середнє значення, <math>\bar{R}_s</math>, МПа</i>	247	313	420 <i>d=10...40</i> <i>мм</i>	600	667
<i>Коефіцієнт варіації, <math>V_S</math></i>	0,0297	0,0353	0,0436	0,0612	0,0859
	0,05 – 0,08	0,06 – 0,08	0,06 – 0,08	–	0,08 – 0,10

<i>Клас арматури</i>	<i>A-V</i>	<i>A-VI</i>	<i>B-II</i>	<i>B<sub>p</sub>-II</i>	<i>K-7</i>
<i>Середнє значення, <math>\bar{R}_s</math>, МПа</i>	912	1178	1607 <i>d=5 мм</i>	1507	1554 <i>d=15</i> <i>мм</i>
<i>Коефіцієнт варіації, <math>V_S</math></i>	0,0848	0,103	0,103	0,102	0,102
	0,08 – 0,10	0,06 – 0,14	0,06 – 0,10	0,06 – 0,10	–

Вказані в *табл.3.16* середні значення і коефіцієнти варіації міцності арматури є усередненими по генеральній сукупності даних багатьох металургійних заводах СНД. При цьому всі заводи випускають арматуру, що відповідає вимогам відповідних стандартів відносно бракувального мінімуму і забезпечення нормативного опору. Однак середні значення міцності у кожній партії сталі можуть бути різними. Тому результуюча крива



розподілу міцності арматури має дещо більший коефіцієнт варіації, ніж кожна окрема крива.

Статистичний розподіл модуля пружності арматури також підкоряється нормальному закону, середні значення і коефіцієнти варіації для різних класів арматури наведені в *табл. 3.17*.

**Таблиця 3.17**  
**Статистичні характеристики модуля пружності арматури**

<i>Клас арматури</i>	<i>A-I</i>	<i>A-II</i>	<i>A-III</i>	<i>A-IV</i>
<i>Середнє значення, <math>\bar{E}_s \cdot 10^{-5}</math>, МПа</i>	2,29	2,29	2,18	2,18
<i>Коефіцієнт варіації, <math>V_E</math></i>	0,07	0,07	0,07	0,07

<i>Клас арматури</i>	<i>A-V</i>	<i>A-VI</i>	<i>B<sub>p</sub>-I</i>	<i>K-7</i>
<i>Середнє значення, <math>\bar{E}_s \cdot 10^{-5}</math>, МПа</i>	1,87	1,87	1,85	1,96
<i>Коефіцієнт варіації, <math>V_E</math></i>	0,07	0,07	0,08	0,08

Відносне видовження арматури після розриву має статистичний розкид з коефіцієнтами варіації  $V_\delta = 0,135 \dots 0,347$ .

Змінність площини поперечного перерізу арматури діаметром  $d = 10 \dots 18$  мм характеризується коефіцієнтом варіації  $V_A = 0,019 \dots 0,049$ .

### 3.5.3. Статистичні характеристики міцності бетону

**Статистична природа міцності бетону.** Бетон – штучний будівельний матеріал, що відрізняється неоднорідністю і мінливістю міцнісних і деформативних властивостей, що залежать від таких випадкових факторів, як активність цементу, крупність заповнювачу, технологія виготовлення та твердіння, час експлуатації тощо.

Основна характеристика, що відображає міцнісні властивості бетону – це його кубикова міцність, що визначається шляхом

випробування стандартних кубів розміром 15 см і добре описується нормальним законом розподілу.

Оцінка математичного сподівання (середнього значення) міцності бетону може бути одержана на основі розрахункового опору бетону, що має статистичне обґрунтування (див. нижче формулу (3.42)). Треба мати на увазі, що тривалі зусилля стиску, близькі за величиною до експлуатаційних, підвищують міцність бетону на стиск стержневих і плоских елементів на 25...25 %.

Коефіцієнт варіації міцності бетону прийнятий у нормах проектування [16] рівним  $V_b = 0,135$  як середньостатистичне значення для великої кількості заводів по виготовленню залізобетонних конструкцій. Між тим дослідження технологічних ліній на заводах ЗБК показали, що коефіцієнт варіації може суттєво відхилятися як у більший, так і в менший бік і складає  $V_b = 0,05...0,25$ .

Таблиця 3.18

Варіація міцності бетону в залежності від її величини

Вид твердіння	Коефіцієнти варіації у % при середній міцності, МПа							
	10	20	30	40	50	60	70	≥80
Природний	15,9	12,0	10,5	8,8	6,6	5,4	5,1	5,1
Пропарювання	12,1	11,1	9,4	9,0	7,8	6,6	5,5	5,2

Таблиця 3.19

Коефіцієнти варіації міцності бетону на стиск, %

Тип конструкцій	Консистенція бетонної суміші	Культура виробництва і возведення конструкцій		
		висока	середня	низька
Монолітні	Пластична	8...11	11...16	16...20
	Жорстка	10...15	15...20	20...25
Збірні	Пластична	6...9	9...14	14...18
	Жорстка	8...11	11...16	16...22

Із збільшенням міцності бетону ущільнюється його структура, що призводить до підвищення однорідності і зменшенню коефіцієнта варіації (табл. 3.18) [13]. Статистичний

розкид міцності бетону також суттєво залежить від рівня технології виготовлення і возведення конструкцій (табл. 3.19).

На розкид міцності бетону суттєво впливають мінливість і можлива неточність дозування його складових, які можуть знаходитися у наступних межах:

- міцність цементу  $\pm(6...25)\%$ ;
- міцність заповнювачів  $\pm(15...50)\%$ ;
- уміст цементу  $\pm(5...15)\%$ ;
- уміст води  $\pm(8...23)\%$ ;
- уміст наповнювачів  $\pm(5...10)\%$ ;
- уміст вологи в наповнювачах  $\pm(1...21)\%$ .

Має місце також тенденція зменшення коефіцієнта варіації міцності бетону з часом, вже через три місяці після виготовлення залізобетонної конструкції цей коефіцієнт може зменшитися в 1,5 рази. Аналогічна тенденція характерна для модуля пружності бетону (табл. 3.20).

Коефіцієнт варіації модуля пружності бетону зменшується також із збільшенням його міцності (табл. 3.21).

Таблиця 3.20

Залежність коефіцієнта варіації модуля пружності бетону

 $V_{Eb}$  від часу

$t, \text{діб}$	0...12	13...25	26...359	360...624	$\geq 625$
$V_{Eb}$	0,130	0,120	0,085	0,090	0,085

Таблиця 3.21

Зв'язок коефіцієнта варіації модуля пружності бетону

 $V_{Eb}$  з міцністю бетону

Середнє значення міцності, МПа	10	20	30	40	50
Коефіцієнт варіації модуля пружності бетону	0,092	0,077	0,056	0,047	0,044

При оцінці надійності залізобетонних слід враховувати наступні види відхилень розмірів елементів від проектних величин: корисної висоти поперечного перерізу, товщини

захисного шару арматури і товщини стінок і ребер. Статистичні характеристики відхилень розмірів залізобетонних конструкцій від проектних величин наведені в *табл. 3.22*.

**Таблиця 3.22**  
**Відхилення розмірів залізобетонних елементів**

<i>Тип конструкцій</i>	<i>Корисна висота</i>		<i>Товщина захисного шару арматури</i>	
	<i>Середнє значення, мм</i>	<i>Дисперсія, мм<sup>2</sup></i>	<i>Середнє значення, мм</i>	<i>Дисперсія, мм<sup>2</sup></i>
<i>Монолітні плити</i>	-10	100	-2	25
<i>Збірні ребристі плити</i>	0	36	+1	25
<i>Збірні багатопустотні плити</i>	+2	49	0	25
<i>Балки</i>	-5	169	-6	49

*Примітка: середнє значення і дисперсія розподілу відхилень за товщиною кasetних виробів дорівнюють відповідно +4 мм і 9 мм<sup>2</sup>*

**Нормування міцності бетону.** Згідно з нормами [16], основною характеристикою бетонів є клас за міцністю при стиску  $B$  (МПа) – граничний опір стисковій стандартних бетонних кубів, які випробуються через 28 діб зберігання при температурі  $20 \pm 2^\circ \text{C}$  забезпеченістю 0,95.

По аналогії з формулою (3.36) можна записати для класу бетону

$$B = \bar{R}_{cub}(1 - 1,64 \cdot V_b), \quad (3.45)$$

де  $\bar{R}_{cub}$  – середня кубикова міцність бетону на осьовий стиск (МПа) (раніше називалася маркою бетону);  $V_b$  – коефіцієнт варіації міцності бетону.

У розрахунках залізобетонних конструкцій використовується призмена міцність бетону, внаслідок чого перехід від класу бетону до його нормативного опору  $R_{bn}$  записується як [17]

$$R_{bn} = B(0,77 - 0,00125B) = B \cdot k_b \geq 0,72B. \quad (3.46)$$

При визначенні розрахункового опору бетону  $R_b$  враховується коефіцієнт умов роботи  $\gamma_{bc}$ :

$$R_b = R_{bn} / \gamma_{bc}. \quad (3.47)$$

Коефіцієнт  $\gamma_{bc}$  враховує особливості властивостей бетону; тривалість дії навантаження та багаторазовість його повторення; умови, характер і стадію роботи конструкцій; спосіб виготовлення; розміри перерізу тощо. Для важких бетонів  $\gamma_{bc} = 1,3$ . З урахуванням наведених співвідношень середня міцність бетону може бути визначена за формулою

$$\bar{R}_b = \frac{R_b}{1 - 1,64 \cdot V_b}. \quad (3.48)$$

Як вказано вище, в нормах враховується узагальнений коефіцієнт варіації міцності бетону  $V_b = 0,135$ . Підставляючи це значення в формулу (3.48), маємо:

$$\bar{R}_b = \frac{R_b}{1 - 1,64 \cdot 0,135} = \frac{R_b}{0,7786} = 1,282R_b. \quad (3.49)$$

Відповідно стандарт міцності бетону дорівнюватиме

$$\hat{R}_b = V_b \cdot \bar{R}_b = 0,135 \cdot 1,282R_b = 0,173R_b. \quad (3.50)$$

Одержані узагальнені числові характеристики міцності бетону можуть застосовуватися у розрахунках надійності конструкцій разом з експериментальними статистичними даними.

### Література до розділу 3

1. ДБН В.1.2-2:2006. Навантаження і впливи. – К.: Мінбуд України, 2006. – 51 с.

2. ДСТУ-Н Б EN 1991-1-1: 2010 Єврокод 1: Дії на конструкції. Частина 1-1. Загальні дії. Питома вага, власна вага, експлуатаційні навантаження для споруд (EN 1991-1-1:2002, IDT). – К.: Мінрегіонбуд, 2010. – 63 с.
3. Пичугин С.Ф. Снеговые и гололедные нагрузки на строительные конструкции / С.Ф. Пичугин, А.В. Махинько. – Полтава: ООО «АСМИ», 2012. – 460 с.
4. Pichugin S. Probabilistic Description of Ground Snow Loads for Ukraine / S. Pichugin // Snow Engineering. Recent Advanced and Developments. – A.A.Balkema, Rotterdam, 2000. – P. 251 – 256.
5. Пашинський В.А. Атмосферні навантаження на будівельні конструкції / В.А. Пашинський. – К.: УкрНДІПСК, 1999. – 185 с.
6. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия / Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. – 36 с.
7. Пичугин С.Ф. Ветровая нагрузка на строительные конструкции / С.Ф. Пичугин, А.В. Махинько. – Полтава: Изд-во «АСМИ», 2005. – 342 с.
8. Симиу Э. Воздействие ветра на здания и сооружения / Э. Симиу, Р. Сканлан / Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1984. – 360 с.
9. Пичугин С.Ф. Вероятностный анализ ветровой нагрузки / С.Ф. Пичугин // Известия вузов. Строительство. – 1997. – №12. – С. 13 –20.
10. Pichugin Sergey. Probabilistic Specification of Design Wind Load Coefficients / Sergey Pichugin // 2nd East European Conference on Wind Engineering. – Prague, 1998. – P. 511 – 515.
11. Пичугин С.Ф. Крановые нагрузки на строительные конструкции / С.Ф. Пичугин. – Полтава: ООО «АСМИ», 2014. – 504 с.
12. Пічугін С.Ф. Статистичний опис механічних характеристик сталей для будівельних конструкцій / С.Ф. Пічугін // Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві: Зб. наук. праць. Вип. 14. – Луцьк: Луц. НТУ, 2020. – С. 147 – 159.
13. Пічугін С.Ф. Статистичні характеристики міцності матеріалів будівельних конструкцій / С.Ф. Пічугін // Збірник наукових праць Українського інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. – К.: Вид-во «Сталь», 2020. – Вип. 25-26. – С. 58 – 80.
14. ДБН В.1.2-14-2018. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд. – К.: Мінрегіон України, 2018. – 30 с
15. ДБН В.2.6-198:2014. Сталеві конструкції. Норми проектування. – К.: Мінрегіон України, 2014. – 205 с.
16. ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 71 с.
17. Семко О.В. Керування ризиками при проектуванні та експлуатації сталезалізобетонних конструкцій: Монографія / О.В. Семко, О.П. Воскобійник. – Полтава: ПолтНТУ, 2012. – 514 с.

## РОЗДІЛ 4 ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

*Кожен з коефіцієнтів, що характеризують будь-яку особливість роботи споруди, залежить від великої кількості причин і обставин, що можуть мати місце під час служби споруди, і тому найкраще може бути описаний за допомогою статистичного методу*

**М.С. Стрілецький, член-кореспондент  
Академії наук**

### 4.1. ЗАГАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО РІШЕННЯ ЗАДАЧ НАДІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ

Використаємо узагальнену процедуру одержання оцінок надійності, розроблену для будь-яких технічних систем.

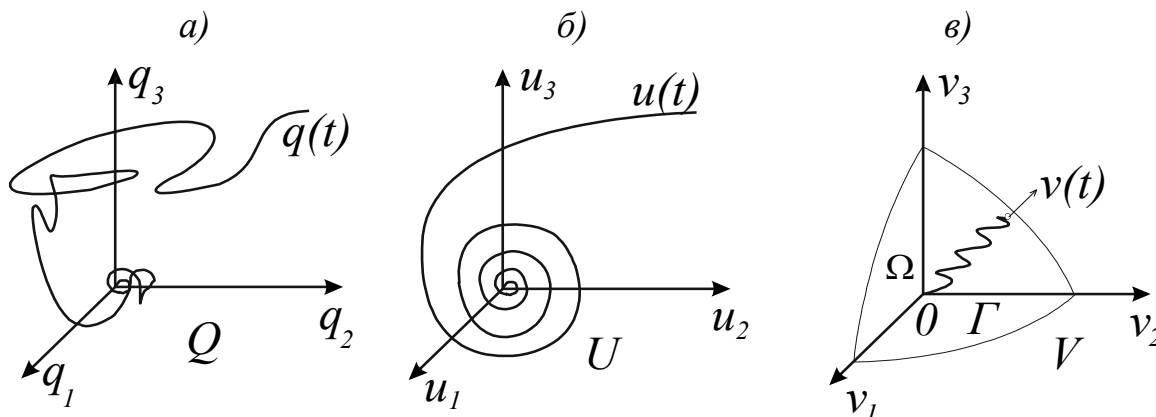
**4.1.1. Схематизація системи.** Поведінка системи (зокрема, будівельної конструкції) в узагальненому вигляді описується операторним співвідношенням

$$U = H \cdot q; \quad (4.1)$$

обернене співвідношення  $q = L \cdot u$ ,

де  $q$  – вхідні параметри, елементи простору  $Q$ ,  $q \in Q$ ;  $u$  – вихідні параметри системи, що є елементами простору  $U$  станів системи,  $u \in U$ ; еволюції вхідних параметрів і станів системи ілюструються траєкторіями  $q(t)$  та  $u(t)$  (рис. 4.1, а, б);

$H, L$  – оператори, що описують структуру й властивості системи; вони можуть мати різний характер і визначати особливості та складність системи (з точки зору надійності).



**Рис. 4.1.** До загальної процедури оцінки надійності системи:

а – траєкторія входних параметрів; б – траєкторія вихідних параметрів;  
в – відмова системи.

Види операторів (і відповідно систем): лінійні та нелінійні; вироджені (простори  $Q$  і  $U$  скінченні, відсутні операції диференціювання й інтегрування); стаціонарні (незмінні з часом) і нестаціонарні; дискретні (одномірні та багатомірні) і розподілені.

**4.1.2. Функція надійності системи.** Далі виконується перехід від простору  $U$  до *простору якості* системи  $V$  з елементами  $v \in V$ :

$$v = M \cdot u. \quad (4.2)$$

Множина станів системи, що є допустимими з точки зору якості, складає у просторі  $V$  *зону (підпростір) допустимих станів*  $\Omega$ . Межа зони  $\Omega$  – це граничний стан системи, вона називається граничною поверхнею  $\Gamma$ .

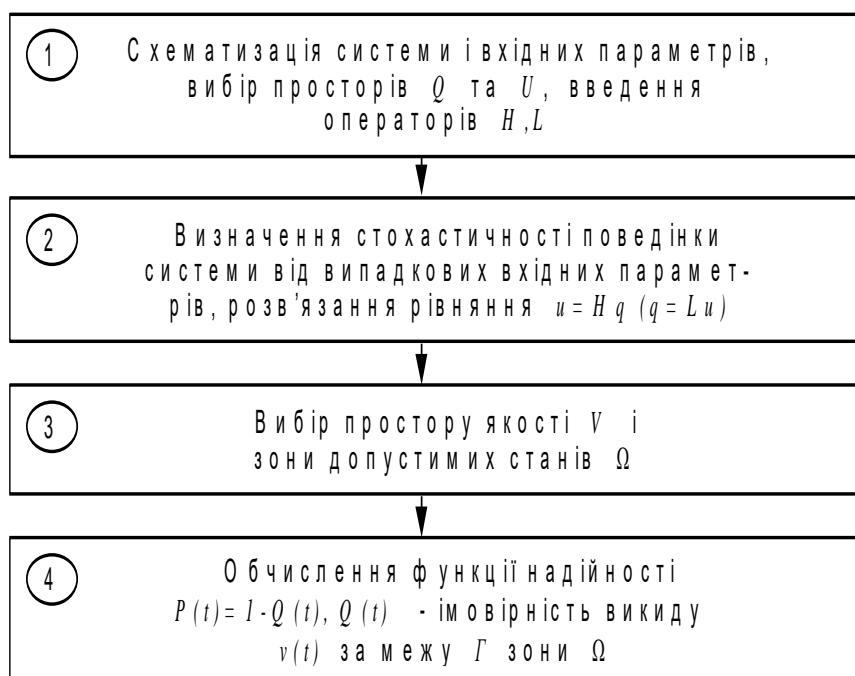
**Відмова** – це випадкове перехрещення траєкторією  $v(t)$  граничної поверхні  $\Gamma$  зони  $\Omega$  у напрямку зовнішньої нормалі (рис. 4.1, в) або випадковий викид  $v(t)$  із зони допустимих станів.



**Функція надійності**  $P(t)$  – це ймовірність знаходження елемента  $v(t)$  у допустимій зоні  $\Omega$  протягом інтервалу  $0 \leq \tau \leq t$  :

$$P(t) = F\{v(t) \in \Omega; \tau \in [0; t]\}. \quad (4.3)$$

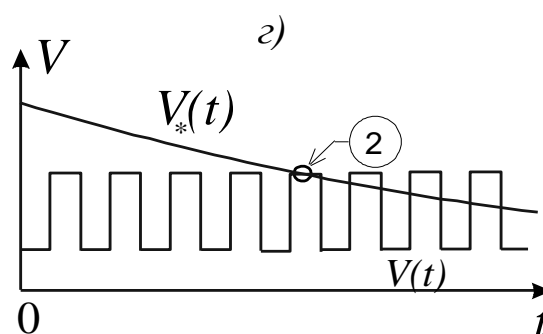
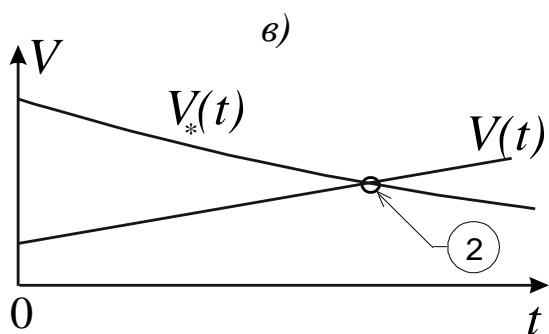
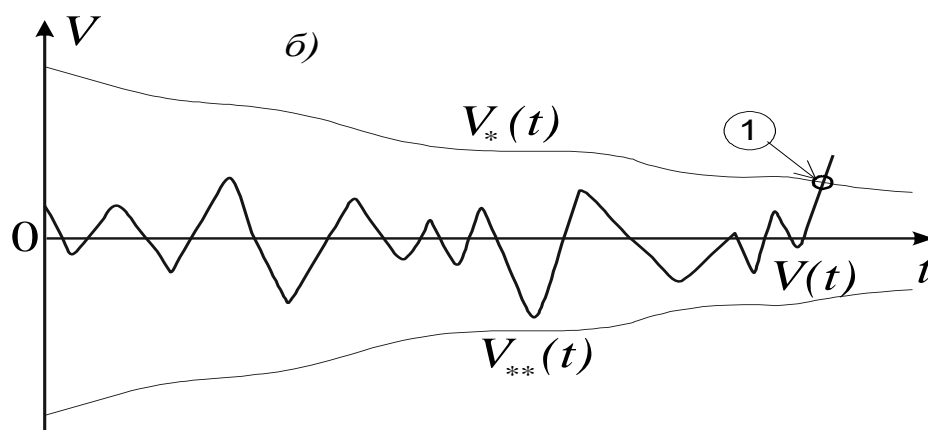
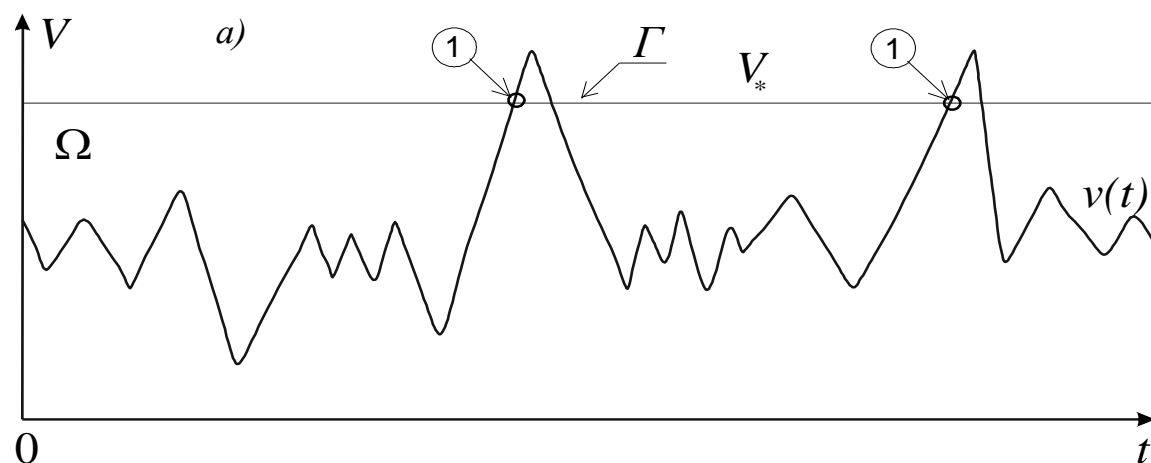
Загальна схема обчислення надійності з урахуванням фізичних, технічних, експлуатаційних факторів ілюструється на *рис. 4.2.*



**Рис. 4.2.** Загальна схема обчислення надійності системи

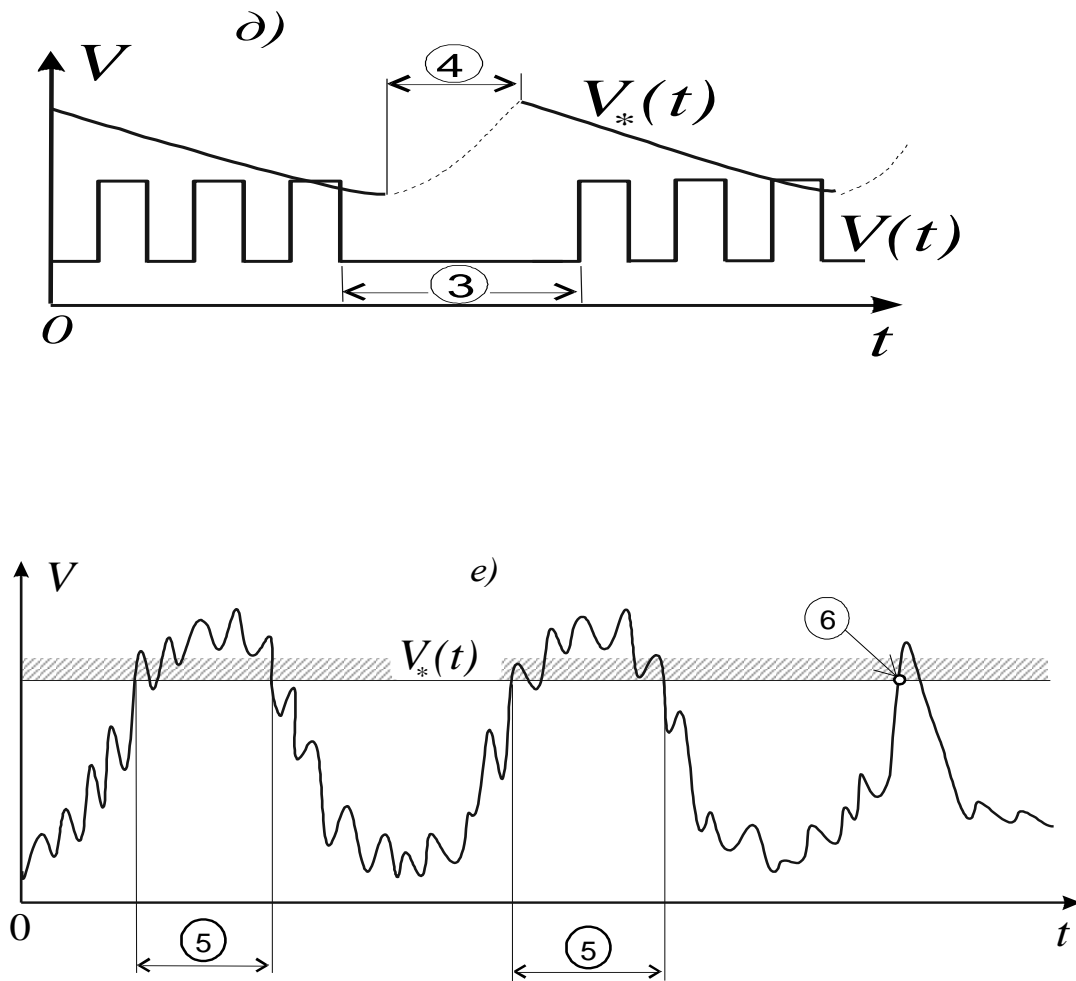
**4.1.3. Функція надійності і відмови однопараметричної системи.** Розглянемо наочний приклад однопараметричної системи, здатність якої виконувати задані функції характеризується одним параметром  $V$ . Можливі випадки ілюструються *рис. 4.3* і *4.4*:

а) випадок одного граничного значення параметра  $V^*$ , що не залежить від часу (*рис. 4.3, а*), функція надійності записується як



**Рис. 4.3. Відмови однопараметричних систем:**  
(продовження див. на наступній сторінці)

- а) раптова відмова (поз. 1), випадок одностороннього обмеження;
- б) раптова відмова (поз. 1), випадок двосторонньої зони якості, що залежить від часу;
- в) поступова відмова (поз. 2) системи з монотонним параметром якості;
- г) поступова відмова (поз. 2) системи з імпульсним параметром якості.



**Рис. 4.4. Відмови однопараметричних систем:**  
(продовження)

- д) стійка відмова (поз. 3), що усувається ремонтом (поз. 4);  
 є) тимчасова відмова (поз. 5), збій (поз. 6).

$$P(t) = F\{v(t) < v_*, 0 \leq \tau \leq t\}; \quad (4.4)$$

б) випадок двосторонньої зони якості, що залежить від часу (рис. 4.3, б), функція надійності визначається у вигляді

$$P(t) = F\{v_*(t) < v(t) < v_{**}(t); 0 \leq \tau \leq t\}; \quad (4.5)$$

в) поступові відмови (рис. 4.3, в, г);

г) стійка відмова, що має тривалий характер та ліквідується ремонтом (рис. 4.4, д);

д) тимчасова відмова внаслідок певних зовнішніх причин (наприклад, підвищення температури), яка довільно усувається (рис. 4.4, е).

## 4.2. ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ У ТЕХНІЦІ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

**4.2.1. Загальна концепція.** Перейдемо від наведеної вище постановки щодо надійності технічних систем до надійності будівельних конструкцій. Для цього запишемо узагальнену умову безвідмовної роботи (неруйнівності) конструкції, яка має наступний вигляд:

$$\tilde{Y}(t) = \tilde{R}(t) - \tilde{S}(t), \quad (4.6)$$

де  $\tilde{R}(t)$  – узагальнена несуча здатність конструкції;  
 $\tilde{S}(t)$  – узагальнене навантаження на конструкцію;  
 $\tilde{Y}(t)$  – характеристика, яку ввів О.Р. Ржаніцин і назвав резервом міцності [1]. Ми назвемо цю характеристику **резервом несучої здатності** із врахуванням того, що у межах цієї концепції будуть далі розв'язуватися також задачі надійності стиснутих і стиснуто-зігнутих елементів (розділ 5 посібника).

У даному розділі застосуємо імовірнісну техніку випадкових величин без урахування фактора часу  $t$ , яка є обґрунтованою при дії навантажень, що мало змінюються у часі (постійних і деяких

технологічних) або тих, що мають одноразовий характер. При цьому функція резерву несучої здатності запишеться як

$$\tilde{Y} = \tilde{R} - \tilde{S} \geq 0. \quad (4.7)$$

Розглянемо простий випадок, коли конструкція навантажена випадковим механічним навантаженням  $\tilde{q}$ , яке спричиняє у конструкції випадкові механічні напруження  $\tilde{\sigma}$ . Міцність конструкції – також випадкова величина, вона визначається випадковими напруженнями руйнування  $\tilde{\sigma}_y$  (наприклад, межею плинності для м'якої сталі). Несуча здатність конструкції дорівнює  $\tilde{R} = \tilde{\sigma}_y A$ , де  $A$  – геометрична характеристика перерізу конструкції;  $\tilde{S} = \alpha \tilde{q}$  – зусилля у конструкції від зовнішнього навантаження. Резерв несучої здатності може визначатися також у просторі напружень, тоді  $\tilde{R} = \tilde{\sigma}_y$ ,  $\tilde{S} = \tilde{\sigma}$ .

З точки зору узагальненої постановки задачі надійності (див. розділ 4.1) ми маємо вироджену систему, для якої зусилля (напруження) визначає вихідний параметр  $\tilde{u}$  і параметр якості  $\tilde{v}$ , тобто

$$\tilde{S} = \tilde{v} = \tilde{u} = \tilde{q} \alpha.$$

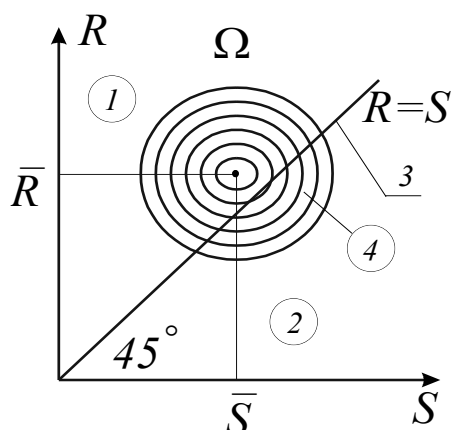
Зону допустимих станів складає множина, для кожного елемента якої виконується наведена нерівність

$$\Omega = \{Y; y = (r - s) \geq 0\}.$$

У координатах  $R - S$  зона  $\Omega$  має трикутну форму і розміщується вище від прямої  $R = S$  (рис. 4.5).

Імовірність безвідмовної роботи дорівнює

$$P = \int_{\Omega} f(Y) dY. \quad (4.8)$$



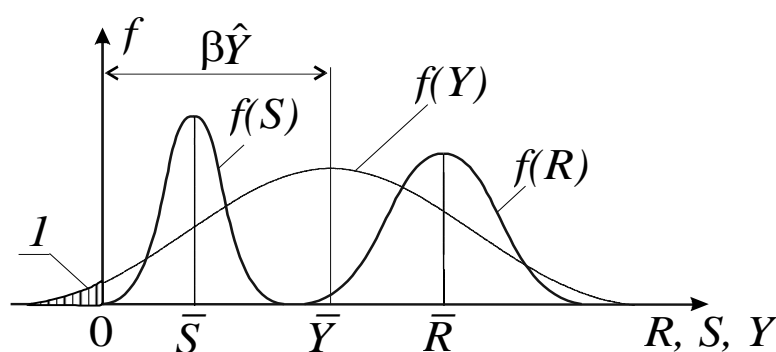
**Рис. 4.5.** До оцінки надійності у техніці випадкових величин:  
 1 – зона допустимих станів; 2 – зона відмови; 3 – межа допустимої зони;  
 4 – проекція розподілу  $f(Y)$ .

Математичне сподівання і стандарт резерву несучої здатності визначається як для лінійної функції:

$$\bar{Y} = \bar{R} - \bar{S}; \quad \hat{Y} = \sqrt{\hat{R}^2 + \hat{S}^2}. \quad (4.9)$$

Характеристика, що визначається як

$$\beta = \frac{\bar{Y}}{\hat{Y}} = \frac{1}{V_Y} = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\hat{R}^2 + \hat{S}^2}}, \quad (4.10)$$



**Рис. 4.6.** Визначення ймовірності відмови:  
 1 – ділянка відмови

називається *характеристикою безпеки* (О.Р. Ржаніцин [1]) або *індексом безпеки* (С.А Корнелл [2]), вона визначає ймовірність відмови (рис. 4.6):

$$Q(Y \leq 0) = F_Y(0) = F_Y\left(\bar{Y} - \beta \hat{Y}\right). \quad (4.11)$$

Використовуючи коефіцієнти варіації  $V_S = \hat{S}/\bar{S}$  та  $V_R = \hat{R}/\bar{R}$  і відповідні вирази  $\bar{R} = \hat{R}/V_R$  та  $\bar{S} = \hat{S}/V_S$ , з урахуванням співвідношення  $p = \hat{R}/\hat{S}$  одержимо зручну безрозмірну форму для  $\beta$

$$\beta = \frac{pV_S - V_R}{V_R V_S \sqrt{1 + p^2}}. \quad (4.12)$$

У випадку нормального розподілу  $f(Y)$  характеристика безпеки є дуже зручною:

$$\begin{aligned} Q(Y < 0) &= 0,5 - \Phi(\beta), \\ P(Y \geq 0) &= 0,5 + \Phi(\beta). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Тут  $\Phi(\beta)$  – функція Лапласа .

**4.2.3. Ймовірнісний розрахунок надійності за нормами.** Українські норми ДБН В.1.2-14-2009 «Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд [3], в розробці яких приймав участь автор посібника, врахували набутий міжнародний досвід та суттєво і глибоко розвинули основні засади методики розрахунку конструкцій на надійність.

Описана вище імовірнісна модель випадкових величин реалізована у вітчизняних нормах у дещо іншій формі і з іншими позначеннями.

Розрахункові умови реалізації відмови в узагальненому вигляді записуються у виді **функції роботоздатності**  $g$ , яка враховує параметри  $\tilde{x}_i$ , що характеризують випадкові значення впливів  $\tilde{F}$ , міцнісних характеристик  $\tilde{f}$ , геометричних характеристик  $\tilde{a}$ , часу  $T$  та інші фактори:

$$g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) < 0. \quad (4.14)$$

В якості основного показника надійності використовується **ймовірність відмови**  $P_f(T_{ef})$ , тобто ймовірність того, що за встановлений час виникне відмова заданого виду

$$P_f(T_{ef}) = Prob\{g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) < 0 / T_{ef}\}, \quad (4.15)$$

де символ  $Prob\{A/T\}$  визначає ймовірність реалізації події  $A$  протягом часу  $T$ .

Норми [3] допускають також характеризувати безвідмовність **дальністю відмови**  $\beta$ , наближено пов'язаною з імовірністю  $P_f$  співвідношенням

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f), \quad (4.16)$$

де  $\Phi(z)$  – функція нормованого розподілу ймовірностей роботоздатності  $g$ .

При використанні в розрахунках нормального розподілу ймовірностей функція  $\Phi(z)$  може бути визначена у вигляді інтегралу ймовірностей:

$$\Phi(z) = 0,5\pi^{-1} \int_{-\infty}^z \exp[-u^2 / 2] du. \quad (4.17)$$

Нормативні вимоги до безвідмовності формулюються за допомогою розрахункової умови реалізації відмови (4.14) та ймовірності її виконання (4.15) у вигляді

$$P_{f,i}(T_{ef}) = Rrob\{g_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) < 0 / T_{ef}\} \leq P_i^{ex}, \quad (4.18)$$

де  $g_i$  – функція роботоздатності відносно відмови  $i$ -го виду;  $P_i^{ex}$  – доцільне значення імовірності відмови  $i$ -го виду, яке приймається згідно з табл. 4.1.



Таблиця 4.1

Доцільна імовірність відмови  $P_i^{ex}$ 

Клас наслідків (відповідальності)	Категорія відповідальності конструкції	Значення $P_i^{ex}$ , які використовуються в розрахункових ситуаціях				
		усталених		перехідних		аварійних
		перша група граничних станів	друга група граничних станів	перша група граничних станів	друга група граничних станів	перша група граничних станів
СС3	А	$1 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-5}$
	Б	$5 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
	В	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$
СС2	А	$5 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-5}$
	Б	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-4}$
	В	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-4}$
СС1	А	$1 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$
	Б	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$
	В	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-3}$

**Примітка.** Для тимчасових будівель та споруд із встановленим терміном експлуатації до трьох років значення приймаються як для об'єктів класу СС1-В незалежно від класу наслідків (відповідальності) конструкції.

Якщо використовується дальність відмови  $\beta$ , то замість (4.15) приймається умова

$$\beta \geq \beta_i^{ex}, \quad (4.19)$$

де доцільне значення  $\beta_i^{ex}$  для відмови  $i$ -го виду приймається згідно з табл. 4.2 або відповідно до прийнятої доцільної ймовірності відмови.

Примітки до табл. 4.2.

1. Для тимчасових будівель та споруд зі встановленим терміном експлуатації до трьох років значення приймаються як для об'єктів класу СС1-В незалежно від класу наслідків (відповідальності) конструкції.

2. Дозволяється встановлювати інші значення нормативної ймовірності відмови при належному обґрунтуванні.

Таблиця 4.2

Доцільні значення характеристики безпеки  $\beta_i^{ex}$

Клас наслідків (відповідальності)	Категорія відповідальності конструкції	Значення $\beta_i^{ex}$ , які використовуються в розрахункових ситуаціях				
		усталених		перехідних		аварійних
		перша група граничних станів	друга група граничних станів	перша група граничних станів	друга група граничних станів	перша група граничних станів
СС3	A	4,76	4,27	4,45	3,72	4,45
	B	4,75	4,27	4,27	3,72	3,89
	B	4,45	3,89	3,89	3,29	3,89
СС2	A	4,75	3,89	4,27	3,29	4,27
	B	4,45	3,89	3,89	3,29	3,72
	B	4,27	3,72	3,72	3,09	3,72
СС1	A	4,45	3,72	3,89	3,09	3,89
	B	4,27	3,72	3,72	3,09	3,29
	B	3,89	3,29	3,29	2,58	3,29

### 4.3. ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ БАЛОК З ВУГЛЕПЛАСТИКОВИМ ЗОВНІШНІМ АРМУВАННЯМ

**4.3.1. Загальні положення.** Підсилення будівельних конструкцій – важлива науково-технічна проблема, актуальність якої наростає нині. Особливість цієї галузі будівництва останніми роками – поява, дослідження і активне впровадження в практику посилення конструкцій нових сучасних матеріалів, що мають високі міцнісні й експлуатаційні властивості.

Одними з таких матеріалів є композитні матеріали на підставі вуглецевого волокна (ФАП). Прикладом їх застосування може служити система зовнішнього армування композитними

матеріалами ряду торгових марок, призначена для підвищення міцності і довговічності залізобетонних, бетонних, цегляних і кам'яних конструкцій (рис. 4.7).



**Рис. 4.7. Залізобетонні балки, підсилені вуглепластиком**

Для розрахунку залізобетонних конструкцій, підсилених композитними матеріалами, розроблені рекомендаційні документи [4], накопичений певний досвід посилення вуглепластиком залізобетонних, сталевих і дерев'яних конструкцій. При цьому важливою і малодослідженою є оцінка надійності як вживаних композитних матеріалів, так і підсилених ними конструкцій. У цьому розділі освітлюється розрахунок надійності залізобетонних балок, підсилених вуглепластиком, розроблений на основі загальної методики, викладеної вище у розділах 4.1 і 4.2. У розрахунку використовується апробований прийом з підстановкою імовірнісних параметрів в детерміністичні рішення міцності залізобетонних балок.

При цьому береться до уваги, що більшість випадкових аргументів резерву несучої здатності залізобетонних балок можуть обґрунтовано описуватися нормальним законом (розподілом Гаусса), зокрема, міцність бетону, арматури, вуглепластика, а також ряд навантажень (постійні, технологічні, кранові і т.д.). При розробці оцінок надійності за основу брався розрахунок по міцності перерізів, нормальних до подовжньої осі залізобетонних балок, не посилених і з посиленням вуглепластиком, розроблений в нормах залізобетонних конструкцій і рекомендаціях [4]. Розглянуті залізобетонні балки

прямокутного перерізу без підсилення і підсилені вуглепластиком [5].

**4.3.2. Балка без підсилення з одиночною розтягнутою арматурою.** Випадкове значення граничного згинального моменту, що сприймається балкою [6]:

$$\tilde{M}_{ult} = f(\tilde{\sigma}_b, \tilde{\sigma}_s) = \tilde{\sigma}_s A_s (h_0 - 0,5\tilde{x}), \quad (4.20)$$

де  $\tilde{\sigma}_b$  – випадкове значення опору бетону стиску для граничних станів першої групи;  $\tilde{\sigma}_s$  – випадкове значення міцності на розтяг стержневої арматури;  $A_s$  – площа перерізу розтягнутої стержневої арматури;  $h_0$  – розрахункова висота перерізу;  $x$  – висота стиснутої зони бетону, що дорівнює

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{\sigma}_s A_s}{\tilde{\sigma}_b b},$$

де  $b$  – ширина перерізу.

Підставляємо вираз для  $x$  у формулу (4.20):

$$\tilde{M}_{ult} = \tilde{\sigma}_s A_s h_0 - 0,5 \frac{(\tilde{\sigma}_s A_s)^2}{\tilde{\sigma}_b b}. \quad (4.21)$$

Враховуючи загальний вираз (4.21), маємо для математичного очікування граничного моменту

$$\bar{M}_{ult} = \bar{\sigma}_s A_s h_0 - 0,5 \frac{(\bar{\sigma}_s A_s)^2}{\bar{\sigma}_b b}, \quad (4.22)$$

де  $\bar{\sigma}_s, \bar{\sigma}_b$  – відповідно математичне очікування міцності арматури і опору бетону.

Визначимо коефіцієнти для обчислення стандарту граничного моменту:

$$D_s = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_s} = A_s h_0 - \frac{\sigma_s A_s^2}{\sigma_b b} = \frac{A_s}{\sigma_b b} (\sigma_b h_0 b - \sigma_s A_s);$$

$$D_b = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_b} = \frac{0,5}{\sigma_b^2 b} (\sigma_s A_s)^2. \quad (4.23)$$

Стандарт граничного згинального моменту визначається як

$$\hat{M}_{ult} = \sqrt{(D_b \hat{\sigma}_b)^2 + (D_s \hat{\sigma}_s)^2}. \quad (4.24)$$

Для оцінки надійності балок визначаємо характеристику безпеки, що має в даному випадку наступний вигляд:

$$\beta = (\bar{M}_{ult} - M_{cal}) / \hat{M}_{ult}. \quad (4.25)$$

де  $M_{cal}$  – розрахункове значення зовнішнього згинального моменту у балці.

Обчислення оцінки надійності балок виконується з використанням функції Лапласа:

$$Q(Y < 0) = 0,5 - \Phi(\beta). \quad (4.26)$$

Для наочності наведених загальних формул в якості прикладу була розглянута залізобетонна балка, яка має переріз із розмірами  $b = 300$  мм,  $h = 800$  мм,  $a = 70$  мм; розтягнута арматура А400 ( $R_s = 355$  МПа); площа її перерізу  $A_s = 2945$  мм<sup>2</sup> = 29,45 см<sup>2</sup> (6Ø25); бетон класу В25 ( $R_b = 14,5$  МПа); розрахунковий зовнішній згинальний момент  $M_{cal} = 650$  кНм. Повний розрахунок надійності цієї балки наведений у монографії [7], в результаті якого була обчислена характеристика безпеки і визначена імовірність відмови розглянутої балки:  $\beta = 3,51$ ;  $Q(\beta) = 2,26 \cdot 10^{-4}$ .

**4.3.4. Балка з одиночною розтягнутою арматурою, підсилена вуглепластиком.** Випадкове значення граничного згинального моменту, що сприймається підсиленою балкою [4]:

$$\tilde{M}_{ult} = f(\tilde{\sigma}_b, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_{fu}) = \tilde{\sigma}_{fu} A_f (h - 0,5\tilde{x}) + \tilde{\sigma}_s A_s (h_0 - 0,5\tilde{x}), \quad (4.27)$$

де  $\tilde{\sigma}_{fu}$  – випадкове значення міцності на розтяг ФАП;  
 $A_f$  – площа перетину вуглепластикової арматури;  $h$  – висота перерізу;  $x$  – висота стиснутої зони бетону, рівна

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{\sigma}_{fu} A_f + \tilde{\sigma}_s A_s}{\tilde{\sigma}_b b}.$$

Підставляємо вираз для  $x$  у формулу (4.27)

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ult} &= \tilde{\sigma}_{fu} A_f \left( h - 0,5 \frac{\tilde{\sigma}_{fu} A_f + \tilde{\sigma}_s A_s}{\tilde{\sigma}_b b} \right) + \tilde{\sigma}_s A_s \left( h_0 - 0,5 \frac{\tilde{\sigma}_{fu} A_f + \tilde{\sigma}_s A_s}{\tilde{\sigma}_b b} \right) = \\ &= \tilde{\sigma}_{fu} A_f h + \tilde{\sigma}_s A_s h_0 - \frac{0,5}{\tilde{\sigma}_b b} (\tilde{\sigma}_{fu} A_f + \tilde{\sigma}_s A_s)^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Математичне очікування граничного моменту отримуємо як для лінійної функції, підставляючи в отриманий вираз математичні очікування випадкових аргументів.

Визначимо коефіцієнти для обчислення стандарту граничного моменту:

$$D_{fu} = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_{fu}} = \frac{A_f}{\sigma_b b} [\sigma_b h b - (\sigma_{fu} A_f + \sigma_s A_s)]; \quad (4.29)$$

$$D_s = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_s} = \frac{A_s}{\sigma_b b} [\sigma_b h_0 b - (\sigma_{fu} A_f + \sigma_s A)]; \quad (4.30)$$

$$D_b = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_b} = \frac{0,5}{\sigma_b^2 b} (\sigma_{fu} A_f + \sigma_s A_s)^2. \quad (4.31)$$

Числові значення коефіцієнтів отримуємо, підставляючи в отримані вирази математичні очікування випадкових аргументів.

Стандарт граничного згинального моменту визначається як

$$\hat{M}_{ult} = \sqrt{(D_b \hat{\sigma}_b)^2 + (D_s \hat{\sigma}_s)^2 + (D_{fu} \sigma_{fu})^2}. \quad (4.32)$$

Для конкретизації наведених формул була розглянута та ж залізобетонна балка, що в попередньому прикладі, але підсилена одним шаром вуглецевої тканини шириною 300 мм, площа перерізу підсилення  $A_f = 52,5 \text{ мм}^2 = 0,525 \text{ см}^2$ . Розрахункова міцність вуглетканини  $R_{fu} = 1033 \text{ МПа}$ . Розрахунок, повністю наведений у монографії [7], визначив наступні характеристики безпеки й імовірність відмови балки:  $\beta = 4,49$ ;  $Q(\beta) = 3,4 \cdot 10^{-6}$ .

Отримана ймовірність відмови істотно нижче, ніж ймовірність відмови балки без підсилення. Таким чином, підсилення залізобетонних балок вуглепластиковою стрічкою значно підвищує їхню надійність.

Слід відмітити, що формули для визначення числових характеристик граничного моменту для непідсиленої і підсиленої балок виводились як для лінійної функції випадкових аргументів. Такий підхід в даному випадку є цілком прийнятним, оскільки лінеаризація розглянутих функцій не призводить до помітних похибок (виконувалися відповідні чисельні розрахунки, які тут не наводяться).

Для спрощення у розрахунках враховувалося детерміноване зовнішнє навантаження. При врахуванні випадкового навантаження оцінки ймовірності відмови балок дещо зменшуються: для непідсиленої балки – з  $2,26 \cdot 10^{-4}$  до  $2,6 \cdot 10^{-6}$ ; для підсиленої – з  $3,4 \cdot 10^{-6}$  до  $1,1 \cdot 10^{-7}$ .

**4.3.6. Балка з подвійною арматурою без підсилення.** Випадкове значення граничного згинального моменту, що сприймається балкою [6]:

$$\tilde{M}_{ult} = f(\tilde{\sigma}_b, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_{sc}) = \tilde{\sigma}_s A_s (h_0 - 0,5\tilde{x}) + \tilde{\sigma}_{sc} A'_s (0,5\tilde{x} - a'). \quad (4.33)$$

де  $\tilde{\sigma}_{sc}$  – випадкове значення міцності стержневої арматури на стиск;  $A'_s$  – площа перерізу стиснутої стержневої арматури;  $a'$  – відстань від рівнодійної зусилля в стиснутій стержневій арматурі

до стиснутої грані елемента;  $x$  – висота стиснутої зони бетону, що дорівнює

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{\sigma}_s A_s - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s}{\tilde{\sigma}_b b}.$$

Підставляємо вираз для  $x$  у формулу (4.33):

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ult} &= \tilde{\sigma}_s A_s \left( h_0 - 0,5 \frac{\tilde{\sigma}_s A_s - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s}{\tilde{\sigma}_b b} \right) + \tilde{\sigma}_{sc} A'_s \left( 0,5 \frac{\tilde{\sigma}_s A_s - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s}{\tilde{\sigma}_b b} - a' \right) = \\ &= \tilde{\sigma}_s A_s h_0 - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s a' - \frac{0,5}{\tilde{\sigma}_b b} (\tilde{\sigma}_s A_s - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s)^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Математичне очікування граничного моменту отримуємо, підставляючи в отриманий вираз математичні очікування випадкових аргументів.

Визначимо коефіцієнти для обчислення стандарту граничного моменту:

$$D_{sc} = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_{sc}} = \frac{A'_s}{\sigma_b b} [-\sigma_b b a' + (\sigma_s A_s - \sigma_{sc} A'_s)]; \quad (4.35)$$

$$D_s = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_s} = \frac{A_s}{\sigma_b b} [\sigma_b h_0 b - (\sigma_s A_s - \sigma_{sc} A'_s)]; \quad (4.36)$$

$$D_b = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_b} = \frac{0,5}{\sigma_b^2 b} (\sigma_s A_s - \sigma_{sc} A'_s)^2. \quad (4.37)$$

Числові значення коефіцієнтів визначаємо, підставляючи в отримані вирази математичні очікування випадкових аргументів.

Стандарт граничного згинального моменту визначається як

$$\hat{M}_{ult} = \sqrt{(D_b \hat{\sigma}_b)^2 + (D_s \hat{\sigma}_s)^2 + (D_{sc} \hat{\sigma}_{sc})^2}. \quad (4.38)$$

Для конкретизації наведених формул вибрана залізобетонна балка, яка має переріз з розмірами  $b = 300$  мм,  $h = 700$  мм,  $a = 50$



мм,  $a' = 30$  мм; арматура А400 ( $R_s = R_{sc} = 355$  МПа); площа перерізу розтягнутої арматури  $A_s = 3054 \text{ мм}^2 = 30,54 \text{ см}^2$  (3Ø36), площа перерізу стиснутої арматури  $A'_s = 942 \text{ мм}^2 = 9,42 \text{ см}^2$  (3Ø20); бетон класу В30 ( $R_b = 17,0$  МПа); діючий розрахунковий зовнішній згинальний момент  $M'_{cal} = 500$  кНм. Розрахунковий момент після реконструкції збільшується до  $M''_{cal} = 750$  кНм.

Опускаючи послідовність розрахунку, приведеного в монографії, наведемо лише характеристику безпеки по відношенню до вихідного розрахункового значення зовнішнього згинального моменту в балці  $M'_{cal} = 500$  кНм:  $\beta = 8,78$ .

Імовірність відмови балки занадто низька  $Q(\beta) = 4,0 \cdot 10^{-19}$ .

Повторюємо перевірку для збільшеного зовнішнього згинального моменту  $M'_{cal} = 750$  кНм:  $\beta = 0,42$ .

В цьому випадку імовірність відмови  $Q(\beta) = 0,337$  занадто висока, що свідчить про аварійність балки і необхідність її підсилення.

**4.3.8. Балка з подвійною арматурою, підсилена вуглепластиком.** Випадкове значення граничного згинального моменту, що сприймається балкою [4]:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ult} = f(\tilde{\sigma}_b, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_{sc}, \tilde{\sigma}_{fu}) = & \tilde{\sigma}_{fu} A_f (h - 0,5\tilde{x}) + \tilde{\sigma}_s A_s (h_0 - 0,5\tilde{x}) + \\ & + \tilde{\sigma}_{sc} A'_s (0,5\tilde{x} - a'), \end{aligned} \quad (4.39)$$

де  $x$  – висота стиснутої зони бетону, що дорівнює для даного випадку

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{\sigma}_{fu} A_f + \tilde{\sigma}_s A_s - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s}{\tilde{\sigma}_b b}.$$

Підставляємо вираз для  $x$  у формулу (4.39):

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{ult} &= \tilde{\sigma}_{fu} A_f \left( h - 0,5 \frac{\tilde{\sigma}_{fu} A_f + \tilde{\sigma}_s A_s - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s}{\tilde{\sigma}_b b} \right) + \\
&+ \tilde{\sigma}_s A_s \left( h_0 - 0,5 \frac{\tilde{\sigma}_{fu} A_f + \tilde{\sigma}_s A_s - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s}{\tilde{\sigma}_b b} \right) + \\
&+ \tilde{\sigma}_{sc} A'_s \left( 0,5 \frac{\tilde{\sigma}_{fu} A_f + \tilde{\sigma}_s A_s - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s}{\tilde{\sigma}_b b} - a' \right) = \\
&= \tilde{\sigma}_{fu} A_f h + \tilde{\sigma}_s A_s h_0 - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s a' - \frac{0,5}{\tilde{\sigma}_b b} (\tilde{\sigma}_{fu} A_f + \tilde{\sigma}_s A_s - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s)^2. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Математичне очікування граничного моменту одержуємо, підставляючи в одержаний вираз математичні очікування випадкових аргументів.

Визначаємо коефіцієнти для обчислення стандарту граничного моменту:

$$D_{fu} = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_{fu}} = \frac{A_f}{\sigma_b b} [\sigma_b h b - (\sigma_{fu} A_f + \sigma_s A_s - \tilde{\sigma}_{sc} A'_s)]; \quad (4.41)$$

$$D_{sc} = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_{sc}} = \frac{A'_s}{\sigma_b b} [-\sigma_b b a' + (\sigma_{fu} A_f + \sigma_s A_s - \sigma_{sc} A'_s)]; \quad (4.42)$$

$$D_s = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_s} = \frac{A_s}{\sigma_b b} [\sigma_b h_0 b - (\sigma_{fu} A_f + \sigma_s A_s - \sigma_{sc} A'_s)]; \quad (4.43)$$

$$D_b = \frac{\partial M_{ult}}{\partial \sigma_b} = \frac{0,5}{\sigma_b^2 b} [(\sigma_{fu} A_f + \sigma_s A_s - \sigma_{sc} A'_s)]^2. \quad (4.44)$$

Числові значення коефіцієнтів одержуємо, підставляючи в одержані вирази математичні очікування випадкових аргументів.

Стандарт граничного згинального моменту визначається як

$$\hat{M}_{ult} = \sqrt{(D_{fu} \hat{\sigma}_{fu})^2 + (D_b \hat{\sigma}_b)^2 + (D_s \hat{\sigma}_s)^2 + (D_{sc} \hat{\sigma}_{sc})^2}. \quad (4.45)$$

Для оцінювання збільшення надійності залізобетонної балки з подвійним армуванням внаслідок підсилення ФАП, розглянемо

балку з попереднього прикладу. Підсилення – вуглепластик гарячого твердіння (ламинат), товщина моношару 1,4 мм, ширина 250 мм, площа перерізу підсилення  $A_f = 350 \text{ мм}^2 = 3,50 \text{ см}^2$ .

Розрахункова міцність вуглепластика  $R_{fu} = 1071 \text{ МПа}$ .

Опускаючи числові викладки, наведені у монографії [7], наведемо одержану характеристику безпеки підсиленої балки по відношенню до збільшеного розрахункового значення зовнішнього згинального моменту балці  $M'_{cal} = 750 \text{ кНм}$ :  $\beta = 6,79$ .

Імовірність відмови підсиленої балки значно зменшилася в порівнянні з непідсиленим варіантом:  $Q(\beta) = 1,3 \cdot 10^{-11}$ .

Отримана оцінка ймовірності відмови свідчить про достатню надійність балки і ефективність її підсилення вуглепластиком.

#### 4.4. УРАХУВАННЯ ФАКТОРА ЧАСУ У РОЗРАХУНКАХ НАДІЙНОСТІ

Нагадаємо, що у загальному випадку умова безвідмовності конструкції записується у вигляді (4.6):

$$\tilde{Y}(t) = \tilde{R}(t) - \tilde{S}(t) > 0.$$

**4.4.1. Випадкові процеси.** При застосуванні імовірнісної моделі випадкових процесів, у наведеному виразі  $\tilde{S}(t)$  – зусилля (або напруження) у конструкції у формі випадкового процесу;  $\tilde{R}(t)$  – випадковий процес або випадкова величина  $\tilde{R}$  несучої здатності;  $\tilde{Y}(t)$  – випадковий процес резерву несучої здатності конструкції.

В таких умовах відмова конструкції трактується як **викид** випадкового зусилля  $\tilde{S}(t)$  за випадковий рівень несучої здатності  $\tilde{R}(t)$  (рис. 4.8) або як викид ВП  $\tilde{Y}(t)$  у від'ємну область.

Якщо прийняти, що навантаження і несуча здатність описуються стаціонарними або квазістаціонарними випадковими процесами, то оцінка ймовірності відмови конструкції може бути визначена за кількістю викидів  $N_+(t)$  як

$$Q(t) \cong N_+(t) = \frac{\omega_q f_Y(\beta) t}{\beta_\omega \sqrt{2\pi}}. \quad (4.46)$$

Ця формула одержана у нашій роботі [7], в ній прийняті такі позначення:  $\omega_q$  – ефективна частота випадкового процесу резерву несучої здатності;  $f_Y(\beta)$  – ордината густини розподілу функції резерву несучої здатності  $\tilde{Y}$ , що відповідає значенню характеристики безпеки  $\beta$  (рис. 4.6);  $t$  – наробіток конструкції;  $\beta_\omega$  – коефіцієнт широкополосності випадкового процесу  $\tilde{Y}(t)$  (детальний опис цього коефіцієнту наведений нижче в п. 4.6.2).

Якщо  $\tilde{R}(t)$  та  $\tilde{S}(t)$  розподілені нормально, тоді  $\tilde{Y}(t)$  також має нормальний розподіл, і формула для  $Q(t)$  одержує такий вигляд:

$$Q(t) = \omega_q \cdot \frac{e^{-0,5\beta^2 t}}{2\pi\beta_\omega}. \quad (4.47)$$

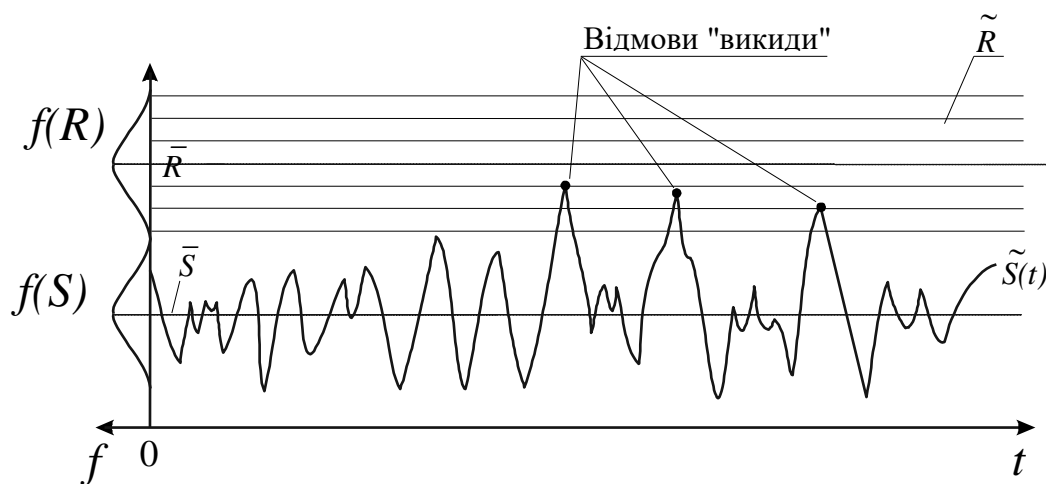


Рис. 4.8. Відмови елемента під навантаженням у формі випадкового процесу

Спираючись на формулу (4.47) и задаючись нормативним значенням імовірності відмови  $[Q]$ , легко визначити відповідну характеристику безпеки:

$$\beta = \sqrt{2 \ln \frac{\omega_q t}{2\pi [Q] \beta_\omega}}. \quad (4.48)$$

Для одержання чисельних оцінок надійності за загальною формулою (4.46) необхідно розв'язати дві основні задачі:

а) визначення ординати  $f_Y(\beta)$ , для чого слід побудувати суми (композиції) або різниці розподілів різного виду, які суттєво відрізняються від розповсюдженого нормального закону; вирішення цієї задачі наводиться нижче в п. 4.5;

б) визначення спільної частотної характеристики  $\omega_q$  випадкових процесів навантажень і несучої здатності з різними частотно-часовими параметрами; вирішення цієї задачі разом з визначенням коефіцієнту широкополосності  $\beta_\omega$  наводиться нижче в п. 4.6.

Викладена методика включена в норми [3] в наступній формі: вірогідність досягнення конструкцією відмови за встановлений термін служби  $T_{ef}$  визначається як

$$P_f(T_{ef}) = K_0 f_Y(\beta) T_{ef}. \quad (4.49)$$

Тут позначено:

$f_Y(\beta)$  – щільність нормованого розподілу випадкових значень величини резерву несучої здатності  $\tilde{Y} = \tilde{R} - \tilde{S}$  при значенні, що відповідає дальності відмови (характеристиці безпеки)  $\beta$  (4.10);  $K_0$  – частотна характеристика, яка розраховується за формулою

$$K_0 = \frac{(1 + \theta^2 k^2)}{3} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{s}_i a_i K_i^{tr} \omega_i)^2}{2\pi (1 + \theta^2 k^2) (1 + k^2) (\hat{r}^2 + \hat{s}^2)} \right]^{1/2}. \quad (4.50)$$

У формулі (4.50) позначено:  $\omega_i$  – ефективна частота  $i$ -го впливу;  $K_i^{tr}$  – коефіцієнт тренда, який враховує сезонні зміни  $i$ -го впливу (наприклад, снігового та вітрового навантажень);  $\theta$  – відношення ефективної частоти найбільш високочастотного з навантажень, які враховуються (наприклад, кранового), до другої по зменшенню ефективної частоти (наприклад, частоті вітрового навантаження);  $k = \hat{s}_0 / \sqrt{\hat{s}^2 + \hat{r}^2 - \hat{s}_0^2}$  – коефіцієнт, що характеризує вклад стандарту  $\hat{s}_0$  найбільш високочастотного навантаження, який враховується, в стандарт резерву несучої здатності.

Основні положення розробленої методики оцінки надійності в техніці випадкових процесів викладені в монографії і публікаціях автора [7], вона успішно застосована для широкого кола конструкцій, про що йдеться в наступних розділах даного розділу посібника, а також для сталевих конструкцій магістральних трубопроводів [9] і висотних споруд під дією вітра [10].

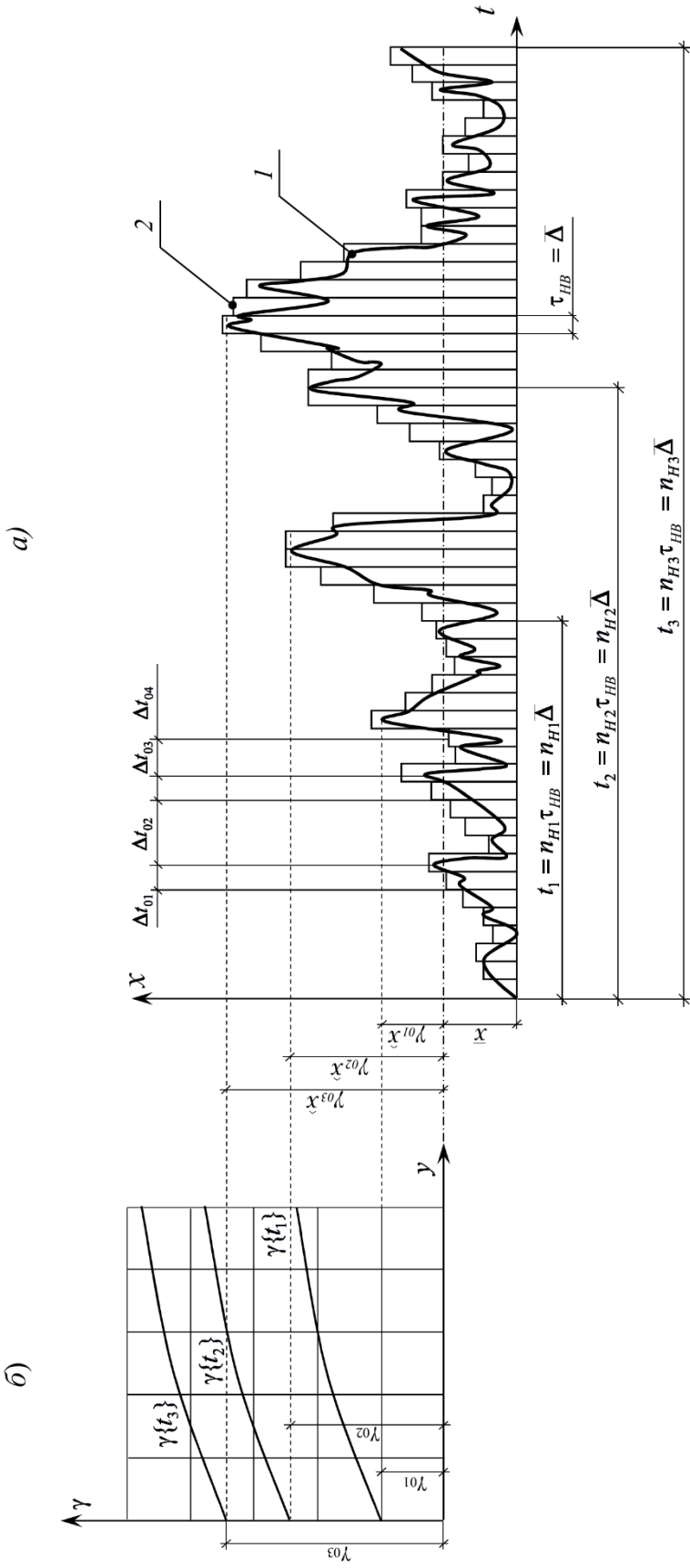
**4.4.2. Схема незалежних випробувань** (випадкова послідовність незалежних випадкових навантажень), згідно з якою імовірність неперевикнення навантаженням нормованого рівня  $\gamma$  за час  $t$  визначається як результат реалізації  $n_n$  незалежних випробувань (незалежних навантажень) (рис. 4.9, поз. 2):

$$P(\gamma, t) = [P(\gamma)]^{n_n}, \quad (4.51)$$

де  $P(\gamma) = P_1(\gamma)$  – імовірність неперевикнення рівня  $\gamma$  в окремому випробуванні.

Відповідно імовірність відмови визначиться як

$$Q(\gamma, t) = 1 - P(\gamma, t) = 1 - [P_1(\gamma)]^{n_n}. \quad (4.52)$$



**Рис.4.9. Відображення випадкового процесу у ЗФПН**  
 а – реалізація ВП; 1 – модель неперервного ВП; 2 – дискретна модель;  
 б - загальна форма представлення навантаження (ЗФПН)

Важливо, щоб у кожному випробуванні навантаження були дійсно незалежними, тоді інтервал часу  $\tau_{ni} = t/n_n$  можна назвати «інтервалом схеми незалежних випробувань». На такі інтервали слід «нарізати» час реалізації навантаження, щоб одержати об'єктиву і незмінну оцінку імовірності відмови  $Q(t)$ .

Для високонадійних конструкцій формула (4.52) з достатньою точністю спрощується:

$$Q_n(\gamma, t) = 1 - [P_1(\gamma)]^{n_n} \cong n_n Q_1(\gamma). \quad (4.53)$$

В практичних викладках корисно використовувати співвідношення між диференційною і інтегральною функціями будь-якого розподілу:

$$\mu(\gamma) = \frac{f(\gamma)}{1 - F(\gamma)} = \frac{f(\gamma)}{Q(\gamma)}, \quad (4.54)$$

де  $\mu(\gamma)$  – функція інтенсивності розподілу.

Для деяких розподілів  $\mu(\gamma)$  визначається у загальній аналітичній формі (розподіл Вейбулла), для більшості розподілів (наприклад, нормального)  $\mu(\gamma)$  визначається чисельно, можуть також використовуватися таблиці.

Спираючись на спрощену формулу (4.53), використовуючи  $\mu(\gamma)$  і нормативне значення імовірності відмови  $[Q]$ , одержуємо співвідношення для нормального розподілу  $Q_1(\beta)$ :

$$n_n Q_1(\beta) = n_n \frac{f(\beta)}{\mu(\beta)} = n_n \frac{\exp(-0,5\beta^2)}{\mu(\beta)\sqrt{2\pi}} = [Q].$$

Звідси легко визначається відповідна характеристика безпеки:

$$\beta = \sqrt{2 \ln \frac{n_n}{\mu(\beta)\sqrt{2\pi}[Q]}}. \quad (4.55)$$



Рішення даного нелінійного рівняння спрощується, якщо врахувати, що для нормального закону при великих  $\beta$  дійсне співвідношення  $\mu(\beta \approx \beta)$ .

## 4.5. РОЗПОДІЛИ СУМИ І РІЗНИЦІ РОЗПОДІЛІВ

**4.5.1. Загальний підхід.** Побудова закону розподілу суми (композиції) розподілів, наприклад, сумарного навантаження (зусилля), ускладнюється тим, що розподіли окремих навантажень, як показано вище в розділі 3, значно відрізняються від нормальних. Якщо складаються незалежні навантаження, тобто у випадку композиції законів розподілу  $f_1(X_1)$  і  $f_2(X_2)$ , щільність розподілу суми  $X = X_1 + X_2$  визначається за формулами згортки виду [11]:

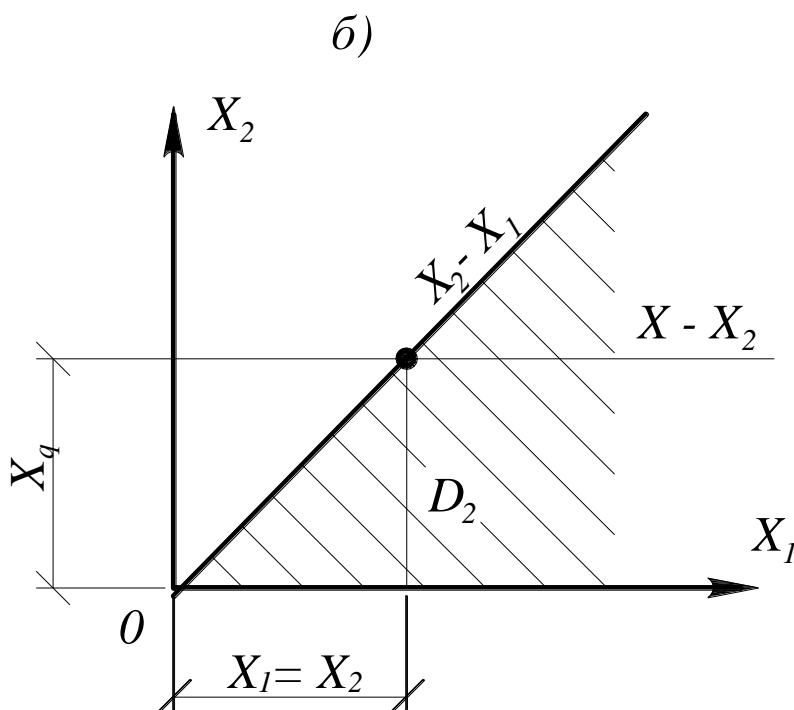
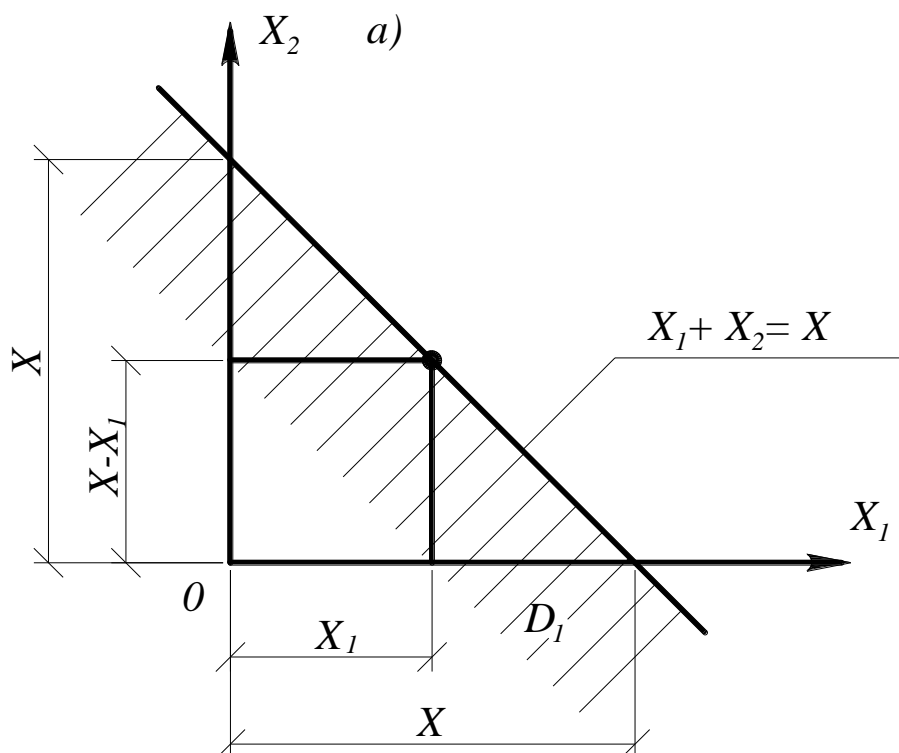
$$f_{12}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(X_1) f_2(X - X_1) dX_1; \quad (4.56)$$

$$f_{12}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(X - X_1) f_2(X_1) dX_1. \quad (4.57)$$

Якщо обидва закони відмінні від нуля тільки при позитивних значеннях аргументу, то межі інтегрування звужуються:

$$f_{12}(X) = \int_0^{+\infty} f_1(X_1) f_2(X - X_1) dX_1. \quad (4.58)$$

Як показано на *рис. 4.10*, в першому випадку інтегрування йде по півплощині  $D_1$ , обмеженій прямою  $X = X_1 + X_2$ , у другому випадку - по трикутнику  $D_2$ , укладеним між  $X_2 = 0$  і  $X_2 = X_1$ .



**Рис. 4.10. Зв'язок параметрів при композиції законів розподілу:**  
 а – безкінечна область; б – позитивна область

У деяких порівняно нечисленних випадках вдається отримати аналітичні вирази для композиції розподілів, у тому числі для нормальних, експоненційних, гамма-розподілів,

рівномірних, нормального і рівномірного, розподілів Вейбулла і Пірсона третього типу та ін. Проте в більшості практичних випадків не вдається отримати замкнуте аналітичне рішення композиції законів розподілу.

У цьому розділі розглядається побудова композицій розподілів, описаних у розділі 2, необхідних для вирішення завдань сполучень навантажень і оцінки надійності. **Згортки для розглянутих щільностей розподілу не беруться у замкнутому вигляді і повинні інтегруватися чисельно.** Однак попередньо необхідно провести їх перетворення для вирішення наступних питань:

а) ув'язки параметрів розподілів, що складаються, зменшення їх кількості;

б) представлення спільних розподілів в єдиній порівняній формі у функції нормованого відхилення від центру, з урахуванням сумарного стандарту розподілу;

в) можливого спрощення аналітичних виразів для полегшення чисельного інтегрування.

Отримані аналітичні вирази композиції розподілів наведені в *табл. 4.3*.

У випадку різниці випадкових аргументів  $X = X_1 - X_2$  побудова кривої розподілу в певній мірі асоціюється з описаною вище композицією розподілів, проте має ряд специфічних особливостей. Тому для визначення щільності розподілу різниці використовуються дещо інші вирази для незалежних  $X_1$  і  $X_2$ :

$$f_{12}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(X - X_2) f_2(X_2) dX_2; \quad (4.59)$$

$$f_{12}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(X_1) f_2(X_1 - X) dX_1. \quad (4.60)$$

Отримані аналітичні вирази різниці розподілів наведені в *табл. 4.4*. Читача, який зацікавиться ходом виведення вказаних формул, адресуємо до монографії автора [7].

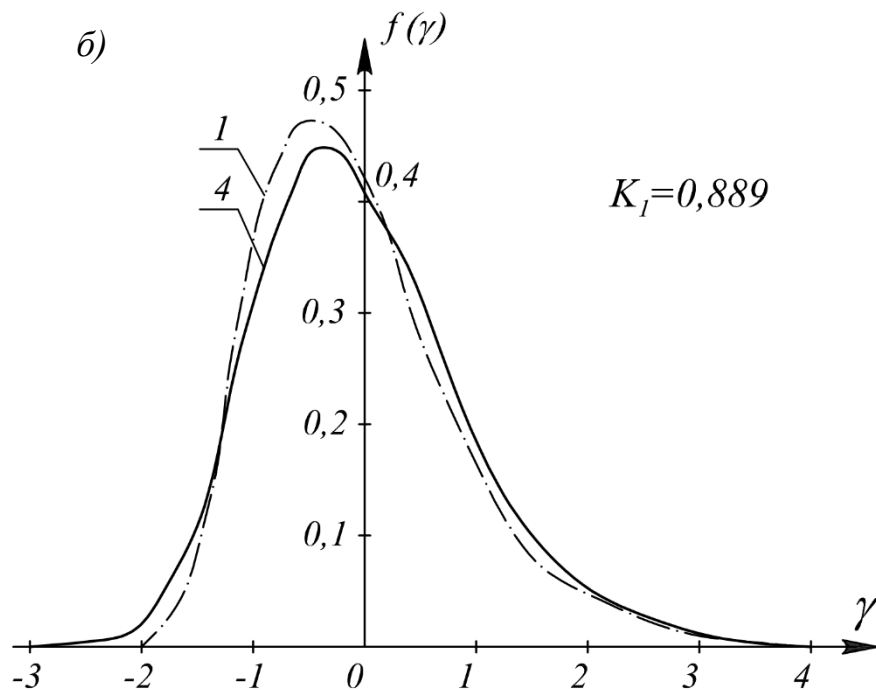
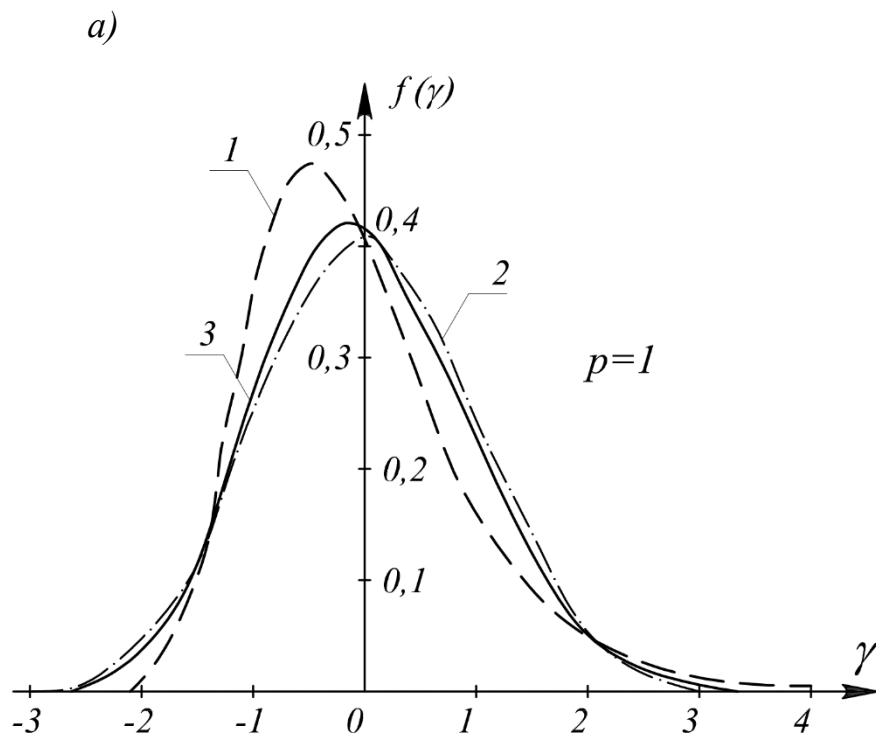
Таблиця 4.3

## Формули композиції розподілів

№ з/п	Розподіли, що складаються	Нормовані щільності розподілів композиції формули параметрів	Коефіцієнти
1	2 Нормальний і Гумбеля I типу	3 $f_{12}(\gamma) = \frac{D_{II}}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(-0.5E_{II}^2) dz$ $E_{II} = D_{II}\gamma + \left(\frac{0.45}{p}\right) \ln(-\ln z)$ $D_{II} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$	4 $p = \frac{\hat{X}_{II}}{\hat{X}_9} \frac{X - \bar{X}_{II} - \bar{X}_9}{\hat{X}_{II}}$ $\gamma = \frac{\hat{X}_{II}}{\hat{X}_9} \frac{X - \bar{X}_{II} - \bar{X}_9}{\hat{X}_{II}}$
2	2 Гумбеля I типу	$f_{12}(\gamma) = D_{II} \int E_{II} \exp(-E_{II}) dz$ $E_{II} = (-\ln z)^{-K_2} \exp(D_{II}\gamma - B_{II})$ $D_{II} = \frac{\sqrt{1+K_2^2}}{0.78}; \quad B_{II} = 0.577(1+K_2)$	$K_2 = \frac{\hat{X}_{92}}{\hat{X}_{91}} \frac{X - \bar{X}_{91} - \bar{X}_{92}}{\hat{X}_{II}}$ $\gamma = \frac{\hat{X}_{92}}{\hat{X}_{91}} \frac{X - \bar{X}_{91} - \bar{X}_{92}}{\hat{X}_{II}}$
3	Нормальний і 2 Гумбеля I типа	$f_{123} = \frac{D_{III}}{\sqrt{2\pi}} \int \int (-\ln U)^{\frac{1}{2}} E_{III} \exp(-E_{III}) dz dU$ $E_{III} = \ln(-\ln z)^{-K_2} \exp\left(-D_{III}\gamma - \frac{\sqrt{2p}}{0.78} \sqrt{-\ln U} - B_{II}\right)$ $D_{III} = \frac{\sqrt{1+K_2^2+p^2}}{0.78}; \quad B_{II} = 0.577(1+K_2)$	$K_2 = \frac{\hat{X}_{92}}{\hat{X}_{91}} \frac{X - \bar{X}_{91} - \bar{X}_{92} - \bar{X}_{II}}{\hat{X}_{III}}$ $p = \frac{\hat{X}_{II}}{\hat{X}_9} \frac{X - \bar{X}_{91} - \bar{X}_{92} - \bar{X}_{II}}{\hat{X}_{III}}$ $\gamma = \frac{\hat{X}_{II}}{\hat{X}_9} \frac{X - \bar{X}_{91} - \bar{X}_{92} - \bar{X}_{II}}{\hat{X}_{III}}$

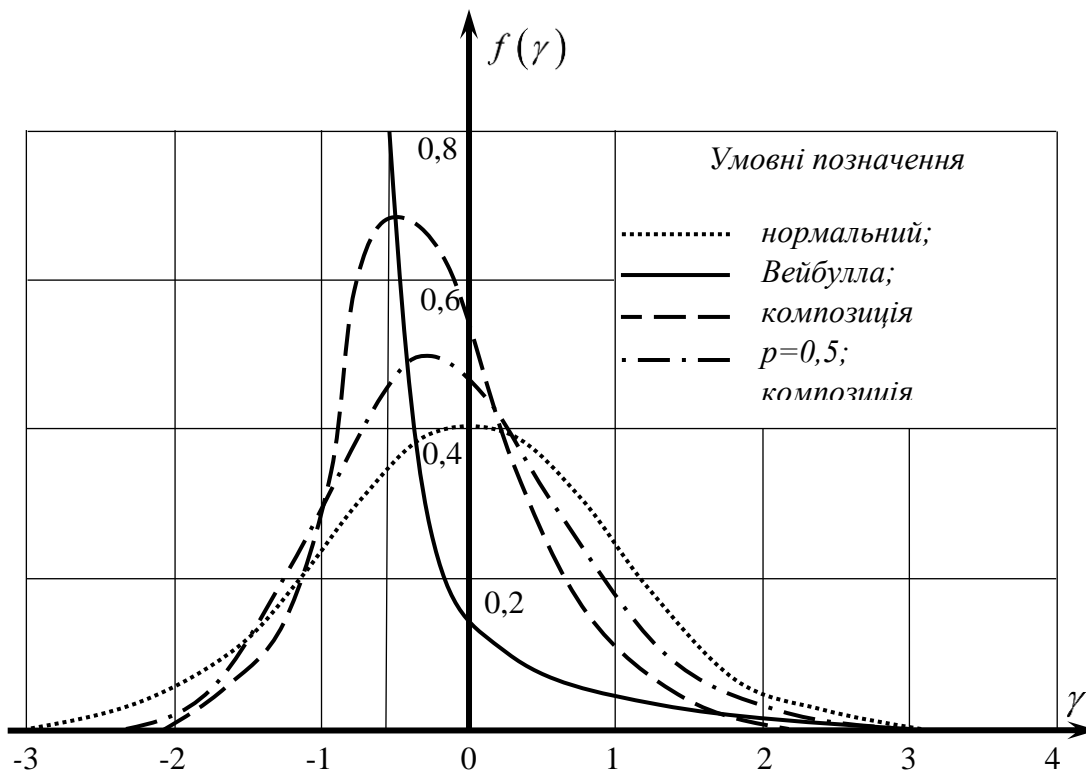
1	2	3	4
4	<p>3 розподіли Гумбеля I типу</p>	$f_{123}(\gamma) = D_{III} \int_0^1 \int_0^1 E_{III} \exp(-E_{III}) dz dU$ $E_{III} = \ln(-\ln z)^{-K_2} (-\ln U)^{-K_3} \exp(-D_{III} \gamma - B_{III})$ $D_{III} = \frac{\sqrt{1+K_2+K_3}}{0.78}; \quad B_{III} = 0.577(1+K_2+K_3)$	$K_2 = \frac{\hat{X}_{92}}{\hat{X}_{91}}$ $K_3 = \frac{\hat{X}_{93}}{\hat{X}_{III}}$ $\gamma = \frac{X - \bar{X}_{91} - \bar{X}_{92} - \bar{X}_{93}}{\hat{X}_{III}}$
5	<p>Нормальний і Вейбулла</p>	$f_{12}(\gamma) = \frac{D_{II}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^1 \exp(-0.5E_{II}^2) dz$ $E_{II} = D_{II} \gamma + \frac{1}{V_B P} \left[ 1 - (-\ln z)^{1/\Gamma} \right]$ $D_{II} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}; \quad z_1 = \exp \left[ -\Gamma^\beta \left( 1 + p \frac{V_B}{V_n} \sqrt{1+p^2} \right)^\beta \right]$	$p = \frac{\hat{X}_H}{\hat{X}_6}$ $\gamma = \frac{X - \bar{X}_n - \bar{X}_B}{\hat{X}_{II}}$
6	<p>Нормальний і поліномом- експоненційний</p>	$f_{12}(\gamma) = \frac{\sqrt{(1+p^2)}^{z_2}}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \exp(C_0 - C_1 E_{II} - C_2 E_{II}^2 - C_3 E_{II}^3) \exp(-0.5z^2) dz \quad (3.67)$ $E_{II} = \lambda \sqrt{1+p^2} - z_p$ $z_1 = -\frac{1}{V_n}$ $z_2 = \gamma D_{II} + \frac{1}{V_n p}; \quad D_{II} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$	$p = \frac{\hat{X}_H}{\hat{X}_n}$ $\gamma = \frac{X - \bar{X}_n - \bar{X}_n}{\hat{X}_{II}}$

1	2	3	4
7	<p>Вейбулла і поліномомо- експоненційний</p>	$f_{12}(y) = \int_{z_1}^y \exp(C_0 + C_1 E_{II} + C_2 E_{II}^2 + C_3 E_{II}^3) dz$ $E_{II} = D_{II} \gamma - \frac{1}{V_B p} \left[ 1 - (-\ln z)^{\frac{1}{\beta}} / \Gamma \right]$ $z_1 = \exp \left[ -\Gamma^\beta \left( 1 + p \frac{V_B}{V_n} + \mathcal{W}_B \sqrt{1+p^2} \right)^\beta \right]; \quad D_{II} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$	$p = \frac{\hat{X}_n}{\hat{X}_B}$ $\gamma = \frac{X - \bar{X}_B - \bar{X}_n}{\hat{X}_{II}}$
8	<p>Вейбулла і Гумбеля I типу</p>	$f_{12}(y) = \beta \Gamma V_B D_{II} \int_0^y E_{II}^{\beta-1} \exp(-E_{II}) dz$ $E_{II} = \Gamma V_B \left[ \mathcal{W}_D + \frac{0.45}{p} + \frac{1}{V_B} + \frac{0.78}{p} \ln(\ln z) \right]; \quad D_{II} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$	$p = \frac{\hat{X}_B}{\hat{X}_3}$ $\gamma = \frac{X - \bar{X}_B - \bar{X}_3}{\hat{X}_{II}}$
9	<p>Нормальний, Вейбулла, поліномомо - експоненційний</p>	$f_{12}(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{U_1}^{U_2} \int_{z_1}^y \exp(C_0 - C_1 E_{III} + C_2 E_{III}^2 + C_3 E_{III}^3) (-2 \ln U)^{\frac{1}{2}} dz dU$ $E_{III} = \frac{1}{p_1 \left[ \gamma \sqrt{1+p_1^2+p_2^2} + \frac{p_2}{V_n} + \left( 1 + (-\ln z)^{\frac{1}{\beta}} \right) / \Gamma V_B \right]}$ $z_1 = \exp \left[ -\Gamma^\beta \left( 1 + p_1 \frac{V_B}{V_n} + p_1 \frac{V_B}{V_n} + \mathcal{W}_B \sqrt{1+p_1^2+p_2^2} \right)^\beta \right]$ $U_1 = \exp \left[ -\left( \frac{1}{2p_2} \right) \left( \gamma \sqrt{1+p_1^2+p_2^2} + \frac{p_1}{V_n} + \frac{1}{V_B} \right) \right]; \quad U_2 = \exp \left( -\frac{1}{2V_n^2} \right)$	$p_1 = \frac{\hat{X}_n}{\hat{X}_B}$ $p_2 = \frac{\hat{X}_n}{\hat{X}_B}$ $\gamma = \frac{X - \bar{X}_B - \bar{X}_n - \bar{X}_n}{\hat{X}_{III}}$

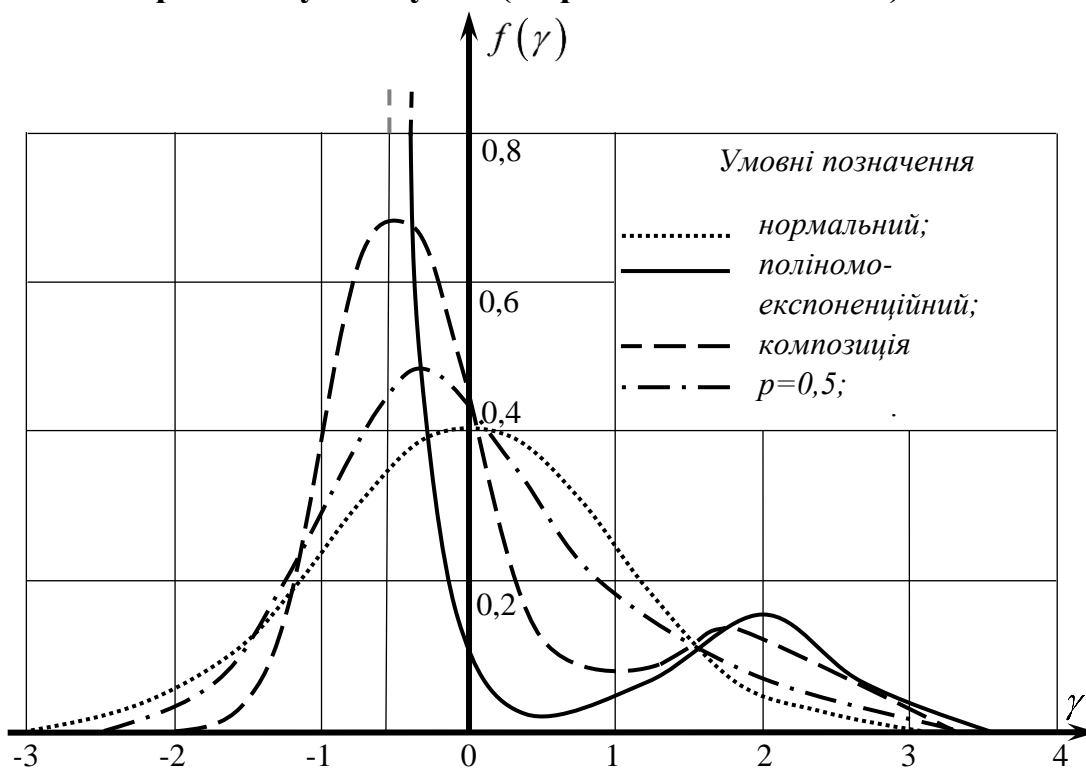


**Рис. 4.11. Композиція розподілів:**

а – нормального и Гумбеля I типу; б – 2-х розподілів Гумбеля I типа;  
 1 – розподіл Гумбеля; 2 – нормальний закон; 3 – нормальний +  
 розподіл Гумбеля; 4 – два розподіли Гумбеля



**Рис. 4.12.** Композиція нормального розподілу (постійне навантаження) і розподілу Вейбулла (вітрове навантаження)



**Рис. 4.13.** Композиція розподілів нормального і поліномо-експоненційного (снігове навантаження)



**4.5.2. Розподіл суми (композиції) розподілів.** На *рис. 4.11, а* наведені приклади отриманих композицій розподілів нормального і Гумбеля, які порівнюються з розподілами складових аргументів – «чистими» нормальним і подвійним експоненціальним. Композиція більш протяжна при негативному аргументі, має опущену моду і нижче розташований хвіст, чим розподіл Гумбеля; його мода зміщена вліво по відношенню до початку координат і моди нормального розподілу внаслідок наявної позитивної асиметрії. Показаний на *рис. 4.11, а* випадок відповідає найбільшій відмінності сумарного розподілу від початкових розподілів ( $p = 1$ ), в усіх інших випадках ( $p < > 1,0$ ) він буде ближче до одного з вихідних розподілів.

Композиція двох законів Гумбеля з близькими стандартами ( $K_2 = 0,889$ ) мало відрізняється від окремого розподілу (*рис. 4.11, б*), хоча ознаки деякої «нормалізації» простежуються – наближення моди до початку координат, зниження максимуму кривої, продовження лівого хвоста. В інших випадках при зменшенні  $K_2$ , відмінність між згортою і окремим розподілом Гумбеля буде ще менше, ніж на *рис. 4.11, б*.

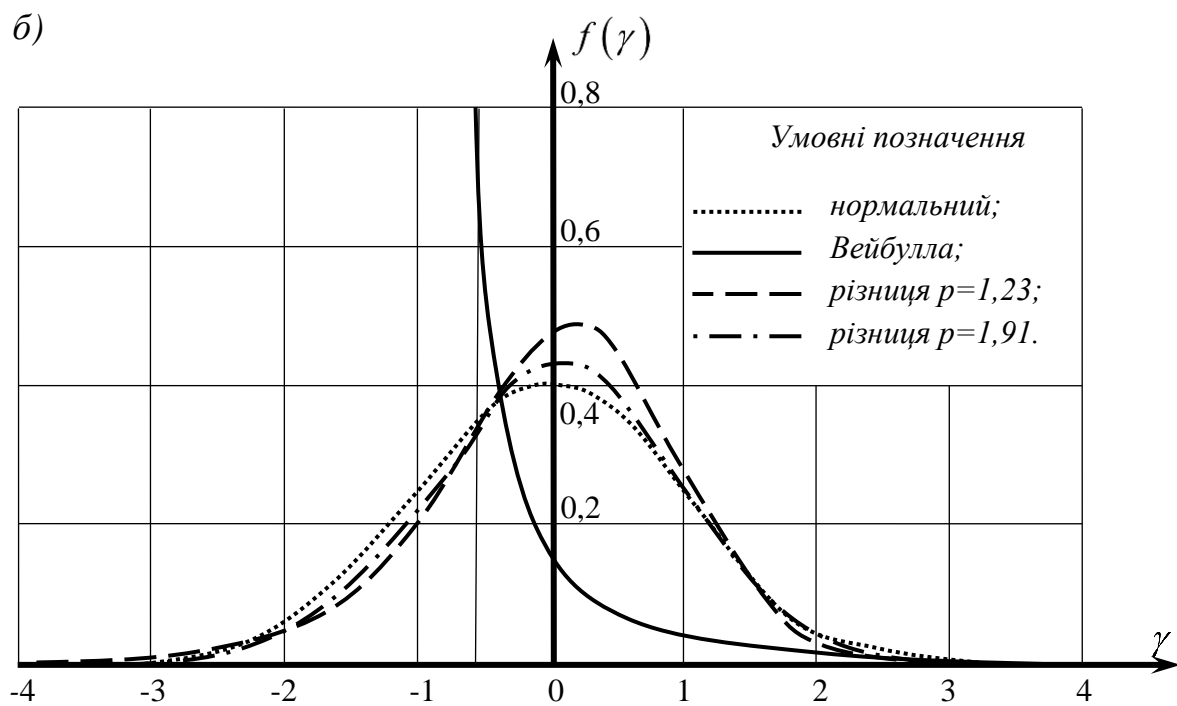
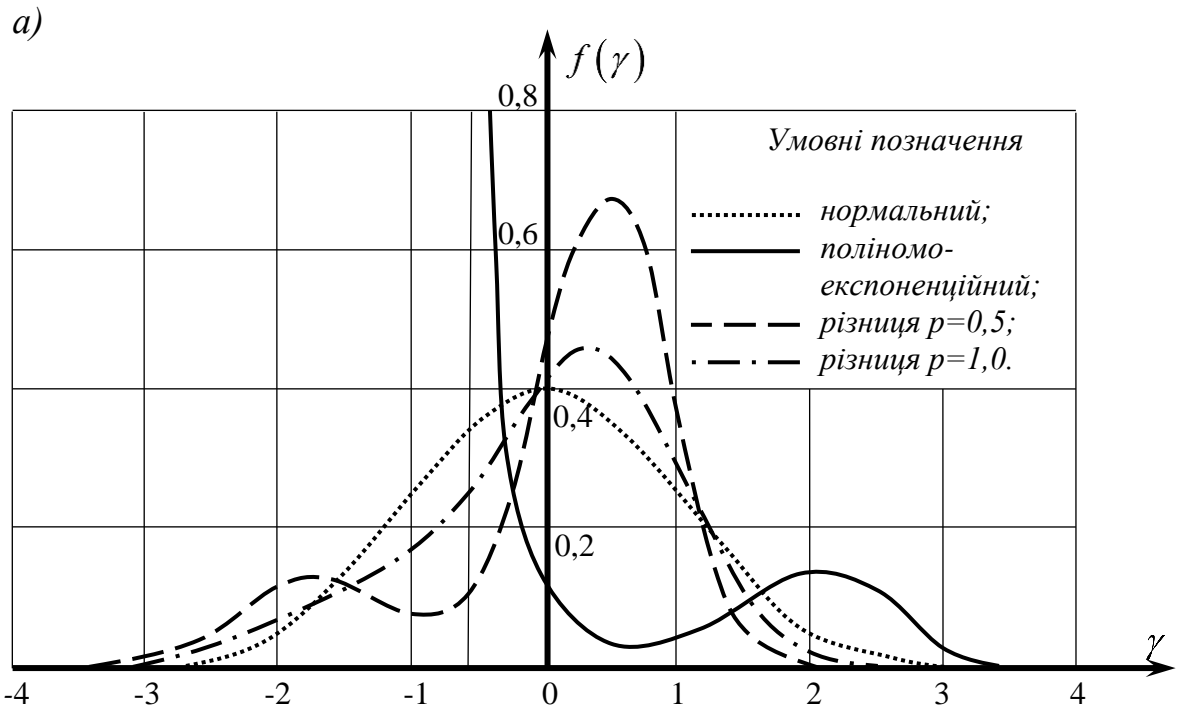
Композиція розподілів нормального і Вейбулла ілюструється *рис. 4.12*, нормального і поліномо-експоненційного – *рис. 4.13*, де видно, що із збільшенням коефіцієнту  $p$  і відповідним зростанням впливу нормального розподілу мода композиції наближується до центру, згладжується друга вершина поліномо-експоненційного розподілу, подовжуються хвостові частини. Можна вважати, що незважаючи на специфічний характер одного з розподілів, композиція досить швидко нормалізується при  $p > 1$ .

**4.5.3. Розподіл різниці розподілів.** В якості прикладу застосування наведених у *табл. 4.4* загальних формул на *рис. 4.14, б* наведений розподіл різниці нормального закону і розподілу Вейбулла. На відміну від композиції (*рис. 4.12*), різниця має моду, що зміщена праворуч центра, і витягнутий лівий хвіст, тобто в цілому має дзеркальний характер у порівнянні з розподілом Вейбулла.

Таблиця 4.4

## Формули різниці розподілів

№ з/п	Різниця розподілів	Нормовані щільності різниці розподілів, формули параметрів	Коефіцієнти
1	2 Нормальний – Гумбеля I типу	3 $f_{12}(\gamma) = \frac{D_{II}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \exp(-0,5E_{II}) dz$ $E_{II} = \gamma D_{II} - \frac{0,45}{p} - \frac{0,78}{p} \ln(-\ln Z); D_{II} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$	4 $p = \frac{\hat{X}_n}{\hat{X}_e}$ $\gamma = \frac{X - \bar{X}_n + \bar{X}_e}{\hat{X}_{II}}$ $\beta = \frac{V_n - pV_e}{V_n V_e \sqrt{1+p^2}}$
2	Нормальний – Вейбулла	$f_{12}(\gamma) = \frac{D_{II}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{Z_2} \exp(-0,5E_{II}^2) dz$ $E_{II} = \gamma D_{II} - \frac{1}{V_B} \left[ 1 - (-\ln Z)^{\frac{1}{\beta}} / \Gamma \right]$ $D_{II} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}; Z_2 = \exp \left[ -\Gamma^\beta \left( -1 + p \frac{V_B + \gamma V_B \sqrt{1+p^2}}{V_n} \right)^\beta \right]$	$p = \frac{\hat{X}_n}{\hat{X}_B}$ $\beta = \frac{V_n - pV_B}{V_n V_B \sqrt{1+p^2}}$ $\gamma = \frac{X - \bar{X}_n + \bar{X}_B}{\hat{X}_{II}}$
3	Нормальний – поліномом- експоненційний	$f_{12}(\gamma) = \sqrt{\frac{1+p^2}{2\pi}} \int_{Z_1}^{Z_2} \exp(C_0 + C_1 E_{II} + C_2 E_{II}^2 + C_3 E_{II}^3) \exp(-0,5z^2) dZ_1$ $E_{II} = -\gamma \sqrt{1+p^2} + Z_p; D_{II} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$ $Z_1 = \gamma D_{II} - \frac{1}{V_n p}; Z_2 = \gamma_2$	$p = \frac{\hat{X}_n}{\hat{X}_n}$ $\gamma = \frac{X - \bar{X}_n + \bar{X}_n}{\hat{X}_{II}}$ $\beta = \frac{V_n - pV_n}{V_n V_n \sqrt{1+p^2}}$



**Рис 4.14. Розподіли різниці розподілів величин:**  
 а) нормальний і поліномо-експоненційний закони;  
 б) нормальний закон і розподіл Вейбулла

Розподіли різниці нормального і поліномо-експоненційного розподілів наведені на рис. 4.14, а. На відміну від розподілу композиції (рис. 4.13), при невеликих значеннях  $p$  мода різниці знаходиться праворуч центра, а друга вершина – у лівому хвості, тобто розподіл різниці має дзеркальний характер по відношенню до несиметричного вихідного розподілу навантаження.

Розроблена методика дозволила вивести цикл формул композиції і різниці двох і трьох розподілів, всього одержано 20 згорток, Виведені формули дозволяють за допомогою чисельного інтегрування з достатньою точністю, без спрощення і огрублювання будувати складні розподіли, необхідні для подальших оцінок надійності конструкцій. Крім того, розроблений чисельно-аналітичний метод може бути еталонним для оцінки точності різних спрощених і наближених засобів побудови розподілів суми і різниці навантажень та інших випадкових аргументів.

## 4.6. ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПОЛУЧЕННЯ НАВАНТАЖЕНЬ, ЗМІННИХ У ЧАСІ

**4.6.1. Ефективна частота сполучення навантажень.** Так само, як і для окремих навантажень (див. главу 3), частотний склад резерву несучої здатності або випадкового зусилля, викликаного дією поєднання навантажень, представлених у формі стаціонарних випадкових процесів, визначається ефективною частотою. Для її визначення використовуємо рішення В.В. Болотіна [12], яке для спільної дії  $n$  незалежних стаціонарних випадкових процесів має наступний вигляд:

$$\omega_q = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \cdot \hat{X}_i^2 \cdot \omega_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \cdot \hat{X}_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.61)$$

де  $\omega_q, \omega_i$  – ефективні частоти відповідно сумарного і  $i$ -го процесу;  $\hat{X}_i$  – стандарт  $i$ -го процесу;  $\alpha_i$  – число впливу  $i$ -го процесу.

Для квазістаціонарних навантажень з постійною частотною структурою і трендом числових характеристик, таких як вітрове і снігове навантаження (див. розділ 3), формула (4.61) має вигляд:

$$\omega_q(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \cdot \omega_i^2 \cdot \hat{X}_i^2(t)}{\hat{X}_q^2(t)}}. \quad (4.62)$$

Використання даного виразу дозволяє виключити обчислення, апроксимацію і складання кореляційних функцій, залежних від  $t$ , оскільки ефективні частоти можуть визначатися чисельним диференціюванням реалізації або обчислюватися за відомим співвідношенням:

$$\omega = \sqrt{-\rho''(\tau = 0)}, \quad (4.63)$$

де  $\rho(\tau)$  - нормована кореляційна функція навантаження.

У даній роботі тренд числових характеристик випадкових процесів атмосферних навантажень враховується введенням відповідних коефіцієнтів тренду  $K_{tr}$  (розділ 3), з урахуванням яких для поєднання 2-х навантажень отримана формула (4.64), яка при необхідності може бути поширена на будь-яке число навантажень:

$$\omega_{12} = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2}} \left[ (\omega_1 \cdot K_{tr1})^2 + (\omega_2 \cdot K \cdot K_{tr2})^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.64)$$

Використання параметра  $K = \hat{X}_2 / \hat{X}_1$  дозволяє позбавитися від безпосереднього врахування дисперсій складових процесів.

При значному переважанні ефективної частоти одного з навантажень  $\omega_1 \gg \omega_2$ , як наприклад, в поєднанні кранового і снігового навантажень, визначення ефективної частоти сполучення навантажень спрощується

$$\omega_{12} = \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \omega_1 \cdot K_{tr1} \quad (4.65)$$

Аналогічно вирішується питання для сполучення випадкового процесу з випадковою величиною, що описує навантаження типу постійного, або міцність матеріалу.

**4.6.2. Коефіцієнт широкополосності випадкових процесів навантажень та їхніх сполучень.** Випадкові процеси навантажень не є вузькополосними, тому необхідно провести додатковий аналіз частотної структури як окремих процесів, так і їх сполучень. Для цього використовується *коефіцієнт широкополосності* випадкового процесу:

$$\beta_\omega = \frac{\sqrt{\int_0^\infty S_X(\omega) \omega^4 d\omega \int_0^\infty S_X(\omega) d\omega}}{\int_0^\infty S_X(\omega) \omega^2 d\omega} . \quad (4.66)$$

Тут  $S_X(\omega)$  – однобічна спектральна щільність окремого ВП або суми кількох ВП.

Опускаючи складні викладки, пов'язані зі спектральними щільностями, наведемо наочну інтерпретацію коефіцієнта широкополосності випадкового процесу:

$$\beta_\omega = K_c = \frac{\omega_2}{\omega_e} = \frac{v_{\max}(-\infty)}{v_+(0)} , \quad (4.67)$$

де  $\omega_e$  – середня частота ВП по нулям;  $\omega_s$  – середня частота ВП по екстремумам;  $\nu_+(0)$  – середня кількість позитивних перетинів нульового рівня;  $\nu_{max}(-\infty)$  – загальна кількість максимумів ВП.

Розглянуті у розділі 3 атмосферні й кранові навантаження являють собою випадкові процеси з досить вираженою широкополосністю. Дослідні значення коефіцієнта широкополосності цих навантажень виявилися досить близькими до коефіцієнта  $\beta_\omega = 3,0$ , визначеного за допомогою операцій зі спектральними щільностями і кореляційними функціями.

Перейдемо до розгляду широкополосності суми двох випадкових процесів, які мають ефективні частоти і стандарти відповідно  $\omega_1, \hat{X}_1$  та  $\omega_2, \hat{X}_2$ :

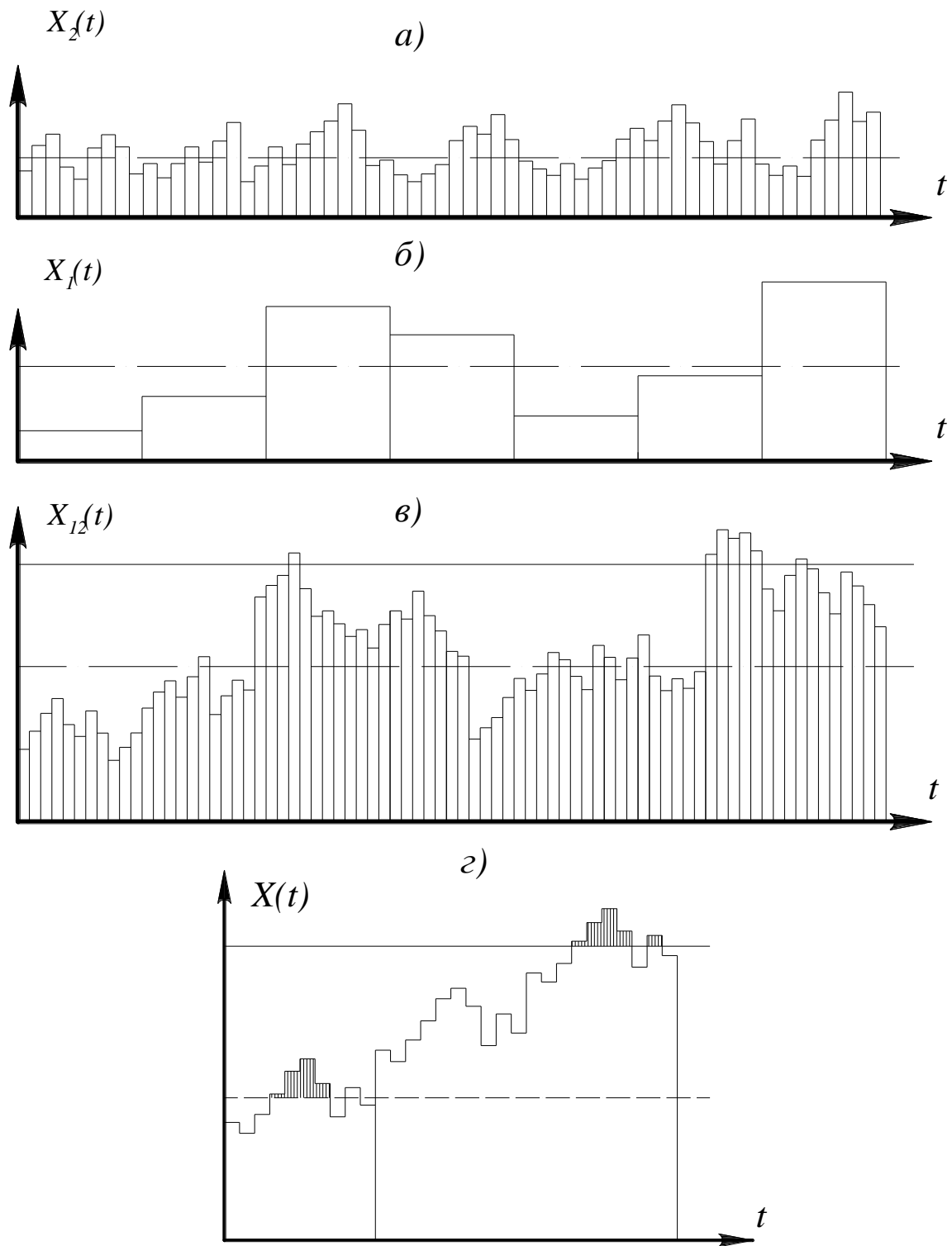
$$\beta_{12} = \frac{\beta_\omega \sqrt{(1 + \theta^4 K^2)(1 + K^2)}}{1 + \theta^2 K^2}. \quad (4.68)$$

Тут прийнято  $\theta = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ,  $K = \frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}$ ,  $\beta_\omega$  – коефіцієнт

широкополосності окремого випадкового процесу.

Як показують дані розділу 3, ефективні частоти випадкових процесів кранового, вітрового і снігового навантаження істотно відрізняються, так що параметр  $\theta = \omega_2/\omega_1$  може досягати для сполучення вітрового і снігового навантаження  $10^2$ , кранового та вітрового –  $10^3$ , кранового і снігового –  $7 \cdot 10^4$ . Це відповідним чином впливає на величини коефіцієнта широкополосності  $\beta_{12}$  сполучення вказаних навантажень, який може бути значним.

Різний частотний характер розглянутих навантажень ілюструється *рис. 4.15*. Це вносить істотну специфіку в сумарний процес і картину його викидів. Випадковий вплив, викликаний спільною дією двох та більше навантажень, стає двох- і більше частотним зі значною широкополосністю. Для сполучень досліджуваних атмосферних та кранових навантажень коефіцієнт широкополосності  $\beta_{12}$  мало відрізняється від аналогічного



**Рис. 4.15.** До оцінки частотного складу сполучення навантажень:  
 а – високочастотна складова; б – низькочастотна складова;  
 в – сумарний випадковий процес; г – викиди випадкового процесу



коефіцієнта  $\beta_\omega$  для окремих процесів при  $K \geq 1$ , синхронно зростає в інтервалі  $K = 1,0 \dots 0,1$  і отримує різкі максимуми великої величини у вузькій смузі  $K \cong 10^{-2} \dots 10^{-5}$ .

#### 4.7. ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ДІЇ КРАНОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ



Підкранові балки



Кранова естакада

Рис. 4.16. Конструкції, завантажені крановим навантаженням

**4.7.1. Загальний підхід.** У даному та наступних підрозділах цього розділу детально розглянемо лінійно працюючі сталеві елементи, завантажені одним тимчасовим випадковим навантаженням (крановим, сніговим або вітровим), у ряді прикладів буде також враховуватися постійне навантаження. Резерв несучої здатності будемо визначати в просторі нормальних напружень:

$$\tilde{Y}(t) = \tilde{R} - \tilde{S}(t) = \tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}(t) \geq 0. \quad (4.69)$$

Критерієм відмови вважатимемо перевищення випадковим напруженням  $\tilde{\sigma}(t)$  випадкового рівня межі текучості сталі  $\tilde{\sigma}_y$  в найбільш напруженому волокні перерізу елемента.

У даному випадку ми маємо сполучення випадкового процесу навантаження з ефективною частотою  $\omega_1$  і випадкової величини міцності ( $\omega_2 = 0$ ). Тому спрощена формула сумарної ефективною частоти (4.65), в якій позначено  $K = \hat{X}_2 / \hat{X}_1 = \hat{R} / \hat{S}$ , може бути записана як:

$$\omega_q = \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \omega_1 K_{tr1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\hat{R}^2}{\hat{S}^2}}} \omega_1 K_{tr1} = \frac{\hat{S}}{\hat{Y}} \omega_1 K_{tr1}. \quad (4.70)$$

При визначенні коефіцієнту широкополосності при  $\omega_2 = 0$  прийємо до уваги, що співвідношення частот  $\theta = \omega_2/\omega_1 = 0$ , тому формула (4.68) спрощується:

$$\beta_\omega = \beta_{12} = \beta_1 \sqrt{1+K^2}, \quad (4.71)$$

де, як і раніше,  $K = \hat{X}_2/\hat{X}_1 = \hat{R}/\hat{S}$ .

Оцінка ймовірності відмови елементів визначається за загальною формулою (4.46) при врахуванні снігового або вітрового навантаження і за формулою (4.47) при дії кранового навантаження.

**4.7.2. Оцінка надійності елементів при дії кранового навантаження.** Розглянемо сталеві елементи, що працюють в основному на навантаження мостових кранів, у тому числі підкранові конструкції (будемо розглядати їх загальний напружений стан) і елементи кранових естакад (рис. 4.16). У зв'язку з нормальним розподілом кранових навантажень, межі текучості і, отже, резерву несучої здатності, використовуємо формулу (4.47):

$$Q(t) = \frac{\omega_q \exp(-0,5\beta^2) t}{2\pi\beta_\omega}.$$

Результати обчислень для елементів, що сприймають навантаження різних мостових кранів, наведено в табл. 4.5.

Найбільше на надійність розглянутих елементів впливає відношення навантажень одного і двох кранів  $X_{M1}/X_{M2}$ , з його підвищенням зростає  $Q(t)$ , і отже, знижується надійність

елементів. Найменш надійні конструкції, для яких цей параметр близький до 1, наприклад, 6-метрові підкранові балки і елементи, запроектовані під один мостовий кран. У міру зменшення зазначеного відношення, наприклад, при збільшенні прольоту підкранових балок до 12 м і більше, надійність підкранових конструкцій досить швидко зростає.

Таблиця 4.5

**Імовірнісна забезпеченість сталевих елементів,  
що сприймають навантаження мостових кранів**

<i>Варіант</i>	$\frac{X_{M1}}{X_{M2}}$	<i>Параметри кранового навантаження</i>				<i>Параметри оцінки надійності</i>			<i>Q (50 років)</i>
		$\eta$	<i>Режим</i>	$\omega_k$ <i>1/год</i>	$\psi$	$\beta$	$\omega_q$	$\beta_\omega$	
1	0,8	0,4	4К-6К	71,0	0,85	5,40	53,3	3,40	0,592
2			7К	106,8	0,95	6,308	67,2	3,49	$3,993 \cdot 10^{-3}$
3			8К	215,0	0,95	6,308	175,6	3,49	$8,038 \cdot 10^{-3}$
4		0,2	4К-6К	71,0	0,85	5,07	53,3	3,40	2,868*
5			7К	106,8	0,95	5,99	87,2	3,49	0,0284
6			8К	215,0	0,95	5,99	175,6	3,49	0,0571
7	0,7	0,4	4К-6К	71,0	0,85	6,495	51,6	3,51	$7,088 \cdot 10^{-4}$
8			7К	106,8	0,95	7,44	83,9	3,63	$1,496 \cdot 10^{-6}$
9			8К	215,0	0,95	7,44	169,0	3,63	$2,990 \cdot 10^{-6}$
10		0,2	4К-6К	71,0	0,85	6,18	51,6	3,51	$5,285 \cdot 10^{-3}$
11			7К	106,8	0,95	7,14	83,9	3,63	$1,395 \cdot 10^{-5}$
12			8К	215,0	0,95	7,14	169,0	3,63	$2,804 \cdot 10^{-5}$

\*Замість оцінки  $Q(T)$  вказана кількість викидів  $N_+(T)$

**Примітки і пояснення до таблиці:**  
 $X_{M1}, X_{M2}$  – характеристичні (нормативні) навантаження від 1-го и 2-х кранів;  
 $\eta = Q / G_{cr}$  – вантажна характеристика крана;  
 $Q$  – вантажопідйомність,  $G_{cr}$  – повна вага крана;  
 $\psi$  – коефіцієнт сполучення кранового навантаження [13];  
 $\omega_k, \omega_q$  – ефективні частоти кранового навантаження і ВП резерву несучої здатності елемента;  
 $\beta$  – характеристика безпеки елемента;  
 $\beta_\omega$  – коефіцієнт широкополосності ВП резерву несучої здатності елемента.

Помітно збільшується надійність розглянутих конструкцій у міру зростання вантажної характеристики  $\eta$ , що відповідає зростанню вантажопідйомності кранів. Можна тому зазначити, що елементи, розраховані на навантаження мостових кранів невеликої вантажопідйомності, менш надійні, ніж конструкції, що сприймають навантаження важких кранів. Ця різниця посилюється ще й тим, що бічні сили відносно легких кранів (зазвичай чотириколісних) перевищують розрахункові значення і можуть бути відносно великими, ніж бічні сили багатокілісних кранів великої вантажопідйомності (п. 3.4.4).

Певний вплив на надійність конструкцій справляє режим роботи кранів, залежно від якого безпосередньо у формулу (4.47) підставляється ефективна частота ВП (табл. 3.13). Однак коефіцієнти сполучень  $\psi = 0,85$  і  $0,95$  що містяться в нормах [13] корегують цю тенденцію, в результаті чого сталеві елементи, що працюють на навантаження кранів груп режимів 4К-6К, виходять менш надійними, ніж конструкції під крани груп режимів 7К та 8К із більш значними ефективними частотами.

Можна тому зробити загальний висновок про недостатню надійність сталевих елементів при відношенні  $X_{M1}/X_{M2} \geq 0,8$ , в першу чергу при чотириколісних кранах малої вантажопідйомності. В інших випадках надійність сталевих елементів під дією кранових навантажень достатня, а при значеннях  $X_{M1}/X_{M2} < 0,8$  може виявитися надмірною.

## 4.8 ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ДІЇ СНІГОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

**4.8.1. Загальні міркування.** Результати, викладені у цьому розділі, відносяться до сталевих лінійно працюючих елементів, завантажених сніговим та постійним навантаженнями: кроквяних балок і ферм, прогонів і т.п. (рис. 4.17) У зв'язку зі специфічними особливостями розподілів снігового навантаження (розділ 3.2), використовувалося загальний вираз імовірності відмови (4.46), резерв несучої здатності визначався в просторі нормальних

напружень, його параметри для згинальних елементів (кроквяних балок) обчислювалися як:

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= \bar{\sigma}_y - \alpha(\bar{q}_d + \bar{q}_s), \\ \hat{Y} &= \sqrt{\hat{\sigma}_y^2 + \alpha^2(\hat{q}_d^2 + \hat{q}_s^2)},\end{aligned}\quad (4.72)$$

де  $\bar{q}_d$ ,  $\hat{q}_d$  – математичне очікування і стандарт постійного навантаження;  $\bar{q}_s$ ,  $\hat{q}_s$  – те ж, снігового навантаження;  $\alpha$  – коефіцієнт впливу, що дає перехід від навантаження до напруження в елементі.

Параметр, що відображає частку нормальної складової резерву несучої здатності, в даному випадку дорівнює:

$$p = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_y^2 + \alpha^2 \hat{q}_d^2}}{\alpha \hat{q}_s}.\quad (4.73)$$



Відкладення снігу на покрівлі



Кроквяні балки

**Рис. 4.17. До оцінки надійності кроквяних конструкцій**

**4.8.2. Оцінка надійності кроквяних конструкцій.** Для оцінки надійності конструкцій, що сприймають снігове навантаження, були виконані розрахунки серії сталевих кроквяних балок для I-III снігових районів з покрівлями різної маси (табл. 4.6). При перевірці надійності балок використовувалися параметри імовірнісних моделей снігового навантаження, запропонованих у

розділі 3 (табл. 3.8), і коефіцієнти варіації постійного навантаження і межі текучості сталі, наведені у розділі 3.1. Параметр  $p$  вийшов порівняно невеликим (в межах 0,2...1,2), тому щільність розподілів резерву несучої здатності істотно відрізняється від нормального розподілу (рис. 4.14, а) і вона будувалася чисельно. Термін експлуатації визначався як  $t = t_3 T$ , де  $t_3$  – середня тривалість зими (табл. 3.8),  $T$  – передбачуваний термін експлуатації конструкцій, прийнятий рівним 50 років.

Отримані оцінки імовірності відмови сталевих кроквяних балок, наведені в табл. 4.7 (опущені проміжні результати), показують недостатню надійність балок. Видна загальна тенденція до зростання  $Q(t)$  по мірі зменшення впливу постійного навантаження і зростання коефіцієнта  $C$ , який відображає частку напруження від снігового навантаження в загальному напруженні в елементі. Як видно на рис. 4.18, а, по мірі зростання  $C$  збільшується  $\omega_q$ , зменшується  $p$  і характеристика безпеки  $\beta$  і, як наслідок, зростає імовірність відмови  $Q(t)$ , визначена за формулою (4.46).

Отримані оцінки переконливо підтвердили висновок про заниженість розрахункових величин снігових навантажень в нормах СНиП і необхідність їх коригування в більшу сторону. Це було виконано при розробці Державних будівельних норм (ДБН) України по навантаженням і впливам [13], у розробці яких приймав участь автор. У цих ДБН характеристичні (раніше нормативні) значення снігового навантаження для території України були суттєво збільшені. Аналогічне збільшення можливо було реалізувати шляхом збільшення коефіцієнтів надійності  $\gamma_f$  до 2,4...3,0 (замість 1,4 і 1,6) без зміни нормативних значень снігового навантаження (рис. 4.18, б). Пропозиції з цього приводу містяться у монографії автора [7].

Таблиця 4.6

## Підбір кроквяних балок (L=12м, В=6м)

№ в а р.	Сні- го- вий рай- он	Тип покрівлі	Розрахун- кове наван- таження, КПа		$W_{\text{ПОТР}}$ см <sup>3</sup>	Прийнятий переріз		Перевірка перерізу		Кое- фіці- єнт впли- ву
			По- стій не	Сніг		Про- філь	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$\sigma$ , МПа	$f/l$	
1	I	Утеплені з.б. панелі	4,46	0,7	2322	55Б2	2296	242,7	1/242	47,03
2		Утеплена покрівля по ст. наст.	1,59	0,7	1030,5	45Б1	1125,8	219,7	1/220	95,93
3		Сталевий настил	0,57	0,8	615,6	35Б2	662,2	206,8	1/180	163,1
4		Без пост. наванта- ження.	-	0,8	360	30Б1	427	202,3	1/205	252,9
5	II	Утеплені з. б. панелі	4,46	0,98	2448	60Б1	2656	221,2	1/290	40,66
6		Утеплена покрівля по ст. наст.	1,59	0,98	1156,5	45Б2	1292	214,9	1/229	83,60
7		Сталевий настил	0,57	1,12	759,6	40Б1	803,6	208,6	1/206	134,4
8		Без пост. наванта- ження	-	1,12	504	35Б1	581,7	207,9	1/233	185,7
9	III	Утеплені з. б. панелі	4,46	1,40	2637	60Б1	2656	238,3	1/271	40,67
10		Утеплена покрівля по ст. наст.	1,59	1,4	1345,5	50Б1	1511	213,7	1/257	71,47
11		Сталевий настил	0,57	1,6	975,6	40Б2	935,7	250,2	1/195	115,4
12		Без пост. наванта- ження	-	1,6	720	40Б1	803,6	215,0	1/255	134,4

Таблиця 4.7

## Оцінка надійності сталевих кроквяних балок

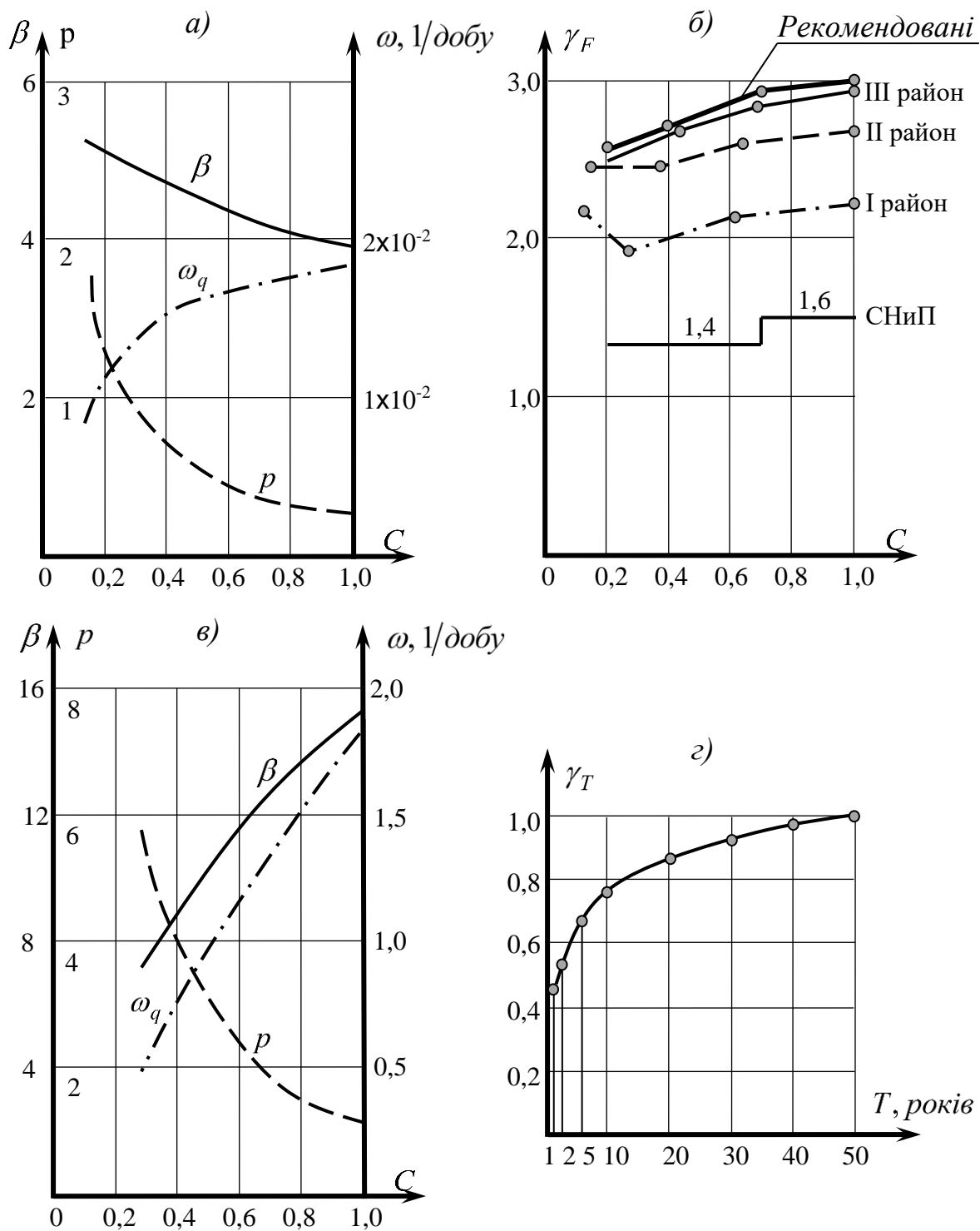
№ з/п	Тип покрівлі	$N_+$ ( $T = 50$ років)-кількість викидів $Y(t)$					
		Ва-рі-ант	I сніговий район	Ва-рі-ант	II сніговий район	Ва-рі-ант	III сніговий район
1	Утеплені з б. панелі	1	$1,54 \cdot 10^{-2}$	5	$1,13 \cdot 10^{-3}$	9	0,139
2	Легка утеплена покрівля по сталевому настилу	2	$4,62 \cdot 10^{-3}$	6	0,125	10	0,372
3	Неутеплений сталевий настил	3	$1,84 \cdot 10^{-2}$	7	1,883	11	3,635
4	Без пост. навантаження	4	$3,84 \cdot 10^{-2}$	8	2,33	12	2,43

Фактичне збільшення маси кроквяних конструкцій не пропорційне збільшенню снігового навантаження, воно залежить від співвідношення снігового та постійного навантажень і може бути значно менше зростання першого з них. Так, для кроквяних балок, наведених у табл. 4.6, рекомендовані збільшення  $\gamma_f$  у 1,7...1,9 разів призведуть до збільшення маси конструкцій всього на 17...60 % при  $C = 0,2...0,8$  і відповідне подорожчання конструкцій. Однак додаткові витрати в даному випадку є, на нашу думку, виправданими, оскільки практично виключають руйнування сталевих кроквяних конструкцій, особливо при легких покрівлях.

#### 4.9. ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ДІЇ ВІТРОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Група сталевих елементів, завантажених переважно вітровим навантаженням, включає, зокрема, різні відтяжки, власна маса яких невелика, а також відтяжки з привантаженням і попереднім напруженням, так звані «вітрові» елементи (рис. 4.19). Вважаємо, як і в попередніх розділах даного розділу, характер роботи сталевих елементів під навантаженням лінійним.





**Рис. 4.18. Розрахунок елементів на снігове (а, б) і вітрове навантаження (в, г):**

а, в – імовірнісні параметри; б – коефіцієнти надійності снігового навантаження; г – коефіцієнти, для вітрового навантаження, що враховують термін експлуатації.



Вітрозахисний екран

Димова труба з відтяжками

**Рис. 4.19. Споруди, що сприймають вітрове навантаження**

**4.9.1. Розрахунок надійності елементів при дії середньої складової вітрового навантаження.** Узагальнені результати розрахунків для всіх вітрових районів і різних частках вітрового навантаження ( $C = 0,3; 0,7; 1,0$ ) наведені в *табл. 4.8*.

Як видно з цієї таблиці, для імовірнісних розрахунків елементів під дією середньої складової вітрового навантаження характерні відносно великі значення характеристики безпеки  $\beta$  і відчутний вплив несиметричного розподілу Вейбулла на розподіл резерву несучої здатності (*рис. 4.14, б*). Дані *табл. 4.8* показують відносно високу забезпеченість сталевих елементів, завантажених тільки статичним вітровим навантаженням.

При дії на елемент, разом з вітровим, постійного навантаження, у міру зменшення частки вітрового навантаження, росте співвідношення  $p$  і нормалізується сумарний розподіл, дещо знижується сумарна ефективна частота  $\omega_q$ , досить швидко знижується  $\beta$  (*рис. 4.18, в*) і зростає  $Q(t)$ , наближаючись до  $10^{-3}$  (*табл. 4.8*).

Детальне дослідження цього питання дозволило обґрунтувати понижуючий коефіцієнт надійності  $\gamma_T$  вітрового навантаження для території України (*табл. 4.9*). Ці коефіцієнти призначені для розрахунків тимчасових посилень,

Таблиця 4.8

Оцінка надійності елементів, що сприймають постійне і вітрове навантаження

Вітро- вий район	Середньорайонні параметри вітрового навантаження				Частка ветрового наван- таження	Параметри оцінки надійності					$Q(T=50)$
	$\omega_V$ 1/добу	$V_V$	$K_{tr}$	$\gamma_p$		$p$	$\beta$	$\omega_q$ 1/добу	$\beta_\omega$	$Q(\beta)$	
I	6,58	1,81	0,4257	20,13	1,0	14,85	1,765	3,0	$9,0 \cdot 10^{-25}$	$1,16 \cdot 10^{-20}$	
					0,7	12,42	1,30	6,47	$7,0 \cdot 10^{-11}$	$1,042 \cdot 10^{-6}$	
					0,3	6,798	0,48	17,25	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$3,29 \cdot 10^{-4}$	
II	5,16	1,78	0,4040	15,6	1,0	13,177	1,501	3,0	$2,0 \cdot 10^{-25}$	$2,19 \cdot 10^{-21}$	
					0,7	11,47	1,161	5,4	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$5,23 \cdot 10^{-6}$	
					0,3	6,706	0,453	13,50	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$1,76 \cdot 10^{-3}$	
III	5,42	1,73	0,3541	13,21	1,0	11,98	1,483	3,0	$5,1 \cdot 10^{-25}$	$5,50 \cdot 10^{-21}$	
					0,7	10,80	1,186	3,003	$4,0 \cdot 10^{-9}$	$3,45 \cdot 10^{-5}$	
					0,3	6,623	0,485	11,49	$5,9 \cdot 10^{-6}$	$5,40 \cdot 10^{-3}$	

Позначення:  $\gamma_p$  – нормоване відхилення розрахункового вітрового навантаження.

елементів об'єктів, що реконструюються, з обмеженим терміном експлуатації і т.п. Подібне зменшення вітрового навантаження регламентовано ДБН [13] у формі диференційованого коефіцієнта надійності  $\gamma_{fm}$  (табл. 3.10).

Таблиця 4.9

**Коефіцієнти, що враховують термін експлуатації елементів, що сприймають вітрове навантаження**

<i>Термін експлуатації, t років</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>5</i>	<i>10</i>	<i>20</i>	<i>30</i>	<i>40</i>	<i>50</i>
<i>Понижуючий коефіцієнт <math>\gamma_T</math></i>	0,46	0,54	0,66	0,76	0,86	0,92	0,965	1,00

**4.9.2. Врахування пульсаційної складової вітрового навантаження в розрахунках надійності.** Розрахунок надійності з урахуванням вітрової пульсації виконувався для сталевих елементів з лінійним характером роботи, виконаних із сталі С245 з розрахунковим опором  $R_y = 240$  МПа, межа текучості якої розподілена нормально з математичним очікуванням  $\bar{\sigma}_y = 280$  МПа і стандартом  $\hat{\sigma}_y = 14,3$  МПа. Елементи були підібрані без запасу на постійне і вітрове навантаження, причому доля напружень в елементах від розрахункового вітрового навантаження складала 70 % ( $C = 0,7$ ). Розрахунки виконані для трьох вітрових районів України, згідно з нормами СНіП, для терміну експлуатації 50 років. Імовірнісні параметри середньої складової вітрового навантаження узяті з табл. 3.10, пульсаційна складова приймалася для відкритої місцевості і висоти 10 м. Критерієм відмови елементу вважалось перевищення сумарним напруженням межі текучості сталі, тобто розглядалася статична дія вітрового навантаження.

Отримані оцінки надійності наведені в табл. 4.10 з наступними позначеннями:  $\beta$  – характеристика безпеки;  $f_Y(\beta)$  – ордината щільності спільного розподілу межі текучості сталі і напруження в елементі від зовнішніх навантажень;  $\beta_\omega$  – коефіцієнт широкополосності випадкового процесу резерву несучої здатності елементу;  $\omega_q$  – ефективна частота цього ж

випадкового процесу;  $t$  – термін служби елементу;  $l$  – коефіцієнт, що показує збільшення імовірності відмови елементу внаслідок врахування частотної нелінійності середньої складової вітрового навантаження..

**Таблиця 4.10**

**Оцінка надійності сталевих елементів, що сприймають постійне і вітрове навантаження**

Віт- ро- вий рай- он	Оцінка	Параметри оцінки імовірності відмови					Імовір- ність відмови $Q(t)$
		$\beta$	$f_Y(\beta)$	$\beta_\omega$	$l$	$\omega_q$ , 1/добу	
I	Нижня	12,31	$7 \cdot 10^{-11}$	6,48	–	1,30	$1,024 \cdot 10^{-7}$
	Уточнена	12,27		6,40	6,05	2090,0	$1,66 \cdot 10^{-4}$
II	Нижня	11,47	$1,1 \cdot 10^{-9}$	5,40	–	1,16	$1,74 \cdot 10^{-6}$
	Уточнена	11,42		5,34	5,34	2240,0	$3,35 \cdot 10^{-3}$
III	Нижня	10,80	$4 \cdot 10^{-9}$	4,86	–	1,19	$0,71 \cdot 10^{-5}$
	Уточнена	10,74		4,81	5,78	1874,2	$1,13 \cdot 10^{-2}$

Оцінка імовірності відмови елементів, названа в *табл. 4.10* «уточненою», враховує як середню (разом з її частотною нелінійністю), так і пульсаційну складові вітрового навантаження; «нижня» оцінка враховує тільки дію середньої вітрової складової. Дані *табл. 4.10* показують, що уточнена оцінка дає більш високі (приблизно на три порядки) значення імовірності відмови елементів в порівнянні з нижньою оцінкою, в основному за рахунок впливу пульсаційної складової. Остання, будучи помітно менше середньої складової за величиною, незначно змінює параметри  $\beta$  і  $\beta_\omega$ , а також значення  $f_Y(\beta)$ , проте внаслідок своєї високочастотності істотно підвищує ефективну частоту випадкового процесу резерву несучої здатності елементів, що призводить до значного підвищення імовірності їх відмови. При цьому слід зазначити, що в якості критерію відмови використовувалася умова вичерпання статичної міцності, без врахування впливу на міцність повторності вантаження, яке може також вплинути на значення отриманих оцінок надійності елементів.

Врахування частотної нелінійності середньої складової в даному випадку, коли вплив вітрового навантаження є відносно високим (70 % розрахункового напруження в елементі дає розрахункове вітрове навантаження), призводить до збільшення імовірності відмови в 5 – 6 разів. При меншій частці вітрового навантаження, наприклад, при спільній дії декількох короткочасних навантажень, це збільшення буде менше і може взагалі не враховуватися.

#### 4.10. РОЗРАХУНКОВІ СПОЛУЧЕННЯ НАВАНТАЖЕНЬ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ НАДІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ

Імовірнісні розрахунки конструкцій при врахуванні кількох навантажень мають результати переважно у формі коефіцієнтів сполучень навантажень. Нижче розглянуті результати обчислення коефіцієнтів сполучень зусиль від навантажень, представлених у вигляді квазістаціонарних випадкових процесів при постійній і випадковій міцності елементів.

Розрахунки були виконані для усіх можливих комбінацій снігових і вітрових районів України (згідно з нормами СНіП) і характеристик мостових кранів, при цьому була встановлена практична незалежність коефіцієнтів сполучення від рівня  $[Q]$ , коефіцієнта варіації несучої здатності конструкції і параметрів мостових кранів. Виявилось можливим застосувати для апроксимації коефіцієнта сполучення дробово-лінійну функцію, [14]:

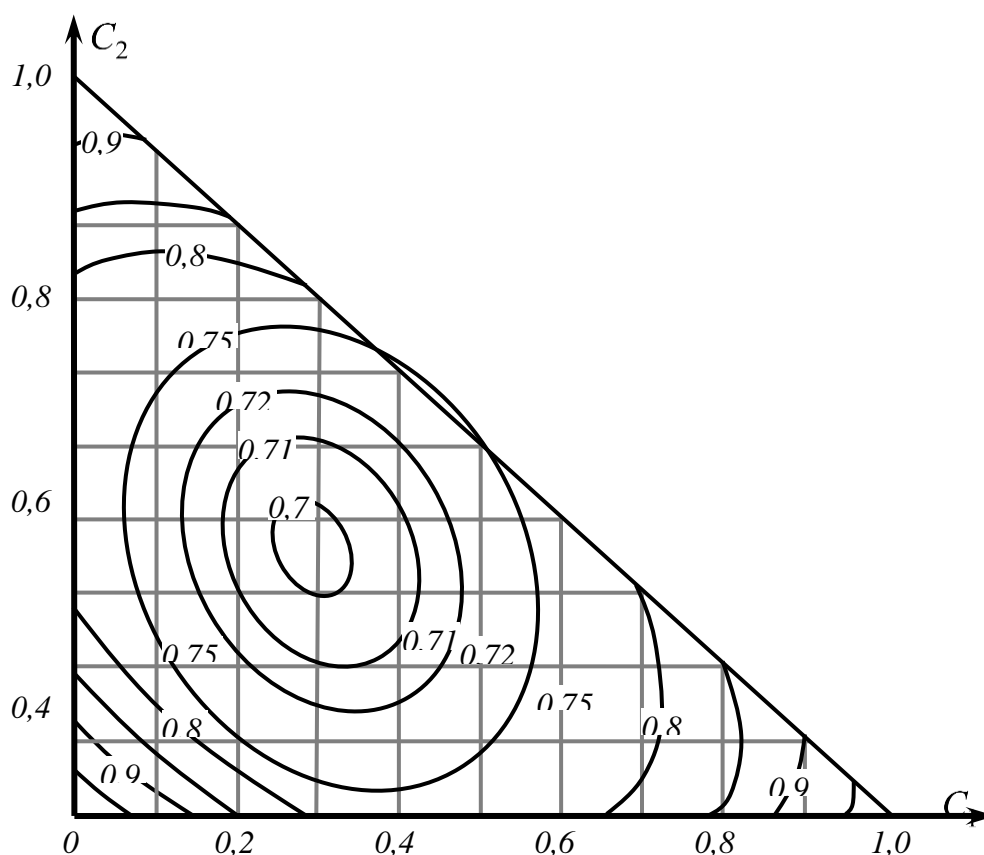
$$\psi = \sum_{K=1}^3 \frac{C_K}{C_K(1 - \beta_K) + \beta_K}, \quad (4.74)$$

де  $C_K$  – частка навантажень в загальному зусиллі, причому  $C_1$  – частка снігового навантаження,  $C_2$  – частка вітрового навантаження,  $C_3$  – частка кранового навантаження,  $\sum_1^3 C_K = 1$ .

Коефіцієнти  $\beta_K$  для території України складають:  $\beta_1 = 1,56$ ;  $\beta_2 = 1,69$ ;  $\beta_3 = 1,66$ .

Функція (4.74) описує увігнуту поверхню, яка наочно ілюструється на *рис. 4.20* горизонталями. Мінімум коефіцієнту сполучення, що дорівнює 0,70, відповідає приблизно рівним часткам усіх трьох навантажень, при врахуванні двох навантажень мінімум коефіцієнта сполучення складає 0,75...0,77.

Використання отриманих знижених коефіцієнтів сполучення в практичних розрахунках замість пропонованого діючими нормами  $\psi = 0,9$  може дати помітний економічний ефект.



**Рис. 4.20.** Коефіцієнти сполучення зусиль від снігового, вітрового і кранового навантажень для території України:

$C_1$  – частка снігового навантаження;

$C_2$  – частка вітрового навантаження.

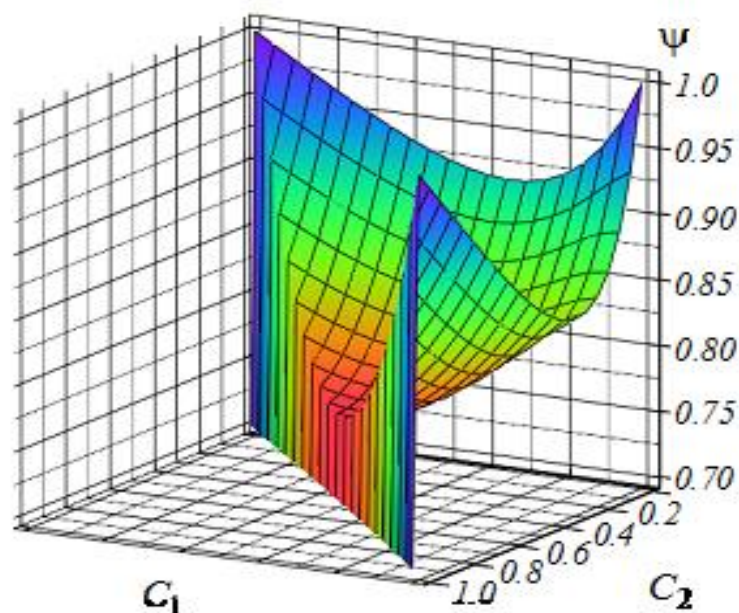
У подальшому на основі імовірнісної моделі абсолютних максимумів випадкових процесів навантажень була отримана уточнена оцінка коефіцієнтів сполучення  $\psi$  для найбільш

поширених навантажень [15]. Зокрема, для снігового (частка впливу  $C_1$ ), вітрового (частка впливу  $C_2$ ) і кранового (частка впливу  $C_3$ ) навантажень були отримані наступні формули:

$$\psi_{13} = \frac{C_1}{0,60 + 0,40C_1} + \frac{C_3}{2,36 - 1,36C_3}; \quad (4.75)$$

$$\psi_{23} = \frac{C_2}{0,575 + 0,425C_2} + \frac{C_3}{3,30 - 2,30C_3}; \quad (4.76)$$

$$\psi_{12} = \frac{C_1}{1,60 - 0,60C_1} + \frac{C_2}{1,64 - 0,64C_2}. \quad (4.77)$$

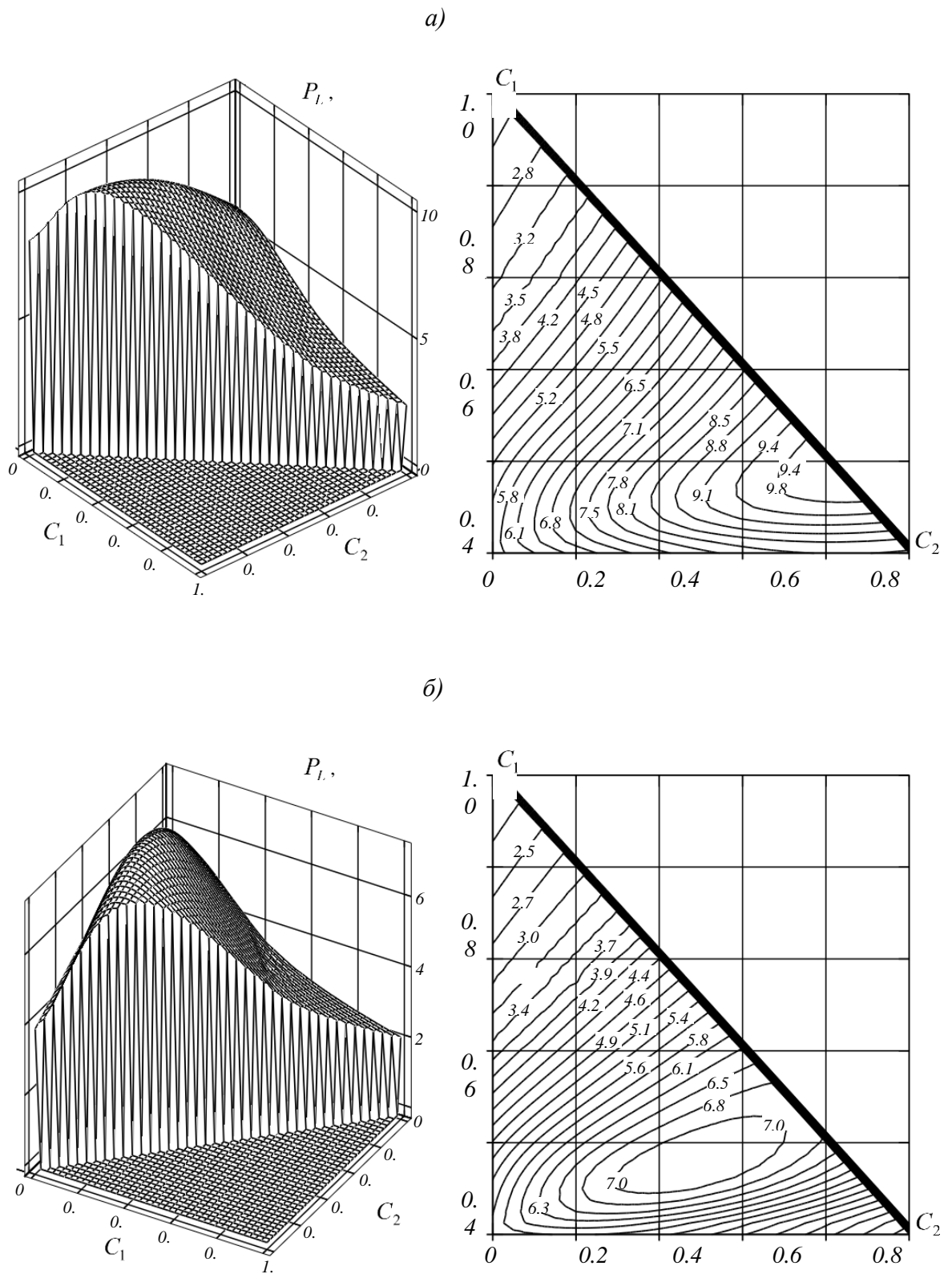


**Рис. 4.21. Коефіцієнти сполучення навантажень**

При сполученні трьох випадкових навантажень (кранового, вітрового і снігового) залежність коефіцієнта сполучення від часток впливу навантажень має складніший характер у вигляді увігнутої поверхні, зображеної на *рис. 4.21*.

Була виконана також оцінка надійності елементів при дії сполучення навантажень з використанням для максимумів навантажень спрощеної експоненційної моделі (СЕМ), що призвело до значного зменшення трудомісткості розрахунків, особливо при зростанні кількості поєднаних навантажень. Цей метод отримав скорочену назву «модель резерву» [15].





**Рис. 4.22. Приклади регіональної оцінки показника надійності елементів конструкцій, завантажених постійним, сніговим і вітровим навантаженням (просторове і контурне зображення):**  
 а – для міста Києва; б – для міста Полтави



Рис. 4.23. Територіальна оцінка показника надійності  $P_L$  конструкцій, що сприймають постійне та снігове (частка впливу  $C_1 = 0,7$ ) навантаження



Рис. 4.23. Територіальна оцінка показника надійності  $P_L$  конструкцій, що сприймають постійне та вітрове (частка впливу  $C_2 = 0,7$ ) навантаження

Узагальнені оцінки надійності конструктивних елементів представлені у вигляді просторових та контурних зображень поверхонь показника надійності у белах (рис. 4.21), який визначався як

$$P_L = -\lg[1 - P(t)], \quad (4.78)$$

де  $P(t)$  – імовірність безвідмовної роботи елемента за проміжок часу  $t$ .

Крім того, для всіх областей України складені карти двосторонньої оцінки показника надійності елементів, приклади яких наведені на рис. 4.22 і 4.23, що дає можливість безпосередньо судити про рівень надійності конструкцій, розрахованих за діючими нормами, розміщеними як в межах конкретної області, так і в усіх регіонах України [16].

#### Література до розділу 4

1. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1978 – 239 с.
2. Cornell C.A. Bounds on the Reliability of Structural Systems / C.A. Cornell // American Society of Civil Engineers: Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. ST., February 1967. – P. 171 – 200.
3. ДБН В.1.2-14-2009. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд. – К.: Мінрегіон України, 2018. – 30 с
4. Руководство по усилению железобетонных конструкций композитными материалами / В. Л. Чернявский, Ю. Г. Хаютин, Е.З. Аксельрод, В.А. Клевцов, Н.В. Фаткуллин – М.: ООО «Интераква», НИИЖБ, 2006. – 48 с.
5. Пичугин С.Ф. Оценка надежности железобетонных балок с углепластиковым внешним армированием / С.Ф. Пичугин // Строительство, материаловедение, машиностроение / Сб. научн. тр. Вып. 77. – Дн-ск, ГВУЗ «ПГАСА», 2014 – С. 153 – 157.
6. ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 71 с.
7. Пичугін С.Ф. Розрахунок надійності будівельних конструкцій / С.Ф. Пичугін. – Полтава: ТОВ «АСМІ», 2016 – 520 с.

8. Пичугин С.Ф. Вероятностный расчет стальных элементов на совместное действие нагрузок / С.Ф. Пичугин // Известия вузов. Строительство – 1995. – №5,6. – С. 23 – 29.
9. Надійність лінійних частин магістральних трубопроводів – Reliability of Main Pipelines Linear Parts: Монографія / С.Ф. Пічугін, В.А. Пашинський, О.Є. Зима, П.Ю. Винников, Ж.Ю. Біла. – Полтава: ПП «АСТРАЯ», 2018. – 439 с.
10. Pichugin S. Reliability of Steel Lattice Towers under Stochastic Along-Wind Load / S. Pichugin, A. Makhinko // Recent Advances in Research on Environmental Effects on Buildings and People. Ed. by A. Flaga and T. Lipecki. – PAWE, Cracow, Poland, 2010. – P. 97 – 106.
11. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. / Е.С. Вентцель. – 10-е изд. – М.: «Академия», 2005. – 576 с.
12. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике / В.В. Болотин. – 2-е изд. – М.: Стройиздат, 1965. – 279 с.
13. ДБН В.1.2-2:2006. Навантаження і впливи. – К.: Мінбуд України, 2006. – 51 с
14. Пашинський В.А. Атмосферні навантаження на будівельні конструкції / В.А. Пашинський. – К.: УкрНДІПСК, 1999. – 185 с.
15. Пичугин С.Ф. Некоторые вопросы расчета надежности металлоконструкций / С.Ф. Пичугин, А.В. Махінько // Металеві конструкції. – Том 11, № 3. – 2006. – С.187 – 196.
16. Пічугін С.Ф. Рекомендації із розрахунку надійності сталевих елементів конструкцій на дію снігового та вітрового навантажень (до ДБН В.1.2-2:2006 "Навантаження і впливи") / С.Ф. Пічугін, А.В. Махінько, Н.О. Махінько. – Полтава: Изд-во АСМІ, 2007. – 115 с.

## РОЗДІЛ 5 ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ СТИСНУТО-ЗІГНУТИХ ЕЛЕМЕНТІВ

*Саме поняття «стійкість» або «нестійкість» характеризує реакцію системи на дію збурень, прагнучих відхилити її від даного положення рівноваги. Оскільки ці збурення носять випадковий характер, то статистичний підхід є подальшим кроком вперед в розвитку теорії пружної і непружної стійкості.*

**В.В. Болотін, академік**

### 5.1. ОСОБЛИВОСТІ ІМОВІРНІСНОГО РОЗРАХУНКУ СТИСНУТО-ЗІГНУТИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**5.1.1. Особливості роботи стиснуто-зігнутих елементів.** На стиск зі згином працюють елементи, завантажені, крім поздовжньої сили, поперечним навантаженням або згинальним моментом (*рис. 5.1, а*). Такими елементами є колони виробничих будівель постійного перерізу і ступінчасті, стійки фахверка, стержні кроквяних ферм з позавузловим навантаженням. Ці елементи є по суті самими малодослідженими з точки зору надійності будівельних конструкцій.

Таке положення обумовлене тим, що окрім труднощів з імовірнісним описом реальних навантажень, оцінка надійності стиснуто-зігнутих елементів, у тому числі і виконаних з такого добре вивченого і чітко працюючого матеріалу, яким є сталь, пов'язана з урахуванням геометричної і фізичної нелінійності. Для знайомства з досить складними питаннями роботи і розрахунку стиснуто-зігнутих елементів адресуємо читача до класичних робіт з цього питання, зокрема [1].

Важливо підкреслити, що імовірнісний аналіз таких елементів, особливо в частині обґрунтованого розрахунку

сполучення зусиль, може дати помітний ефект, оскільки на практиці саме стиснуто-зігнуті елементи (стійки, колони та ін.) завантажені найбільш широким набором випадкових навантажень.

Проілюструємо на *рис. 5.1, б* (крива *O-C*) роботу сталевого стиснуто-зігнутого стержня. Тут по осі абсцис відкладений прогин стержня, по осі ординат – нормальне напруження  $\sigma_N = N/A$  ( $N$  – поздовжня сила,  $A$  – площа перерізу стержня). З самого початку завантаження стержень викривляється, у міру зростання навантажень прогин стержня і згинальний момент в ньому ростуть.

Точка *A* на графіці відповідає досягненню крайової текучості, коли в найбільш напружених фібрах найбільш небезпечного перерізу стержня нормальне напруження дорівнює межі текучості. Цей момент і напруження  $\sigma_{кр}^y$ , що відповідає йому, є граничними для пружного розрахунку за деформованою схемою.

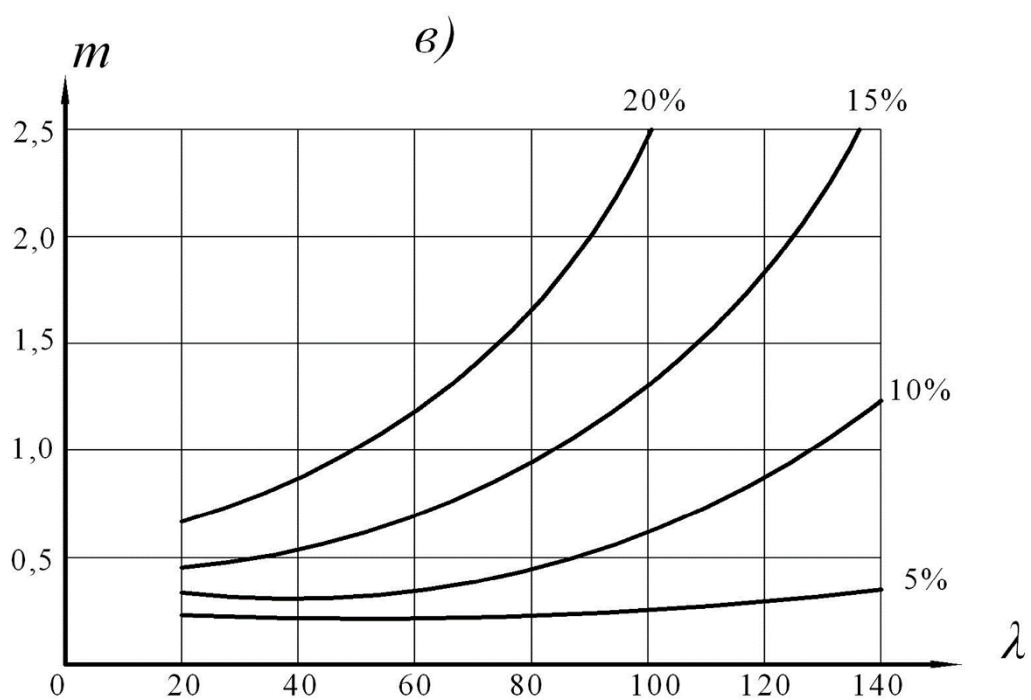
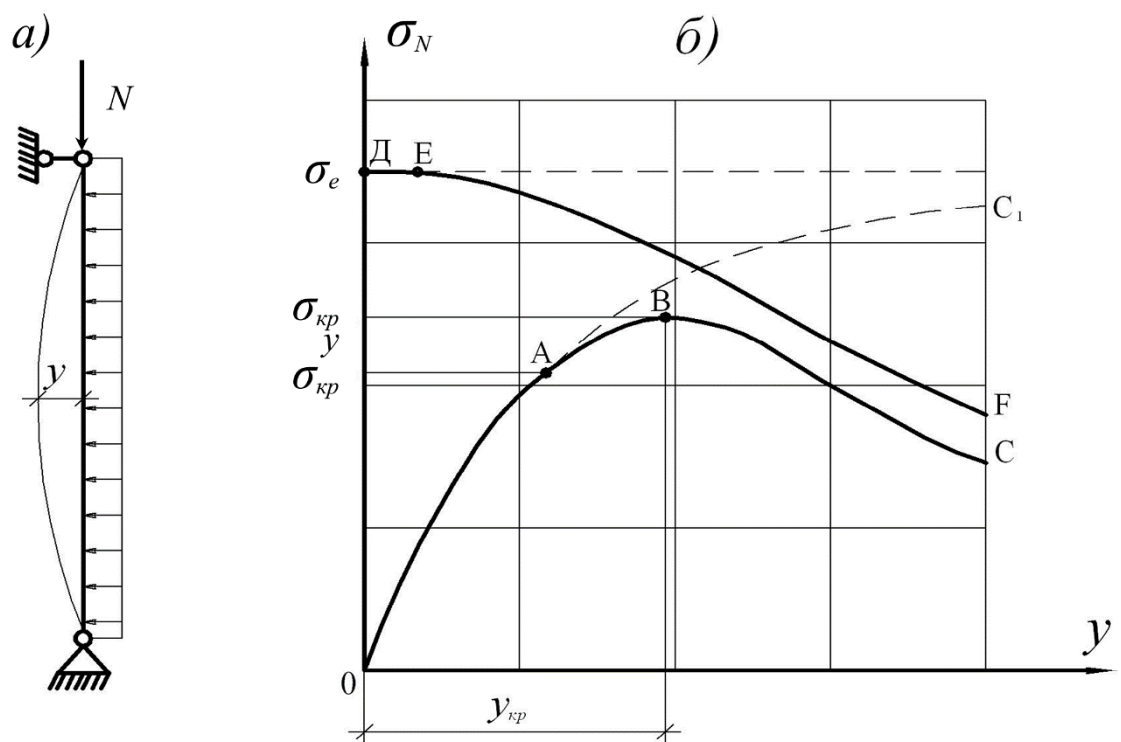
Далі діаграма роботи пружного стержня відхиляється вгору (ділянка *A-G*) і у міру необмеженого зростання прогину асимптотично наближається до рівня Ейлерового критичного напруження для центрально-стиснутого стержня:

$$N_e = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}; \quad \sigma_e = \frac{N_e}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (5.1)$$

де  $E$  – модуль пружності сталі;  $I$  – момент інерції стержня;  $l$  – геометрична довжина стержня;  $A$  – площа перерізу;  $\lambda = \mu l / i$  – гнучкість стержня;  $i = \sqrt{I/A}$  – радіус інерції перерізу.

$\mu$  – коефіцієнт розрахункової довжини, що враховує вид закріплення кінців стержня:

- $\mu = 1$  для ЦСЕ з шарнірними опорами;
- $\mu = 0,7$  для ЦСЕ з однією шарнірною опорою, іншою защемленою;
- $\mu = 0,5$  для ЦСЕ з обома защемленими опорами;
- $\mu = 2$  для ЦСЕ у вигляді консолі.



**Рис. 5.1.** До розрахунку стиснуто-зігнутих елементів  
 а – схема елемента; б – стадії роботи стиснуто-зігнутих  
 і центрово-стиснутих елементів; в – похибка пружного розрахунку

Роботу реального сталевго стержня відображає ділянка кривої  $A-C$ , що має максимум в точці  $B$ , який відповідає критичному стану стержня і критичному напруженню  $\sigma_{кр}$ .

Для реальних сталевих стиснуто-зігнутих стержнів рівність  $\sigma_N = \sigma_{кр}$  відповідає граничному стану і припиненню експлуатації, а умова неруйнівності матиме наступний вигляд:

$$\sigma_{кр} - \sigma_N \geq 0. \quad (5.2)$$

На графіці *рис. 5.1, б* ілюструються також стадії роботи центрально-стисненого стержня: стійка прямолінійна (при відсутності початкової недосконалості) – ділянка  $O-D$  осі ординат до  $\sigma_N = \sigma_e$ ; ділянка  $D-E$  роздвоєння форм рівноваги, що відповідає критичному стану, і низхідна ділянка  $E-F$  нестійкого посткритичного стану.

Нагадаємо, що згідно з діючими нормами проектування [2] перевірка центрово-стиснених елементів (ЦСЕ) виконується за формулою

$$N / (\varphi A R_y \gamma_c) \leq 1, \quad (5.3)$$

де  $N$  – поздовжня сила;  $A$  – площа перерізу елемента;  $R_y$  – розрахунковий опір сталі за межею текучості;  $\gamma_c$  – коефіцієнт умов роботи;  $\varphi$  – коефіцієнт стійкості при центровому стиску, який визначається в залежності від типу кривої стійкості і умовної гнучкості

Пружний розрахунок з урахуванням геометричної нелінійності може бути застосовний для стиснуто-зігнутих стержнів великої гнучкості, для яких точки  $A$  і  $B$  на графіці *рис. 5.1, б* зближуються, для стержнів із сталей підвищеної міцності без вираженого майданчика текучості, а також в методах, що враховують пружно-пластичну роботу сталі введенням відповідних поправок. На *рис. 5.1, в* ілюструється похибка пружного розрахунку в залежності від гнучкості  $\lambda$  і відносного ексцентриситету поздовжньої сили



$$m = \frac{eA}{W} = \frac{MA}{NW} = \frac{M}{\rho N}, \quad (5.4)$$

де  $M$  – згинальний моменту в стержні від поперечного навантаження,  $W$  – момент опору перерізу,  $\rho$  – радіус ядра перерізу.

Графік *рис. 5.1*, в наочно демонструє помітну наближеність пружного розрахунку стиснуто-зігнутих елементів. Тому розрахунок таких елементів згідно з нормами проектування [2] проводиться з урахуванням розвитку пластичності.

Нагадаємо, що згідно з діючими нормами [2], перевірка несучої здатності стиснуто-зігнутих сталевих елементів виконується за формулою

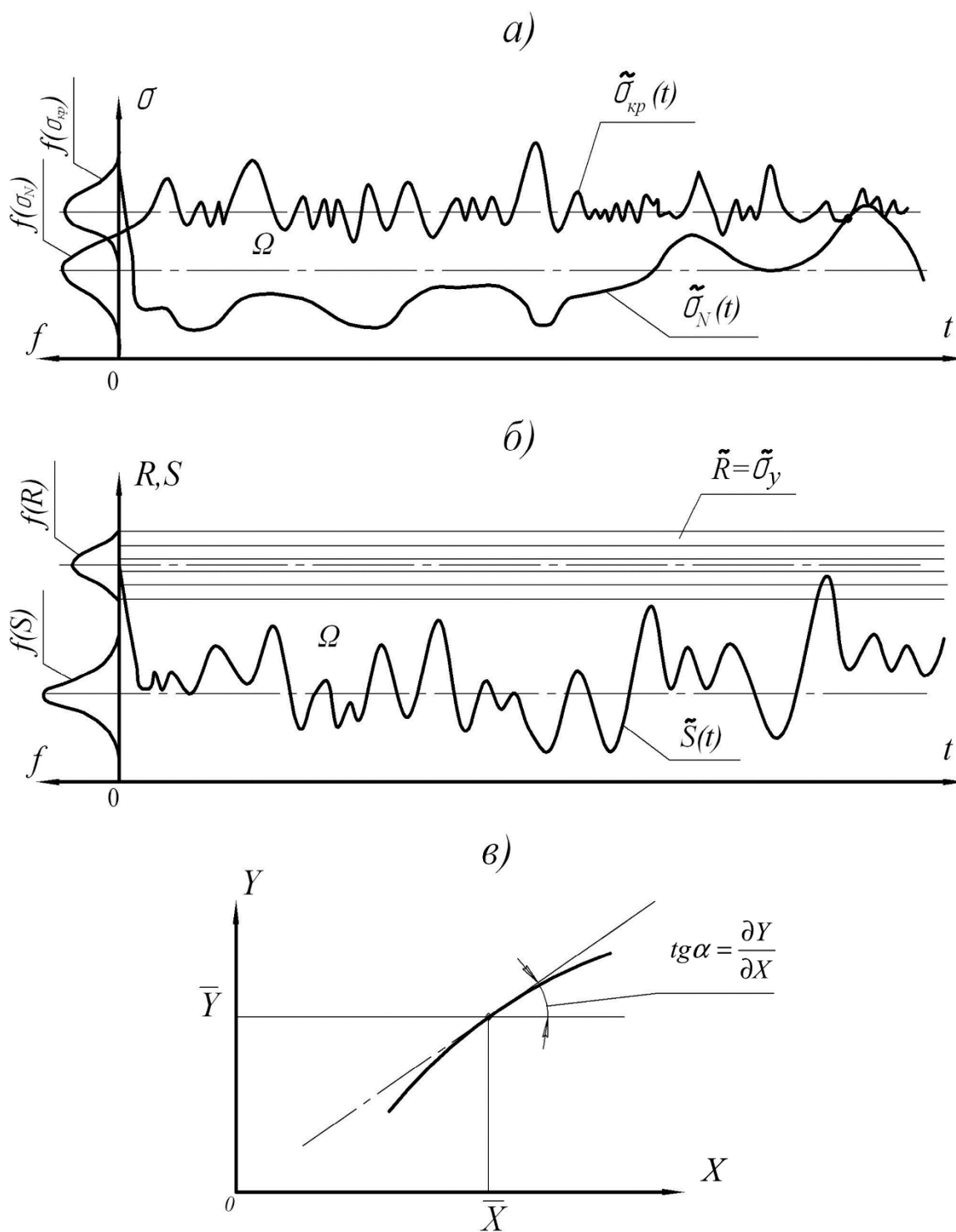
$$N / (\varphi_e A R_y \gamma_c) \leq 1, \quad (5.5)$$

де  $N$  – поздовжня сила;  $A$  – площа перерізу елемента;  $R_y$  – розрахунковий опір сталі за межею текучості;  $\gamma_c$  – коефіцієнт умов роботи;  $\varphi_e$  – коефіцієнт стійкості при позацентровому стиску, який визначається в залежності від приведенного відносного ексцентриситету і умовної гнучкості (див. нижче пояснення до формули (5.14)).

### 5.1.2. Імовірнісний аналіз стиснуто-зігнутих елементів.

Визначимо стохастичну природу умови неруйнівності (5.1), обидва члени якої є квазістаціонарними функціям часу в просторі нормальних напружень. Внаслідок цього відмова моделюється як перетин квазістаціонарною траєкторією  $\tilde{\sigma}_N(t)$  квазістаціонарної межі області допустимих станів (*рис. 5.2, а*).

Представляється зручнішим змінити параметр якості системи і вид допустимої області. Для цього перетворимо нерівність (5.2):



**Рис. 5.2. Особливості імовірнісного розрахунку стиснуто-зігнутих елементів:**

а, б – моделі відмов; в – лінеаризація функції одного аргументу

$$\sigma_y \zeta(t) - \sigma_N(t) \geq 0; \quad \sigma_y - \sigma_N(t) / \zeta(t) \geq 0, \quad (5.6)$$

де  $\zeta$  – функція, що приводить критичне напруження втрати стійкості стиснуто-зігнутого стержня до межі плинності матеріалу; приміром, в чинних нормах  $\zeta = \varphi_e$  [2].

Тоді для резерву несучої здатності, який для цього стержня назовемо *резервом стійкості*, маємо:

$$\tilde{Y}(t) = \tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_N(t) / \zeta(t) = \tilde{R} - \tilde{S}(t). \quad (5.7)$$

Межа допустимої області  $\Gamma$  при цьому залишається випадковою, незалежною від часу (оскільки ми не враховуємо зміну міцності елементів), а відмова трактується як вихід квазістаціонарної траєкторії  $\tilde{S}(t)$  за випадковий рівень  $\tilde{R}$  (рис. 5.2, б).

**5.1.3. Лінеаризація функцій.** У зв'язку із складністю послідовного стохастичного аналізу поведінки стиснуто-зігнутих стержнів будемо використовувати прийом з підставленням імовірнісних параметрів в детерміністичні рішення завдань стійкості таких стержнів.

У загальному випадку резерв стійкості стиснуто-зігнутих стержнів є функцією кількох аргументів:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Внаслідок нелінійності функції виконаємо її лінеаризацію із заміною вихідного виразу лінійною функцією виду [3]:

$$\begin{aligned} Y &= f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial X_i}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)(X_i - \bar{X}_i) = \\ &= \bar{Y} + \sum_{i=1}^n A_i (X_i - \bar{X}_i). \end{aligned} \quad (5.8)$$

На *рис. 5.2*, в ілюструється лінеаризація функції одного аргументу, вона виконується в околі математичного сподівання функції, при цьому кутовий коефіцієнт прямої, що вводиться, визначається частинним диференціюванням вихідної функції по відповідному аргументу. Геометричним зображенням лінеаризованої функції  $n$  аргументів є гіпер-пряма в  $n+1$  мірному просторі. Похибку у визначенні  $\bar{X}$  у зв'язку з лінеаризацією по (5.8) можна оцінити наступним виразом:

$$\Delta \bar{Y} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 Y}{\partial X_i^2} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \hat{X}_i. \quad (5.9)$$

Тут  $\hat{X}$  – дисперсія  $i$ -го аргументу.

При незначності цієї похибки формула для визначення математичного сподівання (5.8) спрощується і зводиться до підстановки математичних сподівань аргументів у вихідну функцію:

$$\bar{Y}(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n). \quad (5.10)$$

Середньоквадратичне відхилення (стандарт) резерву стійкості визначається, у випадку незалежності аргументів, як

$$\hat{Y} = \sqrt{\hat{Y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{dY}{dX_i} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \right]^2 \hat{X}_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2 \hat{X}_i^2}. \quad (5.11)$$

Похибка даного виразу внаслідок лінеаризації оцінюється так [3]:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{Y} = \Delta(\hat{Y}^2) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial^2 Y}{\partial X_i^2} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \right]^2 \hat{X}_i^2 + \\ &+ \sum_{i>j} \left[ \frac{\partial^2 Y}{\partial X_i \partial X_j} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \right]^2 \hat{X}_i \hat{X}_j. \end{aligned} \quad (5.12)$$

На базі цього підходу і числового прикладу (приведеного нижче в п. 5.2.2) був проведений аналіз застосовності операції лінеаризації до задачі, що розглядається. Ординати лінійної функції (5.8) були зіставлені з точними значеннями вихідної функції  $Y$ , обчисленої з використанням (5.13). Розбіжність була отримана незначною для досить широкого інтервалу зміни функції  $Y$ : при відхиленні усіх аргументів на величину одного стандарту  $\hat{X}_i$ , що призводить до відхилення  $Y$  приблизно на  $1,5\hat{Y}$ , лінеаризоване значення функції відхиляється від точного всього на  $-3,1\%$ . При збільшенні відхилення аргументів до двох стандартів, що призводить до відхилення резерву стійкості від математичного очікування на  $4,6\hat{Y}$ , різниця між точним і наближеним значеннями функції  $Y$  складає  $-10,3\%$ .

Обчислені за формулами (5.9) і (5.12) похибки математичного очікування і дисперсії виявилися незначними і не перевищили  $0,1\%$ .

Враховуючи малу похибку при обчисленні резерву стійкості, його математичного очікування і дисперсії, операцію лінеаризації для завдань імовірнісного розрахунку стиснуто-зігнутих сталевих стержнів можна вважати обґрунтованою, щонайменше, для умов, близьких до умов розглянутого прикладу.

## 5.2. НАДІЙНІСТЬ СТАЛЕВИХ СТИСНУТО-ЗІГНУТИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПОСТІЙНОГО ПЕРЕРІЗУ

**5.2.1. Виведення основних формул [4].** Для суцільностинчастих стержнів, що розглядаються в площині дії моменту, співпадаючої з площиною симетрії, для значень  $\varphi_e$  по табл. Ж.3 [2] підібрана функція виду

$$\varphi_e = b(1 - C \lg m_{ef}); \quad b = K_1 - K_2 \lg \bar{\lambda}; \quad C = K_3 - K_4/b, \quad (5.13)$$

де  $K_1 = 0,70$ ;  $K_2 = 0,62$ ;  $K_3 = 0,943$ ;  $K_4 = 0,075$ ;  $m_{ef} = \eta m$  – приведений відносний ексцентриситет;  $\eta$  – коефіцієнт, що враховує форму перерізу і орієнтацію ексцентриситету (табл. Ж.2 [2]);  $m$  – відносний ексцентриситет (формула (5.4);  $\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{R_y/E}$  – умовна гнучкість елемента.

На рис. 5.3, в, де показана залежність  $\varphi_e$  від  $m_{ef}$  і  $\bar{\lambda}$ , видно, що функція (5.13) досить точно враховує характер зміни коефіцієнта  $\varphi_e$ , апроксимуючи його знизу, тобто "в запас". Проведений комп'ютерний розрахунок показав, що в інтервалі значень  $\bar{\lambda} = 1...6$  і  $m_{ef} = 0,25...8,0$  відмінність розрахункових величин за формулою (5.13) від нормативних значень не перевищує  $\pm 10\%$ .

З використанням формули (5.13) вираз для резерву стійкості має наступний вигляд

$$\tilde{Y} = \tilde{\sigma}_y - \frac{\tilde{N}}{Ab[1 - Clg(\eta\tilde{M}/\rho\tilde{N})]} \quad (5.14)$$

Математичне сподівання резерву стійкості, згідно з (5.10)

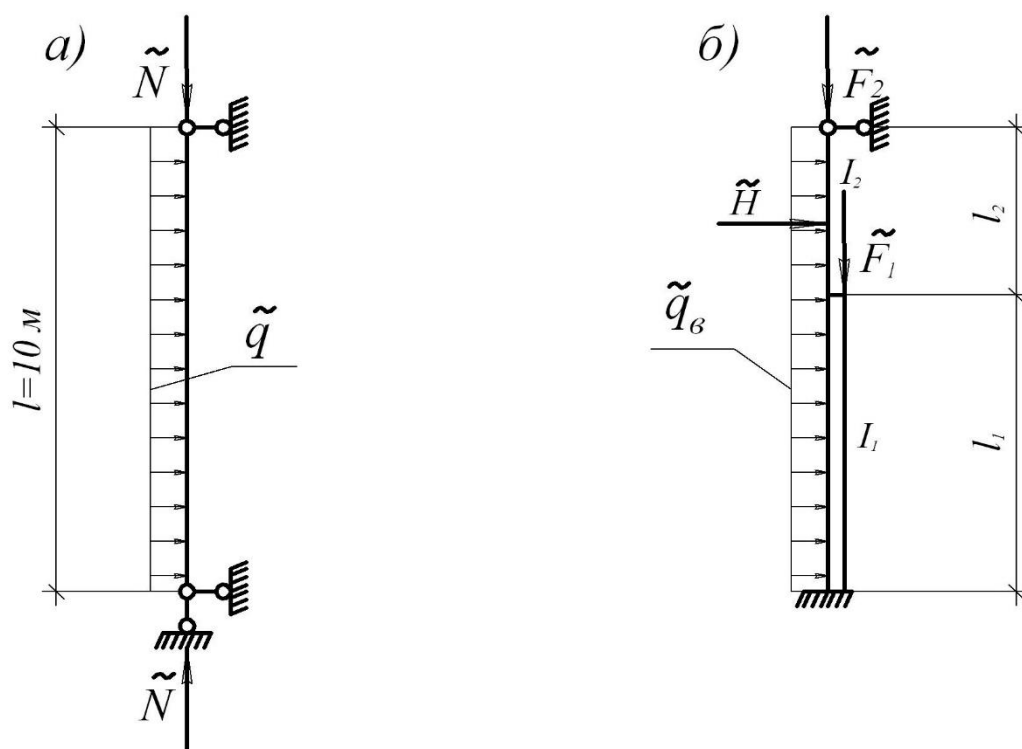
$$\bar{Y} = \bar{\sigma}_y - \frac{\bar{N}}{Ab(1 - lg \bar{m}_{ef})} \quad (5.15)$$

Частинним диференціюванням визначаємо коефіцієнти для визначення стандарту  $\hat{Y}$ :

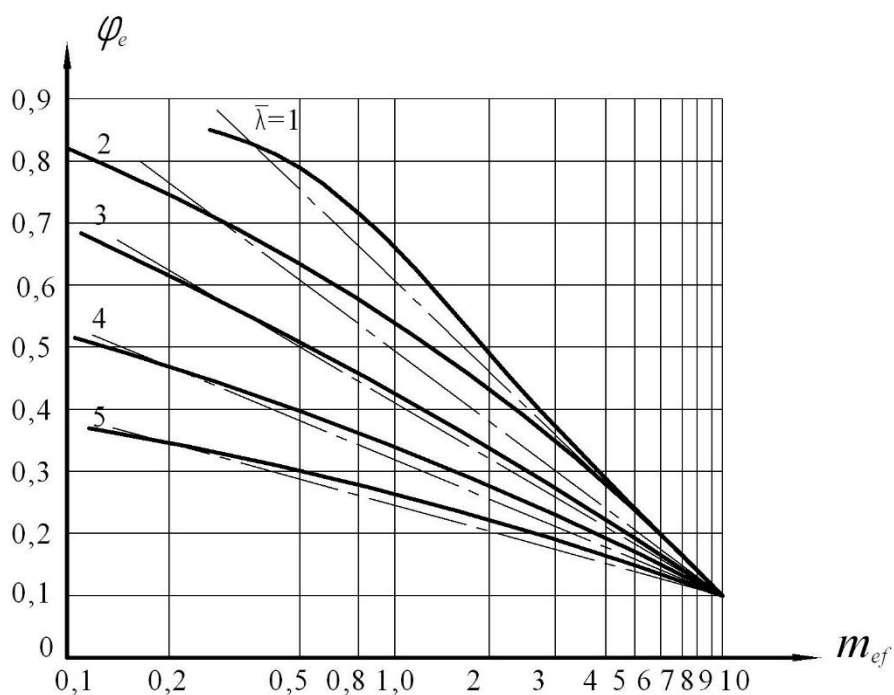
$$A_1 = 1; A_2 = \frac{Clg \bar{m}_{ef} + Cd - 1}{Ab(1 - Clg \bar{m}_{ef})^2}; A_3 = -\frac{Cd\eta}{b\bar{m}_{ef}W(1 - Clg \bar{m}_{ef})^2} \quad (5.16)$$

Тут  $d = 0,4343...$  – модуль переходу від натуральних логарифмів до десяткових.

Виведені формули дозволяють одержати оцінку надійності стиснуто-зігнутого елемента.

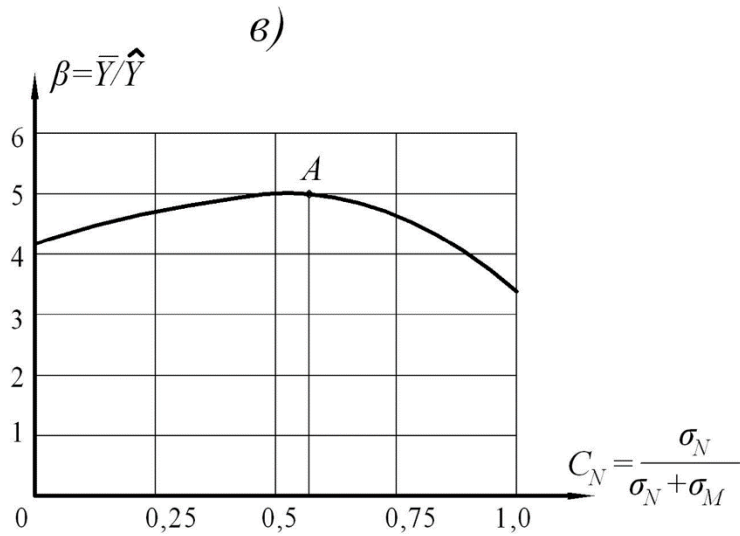
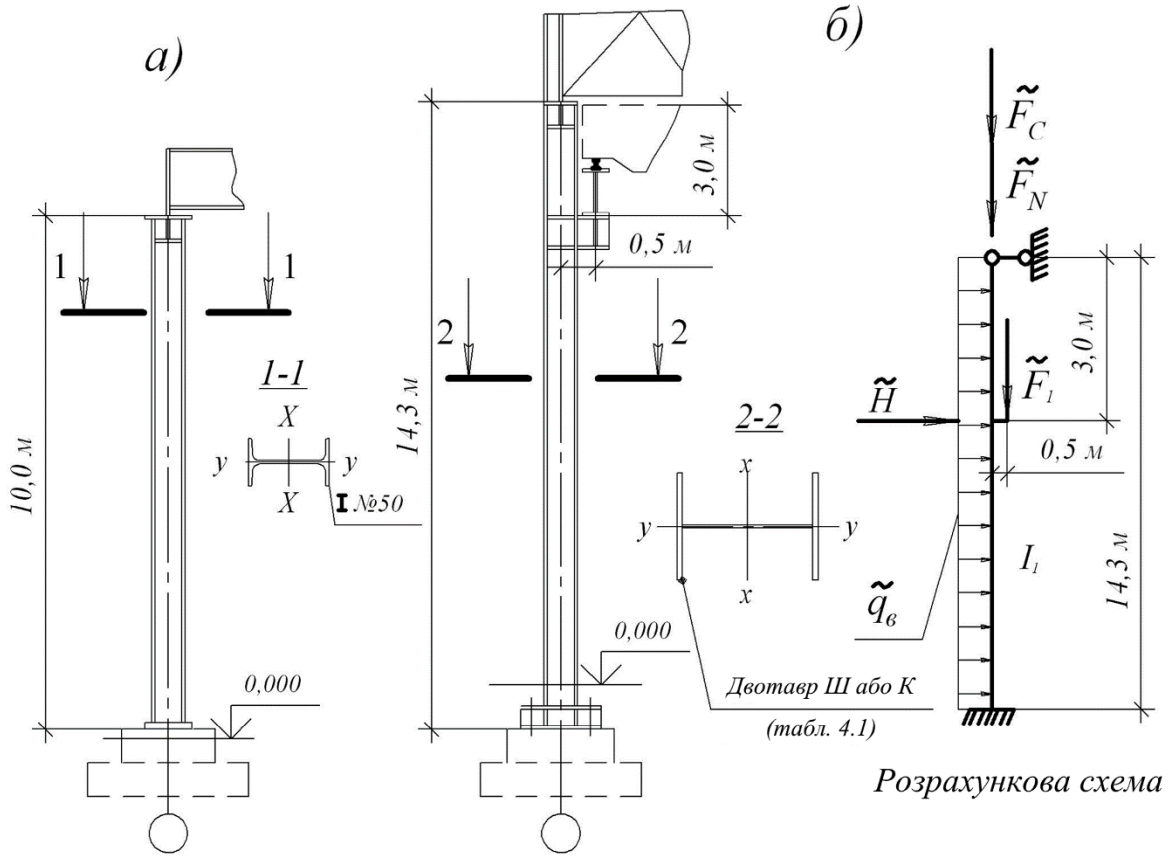


в)



**Рис. 5.3.** До розрахунку стиснуто-зігнутих стійок:

а – стійка постійного перерізу; б – ступінчаста колона; в – графіки коефіцієнту  $\varphi_e$ : — за табл. Ж.3 ДБН [2]; -.- за формулою (5.13)



**Рис. 5.4. Сталеві стиснуто-зігнуті стійки:**

а – стійка безкранової будівлі;

б – стійка постійного перерізу будівлі з мостовими кранами;

в – характеристика безпеки стійки.



**5.2.2. Розрахунок надійності сталевих колон постійного перерізу.** Були розглянуті типові стійки безкранової будівлі, конструкція яких показана на *рис. 5.4, а*, розрахункова схема на *рис. 5.3, а*, Схема завантаження стійок включає осьову силу, що викликається постійним навантаженням від ваги покриття і сніговим навантаженням, і поперечне розподілене вітрове навантаження. Був розглянутий ряд стійок, перевірених по ДБН [2] так, щоб виконувалася умова  $N/(\varphi_e A) \approx \gamma_c R_y$ , схеми завантаження яких відрізнялися співвідношенням напружень від  $N$  і  $M$ .

Результати оцінки надійності стійок, одержаної у техніці випадкових величин, наведені на *рис. 5.4, в* у вигляді графіку характеристики безпеки  $\beta$ , який має опуклий характер з максимумом, близьким до співвідношення  $C_N = 0,5$ . По мірі збільшення частки моменту або поздовжньої сили графік знижується, плавно без перелому опускаючись до граничних випадків згину і центрального стиску при  $C_N = 0$  і  $C_N = 1,0$ . Різниця крайніх ординат є наслідком різної забезпеченості розрахункових значень моменту ( $\gamma_M = 3$ ) і поздовжньої сили ( $\gamma_N = 2$ ). Графік *рис. 5.4, в* цілком очевидно ілюструє можливість введення коефіцієнта сполучення  $\psi < 1$  для стиснуто-зігнутих елементів.

Імовірнісний розрахунок з урахуванням реально діючих навантажень виконувався для стійок багатопролітного каркаса, оснащеного мостовими кранами, конструкція і розрахункова схема стійки наведені на *рис. 5.4, б*. Стійки защемлені у фундаменті і шарнірно сполучені з гратчастим ригелем, тому коефіцієнт розрахункової довжини стійок приймався рівним  $\mu = 0,7$ . Стійки завантажені випадковими вертикальними силами від постійного і снігового навантажень, горизонтальним крановим навантаженням, прикладеним з ексцентриситетом вертикальним навантаженням кранів і розподіленим вітровим навантаженням.

Таблиця 5.1

## Варіанти стійок постійного перерізу

№ ва-рі-ан-ту	Кон-струк-ція стійки	Навантаження				Розрахунок за ДБН				
		Пос-тій-не кПа	Сні-говий рай-он	Віт-ровий рай-он	Кран Q, тс	Про-філь	A, см <sup>2</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	λ <sub>x</sub>	σ, МПа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	Середня	0,1	III	–	5	26К1	105,9	1035	88,4	209,4
2	Середня	0,4	II	–	5	40Ш1	122,4	1771	60,0	214,7
3	Середня	0,4	III	–	10	40Ш2	141,6	2025	60,0	218,0
4	Крайня	0,4	III	III	5	35Ш1	95,7	1171	70,0	210,6
5	Крайня	0,4	III	III	10	40Ш1	122,4	1771	60,0	185,0

У варіантах розрахунку (табл. 5.1, графи 2...6) варіювалася конструкція покрівлі (легка і важка утеплена залізобетонна), вантажопідйомність кранів – 5 тс і 10 тс, снігове і вітрове навантаження приймалися для II і III районів, залежно від варіанту стійок – крайніх або середніх – змінювалася вантажна площа покриття при кроці колон 12 м і враховувалося або не враховувалося вітрове навантаження. Для усіх варіантів завантаження без запасу підбиралися перерізи стійок з широкополичних або колонних двотаврів (графа 7). В імовірнісних розрахунках враховувалися обґрунтовані вище у 3-му розділі районні та усереднені параметри навантажень, формули на основі підходу (5.14) з урахуванням повної поздовжньої сили  $N = F_H + F_C + F_1$  і формули (5.28), що зв'язують зусилля у колоні з прикладеними навантаженнями.

Результати, зведені в табл. 5.2, дозволяють простежити певні тенденції імовірнісного аналізу реальних сталевих стиснуто-зігнутих стійок. Передусім відмітимо, що для розглянутих порівняно легких стійок характеристика початкової безпеки (графа 7) відносно невелика  $\beta = 3,42...4,85$ . У менший бік відрізняється 1-й варіант середньої стійки при легкій покрівлі за рахунок більшого впливу малозабезпеченого снігового навантаження.

Таблиця 5.2

Оцінка надійності сталевих стійок постійного перерізу

№ ва-рі-ан-ту	Імовірнісний розрахунок			Частотні характеристики		Імовірність відмови	
	$\bar{Y}$ , МПа	$\hat{Y}$ , МПа	$\beta$	$\omega_q$ , 1/добу	$\beta_\omega$	Початкова $Q(\beta)$	Кінцева $Q(t)$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	153,9	45,2	3,42	13,1	234,2	$3,13 \cdot 10^{-4}$	0,194
2	140,5	36,8	3,83	8,8	379,8	$6,40 \cdot 10^{-5}$	0,018
3	130,2	26,7	3,55	16,8	233,1	$1,93 \cdot 10^{-4}$	0,159
4	147,6	35,4	4,15	14,5	270,6	$3,39 \cdot 10^{-6}$	0,012
5	164,7	33,9	4,85	22,8	189,6	$1,26 \cdot 10^{-7}$	$1,14 \cdot 10^{-3}$

При переході до важкої покрівлі у 2-му варіанті маємо зростання  $\beta$  внаслідок відносного ослаблення впливу снігового навантаження. При збільшенні вантажопідйомності мостового крану відмічається деяке зменшення  $\beta$ , що є наслідком посилення впливу на згинальний момент горизонтального навантаження крану, імовірнісні параметри якого перевищують розрахункові значення. Це важливо, оскільки в даному випадку для стійки з верхнім шарнірним кінцем, при незначному впливі вітрового навантаження на середні колони, згинальний момент формується в основному навантаженнями кранів. Очевидно, що при жорсткому сполученні стійок з ригелем, коли на момент також впливає постійне і снігове навантаження від покриття, надійність стійок повинна зрости в порівнянні з розглянутим випадком. Для крайніх стійок, де додатково прикладається вітрове навантаження, характеристика безпеки зростає для 4-го і 5-го варіантів, причому в останньому варіанті видно вплив деякого недонапруження при підборі стійки за ДБН [2].

Параметри оцінки надійності тих же стійок з урахуванням часу  $t$  в техніці випадкових процесів також наведені в табл. 5.2. Ефективну частоту процесу резерву стійкості визначимо як для функції, близької до лінійної. Аргумент  $K$  коефіцієнта  $\beta_\omega$

широкополосності випадкового процесу резерву стійкості визначається як відношення стандарту високочастотної складової, сформованої вертикальним і горизонтальним навантаженнями кранів, до стандарту низькочастотної складової, визначеної межею текучості сталі, постійним, сніговим і вітровим навантаженнями.

Важливо відмітити, що розглянуті випадки відповідають порівняно невеликим  $K \approx 0,006..0,015$ , що знаходиться в області підвищених значень коефіцієнта широкополосності  $\beta_{\omega}$  (графа 6 *табл. 5.2*), які істотно впливають на значення  $Q(t)$ . У зв'язку з великим переважанням нормальної складової, в даних прикладах можна обґрунтовано описувати щільність розподілу резерву стійкості нормальним законом.

Дані *табл. 5.2*, в якій враховується фактор часу, дають уявлення про імовірнісну забезпеченість запроєктованих по нормах сталевих стійок постійного перерізу виробничих будівель, оснащених мостовими кранами. Зважаючи на варіанти 1 і 3 з підвищеною імовірністю відмови, можна зробити висновок про те, що можливі відмови стійок мають періодичність 250...300 років і більше. Враховуючи певну завищеність прийнятих в розрахунках узагальнених моделей навантажень (розділ 3 даного посібника) і відсутність аварій стійок під час експлуатації, можна вважати досить надійними характерні стійки постійного перерізу одноповерхових виробничих будівель з мостовими кранами.

Для усіх стійок характерна відносно велика частка сумарного зусилля від вертикального і горизонтального навантаження кранів ( $C_3 = 0,68..0,79$ ), невеликі частки снігового і вітрового навантаження  $C_1 = 0,13..0,30$ ,  $C_2 = 0,11..0,16$ , у зв'язку з чим усі варіанти *табл. 5.2* потрапляють в лівий нижній кут поблизу початку координат графіку коефіцієнтів сполучення (*рис. 4.20*). При цьому варіанти 2 і 4 відповідають коефіцієнту сполучень  $\psi = 0,80$ , а інші варіанти  $\psi = 0,83..0,85$ , тобто близькі до нормованого коефіцієнта  $\psi = 0,9$ . Врахування зниженого коефіцієнта сполучення для варіантів 2 і 4 вирівнює надійність усіх стійок.

Огляд інших підходів до оцінки надійності стиснуто-зігнутих елементів наведений в монографії автора [5]. Ю.А. Харченко в дисертації, виконаній під керівництвом автора,

доповнив аналіз надійності сталевих стійок безкранових будівель і застосував розроблену методику до трубчастих ферм з позавузловим навантаженням [6].

### 5.3. НАДІЙНІСТЬ СТАЛЕВИХ СТУПІНЧАСТИХ СТІЙОК

**5.3.1. Особливості ступінчастих стійок.** Сталеві ступінчасті стійки широко застосовуються в каркасах одноповерхових виробничих будівель, оснащених мостовими кранами. Специфіка перевірки стійкості таких стійок враховується чинними нормами [2] шляхом введення коефіцієнта розрахункової довжини  $\mu$  окремо для кожної з ділянок стійки. Ці коефіцієнти використовуються у рішеннях завдань надійності ступінчастих стійок.

Розглянемо одноступінчасту колону з нерухомим верхнім кінцем (шарнірним або закріпленим) (рис. 5.5, б), завантажену випадковими поздовжніми силами  $\tilde{F}_1$  і  $\tilde{F}_2$  і поперечними навантаженнями ( $\tilde{q}_B, \tilde{H}$  і т.д.), що має довжини і моменти інерції перерізів ділянок  $l_1$  і  $I_1$ ,  $l_2$  і  $I_2$ . В цьому випадку ДБН [2] рекомендує наступні вирази для коефіцієнтів розрахункової довжини:

а) для нижньої ділянки колони

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_{12}^2 + \mu_{11}^2(\beta - 1)}{\beta}} = \sqrt{\frac{\mu_{11}^2 F_1 + \mu_{12}^2 F_2}{F_1 + F_2}}, \quad (5.17)$$

де  $\beta = (F_1 + F_2)/F_2$ ;

б) для верхньої ділянки колони

$$\mu_2 = \mu_1 / \alpha_1 \leq 3, \text{ де } \alpha_1 = \frac{l_2}{l_1} \sqrt{\frac{J_1}{J_2 \beta}},$$

с урахуванням чого маємо

$$\mu_2 = \frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} \sqrt{\mu_{12}^2 + \mu_{11}^2 \frac{F_1}{F_2}} = \sqrt{\frac{l_1^2}{l_2^2} \frac{J_2}{J_1} \mu_{12}^2 + \delta_2 \frac{F_1}{F_2}}, \quad (5.18)$$

$$\delta_2 = \frac{l_1^2}{l_2^2} \frac{J_2}{J_1} \mu_{11}^2,$$

де  $\mu_{11}$  і  $\mu_{12}$  – коефіцієнти з *табл. С.3, С.4* [2] залежно від співвідношення довжин  $l_2/l_1$  і моментів інерції ділянок  $I_2/I_1$ .

З урахуванням коефіцієнтів  $\mu_1$  і  $\mu_2$  були знайдені оцінки надійності ступінчастих колон на базі загальних підходів, описаних вище в розділі 5.2.

### 5.3.2. Виведення основних формул для суцільної колони.

Використаємо загальний вираз (5.14), тоді резерв стійкості для верхньої частини колони запишеться як

$$\tilde{Y}_2(\tilde{\sigma}_y, \tilde{M}, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2) = \tilde{\sigma}_y - \frac{\tilde{F}_2}{Ab(\tilde{\mu}\tilde{\lambda})[1 - c(\tilde{\mu}_2\tilde{\lambda})lg(\eta\tilde{M}/\rho\tilde{F}_2)]}. \quad (5.19)$$

Тут специфіка в порівнянні з виразом (5.14) для колони постійного перерізу вноситься коефіцієнтом розрахункової довжини, залежним від  $\tilde{F}_1$  і  $\tilde{F}_2$  за формулою (5.18).

Як і в розглянутих вище випадках, математичне сподівання резерву стійкості  $\bar{Y}_2$  одержується підстановкою в основний вираз (5.19) математичних очікувань аргументів.

В той же час для стандарту є відмінність в порівнянні з розділом 5.2:

$$\hat{Y}_2 = \sqrt{A_1^2 \hat{\sigma}_y^2 + A_2^2 \hat{M}^2 + A_3^2 \hat{F}_1^2 + A_4^2 \hat{F}_2^2}, \quad (5.20)$$

де  $A_i$  – похідні функції (5.19) по  $i$ -му аргументу, в які підставлені математичні очікування усіх аргументів.

Простежимо отримання коефіцієнтів  $A_i$ . Перший з них рівний  $A_1 = dY_2/d\sigma_y = 1$ , оскільки у даному випадку  $\bar{\lambda} = \lambda\sqrt{R_y/E}$

, і другий член виразу (5.19) не залежить від  $\sigma_y$ . Оскільки  $\mu_2$  не залежить від моменту  $M$ , формула для визначення коефіцієнту  $A_2$  співпадає з виразом (5.16) для коефіцієнту  $A_3$  для стійки постійного перерізу за умови урахування коефіцієнту  $\mu_2$ .

Далі визначаємо частинні похідні і після перетворень одержуємо наступну формулу для визначення коефіцієнту  $A_3$ :

$$A_3 = -\frac{0,14\mu_{11}^2}{\mu_{12}^2 + \mu_{11}^2 F_1/F_2} \cdot \frac{0,943 \lg m_{ef} - 1}{Ab^2(1 - c \lg m_{ef})^2}. \quad (5.21)$$

Виконаємо виведення (викладки опускаємо) формули для визначення коефіцієнту  $A_4$ :

$$A_4 = -\frac{F_1}{F_2} A_3 - \frac{1 - c \lg m_{ef} - 0,43c}{Ab^2(1 - c \lg m_{ef})^2}. \quad (5.22)$$

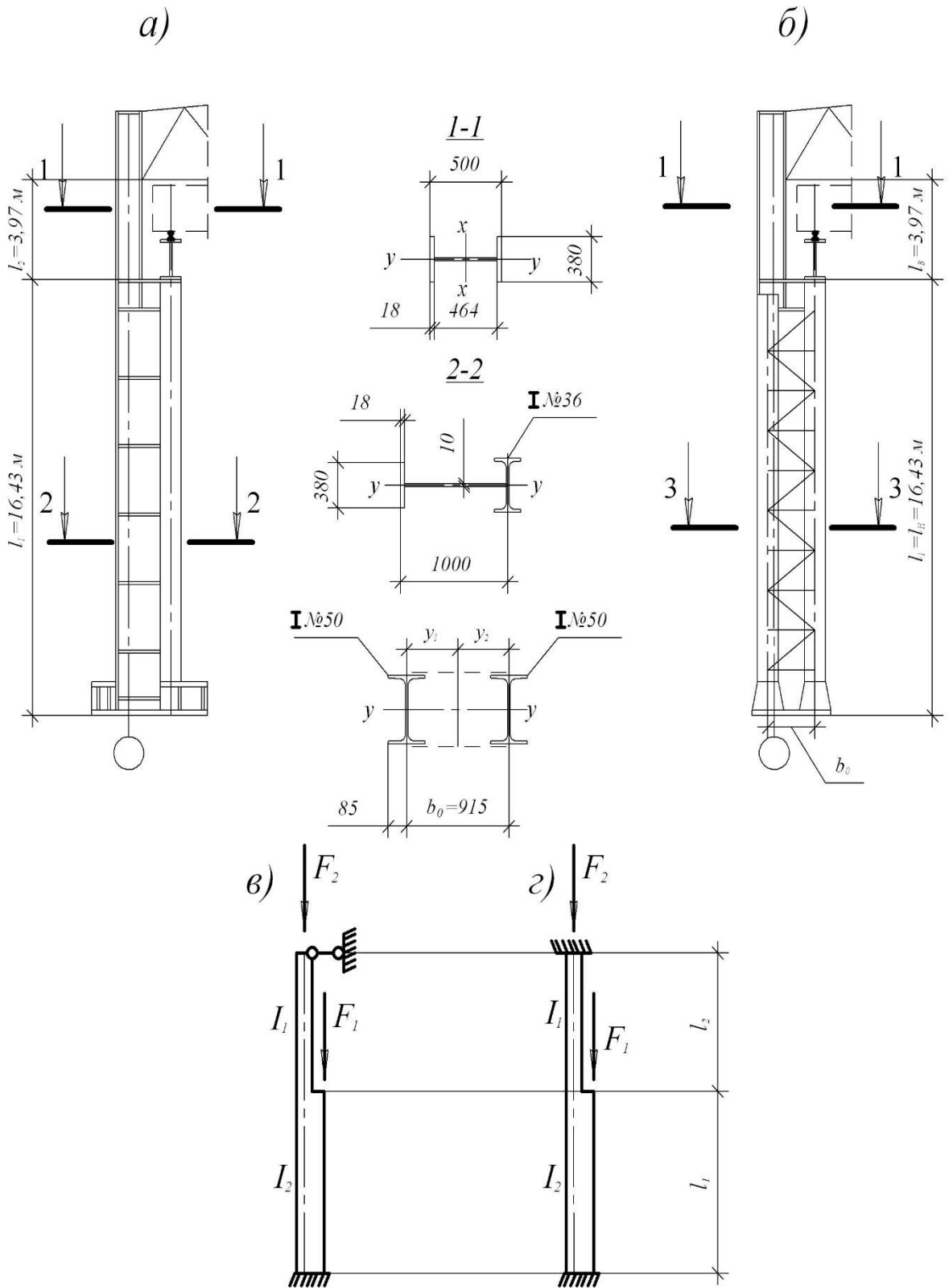
Для нижньої частини колони на основі (5.14) маємо для резерву стійкості

$$\tilde{Y}_1 = \tilde{\sigma}_y - \frac{\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2}{Ab(\tilde{\mu}_1 \tilde{\lambda}) [1 - c(\tilde{\mu}_1 \tilde{\lambda})] \lg[\eta \tilde{M}A / (\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2) W]} \quad (5.23)$$

Коефіцієнти  $A_1$  і  $A_2$  формули (5.20) співпадають з коефіцієнтами для верхньої ділянки колони при умові врахування у формулі для  $A_2$  коефіцієнту розрахункової довжини  $\mu_1$ .

Далі переходимо до коефіцієнту  $A_3$

$$A_3 = -\frac{b(1 - c \lg m_{ef} - 0,43c) - 0,14\delta_1(F_1/F_2)(1 - 0,943 \lg m_{ef})}{Ab^2(1 - c \lg m_{ef})^2}, \quad (5.24)$$



**Рис. 5.5.** До оцінки надійності ступінчастих колон:

а, б – конструкції колон;

в, г – схеми для визначення розрахункових довжин.



де позначено

$$\delta_1 = \frac{F_1}{F_1 + F_2} \frac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_1^2}. \quad (5.25)$$

Виконавши операції диференціювання, одержуємо формулу для визначення коефіцієнту  $A_4$

$$A_4 = - \frac{b(1 - c \lg m_{ef} - 0,43c) + 0,41\delta_1(1 - 0,943 \lg m_{ef})}{Ab^2(1 - c \lg m_{ef})^2}. \quad (5.26)$$

**5.3.3. Розрахунок наскрізної колони.** Більшість ступінчастих колон промислових будівель мають (наскрізну) гратчасту нижню частину (рис. 5.5, б), для якої розрахунок за нормами [2] включає перевірку стійкості окремих гілок (віток) як центрально стиснутих елементів.

Поздовжнє зусилля в гілці визначається як (рис. 5.5, б)

$$N_B = [y_i(F_1 + F_2) + M_1] / b_0,$$

де  $b_0$  – відстань між осями гілок колони;  $y_i$  – відстань від центру тяжіння перерізу колони до осі протилежної гілки;

Резерв стійкості гілки як центрально стиснутого елемента записується у вигляді

$$\tilde{Y} = \tilde{\sigma}_y - [y_i(\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2) + \tilde{M}_1] / (b_0 \varphi A_B), \quad (5.27)$$

де  $\varphi$  – коефіцієнт стійкості при центровому стиску (за нормами ДБН [2]);  $A_B$  – площа перерізу гілки.

## 5.4. ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ СТУПІНЧАСТИХ СТІЙОК ПРИ ВРАХУВАННІ ЧАСУ І РЕАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

**5.4.1. Врахування реальних навантажень.** Перейдемо до врахування реальної схеми прикладення і статистичних характеристик навантажень, діючих на сталеві ступінчасті колони

одноповерхових виробничих будівель (рис. 5.5, б). Враховуємо постійне навантаження від покриття  $\tilde{q}_\Pi$  (розділ 3.1), снігове навантаження  $\tilde{q}_C$  відповідно до рекомендацій розділу 3.2, вітрове навантаження  $\tilde{q}_B$  (див. розділ 3.3), вертикальне  $\tilde{F}_K$  і горизонтальне  $\tilde{H}$  кранове навантаження (розділ 3.4). Зусилля, що враховуються у розрахунках надійності колон, запишуться як

$$\begin{aligned} F_2 &= \alpha_{\Pi 4}^I q_\Pi + \alpha_{C 4}^II q_C; \quad F_1 = F_K; \\ M_2 &= \alpha_{\Pi 2}^II q_\Pi + \alpha_{C 2}^II q_C + \alpha_{B 2}^II q_B + \alpha_{K 2}^II F_K + \alpha_{H 2}^II H; \quad (5.28) \\ M_1 &= \alpha_{\Pi 2}^I q_\Pi + \alpha_{C 2}^I q_C + \alpha_{B 2}^I + \alpha_{K 2}^I F_K + \alpha_{H 2}^I H, \end{aligned}$$

де коефіцієнти впливу  $\alpha$  мають верхні індекси (римські цифри), що відповідають ділянкам колон, нижні буквенні індекси, що означають навантаження, нижні цифрові індекси – індекси коефіцієнтів у формулі (4.20) для визначення стандарту резерву стійкості.

Очевидно, що числові характеристики випадкових  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $M_1$  і  $M_2$  можуть визначатися як для лінійних функцій. Тому математичні очікування зусиль знаходять підстановкою у формули (5.28) математичних очікувань випадкових навантажень.

З урахуванням введених позначень формула визначення стандарту резерву стійкості верхньої частини  $\hat{Y}_2$  набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_2 &= [\hat{\sigma}_y^2 + (\alpha_{q\Pi}^II \hat{q}_\Pi)^2 + (\alpha_{qC}^II \hat{q}_C)^2 + (\alpha_{qB}^II \hat{q}_B)^2 + (\alpha_{Fk}^II \hat{F}_k)^2 + (\alpha_H^II \hat{H})^2]^{1/2}; \\ \alpha_{q\Pi}^II &= A_2^II \alpha_{\Pi 2}^II + A_4^II \alpha_{\Pi 4}^II; \quad \alpha_{qC}^II = A_2^II \alpha_{C 2}^II + A_4^II \alpha_{C 4}^II; \quad \alpha_{qB}^II = A_2^II \alpha_{B 2}^II; \quad (5.29) \\ \alpha_{Fk}^II &= A_2^II \alpha_{K 2}^II; \quad \alpha_H^II = A_2^II \alpha_{H 2}^II. \end{aligned}$$

Для стандарту резерву стійкості нижньої частини ступінчастої колони  $\hat{Y}_1$  маємо таку формулу:

$$\hat{Y}_1 = [\hat{\sigma}_y^2 + (\alpha_{q\Pi}^I \hat{q}_\Pi)^2 + (\alpha_{qC}^I \hat{q}_C)^2 + (\alpha_{qB}^I \hat{q}_B)^2 + (\alpha_{Fk}^I \hat{F}_k)^2 + (\alpha_H^I \hat{H}^2)]^{1/2};$$

$$\alpha_{q\Pi}^I = A_2^I \alpha_{\Pi 2}^I + A_4^I \alpha_{\Pi 4}^I; \quad \alpha_{qC}^I = A_2^I \alpha_{C 2}^I + A_4^I \alpha_{C 4}^I; \quad (5.30)$$

$$\alpha_{qB}^I = A_2^I \alpha_{B 2}^I; \quad \alpha_{Fk}^I = A_2^I \alpha_{K 2}^I + A_4^I; \quad \alpha_H^I = A_2^I \alpha_{H 2}^I.$$

Тут у позначеннях коефіцієнтів  $A$  верхні індекси (римські цифри) відповідають ділянкам колон, нижні цифрові індекси – індекси коефіцієнтів у формулі (5.20) для визначення стандарту резерву стійкості.

Математичне сподівання резерву стійкості  $\bar{Y}$  і характеристика безпеки в цьому підході визначаються аналогічно попередньому варіанту розрахунку (розділ. 5.3.2).

**5.4.2. Врахування фактору часу.** При такому підході резерв стійкості представляється у вигляді квазістаціонарного випадкового процесу, і його сумарна ефективна частота визначається на основі загального виразу (4.62), враховуючи ефективні частоти окремих навантажень:

- для верхньої частини ступінчастої колони

$$\omega_{2q} = \frac{1}{\hat{Y}_2} [(\omega_C K_{tr} \alpha_{qC}^{\text{II}} \hat{q}_C)^2 + (\omega_B K_{tr} \alpha_{qB}^{\text{II}} \hat{q}_B)^2 + (\omega_k \alpha_{Fk}^{\text{II}} \hat{F}_k)^2 + (\omega_H \alpha_H^{\text{II}} \hat{H})^2]^{1/2}. \quad (5.31)$$

- для нижньої частини ступінчастої колони

$$\omega_{1q} = \frac{1}{\hat{Y}_1} [(\omega_C K_{tr} \alpha_{qC}^I \hat{q}_C)^2 + (\omega_B K_{tr} \alpha_{qB}^I \hat{q}_B)^2 + (\omega_k \alpha_{Fk}^I \hat{F}_k)^2 + (\omega_H \alpha_H^I \hat{H})^2]^{1/2}; \quad (5.32)$$

Імовірність відмови, у відповідності з формулою (4.46), визначається для верхньої і нижньої частин як

$$Q_1(t) = \omega_{1q} f_{1Y}(\beta_1) t / (\beta_{1\omega} \sqrt{2\pi});$$

$$Q_2(t) = \omega_{2q} f_{2Y}(\beta_2) t / (\beta_{2\omega} \sqrt{2\pi}), \quad (5.33)$$

де  $t$  – термін експлуатації конструкції;  $\beta_{1\omega}, \beta_{2\omega}$  – коефіцієнти широкополосності випадкового процесу резерву стійкості.

**5.4.3. Розрахунок надійності ступінчастих колон виробничих будівель.** По наведеним формулам був перевірений ряд характерних ступінчастих колон виробничих будівель, запроєктованих по нормах [2], отримані результати ілюструється *табл. 5.3*, в якій прийняті позначення:  $L$  – проліт поперечної рами виробничої будівлі;  $B$  – крок колон;  $l_1, l_2$  – довжини відповідно верхньої і нижньої ділянок колони;  $\sigma_2, \sigma_1$  – напруження за розрахунком відповідно для верхньої і нижньої ділянок колони;  $\beta_2, \omega_2, \beta_1, \omega_1$  – характеристика безпеки і ефективна частота відповідно для верхньої і нижньої ділянок колони;  $Q_2(t), Q_1(t)$  – імовірність відмови відповідно верхньої і нижньої ділянки колони, наближено визначена по числу викидів  $N_+(t) \leq 1$  при терміні експлуатації  $t = 50$  років.

Як видно з *табл. 5.3*, були розглянуті колони в широкому діапазоні параметрів: при жорсткому і шарнірному сполученні колон з ригелями, для рам з прольотами 24...36 м і кроком 6...12 м, з теплою і холодною покрівлею по сталевому профільованому настилу і залізобетонним панелям, з мостовими кранами вантажопідйомністю від 30/5тс до 125/20тс груп режимів 4К – 6К і 7К, для снігового і вітрового навантаження I...III районів; всі колони підібрані без запасу за розрахунком.

Дані *табл. 5.3* показують, що верхні ділянки ступінчастих колон мають імовірність відмови одного порядку з колонами постійного перерізу (*табл. 5.2*) і кроквяними балками при важкій покрівлі (*табл. 4.7*), тому можна говорити про приблизну рівну забезпеченість цієї групи сталевих конструкцій на рівні періодичності можливих відмов 70...100 років і більше. В той же час систематично, як при жорсткому, так і при шарнірному сполученні ригелів з колонами, надійність нижніх

Таблиця 5.3

## Оцінка надійності ступінчастих колон виробничих будівель

Вариант	Сполучення власн	Геометричні параметри		Навантаження				Напруження за розрахунком		Верхня ділянка колони			Нижня ділянка колони			$\gamma_c$
		$\frac{L}{B}$	$\frac{l_2}{l_1}$	Покрілля	Крани	Райони		$R_y$	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	$\beta_2$	$\omega_2$ 1/добу	$Q_2(t)$	$\beta_1$	$\omega_1$ 1/добу	$Q_1(t)$	
1	жорстка	24/12	3,97/16,4	тепла з.б.п.а-нелі	7К	III	I	215	$\frac{208,2}{212,0}$	4,98	322,5	0,48	5,84	456,8	$0,96 \cdot 10^{-2}$	1,15
2	жорстка	36/12	6,6/12,4	тепла з.б.п.а-нелі	4К-6К	III	II	210	$\frac{208,0}{207,1}$	5,52	78,0	0,023	6,51	562,4	$4,15 \cdot 10^{-4}$	1,15
3	шарнір-не	30/12	6,1/11,0	тепла проф.настил	4К-6К	III	II	$\frac{206}{284}$	$\frac{205,0}{274,0}$	6,20	180,2	$9,83 \cdot 10^{-4}$	7,53	386,7	$2,24 \cdot 10^{-7}$	1,32
4	жорстка	30/12	6,4/14,2	тепла з.б.п.а-нелі	4К-6К	III	II	210	$\frac{209,0}{193,6}$	5,36	78,0	0,054	6,7	502,4	$6,5 \cdot 10^{-5}$	1,25
5	шарнір-не	36/12	6,02/14,4	тепла з.б.п.а-нелі	7К	III	II	240	$\frac{186,1}{238,2}$	5,29	215,3	0,213	7,47	1971,8	$1,71 \cdot 10^{-6}$	1,18
6	шарнір-не	24/12	5,23/17,0	тепла з.б.п.а-нелі	4К-6К	I	III	240	$\frac{178,3}{212,8}$	5,01	126,0	0,54	7,88	1227,7	$5,0 \cdot 10^{-8}$	1,19
7	шарнір-не	24/6	3,25/9,75	холодна з.б.п.а-нелі	7К	II	I	240	$\frac{230,0}{233,3}$	5,04	197,2	0,71	9,08	1862,7	$2,78 \cdot 10^{-12}$	1,32

ділянок колон виявляється значно вище, ніж верхніх ділянок. При цьому ефективні частоти ВП резерву стійкості нижніх ділянок колон виходять помітно (до 10 разів) більше, ніж для верхніх ділянок, внаслідок більшого впливу високочастотних вертикальних і горизонтальних навантажень кранів.

На основі результатів розрахунків, частина з яких представлена в *табл. 5.3*, на базі критерію рівнонадійності ділянок можна рекомендувати вводити в розрахункові формули для суцільних і наскрізних нижніх ділянок ступінчастих колон коефіцієнт умов роботи, отриманий в розрахованих варіантах рівним 1,15...1,53. Як вказувалося вище, одним з параметрів, що впливають на цей коефіцієнт, є відношення поздовжніх сил верхньої й нижньої ділянок колон. Для диференціації коефіцієнту  $\gamma_c$  і деталізації його зв'язку з різними параметрами потрібне подальше вивчення цього питання.

Отримані дані дозволяють в першому наближенні із запасом визначити по нижніх обчислених значеннях коефіцієнт умов роботи  $\gamma_c = 1,15$  для нижніх частин сталевих ступінчастих колон і рекомендувати його в норми проектування і підсилення сталевих конструкцій.

### Література до розділу 5

1. Стрелецкий Н.С. Работа сжатых стоек / Н.С. Стрелецкий. – М.: Госстройиздат, 1959. – 283 с.
2. ДБН В.2.6-198:2014. Сталеві конструкції. Норми проектування. – К.: Мінрегіон України, 2014. – 205 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. / Е.С. Вентцель. – 10-е изд. – М.: «Академия», 2005. – 576 с.
4. Пичугин С.Ф. Оценка надежности стальных сжато-изогнутых элементов / С.Ф. Пичугин // Строит, механика и расчет сооружений. – 1978. – №3. – С. 7 – 11.
5. Пичугін С.Ф. Розрахунок надійності будівельних конструкцій // С.Ф. Пичугін. – Полтава: ТОВ «АСМІ», 2016. – 520 с.
6. Pichugin S.F. Reliability of Steel Tubular Trusses / S.F. Pichugin, Y.A. Kharchenko // Steel Structures and Bridges 2000: Proc. of 19th Czech and Slovak International Conference – Strebse Pleso, High Tatras, Slovak Republic, 2000. – P. 57 – 62.

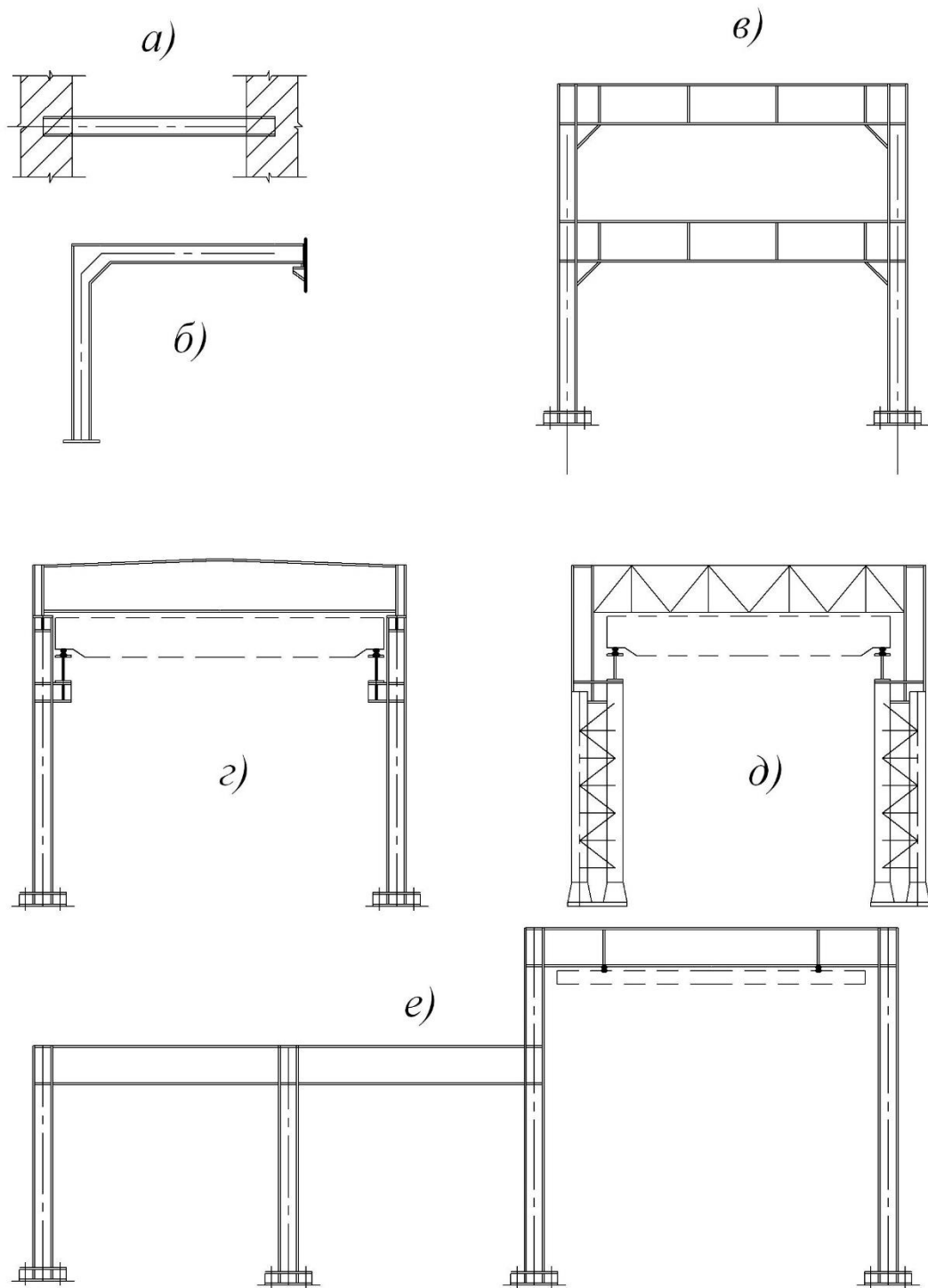
## РОЗДІЛ 6 НАДІЙНІСТЬ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ

*Процес руйнування статично невизначеної конструкції полягає в послідовному виході з роботи окремих елементів до тих пір, поки система не перетвориться на статично визначену, а потім у змінювану.*

**М.С. Стрілецький,**  
член-кореспондент Академії наук

У даному розділі перейдемо від розгляду надійності окремих елементів до імовірнісного розрахунку конструктивних систем, коло яких обмежимо статично невизначеними стержневими системами (СНС) різної складності, що включають як окремі балки, так і багатоповерхові і багатопролітні поперечники виробничих будівель (рис. 6.1). Тому виникає задача визначення структурної надійності, тобто результуючої надійності СНС при заданій її структурі і характері роботи та відомих значеннях надійності всіх елементів, які входять до неї.

Специфіка таких будівельних систем з точки зору надійності полягає, передусім, в різноманітті їх відмов. Наприклад, сталева поперечна рама може мати відмови у вигляді руйнування окремих колон і ригелів, руйнування вузлів їх сполучення і спірання колон на фундаменти, залишкових деформацій елементів, що роблять неможливою експлуатацію будівлі і т.п., а також відмови внаслідок надмірних переміщень елементів під навантаженням, що утрудняють нормальну експлуатацію конструкцій і т.д. У даній роботі обмежимося відмовами, пов'язаними з втратою несучої здатності СНС.



**Рис. 6.1. Приклади статично невизначених конструктивних систем:**

а – зацемлена балка; б – Г-подібна рама; в – двоповерхова рама;  
 г, д – поперечники виробничих будівель з мостовими кранами;  
 е – багатопролітна рама з підвісним краном.



В теорії надійності будівельних конструкцій розрахунок статично невизначених систем вважається однією із найскладніших проблем. Причиною цього є складний характер руйнування СНС, який відрізняється від характеру руйнування статично визначеної системи тим, що при відмові одного або навіть кількох елементів СНС може зберігати працездатний стан. Тому руйнування статично невизначеної системи може відбуватися, по мірі відмов окремих елементів, шляхом переходу через різні працездатні стани, відповідні до різних схем та імовірнісних параметрів системи. Внаслідок цього оцінка надійності СНС являє собою досить громіздку задачу, ступінь складності якої швидко зростає відповідно до складності системи.

## 6.1. СТРУКТУРНА НАДІЙНІСТЬ ТИПОВИХ СХЕМ

В загальній теорії надійності технічних систем розроблені прийоми розрахунку структурної надійності систем елементів, які можуть використовуватися безпосередньо для відносно простих будівельних систем або як складові поглиблених методів розрахунку надійності СНС.

**6.1.1. Послідовне з'єднання елементів.** Це самий простий і важливий випадок, широко поширений у схемах різного призначення, зокрема у статично визначених системах. Будемо вважати, що  $n$  елементів у системі з'єднані послідовно у відношенні надійності, якщо відмова будь-якого елемента спричиняє відмову всієї системи (рис. 6.2, а). Для безвідмовної роботи такої системи протягом часу  $t$  потрібно, щоб кожний елемент працював безвідмовно цей час. Будемо вважати елементи незалежними, що означає, що вихід із ладу одних елементів не змінює надійності інших. У цьому випадку функція надійності системи в цілому  $P(t)$  визначиться як добуток функцій надійності елементів  $P_i(t)$ :

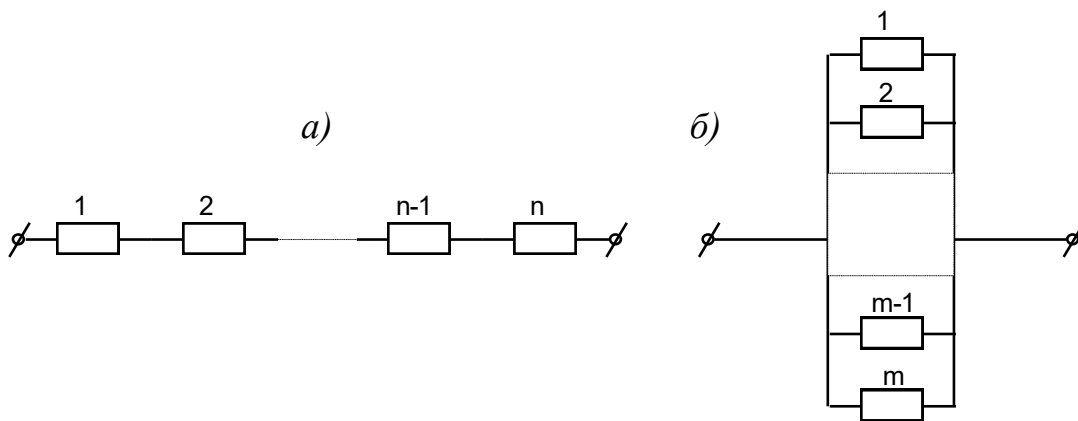
$$P(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \dots \cdot P_n(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t). \quad (6.1)$$

Якщо надійність елементів розподілена згідно з експоненційним законом, вираз (6.1) може бути розкритий таким чином:

$$P(t) = \exp(-\lambda_1 t) \cdot \exp(-\lambda_2 t) \cdots \exp(-\lambda_n t) = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t] = \exp(-\lambda t); \quad (6.2)$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (6.3)$$

Отже, при послідовному з'єднанні надійність системи також описується експоненційним законом, а інтенсивності відмов елементів складаються.



**Рис. 6.2. Типові структурні схеми:**  
а – послідовне з'єднання; б - паралельне з'єднання

Якщо позначити через  $T_0$  середній наробіток до відмови системи, а через  $T_i$  – середній наробіток до відмови  $i$ -го елемента, то з урахуванням формул (2.30) і (6.3) одержимо:

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \dots + \frac{1}{T_n}}. \quad (6.4)$$

Якщо елементи системи мають однакову надійність і інтенсивності відмов  $\lambda_e$ , вищенаведені формули спрощуються:

$$P(t) = \exp(-n \cdot \lambda_e \cdot t); \quad \lambda = n \cdot \lambda_e; \quad T_0 = \frac{T_e}{n}. \quad (6.5)$$

У практичних розрахунках надійності будівельних конструкцій, де використовуються дуже малі ймовірності відмов елементів  $Q_i(t) = 1 - P_i(t)$ , задовольняється наступна нерівність:

$$Q_1(t) + Q_2(t) + \dots + Q_n(t) \ll 1.$$

При цій умові для послідовного з'єднання справедлива наближена формула:

$$Q(t) \cong Q_1(t) + Q_2(t) + \dots + Q_n(t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t). \quad (6.6)$$

Легко бачити, що з цієї формули для наближеного виразу експоненційного закону (2.29) виводиться формула (6.3).

Судячи з формул (6.1) – (6.6), надійність систем із послідовно з'єднаних елементів нижче, ніж надійність окремих елементів, причому ця різниця зростає зі збільшенням числа елементів, що входять у систему.

**6.1.2. Паралельне з'єднання.** Вважається, що  $m$  елементів з'єднані паралельно у відношенні надійності, якщо відмова системи настає тільки тоді, коли виходять із ладу (відмовляють) усі елементи, що входять у систему. Прикладом системи з таким з'єднанням елементів є схема, що складається з декількох компонентів, які виконують ту саму функцію (рис. 6.2, б). Ця функція буде порушена тільки тоді, коли відмовлять усі ці компоненти. Якщо елементи схеми незалежні у відношенні надійності, то ймовірність відмови системи визначається як

$$Q(t) = Q_1(t) \cdot Q_2(t) \cdot \dots \cdot Q_m(t) = \prod_{j=1}^m Q_j(t) = \prod_{j=1}^m [1 - P_j(t)] \quad (6.7)$$

Функція надійності схеми, що складається із паралельно з'єднаних елементів, відповідно дорівнює

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - \prod_{j=1}^m [1 - P_j(t)] \quad (6.8)$$

Якщо надійність елементів описується експоненціальним законом, за (6.8) маємо:

$$P(t) = 1 - [1 - \exp(-\lambda_1 t)] \cdot [1 - \exp(-\lambda_2 t)] \cdots [1 - \exp(-\lambda_m t)] \quad (6.9)$$

Звідси видно, що надійність системи не відповідає експоненціальному закону. Якщо елементи мають однакову надійність  $Q_e(t)$ , отримуємо

$$Q(t) = [Q_e(t)]^m = [1 - \exp(-\lambda_e t)]^m. \quad (6.10)$$

Середній наробіток системи до відмови в цьому випадку визначається як

$$T_0 = \frac{1}{\lambda_e} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right). \quad (6.11)$$

При великому  $m$

$$T_0 \approx \frac{1}{\lambda_e} (\ln m + C), \text{ де } C = 0,577 \dots \quad (6.12)$$

Судячи з наведених формул, надійність системи із паралельно з'єднаних елементів вища, ніж надійність окремих елементів, причому ця різниця зростає зі збільшенням різниці надійностей та з ростом кількості елементів. Аналогічна тенденція простежується і для середнього наробітку до відмови (6.11). Ця особливість паралельного з'єднання елементів використовується в системах із резервуванням.

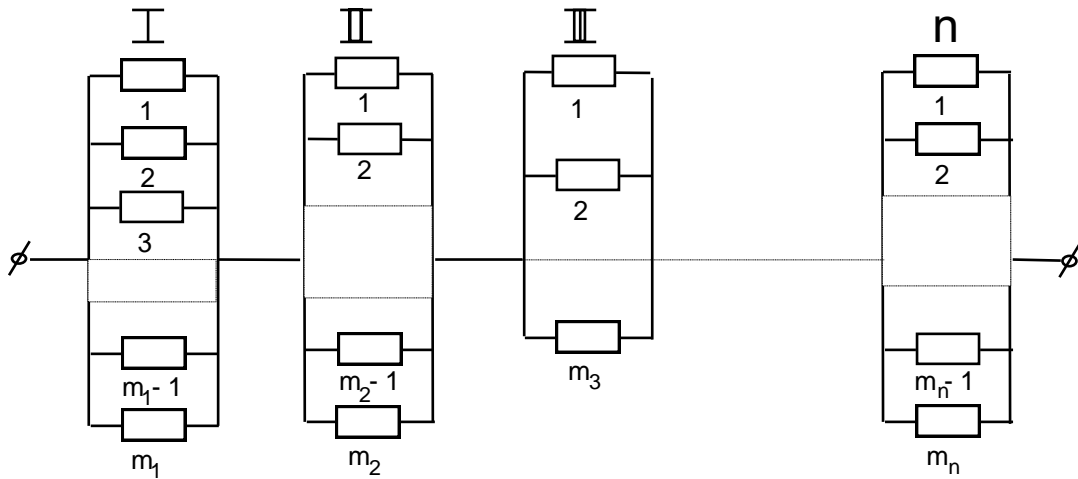


Рис 6.3. Послідовно - паралельне з'єднання

**6.1.3. Послідовно - паралельне з'єднання.** У реальних конструктивних системах можуть мати місце більш складні випадки, ніж розглянуті вище, у вигляді послідовно-паралельного з'єднання частин. Як приклад розглянемо схему (рис. 6.3), в якій послідовно з'єднані  $n$ -груп, що складаються із різної кількості паралельно-з'єднаних елементів  $m_1, m_2, \dots, m_n$

Для будь-якої із груп ймовірність безвідмовної роботи визначиться відповідно до (6.8) як

$$P_i = 1 - \prod_{j=1}^{m_i} (1 - P_j).$$

Результуюча надійність схеми визначається на основі співвідношення (6.1):

$$P = \prod_{i=1}^n P_i = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \prod_{j=1}^{m_i} (1 - P_j) \right]. \quad (6.13)$$

Аналогічний підхід застосовується і до більш складних систем, він включає наступні етапи:

- розкладання структурної схеми на послідовні і паралельні гілки, групи або блоки;

- обчислення значень надійності для окремих частин схеми, представлених паралельним або послідовним з'єднанням;
- обчислення результуючої надійності всієї схеми з урахуванням взаємних зв'язків між частинами схеми.

## 6.2. РОЗРАХУНОК НАДІЙНОСТІ СИСТЕМ МЕТОДОМ СТАНІВ

В основу розрахунку за цим методом покладений розгляд всіх можливих випадкових подій і шляхів руйнування СНС, починаючи від вихідного працездатного стану і до її повного руйнування.

**6.2.1. Перебір подій.** Для наочності розглянемо процес руйнування двічі статично невизначеної системи (рис. 6.4). Умовимося, що відмови елементів (стержнів, вузлових з'єднань) відбуваються крихко (рис. 6.8, а), після чого елементи вибувають з роботи. Відмова всієї системи настає при досягненні відмови всіма стержнями або перетворенні балки у змінну систему.

Позначимо імовірності руйнування (відмови) елементів у вихідній схемі  $Q_{0,1}, Q_{0,2}, Q_{0,3}$ , тоді імовірність неруйнівності цієї схеми, що дорівнює імовірності того, що жоден елемент не зруйнується, запишеться як

$$P_{1,2,3} = (1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,2})(1 - Q_{0,3}). \quad (6.14)$$

Умовимося нижніми індексами при  $P$  вказувати елементи, що не відмовили, верхніми – ті, що відмовили; індексами при  $Q$  умовимося вказувати послідовність елементів, що відмовили.

Руйнування одного з елементів є складною подією, що включає неруйнування інших елементів, що враховується при складанні формул визначення результуючої імовірності безвідмовної роботи системи:

$$\begin{aligned} P_{2,3}^1 &= Q_{0,1}(1 - Q_{0,2})(1 - Q_{0,3})(1 - Q_{1,2})(1 - Q_{1,3}), \\ P_{1,3}^2 &= Q_{0,2}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,3})(1 - Q_{2,1})(1 - Q_{2,3}), \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$P_{1,2}^3 = Q_{0,3}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,2})(1 - Q_{3,1})(1 - Q_{3,2}).$$

Імовірності безвідмовної роботи системи після одночасного руйнування двох елементів визначаються умовними ймовірностями неруйнування елемента, що залишився:

$$\begin{aligned} P_3^{1,2} &= Q_{0,1}Q_{0,2}(1 - Q_{0,3})(1 - Q_{(1,2)3}); \\ P_2^{1,3} &= Q_{0,1}Q_{0,3}(1 - Q_{0,2})(1 - Q_{(1,3)2}); \\ P_1^{2,3} &= Q_{0,2}Q_{0,3}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{(2,3)1}). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Імовірності безвідмовної роботи системи після послідовного руйнування двох елементів також визначається умовними ймовірностями неруйнування елемента, що залишився:

$$\begin{aligned} P_3^{1-2} &= Q_{0,1}(1 - Q_{0,2})(1 - Q_{0,3})Q_{1,2}(1 - Q_{1,3})(1 - Q_{1,2,3}); \\ P_2^{1-3} &= Q_{0,1}(1 - Q_{0,2})(1 - Q_{0,3})Q_{1,3}(1 - Q_{1,2})(1 - Q_{1,3,2}); \\ P_1^{2-3} &= Q_{0,2}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,3})Q_{2,3}(1 - Q_{2,1})(1 - Q_{2,3,1}); \\ P_3^{2-1} &= Q_{0,2}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,3})Q_{2,1}(1 - Q_{2,3})(1 - Q_{2,1,3}); \\ P_1^{3-2} &= Q_{0,3}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,2})Q_{3,2}(1 - Q_{3,1})(1 - Q_{3,2,1}); \\ P_2^{3-1} &= Q_{0,3}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,2})Q_{3,1}(1 - Q_{3,2})(1 - Q_{3,1,2}). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Оцінка надійності системи (імовірність безвідмовної роботи) визначається як сума одержаних виразів:

$$\begin{aligned} P_c &= P_{1,2,3} + P_{2,3}^1 + P_{1,3}^2 + P_{1,2}^3 + P_3^{1,2} + P_2^{1,3} + P_1^{2,3} + \\ &+ P_3^{1-2} + P_2^{1-3} + P_1^{2-3} + P_3^{2-1} + P_1^{3-2} + P_2^{3-1}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Для визначення імовірності відмови системи підставимо у вирази (6.14) – (6.18) замість імовірностей безвідмовної роботи відповідні імовірності відмови елементів:

$$Q_{1,2,3} = Q_{0,1}Q_{0,2}Q_{0,3}; \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned}
Q_{2,3}^1 &= Q_{0,1}(1 - Q_{0,2})(1 - Q_{0,3})Q_{1,2}Q_{1,3}; \\
Q_{1,3}^2 &= Q_{0,2}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,3})Q_{2,1}Q_{2,3}; \\
Q_{1,2}^3 &= Q_{0,3}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,2})Q_{3,1}Q_{3,2};
\end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}
Q_3^{1,2} &= Q_{0,1}Q_{0,2}(1 - Q_{0,3})Q_{(1,2)3}; \\
Q_2^{1,3} &= Q_{0,1}Q_{0,3}(1 - Q_{0,2})Q_{(1,3)2}; \\
Q_1^{2,3} &= Q_{0,2}Q_{0,3}(1 - Q_{0,1})Q_{(2,3)1};
\end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}
Q_3^{1-2} &= Q_{0,1}(1 - Q_{0,2})(1 - Q_{0,3})Q_{1,2}(1 - Q_{1,3})Q_{1,2,3}; \\
Q_2^{1-3} &= Q_{0,1}(1 - Q_{0,2})(1 - Q_{0,3})Q_{1,3}(1 - Q_{1,2})Q_{1,3,2}; \\
Q_1^{2-3} &= Q_{0,2}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,3})Q_{2,3}(1 - Q_{2,1})Q_{2,3,1}; \\
Q_3^{2-1} &= Q_{0,2}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,3})Q_{2,1}(1 - Q_{2,3})(1 - Q_{2,1,3}); \\
Q_1^{3-2} &= Q_{0,3}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,2})Q_{3,2}(1 - Q_{3,1})(1 - Q_{3,2,1}); \\
Q_2^{3-1} &= Q_{0,3}(1 - Q_{0,1})(1 - Q_{0,2})Q_{3,1}(1 - Q_{3,2})(1 - Q_{3,1,2}).
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Додаючи значення імовірностей, одержаних за формулами (6.19) – (6.22), одержуємо повну імовірність відмови системи

$$\begin{aligned}
Q_c &= Q_{1,2,3} + Q_{2,3}^1 + Q_{1,3}^2 + Q_{1,2}^3 + Q_3^{1,2} + Q_2^{1,3} + Q_1^{2,3} + \\
&+ Q_3^{1-2} + Q_2^{1-3} + Q_1^{2-3} + Q_3^{2-1} + Q_1^{3-2} + Q_2^{3-1}.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Оскільки відмова і безвідмовна робота системи складає повну групу подій, повинно виконуватися умова  $P_c + Q_c = 1$ , що може бути ознакою правильності приведених викладок і чисельних розрахунків. Одночасно відмітимо, що повна група подій може бути виділена на будь-якому рівні аналізу системи.

Числовий приклад оцінювання надійності двічі статично невизначеної системи наведено у монографії автора [1].



**6.2.2. Граф станів.** Громіздкість положень викладеного вище розрахунку простої СНС свідчить про очевидну необхідність формалізації процедури розрахунку надійності таких систем.

Розпочнемо із завдання множини станів системи  $C = \{C_0, C_1, C_2, \dots, C_j\}$ , в яку включимо вихідний стан системи  $C_0$  і проміжні працездатні стани, що утворюються з вихідного стану в результаті відмов елементів. У загальному випадку стани відрізняються набором елементів, що відмовили, в деяких окремих випадках, наприклад, при пластичній моделі відмови елементів; стани відрізняє також послідовність відмов елементів. Очевидно, що кожному стану конструктивних систем відповідає розрахункова схема зі своїм розподілом зусиль.

У наочній формі хід руйнування системи з урахуванням усіх можливих шляхів відмов і станів ілюструється *графом станів*, який для розглянутої вище двічі статично невизначної системи (системи з трьох стержнів або заземленої балки) наводиться на *рис. 6.4*. Граф є логічною орієнтованою ієрархічною структурою типу дерева («дерева відмов»), в корені якого знаходиться початковий стан  $C_0$ , на вершинах – можливі працездатні стани  $C_j$ , на кінцях гілок – стани відмови системи. Імовірності переходу з одних станів в інші, рівні умовним ймовірностям відмов елементів, що відключаються при цьому, вказані на ребрах графа. На *рис. 6.4* видно, що з будь-якого стану, включаючи вихідний, система може безпосередньо перейти в стан відмови. Для ув'язки з приведеним вище розрахунком на графі *рис. 6.4* вказані формули, що описують його гілки. Відмітимо такі переваги дерева відмов, як систематизація і наочність причинно-наслідкових зв'язків між відмовами на різних рівнях, малої ймовірності пропуску комбінації відмов елементів, що викликають відмови системи в цілому, тісний зв'язок між процедурою оцінки надійності і конструкцією, роботою і експлуатацією системи.

Методами теорії графів і систем дерево відмов може бути перетворене і спрощене. Передусім вкажемо на можливість поділу загального графа *рис. 6.4* на підграфи за ознакою числа одночасних відмов:  $G_1$  – для трьох,  $G_2$  – для двох і  $G_3$  – для

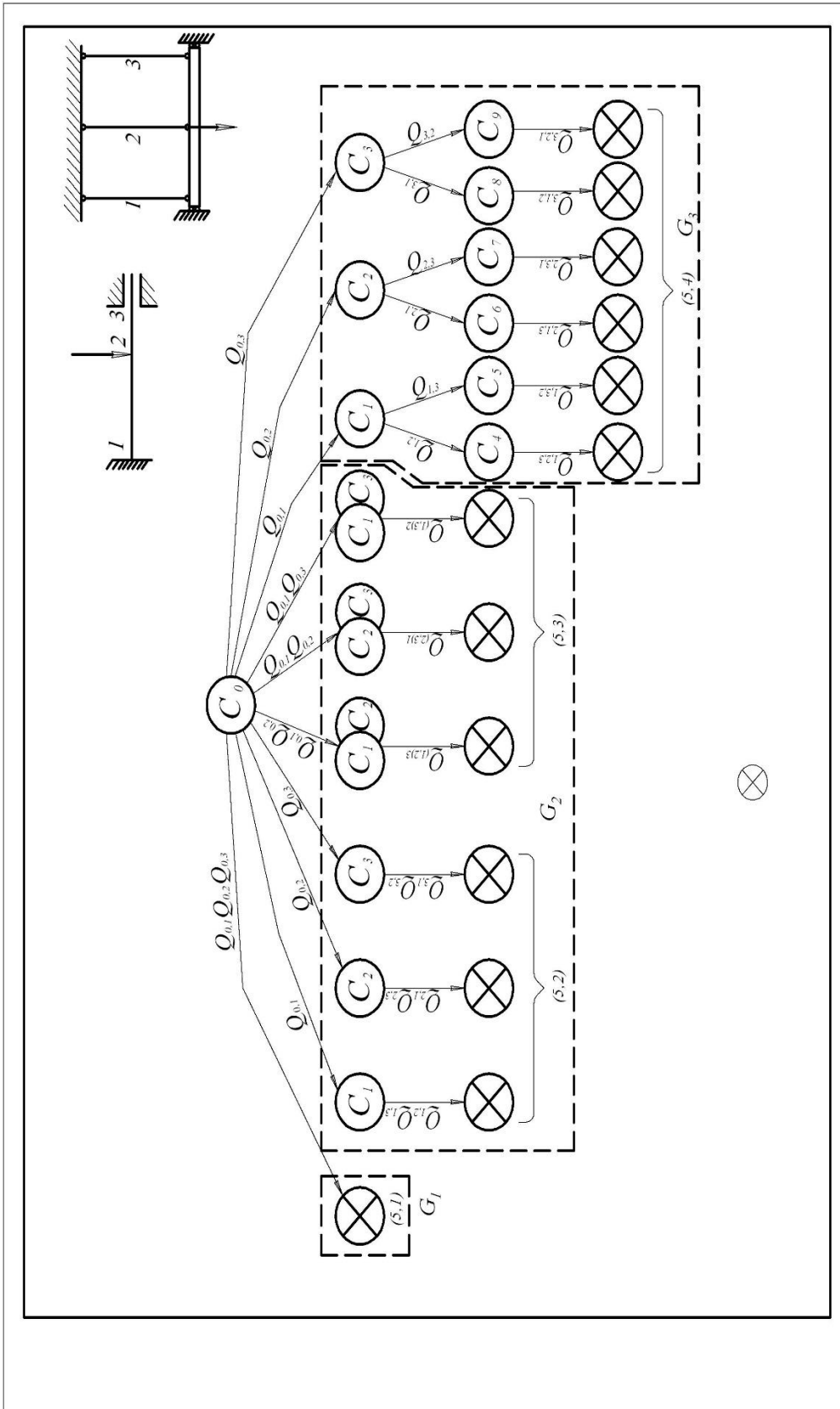
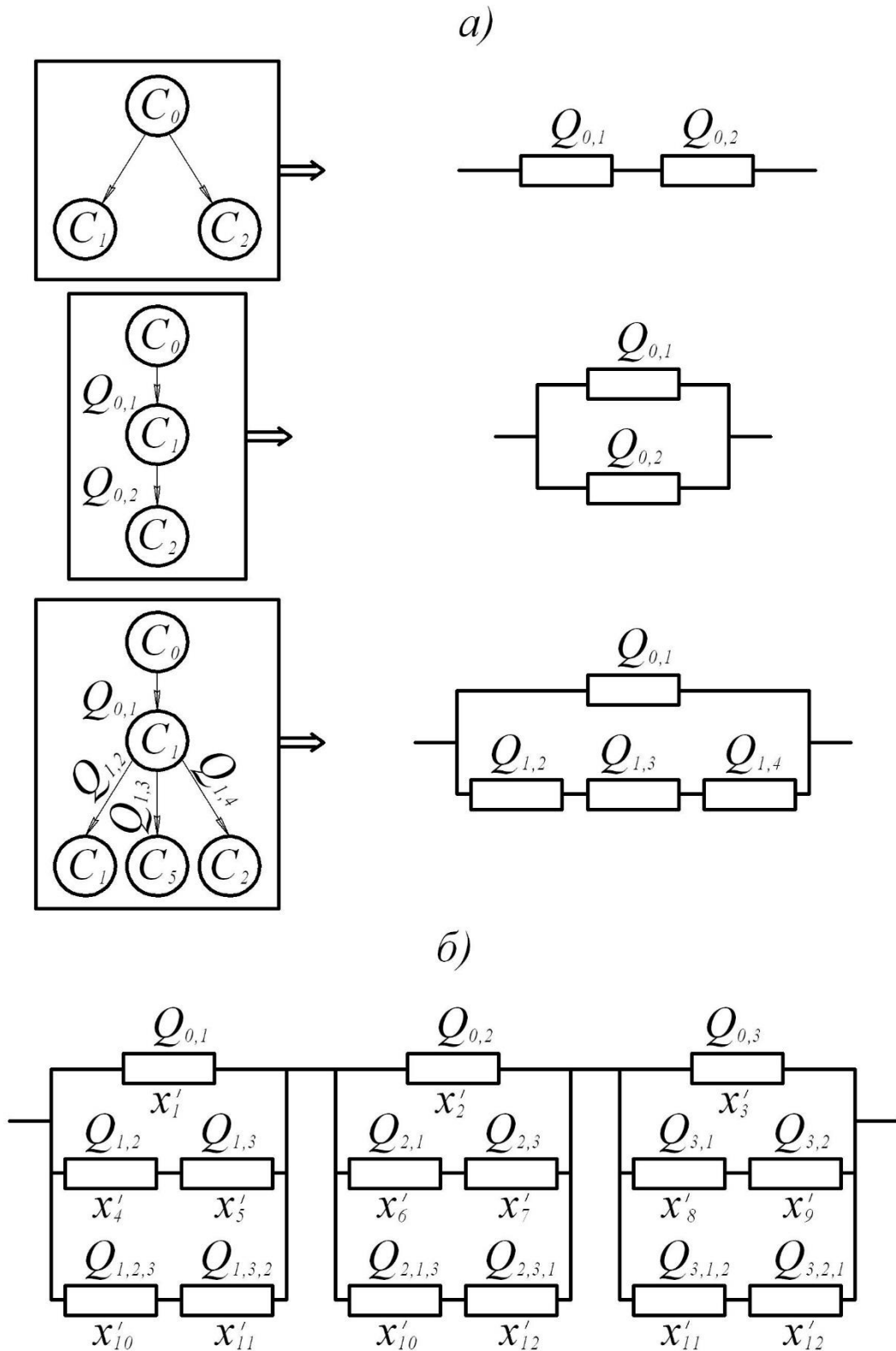


Рис. 6.4. Повний граф станів двічі статично невизначеної системи:

$C_j$  - працюючі стани;  $\otimes$  - стани відмов



**Рис. 6.5. Зв'язок графів станів зі структурними схемами:**  
 а – фрагменти дерева станів;  
 б – структурна схема для підграфа  $G_3$  (рис.6.4)

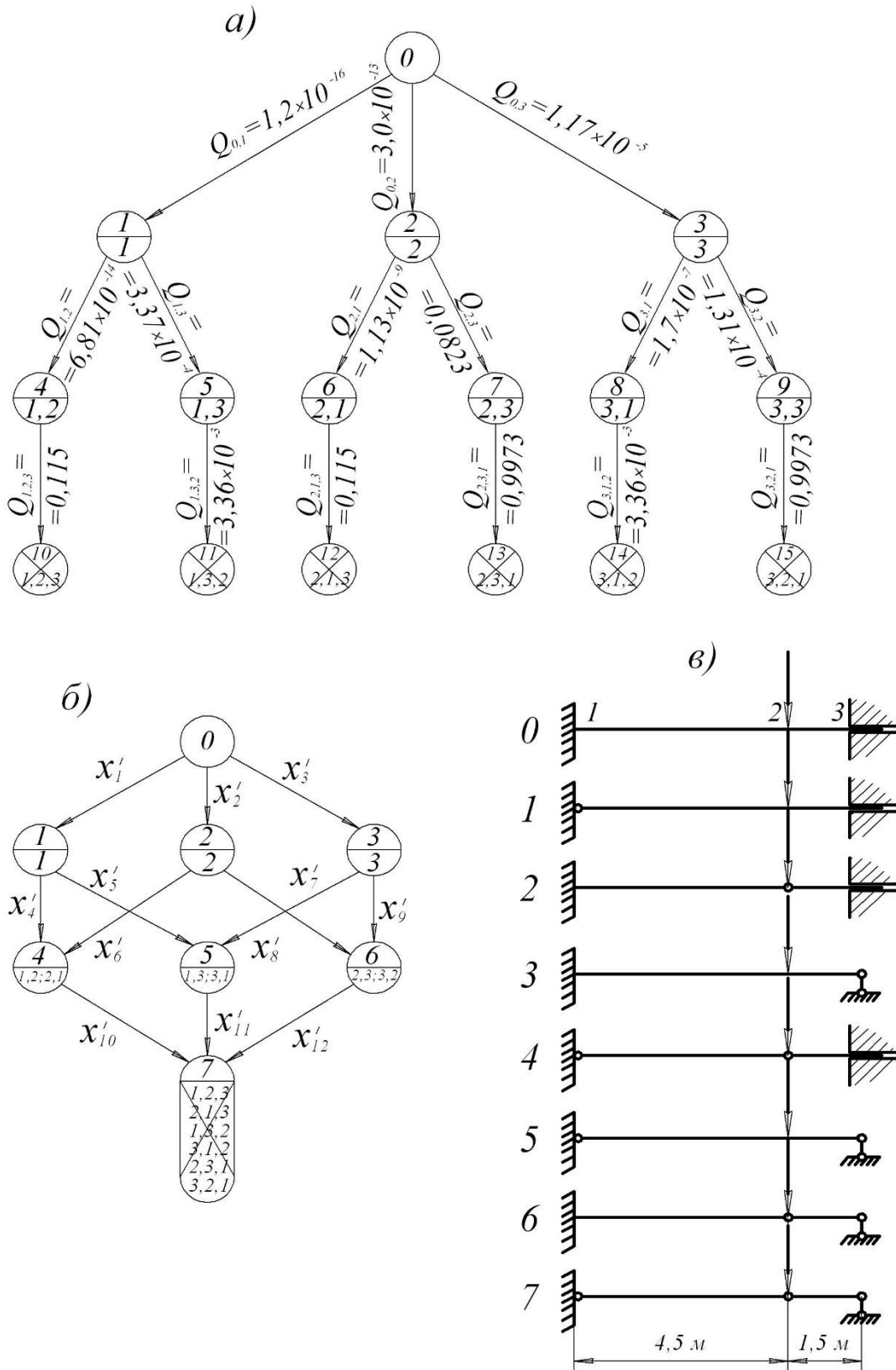
послідовних відмов. У практичних розрахунках надійності конструктивних систем можна обмежуватися найбільш ймовірним підграфом  $G_3$ , оскільки неврахування підграфів двох, трьох і більше одночасних відмов для таких високонадійних систем, якими є будівельні конструкції, дає невелику похибку, що йде в запас надійності. Крім того, характер руйнування реальних і пластичних систем практично виключає одночасні відмови елементів.

Розрахунок по дереву відмов може бути спрощений укрупненням графа станів шляхом виділення і окремого розгляду типових підграфів, обчисленням надійності до певного рівня графа, відкиданням на кожному кроці обчислень ребер, імовірність відмови по яких значно менша, ніж по інших шляхах.

Можна зв'язати дерево відмов з фундаментальними в структурній надійності послідовним і паралельним з'єднаннями (рис. 6.5). Гілки, що виходять з вершини, представляються у вигляді послідовного з'єднання; ребра, що входять у вершину і виходять з неї, представляються паралельним з'єднанням, а гілки і граф відмов в цілому – послідовно-паралельним з'єднанням логічних елементів-станів (рис. 6.5, б).

Додаткову наочність має дерево відмов, у вершинах (станах) якого в чисельнику вказані номери станів, а в знаменнику – елементи, що відмовили (рис. 6.6, а). Якщо історія руйнування (порядок відключення елементів) може не враховуватися, наприклад, при крихких відмовах елементів, то дерево станів  $n$ -разів статично невизначеної системи може бути замінене орієнтованим  $n+1$ -дольним компактним графом (рис. 6.6, б) з меншим числом вершин, але із складнішою структурою. При необхідності історія руйнування може відображатися у відображенні порядку відмови елементів (у знаменнику позначення вершин) і декількох ймовірностей відмови (на відповідних ребрах графа станів).

Подальший розрахунок за деревом відмов може виконуватися в матричній формі, придатній для застосування комп'ютерних розрахунків. Спочатку граф станів описується матрицею зв'язків, до якої згодом застосовуються операції множення, транспонування і складання [2],



**Рис. 6.6. Древа відмов статично невизначеної балки:**  
 а – граф-дерево станів; б – компактний граф станів;  
 в – стани балки.

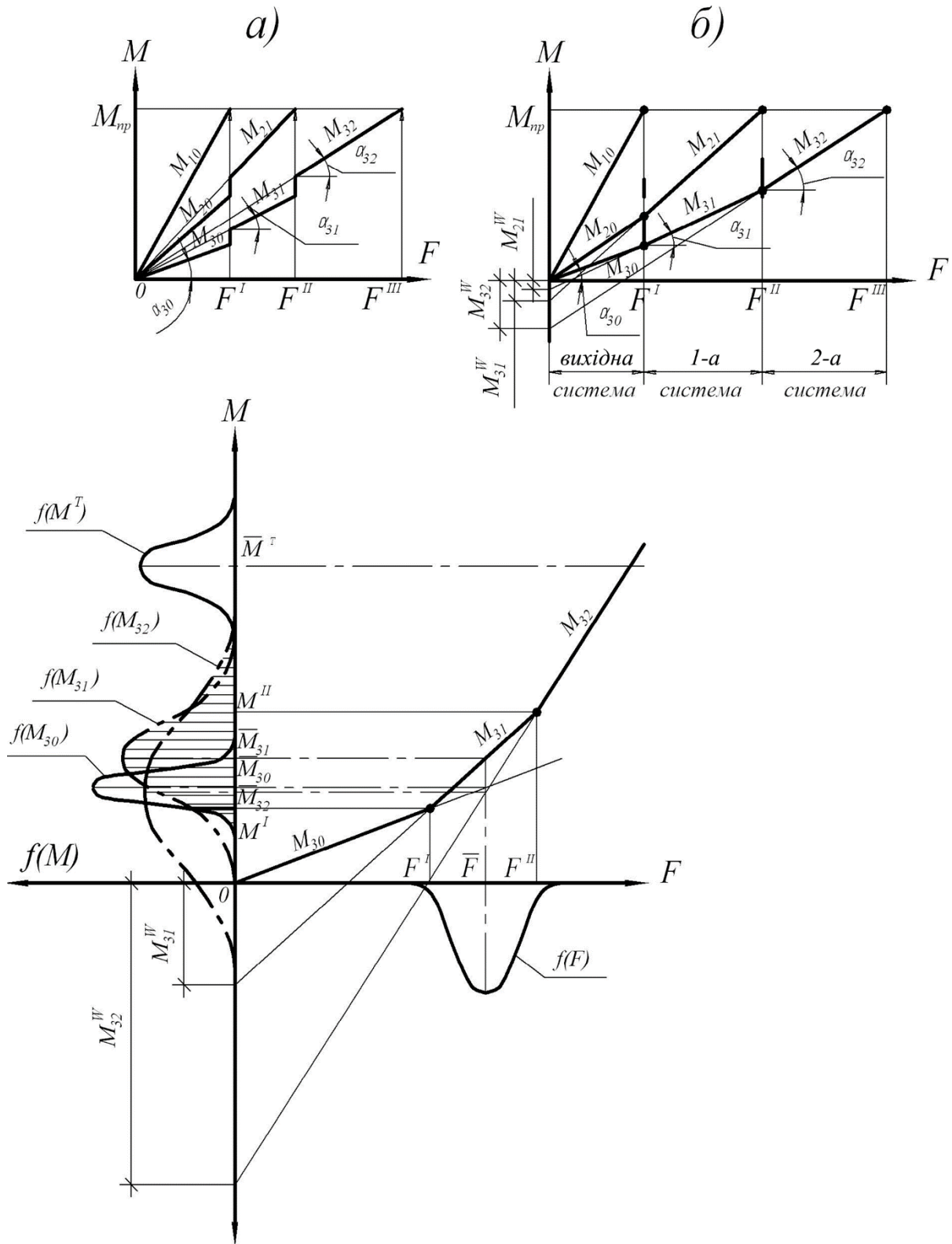
**6.2.3. Пластична модель відмов елементів.** Розглянуті вище випадки руйнування систем базувалися на *крихких відмовах* елементів, якими можуть вважатися відмови стиснутих і стиснуто-зігнутих елементів, а також відмови більшості елементів із сталей підвищеної і високої міцності. При цьому на початку завантаження система працює при повному числі зв'язків (початкова система  $C_0$ ) із зусиллями (для розглянутої вище балки) (рис. 6.8, а) :

$$M_{10} = \alpha_{10}F; \quad M_{20} = \alpha_{20}F; \quad M_{30} = \alpha_{30}F, \quad (6.24)$$

де  $\alpha_{10}$  – число впливу в системі  $C_0$  для 1-го перерізу.

Після досягнення найбільш навантаженим 1-м елементом граничного зусилля  $M_{zp}$  (зокрема, у випадку крайової текучості  $M_{zp} = M^T = \sigma_y W$ ) і виходом його з роботи, зусилля в інших елементах (перерізах) стрибкоподібно змінюються (найчастіше збільшуються) зі зміною кутів нахилу графіка  $M(F)$ :  $M_{21} = \alpha_{21}F$ ;  $M_{31} = \alpha_{31}F$ , де  $\alpha_{21}$  – число впливу в системі  $C_1$  для 2-го перерізу (друга система). Після виходу з роботи 2-го елемента в 3-му перерізі, що залишився, маємо  $M_{32} = \alpha_{32}F$ . Виходу з роботи елементів і зміні систем відповідають на осі абсцис граничні навантаження  $F_1^I$ ,  $F_2^{II}$ ,  $F_3^{III}$ .

Розглянемо тепер характер роботи системи з елементів, що працюють пружно-пластично за ідеалізованою діаграмою Прандтля (рис. 6.7, б), будемо називати таку роботу *пластичною моделлю відмови*. Основний інтерес для нас становлять системи з зігнутих елементів, наприклад, статично невизначені рами, процес руйнування яких характеризується появою шарнірів пластичності в найбільш навантажених перерізах. При цьому зв'язки, що вибули, продовжують брати участь у роботі системи у вигляді постійного впливу, рівного  $M_j^T = \sigma_y W_{nl}$  ( $W_{nl}$  – вихідний пластичний момент опору елементів системи).



**Рис. 6.7. Моделі відмов елементів системи:**  
 а – крихкі відмови; б – пластичні відмови; в – імовірнісний аналіз  
 пластичної моделі відмов

Як показують розрахунки, особливістю випадкової процедури руйнування статично невизначеної пружно-пластичної системи, являється послідовне вирівнювання імовірності відмови в усіх шляхах руйнування системи. Ця особливість є імовірнісним відображенням фундаментальної ознаки пружно-пластичних систем – незалежності величини граничного навантаження для даного механізму руйнування від послідовності виходу з роботи зв'язків системи [3].

Підводячи підсумок цьому підрозділу відмітимо, що метод простого перебирання станів, як при крихкій, так і при пластичній моделях відмов дуже трудомісткий, оскільки загальне число необхідних для врахування станів визначається як  $N = \sum_{k=1}^{n+1} C_m^k$ , де

$C_m^k$  – кількість сполучень з  $m$  по  $k$ ,  $n$  – ступінь статичної невизначеності СНС,  $m$  – кількість елементів (небезпечних перерізів). Наприклад, для рами виробничої будівлі з типовою схемою завантаження, при  $n = 3$  і  $m = 20$ ,  $N \approx 6200$ , для складніших рам  $N$  швидко росте. Тому метод станів можна адресувати для розрахунку надійності простих систем невеликої розмірності, вузлів конструкцій, а також для випадків, коли надійність оцінюється на якій-небудь проміжній стадії руйнування (наприклад, за критерієм переміщень), де непридатний метод граничної рівноваги. Зниження трудомісткості і впорядкування розрахунку по методу станів можна отримати логіко-ймовірнісними методами, які розглядаються нижче в п. 6.3.

### **6.3. ЗАСТОСУВАННЯ ЛОГІКО-ЙМОВІРНІСНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ОЦІНКИ НАДІЙНОСТІ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ**

**6.3.1. Використання логічних функцій.** Відповідно до прийнятих в логіко-ймовірнісних моделях позначень [4], умови безвідмовної роботи елементів позначимо  $X$ , умови відмови –  $X'$ , що дає можливість перейти від графів відмов *рис. 6.2* і *6.4* до логічної схеми роботи СНС (*рис. 6.8*).



Роботу системи в цілому опишемо функцією введених логічних змінних – функцією алгебри логіки (ФАЛ)  $y(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , що називається *умовою працездатності системи*, для її розшифровки широко використовуються два фундаментальні поняття.

**1. Найкоротший шлях успішного функціонування системи (КПУФ)**, який є мінімальним набором елементів, необхідних для безвідмовної роботи системи, який описується ФАЛ у вигляді кон'юнкції (логічного множення) елементів

$$P_l = \bigwedge_{i \in \{K_{pl}\}} X_i, \quad (6.25)$$

де  $K_{pl}$  – множина номерів елементів, що входять в даний шлях.

**2. Мінімальний переріз відмов системи (МСО)**, який є мінімальним набором елементів, що відмовили, які приводять систему до відмови, він описується кон'юнкцією заперечень цих елементів:

$$S_j = \bigwedge_{i \in \{K_{Sj}\}} X'_i, \quad (6.26)$$

де  $K_{Sj}$  – множина номерів елементів, що входять в даний переріз.

Використовуючи введені поняття, можна записати 2 загальні варіанти умов працездатності системи (УРС):

- перший – у вигляді диз'юнкції (логічного додавання) всіх  $d$  КПУФ, що знаходяться в системі:

$$y(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigvee_{l=1}^d P_l = \bigvee_{l=1}^d \left[ \bigwedge_{i \in \{K_{pl}\}} X_i \right]; \quad (6.27)$$

- другий – у вигляді кон'юнкції заперечень усіх  $m$  МСО, що означає, що не реалізується жодна з  $m$  схем руйнування:

$$y(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigwedge_{j=1}^m S_j' = \bigwedge_{j=1}^m \left[ \bigvee_{i \in \{K_{pl}\}} X_i \right]. \quad (6.28)$$

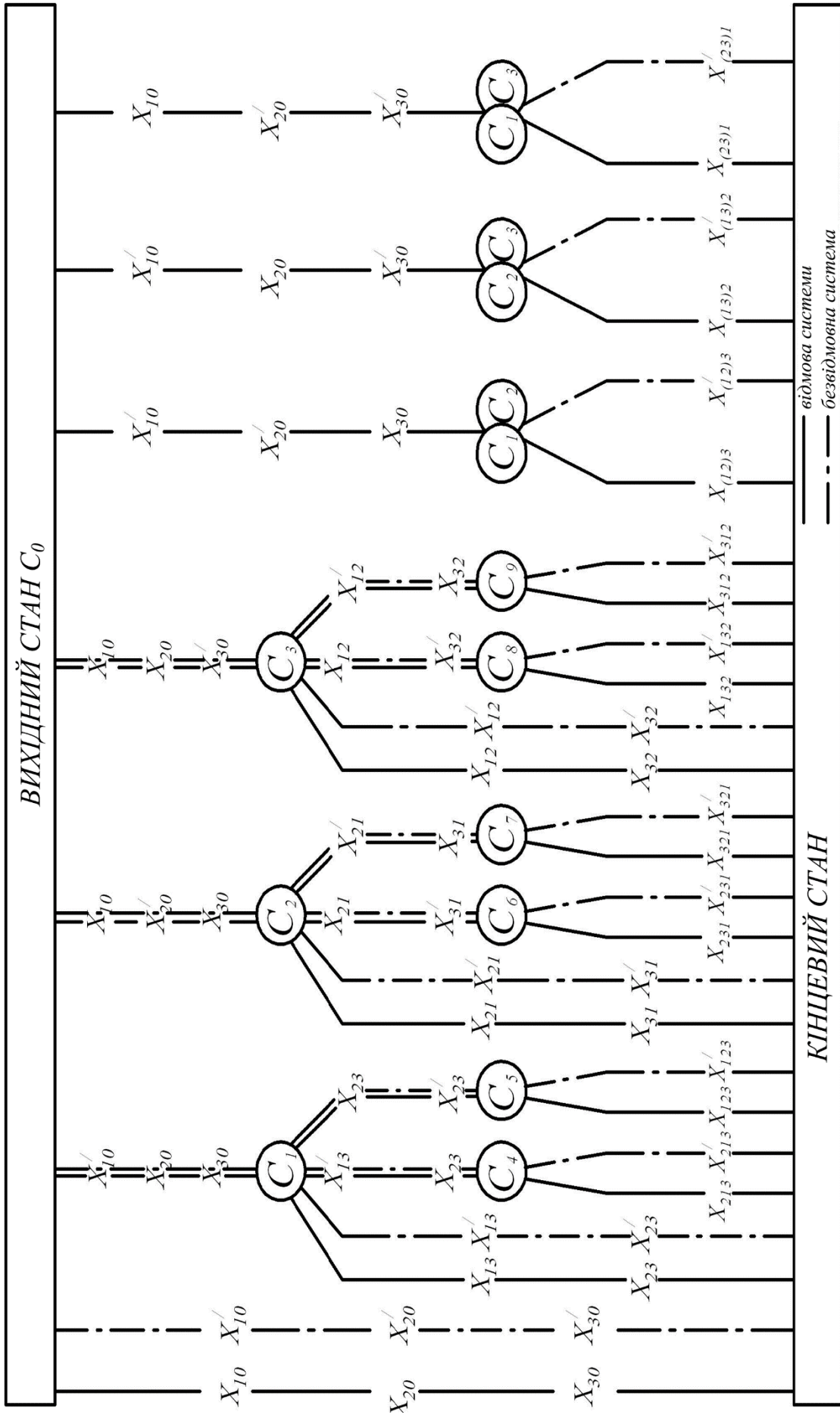
Приведені УРС можна проілюструвати паралельним з'єднанням КПУФ або послідовним з'єднанням заперечень МСО.

Проілюструємо використання 1-го варіанту умови працездатності (6.27) для графа *рис. 6.6* і його логічної схеми *рис. 6.8*. Для них можна записати умову працездатності (6.29) в компактній формі, де стовпці відповідають диз'юнкції, а рядки – кон'юнкції. Аналогічно замінюючи в необхідних місцях логічні змінні, можна записати умову відмови системи (6.30). Матрично-логічні умови для двічі статично невизначеної системи (*рис. 6.8*):

а) безвідмовної роботи (КПУФ)

б) відмови систем

$$y = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} X_{10} & X_{20} & X_{30} & X_{23} & X_{13} \\ & & X_{30}' & & X_{13}' X_{213} \\ & & & X_{23}' & X_{13}' X_{123} \\ & X_{20}' & X_{30}' & X_{12}' & X_{32}' \\ & & & X_{12}' & X_{32}' X_{123} \\ & & X_{30}' & X_{(2,3)1}' & X_{32}' X_{312} \\ X_{10}' & X_{20}' & X_{30}' & X_{21}' & X_{31}' \\ & & & & X_{31}' X_{231} \\ & & & X_{21}' & X_{31}' X_{321} \\ & & & X_{(1,3)2}' & \\ & & X_{30}' & X_{(1,2)3}' & \\ X_{20}' & X_{30}' & & & \end{array} \right| \quad (y' = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} X_{10}' & X_{20}' & X_{30}' & X_{23}' & X_{13}' \\ X_{10}' & X_{20}' & X_{30}' & & X_{13}' X_{123}' \\ & & & X_{23}' & X_{13}' X_{213}' \\ & X_{20}' & X_{30}' & X_{12}' & X_{32}' \\ & & & X_{12}' & X_{32}' X_{312}' \\ & & X_{30}' & X_{(2,3)1}' & X_{32}' X_{132}' \\ X_{10}' & X_{20}' & X_{30}' & X_{21}' & X_{31}' \\ & & & & X_{31}' X_{321}' \\ & & & X_{21}' & X_{31}' X_{231}' \\ & & & X_{(1,3)2}' & \\ & & X_{30}' & X_{(1,2)3}' & \\ X_{20}' & X_{30}' & & & \end{array} \right|$$



**Рис. 6.8.** Логічна схема руйнування двічі статично невизначеної системи

Покажемо застосування методу мінімальних перерізів відмови для згорнутого графа відмов *рис. 6.6, б*, заздалегідь присвоївши його ребрам відповідні логічні змінні  $X_i$ . Поперечними розрізами еквівалентної послідовно-паралельної системи (*рис. 6.5, б*) отримуємо набір мінімальних перерізів відмов, що дозволяє записати ФАЛ (6.28) у вигляді:

$$y(X_1, X_2, \dots, X_{12}) = |S'_1, S'_2, \dots, S'_6| = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} X_1 & X_1 & X_2 & X_2 & X_3 & X_3 \\ \hline X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & X_9 \\ \hline X_{10} & X_{11} & X_{10} & X_{12} & X_{11} & X_{12} \end{array} \right|. \quad (6.31)$$

Цей вираз відповідає звичайному запису виду

$$y = (X_1 \vee X_4 \vee X_{10}) \wedge (X_1 \vee X_5 \vee X_{11}) \wedge \dots$$

Застосуємо до нього правило де Моргана [5]:

$$\begin{aligned} y &= (X'_1 \wedge X'_4 \wedge X'_{10})' \wedge (X'_1 \wedge X'_5 \wedge X'_{11})' \wedge \dots = \\ &= [(X'_1 \wedge X'_4 \wedge X'_{10}) \vee (X'_1 \wedge X'_5 \wedge X'_{11}) \vee \dots]'. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Ми отримали логічну функцію для відмови системи, що відповідає дереву відмов *рис. 6.6, б*, у вигляді диз'юнкцій МСО (гілок графа), кожна з яких записується відповідною кон'юнкцією умов відмови елементів (станів). Зокрема, для крайнього лівого шляху графа можна записати логічний вираз

$$y' = X'_1 \wedge X'_4 \wedge X'_{10} = X'_1 \left( \frac{X'_4}{X'_1} \right) \cdot \left( \frac{X'_{10}}{X'_4} \wedge X'_1 \right) = X'_1 \cdot X'_4 \cdot X'_{10}. \quad (6.33)$$

Тут враховується залежність між подіями, що входять у кон'юнкцію. Для графа *рис. 6.6, б* умова відмови має вигляд

$$y' = X'_1 \cdot X'_4 \cdot X'_{10} \vee X'_1 \cdot X'_5 \cdot X'_{11} \vee X'_2 \cdot X'_6 \cdot X'_{10} \vee X'_2 \cdot X'_7 \cdot X'_{11} \vee \\ \vee X'_3 \cdot X'_8 \cdot X'_{11} \vee X'_3 \cdot X'_9 \cdot X'_{12}. \quad (6.34)$$

Представляє інтерес порівняння розрахунку надійності системи за отриманою компактною логічною схемою (6.34) з перебором станів, наведеним вище у п. 6.2. За правилами алгебри подій [5] диз'юнкція розшифровується як

$$A \vee B = A + B - A \cdot B. \quad (6.35)$$

Тому маємо для верхніх ярусів графів *рис. 6.6, а, б* для події-відмови (виходу із стану  $C_0$ ) логічний вираз

$$X'_1 \vee X'_2 \vee X'_3 = X'_1 + X'_2 + X'_3 - \\ - (X'_1 \cdot X'_2 + X'_1 \cdot X'_3 + X'_2 \cdot X'_3) + X'_1 \cdot X'_2 \cdot X'_3. \quad (6.36)$$

Повний перебір можливих станів дає той же результат за умови допустимості заміни логічних змінних ймовірностями відмови і врахування усіх спільних відмов елементів. Обчислення за логічною формулою (6.36) значно наочніше і простіше за громіздкий перебір усіх можливих станів системи, тому цей метод нами рекомендується для практичних розрахунків надійності. Слід зазначити, що схема "диз'юнкція кон'юнкцій" не враховує в деяких випадках, що для відмови системи в цілому потрібне певне число відмов елементів, а повний перебір станів і логічна схема може включати більшу кількість відмов. Викладений підхід є цілком точним для початкових і середніх частин довгих гілок графів багаторазово статично невизначених систем і конструктивних систем, по структурі аналогічних електронним, де кожна вершина графів відмов відповідає реальному, а не логічному елементу схеми, і де немає обмежень на кількість відмов елементів.

Матричні методи дозволяють формалізувати складання умови працездатності і відмови системи та застосувати комп'ютерну техніку. При цьому широко використовуються

диз'юнкція і кон'юнкція логічних змінних, а також *закон ідемпотентності*:  $A \vee A = A$ ;  $A \wedge A = A$ .

### **6.3.2. Оцінка надійності вузлів металевих конструкцій.**

Для одержання цієї оцінки також застосуємо логіко-імовірнісний метод. Попередньо аналізується дійсна робота вузлів, характер і послідовність їхнього можливого руйнування. Проведений структурний аналіз надійності типових вузлів металоконструкцій показав, що вони в основному описуються послідовними схемами з включенням паралельних з'єднань залежних елементів, що відповідають багатоелементним з'єднанням, підібраним із запасом. Врахування кореляції між елементами структурних схем вузлів внаслідок спільності зусиль і міцності сталі дозволяє скоротити число елементів, що враховуються в схемі, і підвищити результуючу оцінку надійності.

Надійність вузлів залежить від кількості несучих елементів, що входять в них, зі збільшенням числа елементів надійність знижується, більшу надійність мають малоелементні вузли. Важливим чинником є також однорідність міцнісних властивостей елементів: надійність вузлів виходить найменшою, якщо міцності елементів повинні розглядатися як незалежні. Така ситуація виникає, якщо елементи виготовлені з різних сталей, різними заводами-виробниками, при зіставленні заводських і монтажних швів і т.п.

Внаслідок своєї багатоелементності вузли можуть бути менш надійними, ніж самі елементи (стержні колон, пролітні частини балок і ін.), що повинно враховуватися при оцінці надійності конструкцій в цілому.

Нижче одержані формули для визначення ймовірностей відмови і безвідмовної роботи типових вузлів металічних конструкцій.

**Вузол 1. Жорстке сполучення решітчастого ригеля з колоною (рис. 6.9, а).** Виходячи з дійсної роботи такого вузла, його відмова може здійснитися внаслідок:

1 – руйнування верхньої фасонки ( $X_1$ );

2 – руйнування зварних швів, що кріплять верхню фасонку до фланця ( $X_2$ );

3 – згину фланця верхнього вузла ( $X_3$ );

4 – обриву болтів, що кріплять верхній пояс ферми до колони ( $X_4$ );

5 – руйнування вертикальних зварних швів нижнього вузла ( $X_5$ );

6 – зминання в місці спирання нижнього вузла на опорний столик ( $X_6$ );

7 – падіння опорного столика внаслідок відмови зварних швів кріплення столика до колони ( $X_7$ ).

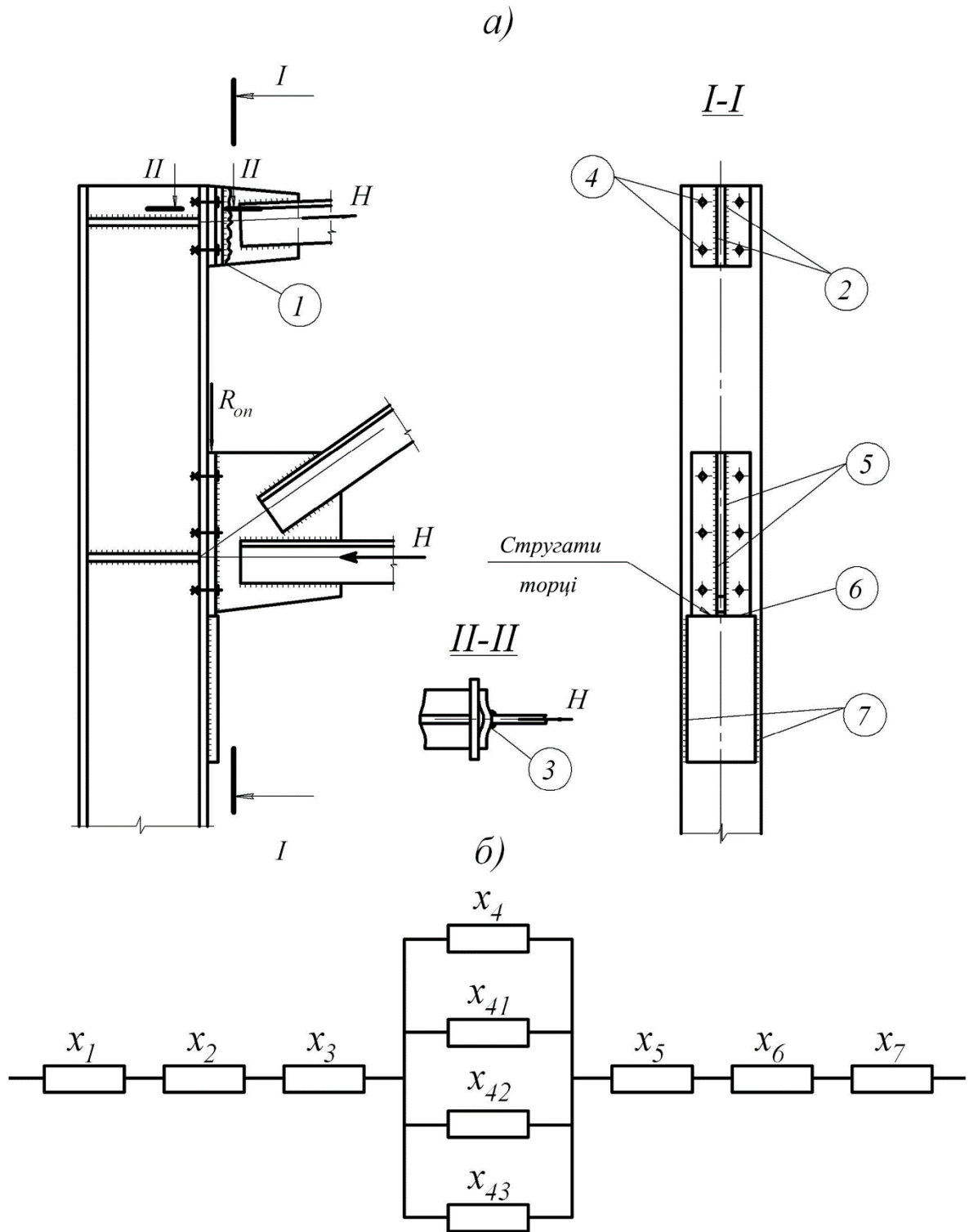
Перераховані відмови представляються у вигляді елементів в загальній структурній схемі вузла (рис. 6.9, б). При цьому необгрунтованим було б представлення парних зварних швів поз. 2, 5 і 7 у вигляді паралельних з'єднань, оскільки в останніх кожен елемент здатний виконувати покладену на з'єднання функцію. У даному вузлі один з двох швів, очевидно, не може сприйняти подвійне навантаження, і парний шов є по суті одним швом, накладеним двома ділянками, який відображається в схемі послідовно сполученими елементами  $X_2$ ,  $X_5$  і  $X_7$ .

У болтовому з'єднанні поз. 4, особливо якщо число болтів визначене конструктивно з умови їх розміщення, можливе врахування роботи з'єднання після відмови першого і подальших болтів. Проте при цьому різко зростає навантаження на болти, що залишилися, характер їх роботи змінюється (рис. 6.7, а, б) і може бути відображений послідовно-паралельним з'єднанням залежних елементів (рис. 6.3). Умова працездатності системи, що показує роботу вузла (рис. 6.9, б), записується у вигляді:

$$y(X_1, X_2, \dots, X_7) = X_1 X_2 X_3 (X_4 \vee X_{41} \vee X_{42} \vee X_{43}) X_5 \cdot X_6 \cdot X_7. \quad (6.37)$$

Для переходу від логічної функції до імовірнісної виконаємо аналіз кореляційних зв'язків між функціями резерву міцності елементів

$$Y_i = X_i = R_i - S_i = \sigma_{yi} - \sigma_{qi} \geq 0. \quad (6.38)$$



**Рис. 6.9.** До оцінки надійності жорсткого вузла  
сполучення ригеля з колоною:  
а – конструкція вузла; б – структурна схема системи



Зважимо, що зусилля у всіх елементах вузла пропорційні навантаженню від покрівлі (постійного і снігового), тому параметри  $\sigma_{qi}$  функціонально зв'язані. Більш того, при умові, що всі елементи підібрані без запасу, можна прийняти наближено, що розподіли  $\sigma_{qi}$  є близькими.

Другий параметр  $\sigma_{yi}$ , очевидно, співпадає для деталей поз. 1, 3 і 6 і зварних швів поз. 2 і 5 однієї і тієї ж ферми, тому відповідні умови безвідмовної роботи  $X_1, X_3$  і  $X_6$ ;  $X_2$  і  $X_5$  тісно кореляційно пов'язані з коефіцієнтом кореляції  $r \approx 1$ . Внаслідок цього при переході від ФАЛ (6.37) до імовірнісної форми вказані групи елементів мають бути представлені "найслабкішими ланками" з мінімальними ймовірностями безвідмовної роботи  $P_{i \min}$ .

Імовірнісні характеристики сталі деталей ферми (поз. 1, 3 і 6), болтів (поз. 4), зварних швів ферми (поз. 2 і 5) і опорного столика колони (поз. 7), очевидно, слід прийняти незалежними, тим більше, що таке припущення йде в запас надійності вузла. Внаслідок цього коефіцієнт кореляції між елементами  $X_i$  і  $X_j$  визначиться як:

$$r_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_q^2}{\hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_q^2}. \quad (6.39)$$

Враховуючи співвідношення стандартів  $\hat{\sigma}_y$  і  $\hat{\sigma}_q$ , з урахуванням змінності і нормованих відхилень розрахункових значень для снігового і постійного навантажень (див. розділ 3), можна зробити загальний висновок про помітну перевагу знаменника у формулі (6.39) і отримати приблизно коефіцієнти кореляції  $r_{ij} \leq 0,5$  між умовами відмови елементів вузла з незалежними міцностями сталі. При такій порівняно слабкій кореляції відмови елементів можна вважати незалежними.

На підставі вищесказаного перехід від ФАЛ (6.37) до формули імовірності безвідмовної роботи вузла (рис.6.9) отримаємо у вигляді

$$P_C = \min(P_1, P_3, P_6) \min(P_2, P_5) \cdot P_7 \cdot (1 - Q_4 \cdot Q_{41} \cdot Q_{42} \cdot Q_{43}). \quad (6.40)$$

Відмова вузла у формі виникнення шарніра пластичності внаслідок руйнування (плинності) верхнього болтового з'єднання є складною подією, що об'єднує відмову болтів і безвідмовну роботу інших елементів, його ймовірність дорівнює:

$$Q_{III} = Q_4 \cdot Q_{41} \cdot Q_{42} \cdot Q_{43} \min(P_1, P_3, P_6) \min(P_2, P_5) \cdot P_7. \quad (6.41)$$

**Вузол 2. Жорстке сполучення суцільного ригеля з колоною, типове для багатопверхових будівель зі сталевим каркасом (рис. 6.10, а).**

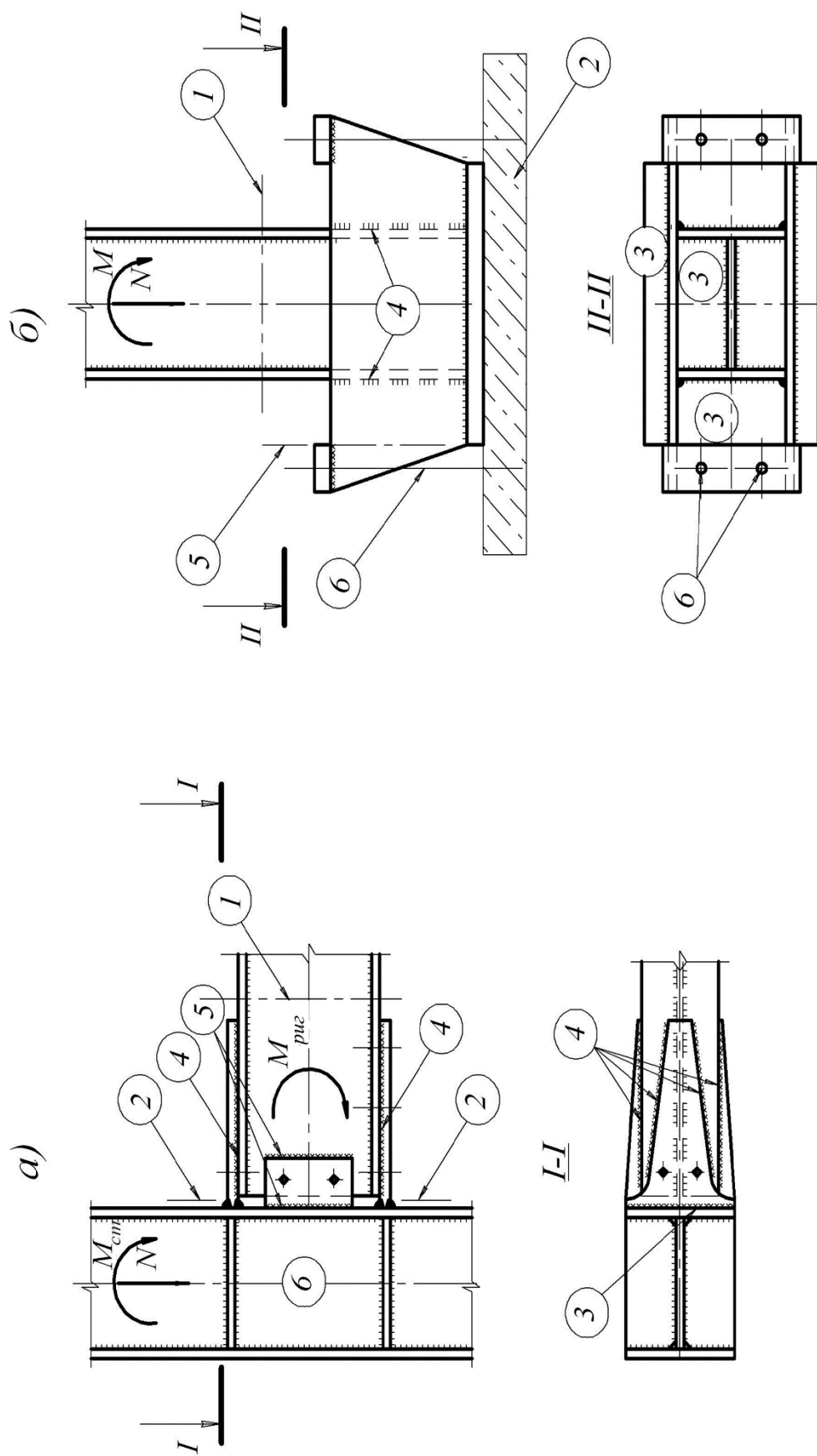
Відмова цього вузла може реалізуватися у формі:

- 1 – переходу опорного перерізу ригеля в пластичну стадію, виникнення шарніра пластичності ( $X_1$ );
- 2 – руйнування поясних стикових накладок ( $X_2$ );
- 3 – руйнування монтажних стикових швів, що кріплять стикові накладки до колони ( $X_3$ );
- 4 – відмови монтажних флангових швів кріплення стикових накладок до полиць ригеля ( $X_4$ );
- 5 – обриву зварного кріплення накладки по стінці ригеля ( $X_5$ );
- ;
- 6 – руйнування ділянки стінки колони в зоні примикання ригеля, що знаходиться в складному напруженому стані ( $X_6$ ).

Структурна схема для оцінки надійності вузла, з урахуванням викладених вище міркувань, представляється послідовним з'єднанням усіх елементів, тому умову працездатності вузла запишемо у вигляді

$$y(X_1, X_2, \dots, X_6) = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 \cdot X_6. \quad (6.40)$$

Як і раніше у вузлі *рис. 6.9, а*, в усіх елементах даного вузла виникають тісно корельовані зусилля; міцність сталі можна прийняти співпадаючої в перерізі балки і накладках (поз. 1 і 2), а



**Рис. 6.10.** До оцінки надійності жорстких вузлів металоконструкцій:  
 а – сполучення ригеля з колоною; б – башмак колони

також в зварних швах поз. 3, 4 і 5. З урахуванням цього, імовірність безвідмовної роботи вузла запишеться як

$$P_C = \min(P_1, P_2) \min(P_3, P_4, P_5) \cdot P_6. \quad (6.41)$$

Для ймовірності виникнення шарніра пластичності у вузлі маємо

$$Q_{III} = Q_1 \cdot P_2 \cdot P_6 \min(P_3, P_4, P_5). \quad (6.42)$$

**Вузол 3. Типовий башмак суцільної колони при жорсткому сполученні з фундаментом (рис. 6.10, б).**

Для башмака можливими є наступні варіанти відмов:

1 – перехід опорного перерізу колони в пластичний стан, виникнення шарніра пластичності ( $X_1$ );

2 – руйнування бетону під плитою башмака ( $X_2$ );

3 – руйнування опорної плити башмака внаслідок згину на різних ділянках під дією відпору бетону; у розгляд слід вводити найбільш навантажену ділянку плити ( $X_3$ );

4 – руйнування зварних швів кріплення траверс башмака до полиць колони ( $X_4$ );

5 – перехід в пластичну стадію або руйнування траверс по найбільш навантаженому перерізу ( $X_5$ );

6 – руйнування або висмикування анкерних болтів; відмова болтів є складною подією, що включає руйнування стержня болта, його висмикування з фундаменту, зріз різьби, змінання траверс в місцях спирання опорних планок ( $X_6$ ).

Усі перераховані відмови описуються послідовно розташованими елементами  $X_i$ , окрім  $X_6$  для анкерних болтів, які у разі установки із запасом з конструктивних міркувань можуть давати паралельне з'єднання залежних елементів. Логічна формула умови безвідмовної роботи вузла

$$y(X_1, X_2, \dots, X_6) = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 \cdot (X_6 \vee X_{61}). \quad (6.43)$$

Враховуючи тісний кореляційний зв'язок відмов поз. 1, 3 і 5, отримуємо для ймовірності безвідмовної роботи башмака колони:

$$P_C = \min(P_1, P_{3\min}, P_5) \cdot P_2 \cdot P_4 (1 - Q_6 \cdot Q_{61}). \quad (6.44)$$

Звідси ймовірність появи шарніра пластичності в защемленні колони:

$$Q_{III} = Q_1 \min(P_{3\min}, P_5) \cdot P_2 \cdot P_4 \cdot (1 - Q_6 \cdot Q_{61}). \quad (6.45)$$

**6.3.3. Оцінка важливості елементів системи.** Вирішальною перевагою логіко-ймовірнісних методів є можливість виявлення впливу окремих елементів на надійність системи в цілому. Для цього вводиться ряд спеціальних характеристик [4].

*1. Значущість елемента*, яка для монотонних структур визначається як:

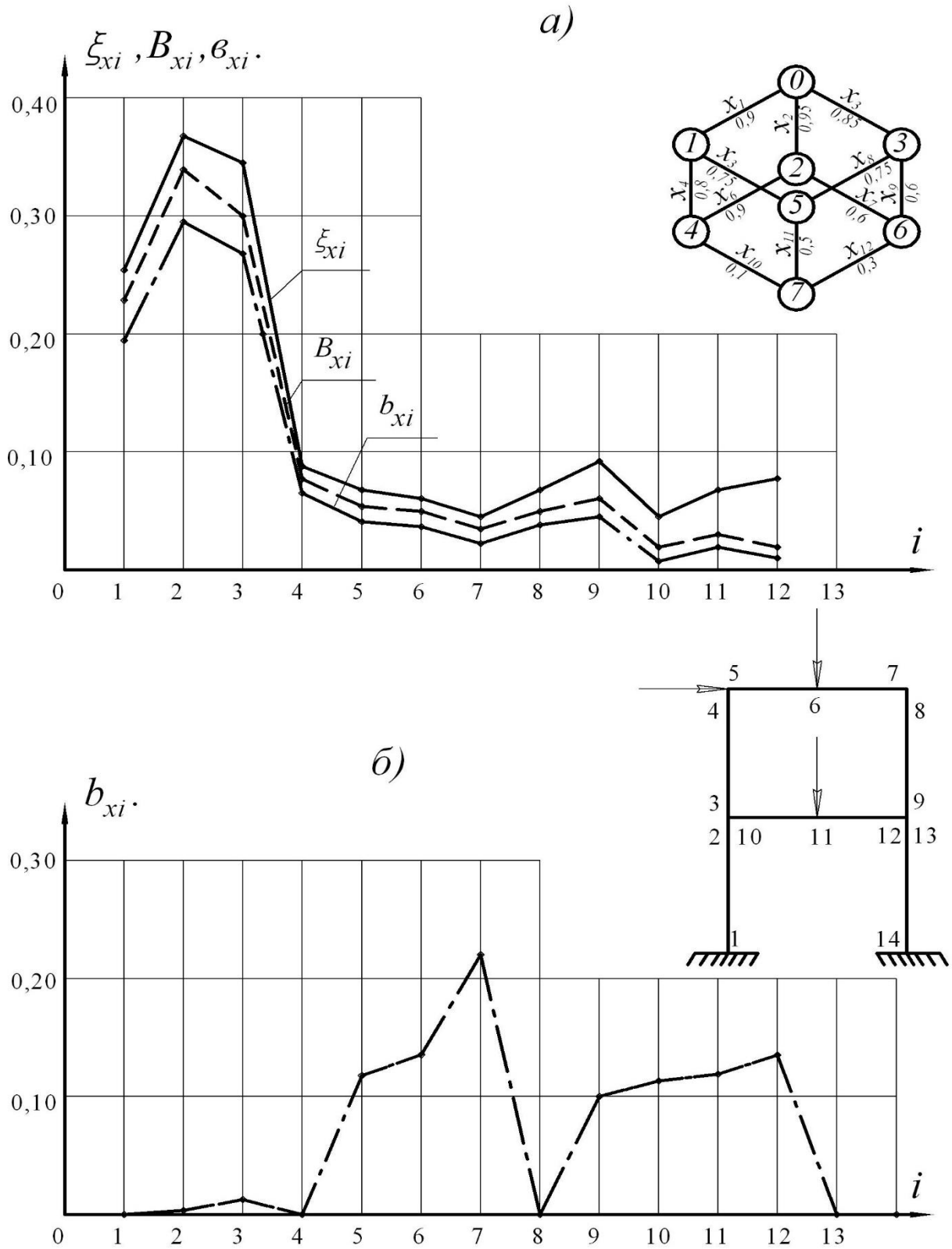
$$\xi_{X_i} = \frac{dP_C}{dP_i} = P_{C1}^{(i)} - P_{C0}^{(i)}, \quad (6.46)$$

де  $P_C$  і  $P_i$  – ймовірність безвідмовної роботи відповідно системи в цілому і  $i$ -го елемента;  $P_{C1}^{(i)}$  – ймовірність безвідмовної роботи системи при абсолютній надійності  $i$ -го елемента;  $P_{C0}^{(i)}$  – те ж, при абсолютній відмові  $i$ -го елемента.

*2. Внесок елемента  $X_i$  в надійність системи*

$$B_{X_i} = P_i \cdot \frac{dP_C}{dP_i} = P_C - P_{C0}^{(i)}. \quad (6.47)$$

Внесок характеризує приріст надійності системи внаслідок заміни елемента  $X_i$ , що відмовив, на такий же працездатний елемент з ймовірністю безвідмовної роботи  $P_i$ .



**Рис. 6.11. Ранжування станів і елементів СНС:**

а – оцінки важливості станів двічі статично невизначеної системи (рис. 6.4):  $\xi_{xi}$  – значимість;  $B_{xi}$  – внесок;  $b_{xi}$  – питомий внесок;

б – питомі внески небезпечних перерізів двоповерхової рами

### 3. Питомий вклад елемента

$$b_{X_i} = B_{X_i} / \sum_{i=1}^n B_{X_i}. \quad (6.48)$$

Для розглянутої вище двічі статично невизначеної системи (рис. 6.4) значимість і внески різних станів змінюються аналогічно, причому значно більшою є важливість перших відмов елементів у порівнянні з наступними (рис. 6.11, а). Ця особливість СНС підтверджує можливість одержання оцінки їх надійності на основі аналізу вихідного стану системи замість трудомісткого розгляду всіх можливих шляхів руйнування системи.

Алгоритми ранжування (оцінки важливості) елементів СНС на основі ІМГР включають наступні етапи:

а) складання логічної функції умови безвідмовної роботи системи на основі (6.28) з урахуванням головних (найбільш імовірних) механізмів руйнування; при цьому умови безвідмовної роботи  $X_i$  елементів, що входять в механізми руйнування, логічно складаються (операція диз'юнкції) і показуються стовпцями, умови невиникнення механізмів логічно перемножуються (операція кон'юнкції) і показуються рядками;

б) за допомогою алгоритму розрізання повторна логічна матрична форма у приводиться до безповторного вигляду;

в) будуються логічні функції  $y_1^{(i)}$  і  $y_0^{(i)}$  при  $X_i = 1$  і  $X_0 = 0$ , необхідні для отримання оцінок важливості елементів;

г) після заміни логічних змінних на відповідні ймовірності, виконується обчислення за формулами (6.46) – (6.48) значущості, внеску і питомого внеску елементів (небезпечних перерізів);

д) виконується ранжування елементів, що дозволяє розробити стратегію забезпечення живучості, підвищення надійності і оптимізації СНС за критеріями надійності.

Питомі внески небезпечних перерізів двоповерхової рами ілюструються на рис. 6.11, б. Можна відмітити, що більший внесок мають ті перерізи, які входять у механізми з невеликою кількістю шарнірів пластичності (у даному випадку балочні механізми 16 і 17 в табл. 6.1, перерізи 5, 6, 7, 10, 11, 12), а також перерізи, що

входять у більшу кількість механізмів (7-й переріз входить у п'ять механізмів, 6-й і 11-й перерізи входять у чотири механізми). Деякі перерізи, що не входять у головні механізми або рідко входять у багатошарнірні механізми, не впливають на надійність рами.

#### **6.4. РОЗРАХУНОК РАМ ІМОВІРНІСНИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНОЇ РІВНОВАГИ**

Для оцінки несучої здатності пружно-пластичних СНС широко застосовується метод граничної рівноваги, який дозволяє, оминаючи проміжні стани, аналізувати безпосередньо стани пластичного руйнування рам, що визначають характеристики їхньої граничної міцності. На цій основі розроблений імовірнісний метод граничної рівноваги (ІМГР) [2], в якому враховується стохастичний характер міцності матеріалу та навантажень. Завдяки цьому ІМГР відкриває можливість одержувати безпосередні оцінки надійності СНС.

**6.4.1. Загальні положення методу граничної рівноваги.** Як відомо, цей метод заснований на ряді припущень.

1. Всі навантаження приймаються квазістатичними, тому явища динаміки і втоми стали не враховуються.

2. Матеріал конструкцій вважається ідеально пружно-пластичним, працюючим відповідно до діаграми Прандтля; дане припущення досить близько відповідає характеру роботи пластичних сталей, при цьому стадія самозміцнення стали йде в запас несучої здатності конструкцій.

3. Складання рівнянь рівноваги базується на недеформованій схемі, що цілком припустимо для системи з переважно зігнутих елементів.

4. Поширення пластичності за довжиною елементів не враховується, шарніри пластичності розташовуються в небезпечних (найбільш завантажених) перерізах системи; дане припущення добре узгоджується з реальною роботою суцільних сталевих конструкцій з елементами двотаврового перерізу, близького до ідеального перерізу при згині.

5. Дія поздовжніх і поперечних сил не враховується при руйнуванні пружно-пластичних систем.



6. Несуча здатність системи визначається за критерієм міцності, без урахування можливої втрати стійкості, що вимагає в необхідних випадках виконувати перевірку конструкцій додатково на стійкість.

7. Метод граничної рівноваги дає безпосередньо несучу здатність системи, минаючи проміжні стадії її роботи під навантаженням.

У світлі вищевикладеного, метод граничної рівноваги можливо успішно застосовувати, зокрема, до сталевих конструктивних систем з переважанням згину (балки, рами) з елементами, забезпеченими від втрати стійкості. Цей метод найкоротшим шляхом дає несучу здатність системи, пов'язану з імовірністю відмови, і будучи порівняно простим і по своїй аналітичній природі лінійним, дозволяє побудувати імовірнісну версію (ІМГР) для випадкових навантажень і міцності.

У практичному імовірнісному розрахунку складних систем, зокрема статично невизначених рам, в максимальній мірі застосовуються відпрацьовані процедури і алгоритми детерміністичного розрахунку пружно-пластичних систем. Обмежимося розглядом одноразового пропорційного завантаження рам. Для нього в детерміністичній постановці методом граничної рівноваги знаходиться так званий *істинний*, або *дійсний механізм руйнування рами*, що відповідає максимуму параметра граничного навантаження, якщо перерізи рами задані, або максимуму параметра граничного моменту, якщо задані зовнішні навантаження. Насправді, для реальних сталевих рам з випадковими параметрами міцності і завантаження стають можливими різні механізми. Проте істинний механізм представляє для нас особливий інтерес, оскільки будучи найбільш вірогідним, він дає нижню оцінку ймовірності відмови системи, у ряді реальних випадків практично співпадаючи з  $Q_c$  (див. нижче).

**6.4.2. Метод комбінованих механізмів.** Повну оцінку ймовірності відмови статично невизначеної системи дає варіант ІМГР, заснований на методі комбінованих механізмів, який реалізує умови кінематичної теореми.

Запишемо функцію резерву несучої здатності для  $j$ -го кінематично достатнього механізму руйнування системи (надалі званого просто механізмом):

$$\tilde{Z}_j = \tilde{R}_j - \tilde{S}_j = \sum_{\nu=1}^{k+1} \mu_{\nu} \tilde{M}_0^T \Theta_{\nu j} - \sum_1^{\eta} \tilde{q}_{\eta} u_{\eta j}, \quad (6.49)$$

де  $\Theta_{\nu j}$  - можливий поворот (деформація) в  $j$ -му шарнірі пластичності, що входить в  $i$ -й механізм;  $u_{\eta j}$  - можливе переміщення в місці прикладення  $\eta$ -го навантаження в  $j$ -му механізмі.

Логічна умова відмови системи по  $j$ -му механізму запишеться тепер у вигляді

$$X'_j = (\tilde{Z}_j < 0). \quad (6.50)$$

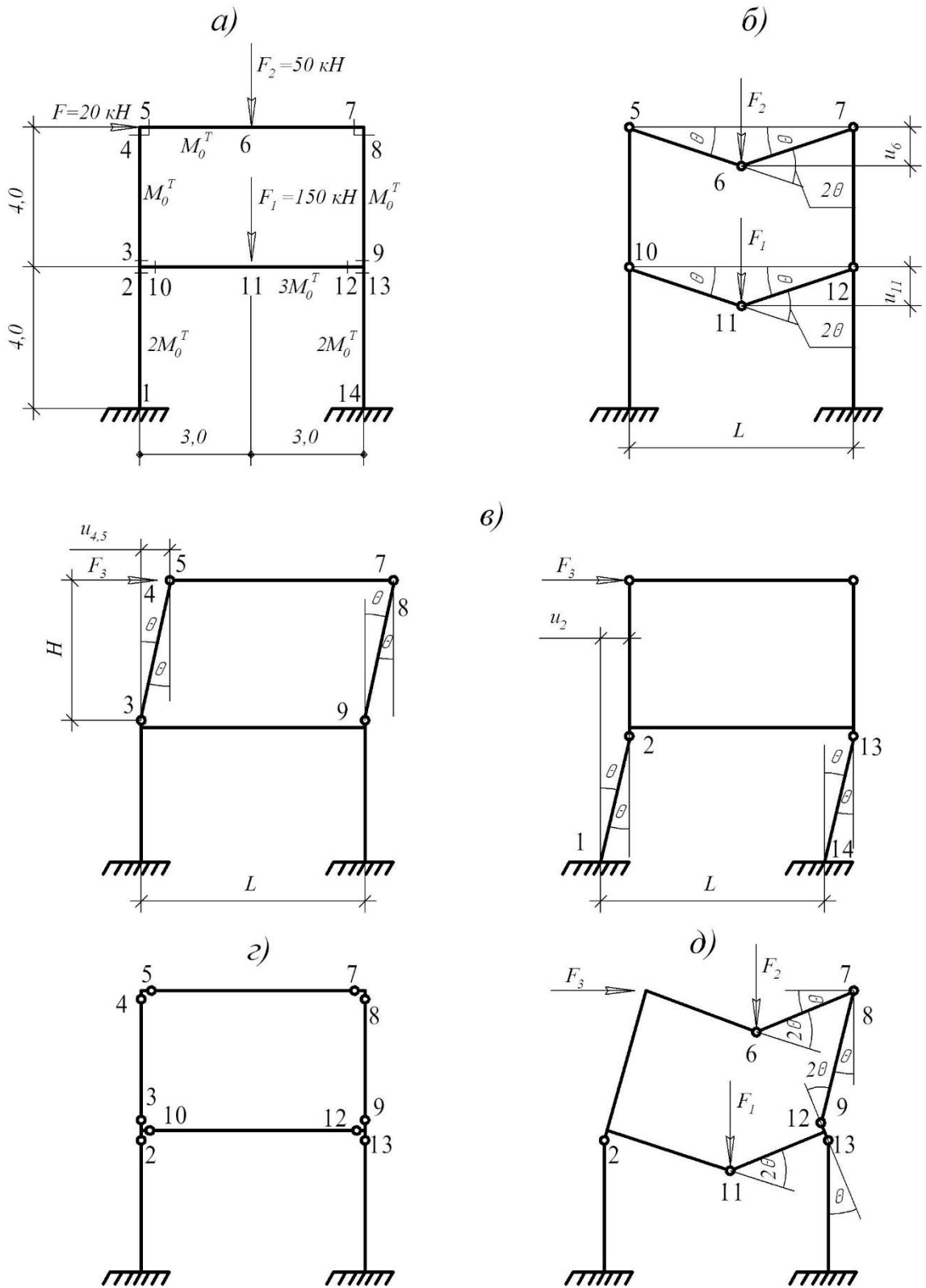
Сумісне врахування подій  $X'_j$  повинно виконуватися за допомогою їхньої диз'юнкції.

Для умов перевірного розрахунку рам із заданими геометричними розмірами, перерізами елементів, напрямками і місцями прикладання навантажень спочатку складають умови (6.49) для основних механізмів (розглянемо для прикладу раму на *рис. 6.12*):

а) балочних (*рис. 6.12, б*), наприклад, для верхнього ригеля, завантаженого зосередженої силою:

$$Z_{\delta} = -M_5 + 2 \cdot M_6 + M_7 - F_2 \cdot \frac{L}{2}.$$

При дії розподіленого навантаження вантажний член записується у вигляді  $qL^2/4$ ;



**Рис. 6.12.** До розрахунку рами методом комбінованих механізмів:  
 а – розрахункова схема; механізми: б – балочні, в – поверхові,  
 г – вузлові; д – істинний механізм руйнування

б) *поверхових* (зсувних, панельних) (рис. 6.12, в), наприклад, для нижнього поверху:

$$Z_z = -M_1 - M_2 - M_{13} - M_{14} - F_3 \cdot H ;$$

в) *вузлових* (рис. 6.12, г):

$$Z_y = M_4 + M_5 ; Z_x = M_2 + M_3 + M_{10}.$$

Кількість незалежних (основних) механізмів дорівнює  $m = n - K$ , де  $n$  – кількість небезпечних перерізів,  $K$  – ступінь статичної невизначеності; для наведеної на рис.6.12,а двоповерхової рами  $m = 14 - 6 = 8$ , всі незалежні механізми показані на рис. 6.12, б, в, г.

Як відомо з розрахунків відповідно до теорії граничної рівноваги, при складанні комбінованих механізмів необхідно прагнути на кожному етапі до поглинання шарнірів пластичності. Це призводить до підвищення параметра граничного моменту  $M_0^T$ , а в стохастичному варіанті – до підвищення ймовірності відмови за даним механізмом.

Внаслідок лінійності виразу (6.49), можна легко записати для числових характеристик  $\tilde{Z}_j$ :

$$\bar{Z}_j = \sum_1^v \mu_v \cdot \Theta_{vj} \cdot \bar{M}_0^T - \sum_1^\eta u_{\eta j} \cdot \bar{F}_\eta, \quad (6.51)$$

$$\hat{Z}_j = \sqrt{\sum_1^v (\mu_v \Theta_{vj} \hat{M}_0^T)^2 + \sum_1^\eta (u_{\eta j} \hat{F}_\eta)^2}. \quad (6.52)$$

Визначаємо потім характеристику безпеки  $\beta = Z/\hat{Z}$ , при нормальному розподілі навантаження і міцності достатню для отримання імовірності відмови системи.  $Q_j$

Випадкові механізми, що визначають імовірність відмови системи, можуть спричинятися тими самими навантаженнями і

мати загальні шарніри пластичності, внаслідок чого між ними є кореляційний зв'язок, оцінюваний коефіцієнтом кореляції

$$r_{jk} = \frac{\sum_1^v \Theta_{vk} \cdot \Theta_{vj} (\mu_v \hat{M}_0^T)^2 - \sum_1^{\eta} u_{\eta j} u_{\eta k} \hat{F}_{\eta}^2}{\hat{Z}_j \cdot \hat{Z}_k},$$

де  $j$  та  $k$  - індекси розглянутих механізмів.

При цьому при значенні коефіцієнту кореляції  $r \geq 0,7$  механізми руйнування вважаються повністю корельованими (співпадаючими); при значенні  $r < 0,7$  вважаються незалежними.

**6.4.3. Оцінка надійності сталевих рам.** За допомогою спеціально розробленої програми, блок-схема якої наведена на *рис. 6.13*, яка реалізує імовірнісний метод граничної рівноваги, були виконані розрахунки ряду сталевих рам виробничого призначення з числом поверхів від 1 до 3, одно- і двопролітних [7]. В процесі розрахунку відкидалися статично неприпустимі (надлишкові) механізми, а також комбіновані механізми, що мають імовірності відмови менші, ніж для основних механізмів і чим задана мінімальна величина  $Q_{zp}$ , неврахування якої не впливає на точність оцінки  $Q_k$ . Досвід розрахунків показав, що із загального числа можливих комбінованих механізмів виділяється порівняно невелика кількість механізмів, що відповідають локальним мінімумам характеристики безпеки  $\beta_j$  і підвищеним ймовірностям відмови  $Q_j$ . Такі механізми прийнято називати *головними*.

Усі аргументи імовірнісного розрахунку (міцність, навантаження), і, отже, результуючий резерв несучої здатності рами, приймалися нормальними. Це обґрунтовується тим, що міцність стали, постійні і кранові навантаження добре описуються нормальним розподілом, а розподіли композиції і різниці навантажень і міцності, як показано в 3-ій главі, швидко нормалізуються. Крім того, недостатній рівень вивчення корисних і технологічних навантажень не дозволяє описувати їх інакше, ніж загальнозживаним нормальним гауссовським.



**Рис. 6.13. Блок-схема розрахунку рам імовірнісним методом комбінованих механізмів**

законом з апріорними параметрами. У розрахунках рам не враховувалися частотні (тимчасові) характеристики навантажень, які розглядалися як випадкові величини. Таке спрощення є допустимим внаслідок порівняно невеликої різниці частотних параметрів резерву несучої здатності різних елементів і механізмів руйнування рам (це підтверджується також практичними розрахунками ступінчастих колон у 5-му розділі). Крім того, розрахунки виконувалися не з метою отримання більш точної оцінки надійності рам, а для порівняльного аналізу впливу їх структури і інших чинників на імовірнісні показники конструкцій.

Для прикладу на *рис. 6.14* і в *табл. 6.1* наводяться дані розрахунку за допомогою ІМГР двоповерхової рами з жорсткими вузлами, розглянутої вище (*рис. 6.12*). З 4-х основних механізмів (2 балочних і 2 зсувних, не враховуючи вузлових – *рис. 6.14, б, в*) було складено 17 комбінованих механізмів, з яких найбільшу ймовірність відмови дає 8-й механізм, що являється, як показано вище на *рис. 6.14, д*, істинним механізмом руйнування рами при детерміністичній постановці завдання. Крім того, виділяються підвищеною ймовірністю відмови головні механізми №№ 2,3,9,16 і 17.

На *рис. 6.15* наведені результати імовірнісного розрахунку двопролітної двоповерхової рами із завантаженими перекриттями і горизонтальними навантаженнями в рівні ригелів. З 12 основних механізмів в процесі комп'ютерного розрахунку було складено 60 комбінованих механізмів, з яких 16 головних механізмів наведені в *табл. 6.2*, а 5 найбільш імовірних механізмів показані на *рис. 6.15*. Істинний механізм №6 є частковим і включає механізм зсуву верхнього поверху і балочний механізм одного з верхніх ригелів.

Інтервал інтегральних оцінок надійності рам для усіх розглянутих варіантів вийшов досить вузьким (*табл. 6.1, 6.2*), так що характеристики безпеки, що відповідають їм, відрізняються не більше, ніж на 0,10 – 0,20. Це підтверджує можливість використання нижньої межі оцінки, що базується на істинному (найбільш імовірному) механізмі руйнування, для обґрунтування коефіцієнта  $\gamma_s$  (див. нижче *табл. 6.3*).

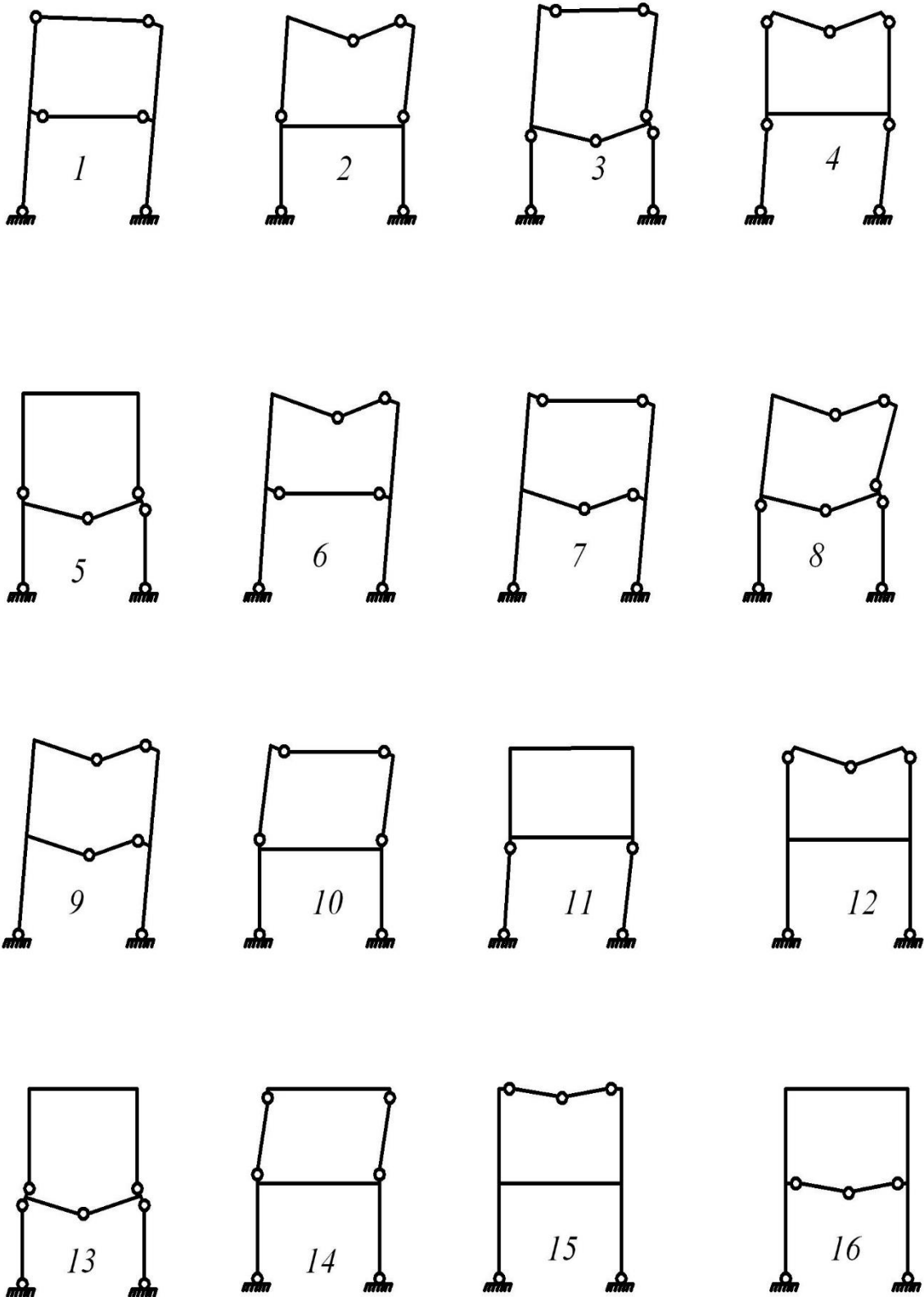


Рис. 6.14. Можливі механізми руйнування двоповерхової рами (схема рис. 6.12)

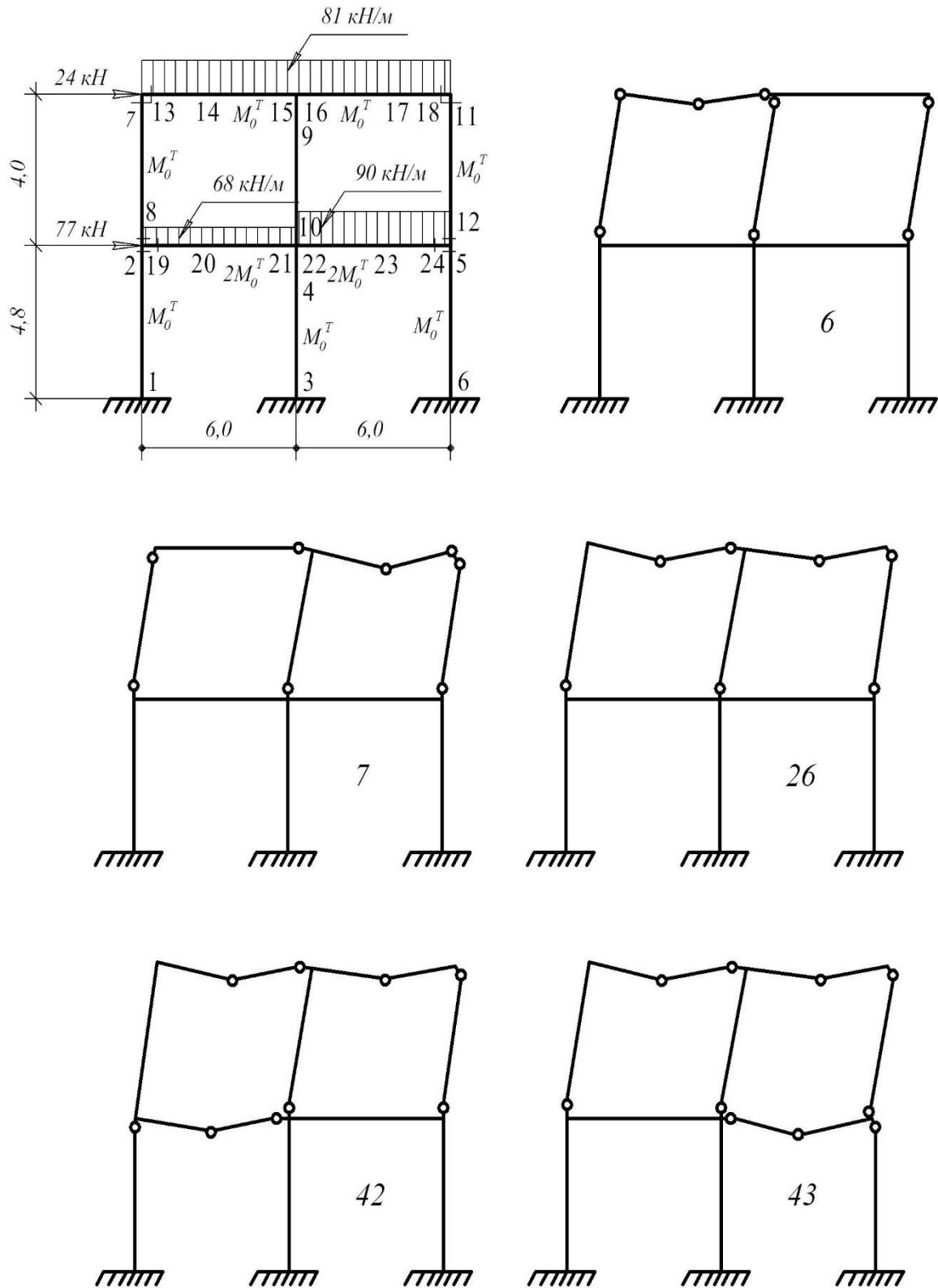


Таблиця 6.1

## Розрахунок двоповерхової рами ІМГР

<i>Меха- нізм</i>	<i>Хар-ка безпеки <math>\beta_j</math></i>	<i>Імовірність відмови <math>Q_j</math></i>	<i>Меха- нізм</i>	<i>Хар-ка безпеки <math>\beta_j</math></i>	<i>Імовірність відмови <math>Q_j</math></i>
1	7,1074	$5,923 \cdot 10^{-13}$	9	2,272	$1,079 \cdot 10^{-2}$
2	2,2256	$1,204 \cdot 10^{-2}$	10	5,547	$1,457 \cdot 10^{-8}$
3	2,2921	$1,029 \cdot 10^{-2}$	11	7,906	$1,336 \cdot 10^{-15}$
4	5,7350	$4,888 \cdot 10^{-9}$	12	2,343	$9,078 \cdot 10^{-3}$
5	3,0068	$1,312 \cdot 10^{-3}$	13	2,343	$9,078 \cdot 10^{-3}$
6	5,077	$1,927 \cdot 10^{-7}$	14	5,547	$1,457 \cdot 10^{-8}$
7	2,885	$1,941 \cdot 10^{-3}$	15	2,343	$9,078 \cdot 10^{-3}$
8	1,682	$2,074 \cdot 10^{-2}$	17	2,343	$9,078 \cdot 10^{-3}$
<b>Оцінки надійності рами в цілому</b> $2,072 \cdot 10^{-2} \leq Q_k \leq 9,342 \cdot 10^{-2}$ $0,9793 \geq P_k \geq 0,9103$					
<b>Примітки до таблиці</b> 1. Схеми рами і основних механізмів наведені на рис. 6.12. 2. Схеми і нумерація комбінованих механізмів наведені на рис. 6.14					

Виконані розрахунки рам, що мають реальні або близькі до реальних геометричні і навантаження параметри, дозволили зробити деякі загальні висновки. При типовій схемі завантаження багатоповерхових рам виробничих і громадських будівель, коли навантаження на перекриття (технологічні, експлуатаційні) значно перевищують горизонтальні (вітрові), найбільш вірогідні схеми руйнування визначаються балочними або близькими до них механізмами. Вказана тенденція посилюється зі збільшенням потужності і поверховості рам.



**Рис. 6.15. Розрахункова схема і головні механізми руйнування двопролітньої рами (цифри – № механізмів)**

Таблиця 6.2

## Розрахунок двопролітної двоповерхової рами

№ мех-му	Формула механізму руйнування	Хар-ка безпеки $\beta_j$	Імовірність відмови $Q_j$
6*	-8,-9,-10,-11,-12,14 <sup>2</sup> ,15	4,200	$1,337 \cdot 10^{-5}$
7*	-7,-8,-10,-11 <sup>2</sup> , -12,15,17 <sup>2</sup>	4,640	$1,744 \cdot 10^{-6}$
10	7,-11,14 <sup>2</sup> ,15,-16,17 <sup>2</sup>	5,263	$7,116 \cdot 10^{-8}$
26*	-8,-10,-11 <sup>2</sup> , -12,14 <sup>2</sup> ,15 <sup>2</sup> ,17 <sup>2</sup>	4,310	$8,182 \cdot 10^{-6}$
27	2,-9,-10,-11,-12,14 <sup>2</sup> ,15,20 <sup>2</sup> ,21	5,372	$3,894 \cdot 10^{-8}$
28	-5,-8,-9,-10,-11,-12 <sup>2</sup> ,14,15 <sup>2</sup> ,22,23	5,384	$3,662 \cdot 10^{-8}$
29	2,-7,-10,-11 <sup>2</sup> , -12,15,17 <sup>2</sup> ,20 <sup>2</sup> ,21	5,593	$1,119 \cdot 10^{-8}$
30	-5,-7,-8,-10,-11 <sup>2</sup> , -12 <sup>2</sup> ,15,17 <sup>2</sup> ,22,23 <sup>2</sup>	5,584	$1,175 \cdot 10^{-8}$
36	-1,-2,-3,-4,-5,-6,-8,-10,-11 <sup>2</sup> , -12,14 <sup>2</sup> ,15 <sup>2</sup> ,17 <sup>2</sup>	5,318	$5,255 \cdot 10^{-8}$
42*	2,-10,-11 <sup>2</sup> , -12,14 <sup>2</sup> ,15 <sup>2</sup> ,17 <sup>2</sup> ,20 <sup>2</sup> ,21	5,168	$1,186 \cdot 10^{-7}$
43*	-5,-8,-10,-11 <sup>2</sup> , -12 <sup>2</sup> ,14 <sup>2</sup> ,15 <sup>2</sup> ,17 <sup>2</sup> , -22,23 <sup>2</sup>	5,191	$1,048 \cdot 10^{-7}$
46	-1,-3,-4,-5,-6,-10,-11 <sup>2</sup> , -12,14 <sup>2</sup> ,15 <sup>2</sup> ,17 <sup>2</sup> ,20 <sup>2</sup> ,21 <sup>2</sup>	5,481	$2,117 \cdot 10^{-8}$
47	-1,-2,-4,-5 <sup>2</sup> , -6,-8,-11 <sup>2</sup> , -12 <sup>2</sup> ,14 <sup>2</sup> ,15 <sup>2</sup> ,17 <sup>2</sup> ,21,23 <sup>2</sup>	5,482	$2,107 \cdot 10^{-8}$
50	2,-5,-10,-11 <sup>2</sup> , -12 <sup>2</sup> ,14 <sup>2</sup> ,15 <sup>2</sup> ,17 <sup>2</sup> ,20 <sup>2</sup> ,21,-22,23 <sup>2</sup>	5,606	$1,036 \cdot 10^{-8}$
51	-1,-4,-5,-6,-11 <sup>2</sup> , -12 <sup>2</sup> ,14 <sup>2</sup> ,15 <sup>2</sup> ,17 <sup>2</sup> ,20 <sup>2</sup> ,21 <sup>2</sup> ,23 <sup>2</sup>	5,579	$1,210 \cdot 10^{-8}$
52	-7,-8,-9,-10,-11,-12	4,767	$9,370 \cdot 10^{-7}$

**Оцінка надійності рами в цілому**

$$1,337 \cdot 10^{-5} \leq Q_k \leq 2,493 \cdot 10^{-5};$$

$$0,999987 \geq P_k \geq 0,999975$$

**Примітки до таблиці**

1. Схема рами і найбільш імовірні головні механізми (відмічені\*) показані на рис. 6.15.

2. Формула механізму включає номери перерізів, де виникають шарніри пластичності, знак показує напрям моменту, показник – подвоєний кут повороту в перерізі.

3. Всього в розрахунку враховано 60 механізмів.

**6.4.4. Обґрунтування коефіцієнту  $\gamma_s$ .** На основі проведених на базі ІМГР досліджень надійності статично невизначних сталевих балок і рам обґрунтована можливість введення в їх розрахунок коефіцієнта  $\gamma_s$ , що являється по суті коефіцієнтом, який зважає на специфіку роботи і характер руйнування СНС і може бути названим «коефіцієнтом схемної надійності».

Цей коефіцієнт визначається з умови рівнонадійності окремих елементів і СНС в цілому:

$$\gamma_s = \frac{M_0^T(1)}{M_0^T(S_j)}, \quad (6.53)$$

де  $M_0^T(1)$  – параметр граничного моменту системи, працюючої до 1 відмови;  $M_0^T(S_j)$  – параметр граничного моменту СНС, характер руйнування якої відповідає загальному механізму. Параметри формули (6.53) визначаються з умови рівності імовірності відмови для обох моделей руйнування СНС  $Q(1) = Q(S_j)$ .

Найменшим був отриманий коефіцієнт  $\gamma_s = 1,14$  для Г-подібної рами, що руйнується по частковому механізму при утворенні 2-х шарнірів пластичності. Для балок із затисненими кінцями, що руйнуються після утворення 3-х шарнірів пластичності,  $\gamma_s$  збільшується до 1,19 – 1,25, причому виявлений певний вплив схеми завантаження балки. Ці варіанти визначають можливі випадки характерного для багатоповерхових рам часткового руйнування у вигляді балочного механізму.

Зі збільшенням ступеню статичної невизначеності рам, якщо реалізуються повні схеми руйнування з великою кількістю шарнірів пластичності, коефіцієнт  $\gamma_s$  збільшується з 1,27 для П-подібної рами до 1,35 для триповерхової 9-разів статично невизначеної рами. При цьому в разі реалізації часткового механізму руйнування збільшення міри статичної невизначеності не призводить до зростання  $\gamma_s$ : так, для 12-разів статично

невизначеної рами  $\gamma_s = 1,30$ , тоді як для 9-разів статично невизначеної рами  $\gamma_s = 1,35$ .

Коефіцієнт  $\gamma_s$ , аналогічний коефіцієнту умов роботи діючих норм, рекомендовано приймати у межах 1,18 – 1,27 (табл. 6.3), він призначений для використання у розрахунках несучої здатності перерізів елементів СНС з урахуванням пластичної стадії роботи.

Таблиця 6.3

**Розрахункові значення коефіцієнту схемної надійності  $\gamma_s$  для статично невизначених рам**

	<i>1 поверх</i>	<i>2 поверхи</i>	<i>3 поверхи</i>
<i>1 проліт</i>	<i>1,18</i>	<i>1,21</i>	<i>1,21</i>
<i>2 прольоти</i>	<i>1,19</i>	<i>1,26 – 1,27</i>	
<i>3 прольоти</i>	<i>1,24</i>		

### Література до 6 розділу

1. Пічугін С.Ф. Розрахунок надійності будівельних конструкцій / С.Ф. Пічугін. – Полтава: ТОВ «АСМІ», 2016 – 520 с.
2. Пичугин С.Ф. Оценка надежности статически неопределимых конструкций / С.Ф. Пичугин, В.А. Пашинский // Вопросы надежности железобетонных конструкций. - Куйбышев, 1977. – С.72 – 76.
3. Нил Б.Г. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов / Б.Г. Нил / Пер. с англ. – М.: Госстройиздат, 1961. – 315 с.
4. Рябинин И.А. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем / И.А. Рябинин, Г.Н. Черкесов. – М.: Радио и связь, 1981. – 264 с.
5. Надежность технических систем: Справочник / Под редакцией И.А.Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 320 с.
6. Аугусти Г. Вероятностные методы в строительном проектировании / Г. Аугусти, А. Баратта., Ф. Кашиати / Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1988. – 584 с.
7. Пичугин С.Ф. Оценка надежности стальных рам на основе метода предельного равновесия / С.Ф. Пичугин, В.П. Чичулин // Эффективные стр. материалы и конструкции, используемые при возведении зданий и сооружений: Сб. научн. трудов. – К.: УМК ВО, 1992. – С. 84 – 90.

**ПІЧУГІН СЕРГІЙ ФЕДОРОВИЧ**  
**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ НАДІЙНОСТІ**  
**В БУДІВНИЦТВІ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК  
(теоретична частина курсу)

*мова: українська*

---

Комп'ютерна верстка С.Ф. Пічугін  
У авторській редакції.

Підп. до друку 20.06.2023 р. Формат 60×84 1/16

Папір офсет. Друк ризограф.

Ум.-друк. арк. – 14,76. Тираж 100 прим. Зам. № 96.

---

Видавець і виготовлювач –  
поліграфцентр Національного університету  
«Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»  
36011, м. Полтава, Першотравневий проспект, 24  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції  
Серія ДК № 7019 від 19.12.2019 р.